

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**MODELADO DE LA PRECESIÓN EN LA ÓRBITA DE MERCURIO CON  
MATLAB TOMANDO LA TEORÍA NEWTONIANA Y RELATIVISTA.**

**TESIS**

**PRESENTADA POR**

**Alex Rossi Quispe Rodriguez**

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:**

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**PUNO - PERÚ**

2019

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA  
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**MODELADO DE LA PRECESIÓN EN LA ÓRBITA DE MERCURIO CON MATLAB,  
TOMANDO LA TEORÍA NEWTONIANA Y RELATIVISTA.**

**TESIS PRESENTADA POR:**

**Bach. ALEX ROSSI QUISPE RODRIGUEZ**

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:**

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**APROBADO POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:**

**PRESIDENTE:**

M.Sc. Ricardo Romero Loaiza

**PRIMER MIEMBRO:**

Lic. Julio Pedro Quispe Aymachoque

**SEGUNDO MIEMBRO:**

M.Sc. Enma Maura Bonifaz Velazco

**DIRECTOR/ASESOR:**

M.Sc. Martín Condori Concha

**Tema:** Relatividad

**Área:** Física Teórica

**Línea de Investigación:** Física Teórica

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 22 DE NOVIEMBRE DEL 2019

©2019 - *QUISPE RODRIGUEZ, Alex Rossi*

*Todos los derechos reservados por el autor*

*Email: alexrossiquisperodriguez@gmail.com*

**DEDICATORIA**

*A MI PADRE ...*

*por su invaluable apoyo*

*ternura y cariño que*

*siempre me a ofrecido.*

*A MI MADRE ...*

*por haberme dado la vida*

*que es el tesoro mas preciado*

*del mundo.*

Alex Rossi Quispe Rodriguez

## AGRADECIMIENTOS

*En primera instancia agradezco a mis formadores, personas de gran sabiduría quienes se han esforzado por ayudarme a llegar al punto en el que me encuentro.*

*Sencillo no ha sido el proceso, pero gracias a las ganas de transmitirme sus conocimientos y dedicación que los ha regido, he logrado importantes objetivos como culminar el desarrollo de mi tesis con éxito y obtener una afable titulación profesional.*

*En particular agradecer a mi asesor de Tesis: Condori Concha, Martin por haberme guiado en la parte teórica de este trabajo.*

*A mis profesores de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas.*

*A todos los decentes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas por su orientación durante mi vida universitaria .*

*A la Universidad Nacional del Altiplano, del cual siempre me sentiré orgulloso de ser parte.*

*Y final y muy especialmente, a mis padres; Janet Rodriguez Olazabal, Lut Eugenio Naira Quispe y familiares.*

## Índice general

<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	<b>14</b>
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA . . . . .	14
1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA . . . . .	15
1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .	15
1.3.1. HIPÓTESIS GENERAL . . . . .	15
1.3.2. HIPÓTESIS ESPECÍFICOS . . . . .	15
1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO . . . . .	16
1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .	16
1.5.1. OBJETIVO GENERAL . . . . .	16
1.5.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS . . . . .	16
<b>II. REVISIÓN DE LITERATURA</b>	<b>17</b>
2.1. MARCO TEÓRICO . . . . .	17
2.1.1. TRASFORMACIÓN DE COORDENADAS . . . . .	17
2.1.2. TENSORES . . . . .	35
2.1.3. GEODÉSICAS . . . . .	42
2.1.4. CONEXIÓN . . . . .	44
2.1.5. TEORÍA GRAVITATORIA DE NEWTON . . . . .	45
2.1.6. TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD . . . . .	53
2.1.7. MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD . . . . .	57
2.2. MARCO CONCEPTUAL . . . . .	62
<b>III. MATERIALES Y MÉTODO</b>	<b>66</b>
3.1. UBICACIÓN GEOGRÁFICA DEL ESTUDIO . . . . .	66
3.2. PERIODO DE DURACIÓN DEL ESTUDIO . . . . .	66
3.3. PROCEDENCIA DEL MATERIAL UTILIZADO . . . . .	66
3.4. POBLACIÓN Y MUESTRA DEL ESTUDIO . . . . .	67
3.5. PROCEDIMIENTO Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS . . . . .	67
3.5.1. FORMULACIÓN NEWTONIANA . . . . .	67
3.5.2. FORMULACIÓN RELATIVISTA . . . . .	70
3.5.3. PRECESIÓN . . . . .	76

3.5.4. MATLAB . . . . .	77
3.6. VARIABLES . . . . .	81
3.6.1. VARIABLE INDEPENDIENTE . . . . .	81
3.6.2. VARIABLE DEPENDIENTE . . . . .	81
<b>IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	<b>82</b>
4.1. ECUACIONES . . . . .	84
4.2. GRÁFICAS . . . . .	87
<b>V. CONCLUSIONES</b>	<b>95</b>
<b>VI. RECOMENDACIONES</b>	<b>96</b>
<b>VII. BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>96</b>
<b>A. MODELADO DE LA ÓRBITA NEWTONIANA</b>	<b>98</b>
1.1. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES . . . . .	98
1.2. ÓRBITA NEWTON . . . . .	98
1.3. COMPROBATORIO . . . . .	98
1.4. SIMULADO . . . . .	99
<b>B. MERCURIO</b>	<b>101</b>
<b>C. MESSENGER</b>	<b>103</b>
<b>D. EUROPA Y JAPÓN LANZA AMBICIOSA MISIÓN HACIA MERCURIO</b>	<b>105</b>

## Índice de cuadros

2.1. Lista de las publicaciones de Albert Einstein en ingles . . . . .	56
2.2. Lista de las publicaciones de Albert Einstein en español . . . . .	56
2.3. Datos importantes en la relatividad sobre agujeros negros . . . . .	56
3.1. Primer Código en MATLAB . . . . .	78
3.2. Segundo Código en MATLAB . . . . .	79
3.3. Segundo Código en MATLAB . . . . .	80
3.4. Segundo Código en MATLAB . . . . .	81
4.1. Comparación del resultados de la precesión en arcos de segundo por siglo . . . . .	87

## Índice de figuras

2.1. Diagrama de un vector $\vec{v}$ con norma o distancia igual a $v$ . . . . .	17
2.2. Representación gráfica del teorema de cosenos y suma de vectores. . . . .	18
2.3. Representación del cambio que se a de realizar al ángulo $\theta$ por una resta de otros dos ángulos. . . . .	19
2.4. Representación del plano cartesiano. . . . .	24
2.5. Representación de un sistema de coordenadas distinto al cartesiano . . . . .	24
2.6. Representación de un cambio de coordenadas; de las cartesianas a alguna otra cualquier sistema de coordenadas $e_1, e_2$ en donde se observa que la nueva base varia en cada punto del espacio según estas nuevas coordenadas y que con las nuevas coordenadas y la base obtenida no cumple en algunos lugares del espacio. . . . .	29
2.7. Visualización de las cartas locales en el plano de nuevas coordenadas. . . . .	29
2.8. Representación de la elipse en coordenadas cartesianas . . . . .	30
2.9. Representación de la elipse en coordenadas polares . . . . .	32
2.10. Imagen de la mínima distancia en una métrica euclidiana. . . . .	42
2.11. Representación de la conexión . . . . .	44
2.12. Representación de los vectores unitarios . . . . .	47
2.13. Representación gráfica de la primera ley de Kepler . . . . .	49
2.14. Representación gráfica de la segunda ley de Kepler . . . . .	51
2.15. Representación gráfica de la tercera ley de Kepler . . . . .	52
2.16. Espacio-Tiempo de Minkowski . . . . .	54
2.17. Retrato de Karl Schwarzschild . . . . .	57
2.18. Diagramas de las órbitas de los planetas en general . . . . .	62
3.1. Periodo de realización de tesis . . . . .	66
3.2. Representación de una precesión orbital . . . . .	76
3.3. Primera captura del programa con datos simples . . . . .	78
3.4. Segunda captura del programa con datos simples . . . . .	79
4.1. Representación de una órbita con sus principales elementos para la mejor comprensión . . . . .	82
4.2. Representación del potencial gravitatorio y su órbita . . . . .	88

4.3. Comparación de Potenciales Gravitatorios, imagen uno . . . . .	88
4.4. Comparación de Potenciales Gravitatorios, imagen dos . . . . .	89
4.5. Gráfica del potencial de Newton para Mercurio . . . . .	89
4.6. Trayectoria de Mercurio según Newton . . . . .	90
4.7. Gráfica del potencial de Einstein para Mercurio . . . . .	90
4.8. Trayectoria de Mercurio según Newton . . . . .	91
4.9. interfaz completa para todo el análisis . . . . .	92
4.10. interfaz completa para todo el análisis . . . . .	93
1.1. Gráfica de la ecuación $f(\theta, t)$ . . . . .	99
1.2. Rectángulo propuesto . . . . .	99
1.3. Gráfica de la derivada de la función con respecto a theta $\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, t)$ . . . . .	99
2.1. Primeras imágenes . . . . .	102
2.2. Segundas imágenes . . . . .	102
3.1. Representación artística de la sonda MESSENGER en órbita de Mercurio . . . . .	103
3.2. Trayectoria del MESSENGER. . . . .	104
4.1. La nave BepiColombo iniciará mañana su largo periplo hasta Mercurio (La Vanguardia) . . . . .	105
4.2. ESA-CNES-Arianespace . . . . .	106

## Indice De Acrónimos

<b>RE:</b>	<b>Relatividad Especial</b>
<b>RG:</b>	<b>Relatividad General</b>
<b>TR:</b>	<b>Teoría relativista</b>
<b>TN:</b>	<b>Teoría Newtoniana</b>
<b>LK:</b>	<b>Leyes de Kepler</b>
<b>PN:</b>	<b>Potencial Newtoniano</b>
<b>PR:</b>	<b>Potencial Relativista</b>
<b>MS:</b>	<b>Métrica de Scgwarzschild</b>
<b>EBN:</b>	<b>Ecuación de Binet Newtoniano</b>
<b>EBR:</b>	<b>Ecuación de Binet Relativista</b>
<b>EDN:</b>	<b>Ecuación diferencial de Newton</b>
<b>EDR:</b>	<b>Ecuación diferencial Relativista</b>
<b>SI:</b>	<b>Sistema Internacional</b>
<b>AU:</b>	<b>Unidades Astronómicas</b>

## RESUMEN

En el presente trabajo de investigación se expone como objetivo general Modelar la precesión de la órbita de mercurio con Matlab, tomando la teoría Newtoniana y relativista. Para dar un estudio completo primeramente se detalla algunas cuestiones matemáticas muy necesarias, tales como: Transformación de Coordenadas, la métrica, ecuación de la elipse tanto en cartesianas como en polares, así también de los tensores, las geodésicas los cuales son los caminos mas cortos sea en cualquier geometría. Teniendo estos temas claros pasamos a obtener las gráficas del potencial gravitatorio, la trayectoria y mostrar la precesión del planeta Mercurio tomando la teoría Newtoniana y Relativista. Para el calculo de los potenciales gravitatorios y la órbita que a de seguir Mercurio, se usa las leyes de kepler y la métrica de Schwarzschild, En el caso del calculo de la precesión, según Newton no presenta tal precesión. Según la teoría de Einstin y esta investigación de nos da 43.0058 segundos de arco por siglo, este resultado no esta alejado a la precesión observada experimentalmente que es de  $43.1 \pm 1$ . Finalmente en la investigación llegamos a dar un programa en Matlab que en tal programa se inserto todo los datos requeridos del planeta mercurio, tales como son: Momento angular, masa, excentricidad, distancias mas corta y mas alejada del sol. Las gráficas muestran la clara desviación de la precesión del perihelio en la órbita de mercurio, dando así la solución a la precesión observada con la teoría de Einstein y siendo modelado en Matlab.

**Palabras claves**— Modelación, Teoría Newtoniana, Teoría relativista, órbita de Mercurio, Matlab, precesión.

## ABSTRACT

In this research work, the general objective is to model the precession of the orbit of mercury with Matlab, taking Newtonian and relativistic theory. To give a complete study, some very necessary mathematical questions are detailed, such as: Coordinate transformation, metrics, ellipse equation in both Cartesian and polar, as well as tensors, geodesics which are the shortest paths in any geometry. Having these clear issues we will obtain the graphs of the gravitational potential, the trajectory and show the presentation of the planet Mercury taking the Newtonian and Relativistic theory. For the calculation of gravitational potentials and the orbit to be followed by Mercury, the laws of Kepler and Schwarzschild's metric are used. In the case of the calculation of precession, according to Newton, it does not present such a precession. According to Einstein's theory and this investigation gives us 43.0058 arc seconds per century, this result is not far from the experimentally observed precession that is  $43.1 \pm 1$ . Finally in the investigation we came to give a program in Matlab that in such a program was inserted for all the required data of the planet mercury, stories such as: Angular momentum, mass, eccentricity, distances Shorter and further from the sun. The detailed graphics show the clear deviation of the perihelion precession in the orbit of mercury, thus giving the solution to the precession observed with Einstein's theory and being modeled in Matlab.

**Keywords**— Modeling, Newtonian theory, relativistic theory, orbit of Mercury, Matlab, precession.

# Capítulo I

## I. INTRODUCCIÓN

### 1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El estudio de Órbitas planetarias a servido para tener una mejor comprensión del universo que nos rodea, logramos sobrevolar satélites e incluso llegar a la luna en la misión del Apolo del año de 1969. Pero aun con todo estos logros se presento un problema en 1850 que involucraba a la órbita del planeta mercurio, este cuerpo experimentaba una precesión en su órbita, la teoría Newtoniana conjuntamente con las leyes de Kepler nos dan la certeza de que los planetas se rigen a movimientos elípticos pero este planeta se desviaba unos cuantos cientos de centímetros de una órbita elíptica, por lo que se tubo la necesidad de tener una nueva teoría que pudiese explicar esta anomalía en la órbita de mercurio, primeramente se planteo la existencia de un planeta cercano al sol entre mercurio y el sol, nombrado como Vulcano, el cual era responsable de la precesión vista experimentalmente, pero para que esta idea fuera cierta se tenia que tomar en cuenta que este planeta fuera muy grande lo cual no coincidía con las observación ya que un planeta con tales dimensiones seria observado fácilmente desde cualquier parte de la Tierra, entonces esta idea se tomo como no real y se empezaron a tomar otras teorías que pudieran explicar esta falla en la teoría y así como otros problemas que no explicaba la teoría de Newton. Así se estuvo por varios años, hasta la llegada del científico mas celebrado del siglo XX, el Dr. Albert Einstein. La teoría que dio la vuelta al mundo es desde luego la teoría general de la relatividad, si esto nos le suena conocido pues desde luego esta ecuación si lo ara:  $E = mc^2$ , esta ecuación de  $2cm$  es la mas vista en textos de divulgación científica uno a recomendación es (*Historia del tiempo, Stephen Hawking*).

La teoría Newtoniana nos dice que existe órbitas en formas de trayectorias de cónicas, en donde aquí la teoría predice órbitas elípticas para energía negativa pero se presenta un problema para el planeta Mercurio ya que desde el año de 1850 se sabía que se presenta una precesión en esta órbita, para ello se aborda la teoría de la Relatividad General propuesta por Albert Einstein en el año 1915. La teoría de la relatividad nos da una gráfica de potencial gravitatorio para este planeta corrigiendo a la de Newton por una curva que presenta dos puntos máximos, uno para energía positiva y la otra en negativa, con la que se avanza a una mejor y exacta formulación teórica de la órbita de Mercurio. Una solución muy usada en Relatividad General es la métrica de Schwarzschild, para encontrar las magnitudes conservadas nos basamos en el cálculo de los killings de la métrica encontrando la energía  $E$  y el momento angular  $L$ . Dado estos dos parámetros podemos formular

la ecuación de la órbita de un cuerpo que se mueva por este espacio-tiempo de Schwarzschild. Dando además los símbolos de Christoffel de esta métrica de Schwarzschild para el cálculo de las geodésicas en este espacio-tiempo, como también el cálculo de los tensores de Riemann para probar que este espacio tiempo es curvo y no un espacio-tiempo plano como el caso de Minkowski. Primeramente se dará una introducción de las geodésicas obtenida de la función  $f = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}$ , los tensores de diferentes órdenes y tipo como  $\bar{T} = T^{ij}e_i \otimes e_j$ . Bajo estas premisas nos hacemos la siguiente interrogación.

## 1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En la presente investigación se plantea, responder la siguiente interrogante:

¿Es posible modelar la precesión de la órbita de mercurio con Matlab, tomando la teoría Newtoniana y relativista?

El objetivo principal de este trabajo de investigación es Modelar la precesión de la órbita de Mercurio con el programa Matlab, considerando las teorías de Newton y de Einstein, en ambas teorías se empieza encontrando las ecuaciones del potencial gravitatorio para luego encontrar las ecuaciones de las trayectorias (solución de la ecuación de Binet) que logran describir en un sistema Tierra - Sol. Dado el enfoque de la teoría de Newton se muestra una órbita cerrada y con la teoría de la relatividad general se presenta una precesión en la órbita, es decir una curva no cerrada. Se realiza el calculo de la precesión dado así respuesta teórica a las observaciones experimentales acerca del planeta Mercurio, para finalizar se toma todas las ecuaciones y se llevan a un ordenador para programarlo en Matlab y tener una forma de visualizar los potenciales gravitatorios y las trayectorias dadas por las teorías de Newton y Einstein.

## 1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

### 1.3.1. HIPÓTESIS GENERAL

Es posible modelar la precesión de la órbita de Mercurio con el programa Matlab tomando las teorías de Newton y de Einstein

### 1.3.2. HIPÓTESIS ESPECÍFICOS

1. Lograr el análisis de la teoría Newtoniana y relativista para utilizar en el calculo de la precesión de la órbita de mercurio.

2. Observar la órbita y el ángulo de precesión de Mercurio en coordenadas polares con el programa de Matlab.

#### **1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO**

La mecánica Newtoniana presenta un problema en no poder establecer el movimiento en la órbita de Mercurio y para ello daremos la solución con la teoría de la Relatividad General más exactamente con la ecuación de Binet para órbitas y finalizando se da el ángulo de precesión que tiene la órbita de Mercurio. Por lo que este trabajo a de abrir investigaciones al cálculo de satélites o viajes a otros planetas, como la asociación científica de Astrobiología del Perú, (SCAP) tiene planeado realizar. Además, todo lo expuesto en el trabajo de investigación servirá para los demás estudiantes que deseen estudiar la carrera de física y desarrollarse en esta rama de la Relatividad para así poder lograr un mayor alcance de estudios como son los agujeros negros o también las ondas gravitacionales.

#### **1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

##### **1.5.1. OBJETIVO GENERAL**

Modelar la precesión de la órbita de mercurio con Matlab, tomando la teoría Newtoniana y relativista.

##### **1.5.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

1. Analizar la teoría Newtoniana y relativista para calcular la precesión de la órbita de mercurio.
2. Modelar la órbita y el ángulo de precesión de Mercurio en coordenadas polares con el programa de Matlab.

## Capítulo II

### II. REVISIÓN DE LITERATURA

#### 2.1. MARCO TEÓRICO

##### 2.1.1. TRASFORMACIÓN DE COORDENADAS

La idea de transformar coordenadas es simplemente cambiar de un sistema a otro, lo que en física es muy importante ya que un sistema representara a un observador en movimiento y otro en una posición fija y queremos saber como se ven o cuales son las diferencias que experimental ambos observadores. El cambio de coordenadas sera muy fundamental para empezar y analizar la *relatividad especial* y poder dar el salto a la *relatividad general*. Entonces empecemos definiendo la métrica. (Aguirre, 2007)

#### Métrica

La métrica es el arte de medir las cosas, pero una asimilación física de lo que es en realidad es que se define a partir del *producto punto*, por lo que definamos que el producto punto independiente de lo que haga sea igual a la distancia del vector al cuadrado, ver figura 2.1

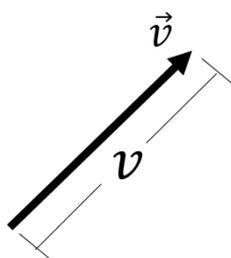


Figura 2.1: Diagrama de un vector  $\vec{v}$  con norma o distancia igual a  $v$

#### Producto Escalar

**Definición 2.1.1** *El producto escalar de un vector a de darnos la norma del vector al cuadrado:*

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 \quad (\text{II.1})$$

La ecuación II.1 tiene que ser :

- ♣ El producto escalar a de ser una operación lineal.
- ♣ El producto escalar a de ser simétrico.

Entonces recurriendo al teorema de cosenos (ver figura 2.2 ), tenemos:

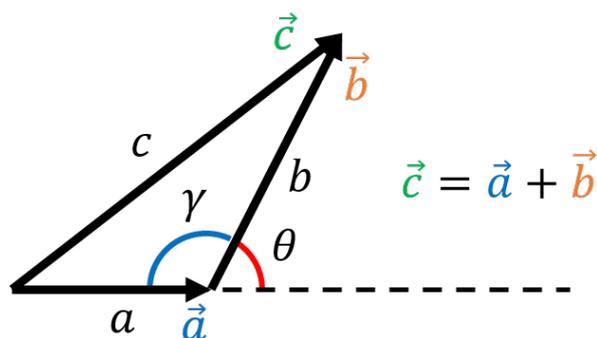


Figura 2.2: Representación gráfica del teorema de cosenos y suma de vectores.

$$c^2 = a^2 + b^2 - \cos \gamma \tag{II.2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - \cos(\pi - \theta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + \cos \theta \tag{II.3}$$

De la ecuación II.3 y de la definición II.1 podemos obtener:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = a^2 + b^2 + \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \tag{II.4}$$

Veamos ahora la figura 2.3, de donde podremos escribir la ecuación :

Realizando este cambio:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos (\beta - \alpha)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab (\cos \beta \cos \alpha + \sin \alpha \sin \beta)$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y} \tag{II.5}$$

La ecuación II.5 es de seguro la que mas a visto como una definición del producto escalar, pero como vimos es una consecuencia de que sea de esta forma según la definición II.1. Por lo que es

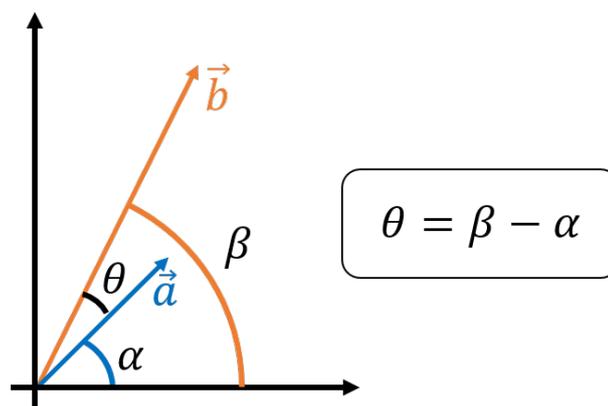


Figura 2.3: Representación del cambio que se a de realizar al ángulo  $\theta$  por una resta de otros dos ángulos.

mejor tomarla de esta manera y no como una simple definición de suma de componentes, ya que con esta idea se llega a comprender la relatividad.

La ecuación II.5 nos muestra que el producto escalar es la suma de la multiplicación de sus componentes, algo que debemos aclarar es que esto solo se cumple en el plano EUCLIDIANO. Realicemos el producto escalar según la primera condición la linealidad o sea:

Tomemos dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ; los cuales tienen como componentes:  $\vec{a} = a_1e_1 + a_2e_2$  y  $\vec{b} = b_1e_1 + b_2e_2$ . Donde  $(e_1, e_2)$  es la base del plano EUCLIDIANO. Entonces:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1e_1 \cdot e_1 + a_1b_2e_1 \cdot e_2 + a_2b_1e_2 \cdot e_1 + a_2b_2e_2 \cdot e_2$$

Para simplificar escribimos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1g_{11} + a_1b_2g_{12} + a_2b_1g_{21} + a_2b_2g_{22}$$

En el plano EUCLIDIANO se cumple que:

- $g_{11} = 1$
- $g_{12} = g_{21} = 0$
- $g_{22} = 1$

**Definición 2.1.2** Llamaremos métrica al producto escalar de las bases del espacio vectorial,  $g_{ij} = e_i \cdot e_j$

Tomemos en cuenta que para el plano EUCLIDIANO la métrica se puede expresar como en la lista anterior pero aun mejor de la forma siguiente:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Para  $\mathbb{R}^3$  tendríamos la matriz siguiente:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Y así para un caso general  $\mathbb{R}^N$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2N} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdots & g_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & g_{N3} & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix}$$

**Definición 2.1.3** *La forma más compacta de escribir el producto escalar es de la siguiente manera:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ij} a^i b^j$$

**Definición 2.1.4 (Delta de Kronecker)** *El símbolo Delta de Kronocker  $\delta_j^i$  definimos de la manera.*

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

**Definición 2.1.5 (Base Dual)** *Independientemente de la métrica que se tenga la base dual  $\{e^1, e^2, \dots, e^N\}$  de  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  tiene que cumplir lo siguiente:*

$$e^i \cdot e_j = \delta_j^i \quad (\text{II.7})$$

La métrica de la base dual corresponderá a la inversa de la métrica normal.

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} \quad (\text{II.8})$$

Por lo tanto de la ecuación II.7 se obtiene la relación que enlaza una base normal con la dual, de la forma siguiente. ( para mas información revisar ([Cantero, 2004](#)) )

$$e^i = g^{ij} e_j \quad (\text{II.9})$$

$$e_i = g_{ij} e^j \quad (\text{II.10})$$

La ecuación II.9 tal vez a de tener un poco de misticismo ya que se pone de la nada índices de la base e inclusive esos índices no se muestra de donde a donde van. A todas estas dudas se puede consultar ([Chavez, 2005](#)), pero para simplificar tiene que ver con el *convenio de sumatorio de Einstein*. El convenio de sumatorio de Einstein seguramente se ve en clases de relatividad, el punto a tocar será los *vectores covariantes* y *vectores contravariantes*, con el cual se da respuesta al porque los sub índices y supra índices. Cabe resaltar que estas notaciones por muy raras, son en verdad muy útiles al momento de trabajar los cálculos.

Para el caso de un vector  $\vec{v} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n$  se puede expresar en forma de su base dual, con lo visto anteriormente, pero la pregunta ahora es que pasa con sus componentes de este vector, para ellos se le asigna como componentes la letra  $x$  con un supra índice de la forma  $x^i$  para poder simplificar la notación de este vector a la forma  $\vec{v} = x^i e_i$  este resultado se obtiene también debido a que es mejor trabajar con el convenio de sumatorio de Einstein, revisar ([Cantero, 2004](#)). Con este arreglo podemos entonces trabajar mucho más fácil y dar solución a como cambia los componentes de  $x^i$  a  $x_i$  lo que se conoce como ir de componente covariante a contravariante se verá con más detalle en la siguiente sección. La forma del cambio nos da respuesta el teorema siguiente:

**Teorema 2.1.1** *Si tomamos la ecuación II.10 podemos entonces dar el cambio de la componente covariante  $x^i$  a la componente contravariante  $x_i$  de la forma:*

$$x_i = x^j g_{ji}$$

### Demostración

Tomemos un vector de  $n$  componentes de la forma:

$$\vec{A} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n \quad (\text{II.11})$$

Si queremos llevar a la otra forma de vector con componentes contravariantes de la forma:

$$\vec{A} = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \dots + x_n e^n \quad (\text{II.12})$$

Entonces debido a la ecuación II.10 podemos reescribir la ecuación II.11 de la forma:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= x^1 (g_{11}e^1 + g_{12}e^2 + \dots + g_{1n}e^n) + x^2 (g_{21}e^1 + g_{22}e^2 + \dots + g_{2n}e^n) + \dots + \\ &\quad + x^n (g_{n1}e^1 + g_{n2}e^2 + \dots + g_{nn}e^n) \\ \vec{A} &= (g_{11}x^1 + g_{21}x^2 + \dots + g_{n1}x^n) e^1 + (g_{21}x^1 + g_{22}x^2 + \dots + g_{2n}x^n) e^2 + \dots + \\ &\quad + (g_{n1}x^1 + g_{n2}x^2 + \dots + g_{nn}x^n) e^n \end{aligned} \tag{II.13}$$

Por lo que esta ultima ecuación se puede relacionar con la ecuación II.12 de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \tag{II.14}$$

En forma compacta y teniendo en cuenta el convenio de sumatorio de Einstein, revisar ([Chavez, 2005](#)).

$$x_i = x^j g_{ji} \tag{II.15}$$

**L.q.q.d.**

**Corolario 2.1.1** *La transformación de componente contravariante  $x_i$  a covariante  $x^i$  tomando la ecuación II.9 a de corresponder a la forma:*

$$x^i = x_j g^{ji}$$

**Demostración**

De la misma manera a la demostración del teorema 2.1.1 podemos llegar y dar por demostrado este cambio de contravariante a covariante.

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{II.16}$$

**L.q.q.d.**

### Covarianza y contravarianza

Los vectores son entes muy utilizados en la física y lo tanto en la relatividad. Ya que se usa varios sistemas de referencia en el estudio, tenemos que tener una forma de identificarlos y de denotarlos, este no es el caso aun de cambio de coordenadas, al cambio de subir y bajar indices es el cambio de una base normal a su dual. Son muy importantes y se vera su utilidad mas adelante. (Aguirre, 2007), (Cantero, 2004)

**Definición 2.1.6** *Lo covariante se expresa de la forma sub indicada, como:*

$$e_i = e_1, e_2, \dots, e_n$$

**Definición 2.1.7** *Lo contravariante se expresa de forma supra indicada, como:*

$$e^i = e^1, e^2, \dots, e^n$$

**Ejemplo 2.1.1** *Si tomamos un vector de la forma:  $\vec{v} = ae_1 + be_2 + ce_3$ , este vector se debe poder expresar de una forma en vectores contravariantes. de modo que se expresa de la forma.*

$$\vec{v} = A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 = A_1 e^1 + A_2 e^2 + A_3 e^3$$

De un modo aun mas compacto o la razón de tomar estas notaciones es para usar el convenio de suma de Einstein. De la forma siguiente:

$$\vec{v} = A^i e_i = A_j e^j$$

A las componentes  $A^i$  y  $A_j$  también se les asigna un nombre el cual es componente contravariante y covariante respectivamente.

Para ya poner en claro la transformación de coordenadas veamos algunas imágenes donde se puede ilustrar muy bien el cambio.

Espacio Plano (euclidiano)  
Coordenadas cartesianas

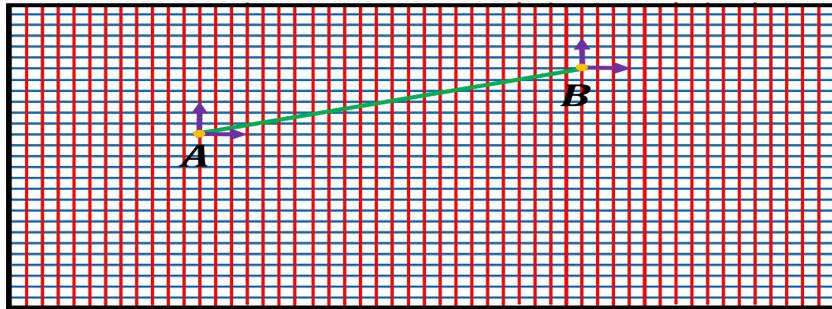


Figura 2.4: Representación del plano cartesiano.

Como ejemplo veamos la siguiente imagen de cambio de coordenadas.

Espacio Plano  
Coordenadas Polares

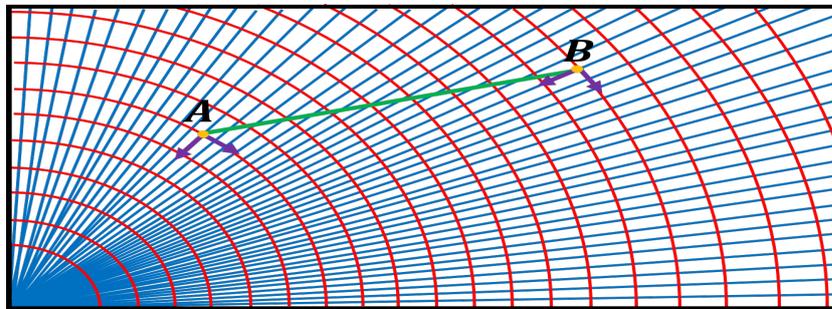


Figura 2.5: Representación de un sistema de coordenadas distinto al cartesiano

La figura 2.4 es la representación del plano EUCLIDIANO con base  $\{e_1, e_2\}$ , para este caso de coordenadas la Métrica corresponde a ser constante ya que sea donde sea que pongamos la base esta tiene la misma composición, en cambio en la figura 2.5 se ve a la base  $\{e_{1'}, e_{2'}\}$  que varia en cada punto que pongamos la base, por lo que a casos genéricos vemos que la métrica depende del punto que se a de medir.

**Observación 2.1.1** *Las vía por la cual un objeto se ha de trasladar por un mundo plano es sin discusión la recta pero expresada en distintos sistemas de coordenadas la idea de recta de la forma:  $y = mx + b$ , (con  $m$  como pendiente y  $b$  constante). La expresión de una recta en otro sistema coordenado no ha de corresponder a esta ecuación típica del plano euclidiano con coordenadas cartesianas. Tomara si la forma de recta pero no sera igual la ecuación que la describa.*

**Cambio de Coordenadas**

La transformación de coordenadas es lo mas importante en la relatividad, ya que se trabaja con distintos observadores los cuales tienen asociados su propio sistema de coordenadas. Por lo tanto

surge la necesidad de calcular un cambio de un sistema de coordenadas a otro lo mas rápido posible; a lo que los matemáticos trabajaron en hacer realidad este calculo y se demostrara lineas mas adelante:

**Teorema 2.1.2** *El conjunto de funciones  $f^1, f^2, \dots, f^n$  continuas y diferenciables y que dependen de  $n$ -coordenadas  $f^i = f^i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , entonces se cumple que:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial f^1} & \frac{\partial f^1}{\partial f^2} & \frac{\partial f^1}{\partial f^3} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial f^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial f^1} & \frac{\partial f^2}{\partial f^2} & \frac{\partial f^2}{\partial f^3} & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial f^n} \\ \frac{\partial f^3}{\partial f^1} & \frac{\partial f^3}{\partial f^2} & \frac{\partial f^3}{\partial f^3} & \dots & \frac{\partial f^3}{\partial f^n} \\ \frac{\partial f^4}{\partial f^1} & \frac{\partial f^4}{\partial f^2} & \frac{\partial f^4}{\partial f^3} & \dots & \frac{\partial f^4}{\partial f^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial f^1} & \frac{\partial f^n}{\partial f^2} & \frac{\partial f^n}{\partial f^3} & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial f^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Corolario 2.1.2** *Según el teorema 2.1.2 podemos expresar la ecuación obtenida por una que involucre a la multiplicación de dos matrices y que el producto sea igual a la identidad. La multiplicación de estas matrices han de corresponder a la forma siguiente:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1 f^1}{\partial f^1} & \dots & \frac{\partial x_n f^1}{\partial f^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1 f^n}{\partial f^1} & \dots & \frac{\partial x_n f^n}{\partial f^1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1 x_1}{\partial f^1} & \dots & \frac{\partial f^n x_1}{\partial f^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^1 x_n}{\partial f^1} & \dots & \frac{\partial f^n x_n}{\partial f^1} \end{pmatrix} = I$$

**Demostración**

Si tomamos la ecuación del teorema 2.1.2 podemos expresarla en sus términos de derivadas de la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f^1} + \frac{\partial f^1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f^1} + \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f^2} + \frac{\partial f^1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f^2} + \dots & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f^n} + \frac{\partial f^1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f^n} + \dots \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f^1} + \frac{\partial f^2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f^1} + \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f^2} + \frac{\partial f^2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f^2} + \dots & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f^n} + \frac{\partial f^2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f^n} + \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f^1} + \frac{\partial f^n}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f^1} + \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f^2} + \frac{\partial f^n}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f^2} + \dots & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f^n} + \frac{\partial f^n}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f^n} + \dots \end{pmatrix}$$

A lo que podemos expresar esta matriz como la multiplicación de dos matrices e igualar a la identidad.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f^1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1} & \frac{\partial f^2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1} & \frac{\partial f^n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f^1} & \frac{\partial x_1}{\partial f^2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial f^n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial f^1} & \frac{\partial x_2}{\partial f^2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial f^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial f^1} & \frac{\partial x_n}{\partial f^2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial f^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Por lo cual la ecuación II.17 demuestra el corolario 2.1.2.

**L.q.q.d.**

**Definición 2.1.8** La nueva base coordenada  $\{e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}\}$  ha de estar expresada bajo una combinación lineal con la base previa  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .

**Teorema 2.1.3** Debido a la definición 2.1.8 las componentes  $A^{ij'}$  de la combinación lineal de las nuevas coordenadas y  $A^{i'j}$  de las antiguas coordenadas podemos decir que las matrices de componentes de ambas coordenadas están relacionadas de la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} A^{1'1} & \cdots & A^{n'1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{1'n} & \cdots & A^{n'n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{11'} & \cdots & A^{n1'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{1n'} & \cdots & A^{nn'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.18})$$

**Demostración**

Tomemos los sistemas de bases  $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$  en función de  $\{e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}, \dots, e_{n'}\}$  y del mismo modo en lo contrario, teniendo entonces el primer sistema referente a  $e_i = A^{ij'} e_{j'}$ , desarrollado:

$$\begin{aligned} e_1 &= A^{11'} e_{1'} + A^{12'} e_{2'} + A^{13'} e_{3'} + \cdots + A^{1n'} e_{n'} \\ e_2 &= A^{21'} e_{1'} + A^{22'} e_{2'} + A^{23'} e_{3'} + \cdots + A^{2n'} e_{n'} \\ e_3 &= A^{31'} e_{1'} + A^{32'} e_{2'} + A^{33'} e_{3'} + \cdots + A^{3n'} e_{n'} \\ &\vdots \\ e_{n'} &= A^{n1'} e_{1'} + A^{n2'} e_{2'} + A^{n3'} e_{3'} + \cdots + A^{nn'} e_{n'} \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

El siguiente sistema corresponde a  $e_{i'} = A^{i'j} e_j$ , desarrollado tenemos:

$$\begin{aligned}
 e_{1'} &= A^{1'1}e_1 + A^{1'2}e_2 + A^{1'3}e_3 + \dots + A^{1'n}e_n \\
 e_{2'} &= A^{2'1}e_1 + A^{2'2}e_2 + A^{2'3}e_3 + \dots + A^{2'n}e_n \\
 e_{3'} &= A^{3'1}e_1 + A^{3'2}e_2 + A^{3'3}e_3 + \dots + A^{3'n}e_n \\
 &\vdots \\
 e_{n'} &= A^{n'1}e_1 + A^{n'2}e_2 + A^{n'3}e_3 + \dots + A^{n'n}e_n
 \end{aligned}
 \tag{II.20}$$

La ecuación II.19 se puede expresar en forma matricial de la forma:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{11'} & A^{12'} & \dots & A^{1n'} \\ A^{21'} & A^{22'} & \dots & A^{2n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n1'} & A^{n2'} & \dots & A^{nn'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{1'} \\ e_{2'} \\ \vdots \\ e_{n'} \end{pmatrix}
 \tag{II.21}$$

De la misma forma matricial se puede lograr para la ecuación II.20.

$$\begin{pmatrix} e_{1'} \\ e_{2'} \\ \vdots \\ e_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1'1} & A^{1'2} & \dots & A^{1'n} \\ A^{2'1} & A^{2'2} & \dots & A^{2'n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n'1} & A^{n'2} & \dots & A^{n'n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}
 \tag{II.22}$$

La ecuación II.21 corresponde a una forma matricial como  $x = Ay$  en donde se puede poner  $y$  en función de  $x$  realizando una multiplicación de la matriz inversa  $A$  podemos tener  $y = A^{-1}x$ , de manera que obtenemos la ecuación siguiente:

$$\begin{pmatrix} e_{1'} \\ e_{2'} \\ \vdots \\ e_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{11'} & A^{12'} & \dots & A^{1n'} \\ A^{21'} & A^{22'} & \dots & A^{2n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n1'} & A^{n2'} & \dots & A^{nn'} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}
 \tag{II.23}$$

Entonces podemos igualar la matriz inversa de la ecuación II.23 con la matriz de la ecuación II.22 ya que ambas ecuaciones expresan la misma relación. Tenemos entonces  $y = A^{-1}x$  y  $y = Bx$  donde igualamos  $B = A^{-1}$  y al realizar la multiplicación de  $A$  a toda la ecuación tenemos que  $A \cdot B = I$  entonces tenemos:

$$\begin{pmatrix} A^{11'} & A^{12'} & \dots & A^{1n'} \\ A^{21'} & A^{22'} & \dots & A^{2n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n1'} & A^{n2'} & \dots & A^{nn'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{1'1} & A^{1'2} & \dots & A^{1'n} \\ A^{2'1} & A^{2'2} & \dots & A^{2'n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n'1} & A^{n'2} & \dots & A^{n'n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}
 \tag{II.24}$$

Realizando la transpuesta a la ecuación II.24 tenemos.

$$\left\{ \begin{pmatrix} A^{11'} & A^{12'} & \dots & A^{1n'} \\ A^{21'} & A^{22'} & \dots & A^{2n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n1'} & A^{n2'} & \dots & A^{nn'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{1'1} & A^{1'2} & \dots & A^{1'n} \\ A^{2'1} & A^{2'2} & \dots & A^{2'n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n'1} & A^{n'2} & \dots & A^{n'n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}^T$$

$$\begin{pmatrix} A^{1'1} & A^{2'1} & \dots & A^{n'1} \\ A^{1'2} & A^{2'2} & \dots & A^{n'2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{1'n} & A^{2'n} & \dots & A^{n'n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{11'} & A^{21'} & \dots & A^{n1'} \\ A^{12'} & A^{22'} & \dots & A^{n2'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{1n'} & A^{2n'} & \dots & A^{nn'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.25})$$

Con este resultado damos la demostración y afirmamos la ecuación del teorema 2.1.3.

**L.q.q.d.**

**Teorema 2.1.4** *Teniendo unas coordenadas origen  $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$  y de componentes  $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$  para poder dar una transformación de coordenadas a las coordenadas nuevas  $\{e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}, \dots, e_{n'}\}$  de componentes  $x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, \dots, x^{n'}$ , sera la transformación de la forma:*

$$e_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} e_j$$

**Corolario 2.1.3** *Del teorema 2.1.4 podemos encontrar la transformación de coordenadas de las nuevas a las origen de la forma:*

$$e_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} e_{j'}$$

**demostración**

Tomando las ecuaciones II.17 y II.25 podemos hacer una igualdad de ambas expresiones matemáticas y así poder decir que las columnas se refieren a las componentes del sistema de coordenadas base, las columnas de la segunda matriz corresponden a las componentes del sistema coordinado nuevo, por lo que afirmamos el teorema 2.1.4 y el corolario 2.1.3.

$$e_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} e_j$$

y

$$e_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} e_{j'}$$

L.q.q.d.

**Nota 2.1.1** El cambio de coordenadas que se verán mas adelante son algo muy especiales, uno porque no podemos aceptar una transformación de coordenadas algo simples, algo mas formal es hablar de la **carta local** y también de **atlas** el cual es el conjunto de cartas locales, un caso para ejemplificar estas ideas tomemos las imágenes siguientes:

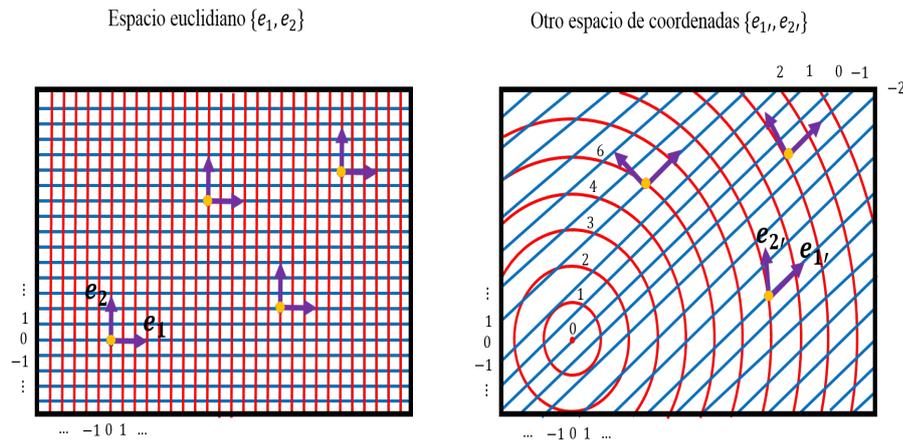


Figura 2.6: Representación de un cambio de coordenadas; de las cartesianas a alguna otra cualquier sistema de coordenadas  $e_1, e_2$  en donde se observa que la nueva base varía en cada punto del espacio según estas nuevas coordenadas y que con las nuevas coordenadas y la base obtenida no cumple en algunos lugares del espacio.

**Observación 2.1.2** De la imagen 2.6 podemos ver las partes en donde estas nuevas coordenadas si cumplen y existe base que construya el espacio, también se ve los espacios del plano en donde no cumple y no existe una base coordenada. (ver figura 2.7)

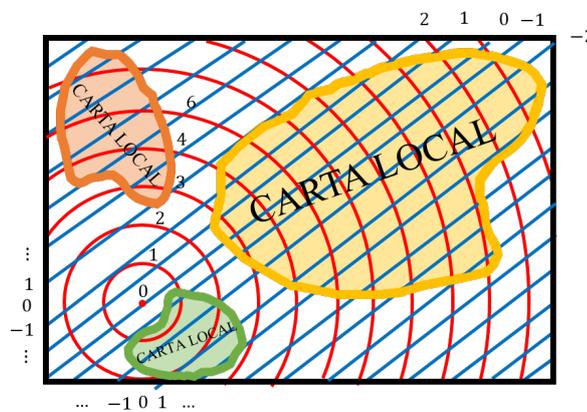


Figura 2.7: Visualización de las cartas locales en el plano de nuevas coordenadas.

En la figura 2.7 se muestra algunas representaciones de *cartas locales* en donde se realiza el estudio que se cumpla o no la existencia de bases coordenadas; las cartas locales de color *naranja* y *amarilla* si cumplen ya que se puede ver a simple vista que no hay impedimento para la existencia de bases coordenadas, la carta de color verde no cumple como carta de estudio por que no se puede ver algunas bases coordenadas existentes ya que se observa que existe un paralelismo en estas nuevas coordenadas. En estos casos donde no cumple o no existe una base que pueda construir este sub-espacio (conjunto mas pequeño que el espacio general, revisar (Briozzo, 2012)) se busca un nuevo sistema de coordenadas que pueda solucionar este sub-espacio.

### Ecuación de la Elipse

La elipse en una de las tantas curvas de las secciones cónicas que se estudian e primeros semestres de la carrera de física, y obtiene su gran importancia en el estudio de órbitas planetarias como se vera. Tomaremos dos ecuaciones de la elipse, una en coordenadas cartesianas y otra en coordenadas polares, esta ultima sera la que tomara mayor importancia en este estudio de licenciatura. (Baldeon, 2014)

#### Coordenadas Cartesianas

Una elipse en coordenadas cartesianas servirá para poder llevar a la ecuación que necesitamos la cual es en coordenadas polares.

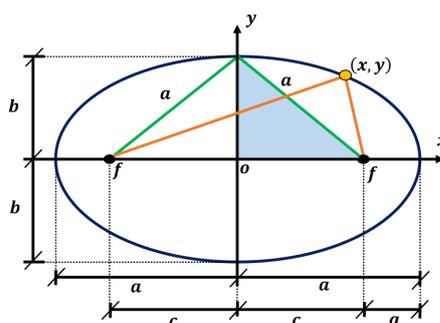


Figura 2.8: Representación de la elipse en coordenadas cartesianas

**Definición 2.1.9 (Elipse)** Una elipse en coordenadas cartesianas corresponde a la siguiente relación:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / d[(x, y), (c, 0)] + d[(x, y), (-c, 0)] = 2a\} \tag{II.26}$$

Haciendo un tratamiento matemático de esta definición se obtendrá.

$$\sqrt{(y-0)^2 + (x-c)^2} + \sqrt{(y-0)^2 + (x+c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(y^2 + x^2 + c^2) - 2xc} + \sqrt{(y^2 + x^2 + c^2) + 2xc} = 2a$$

$$2(y^2 + x^2 + c^2) + 2\sqrt{(y^2 + x^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2} = 4a^2$$

$$\sqrt{(y^2 + x^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2} = 2a^2 - (y^2 + x^2 + c^2)$$

$$(y^2 + x^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2 = 4a^4 - 4a^2(y^2 + x^2 + c^2) + (y^2 + x^2 + c^2)^2$$

$$-x^2c^2 = a^4 - a^2(y^2 + x^2 + c^2)$$

**Nota 2.1.2** Tomemos para esta ecuación algunas observaciones.

- $a^2 = b^2 + c^2$
- $c + c + g + g = 2a$
- $c + c + g + g = 2a$

Entonces obtenemos finalmente:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (\text{II.27})$$

Aunque la versión más común será desde luego la siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{II.28})$$

Por lo tanto se tiene la siguiente conjunto que define a una elipse:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a y b = \text{const} \right\}$$

**Definición 2.1.10 (Excentricidad)** Esta cantidad es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia, matemáticamente se tiene:

$$e = \frac{c}{a} \tag{II.29}$$

Coordenadas Polares

El cambio de coordenadas que se necesitara, sera las coordenadas polares, ya que la representación de las ecuaciones de Newton y Einstein la dará en coordenadas  $r$  y  $\theta$ . (Cantero, 2004)

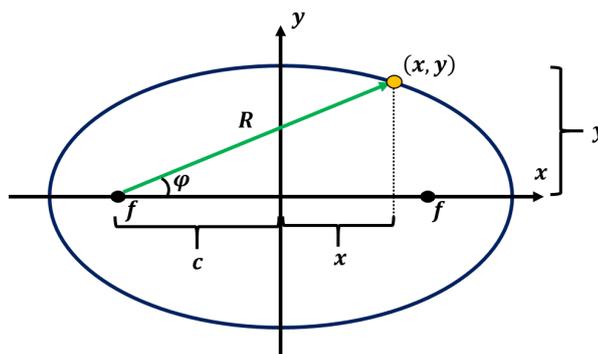


Figura 2.9: Representación de la elipse en coordenadas polares

Entonces tomando la figura 2.9 podemos implicar lo siguiente:

$$\begin{cases} x(R, \phi) = R \cos \phi - c \\ y(R, \phi) = R \sin \phi \end{cases}$$

Ahora tomemos  $x^2$  y  $y^2$  obteniendo de la forma:

$$x^2 = R^2 \cos^2 \phi - 2cR \cos \phi + c^2$$

$$y^2 = R^2 \sin^2 \phi = R^2 (1 - \cos^2 \phi)$$

Por lo tanto reemplazando estos valores en la ecuación II.27, se tiene:

$$b^2 (R^2 \cos^2 \phi - 2cR \cos \phi + c^2) + a^2 R^2 (1 - \cos^2 \phi) = a^2 b^2$$

Desarrollando dicha ecuación de obtiene la ecuación de la elipse en coordenadas polares de la forma:

$$\frac{b^2}{a} = R \left( 1 - \frac{c}{a} \cos \phi \right)$$

Pero la forma mas conocida resulta de la forma, tomando  $b^2/a = R_0$  y  $c/a = e$  la cual es la excentricidad, ecuación II.29.

$$R_0 = R(1 - e \cos \phi) \tag{II.30}$$

Para nuestro estudio sera necesario expresarlo de la forma siguiente:

$$R(\phi) = \frac{R_0}{1 - e \cos \phi} \tag{II.31}$$

### Variedad

Las Variedades Diferenciables, o simplemente en nuestro caso Variedades, son el objeto de estudio de la rama de las matemáticas llamada Geometría Diferencial. Existen básicamente dos aproximaciones a la idea de variedad; por un lado, una variedad no es sino la generalización de la idea de superficie (bidimensional) en el espacio euclideo  $\mathbb{R}^3$ , a una dimensión cualquiera; de hecho se puede demostrar que cualquier variedad (analítica) de dimensión  $n$  se puede considerar como una superficie en un espacio euclideo  $\mathbb{R}^N$  con  $n \leq N \leq n(n + 1)/2$ , el espacio  $\mathbb{R}^N$  se llama a veces espacio ambiente de la variedad en cuestión. Por otra parte, una variedad  $n$ -dimensional se puede ver como un conjunto de puntos que localmente se parece al conjunto (i.e.: en entornos pequeños alrededor de cada punto), revisar (Anonimo, 2011), Como un libro de literatura acerca de variedades en un enfoque mas suave ver (Linares, 2017).

**Definición 2.1.11** Una variedad real,  $C^\infty$ ,  $n$ -dimensional  $M$  es un conjunto de puntos junto con una colección de subconjuntos  $\{O_\alpha\} = \mathcal{T}$ , que son sus abiertos (i.e.:  $\mathcal{T}$  es una topología y por tanto  $(M, \mathcal{T})$  es un espacio topológico; en particular esto implica que cada punto  $p \in M$  está contenido en al menos un subconjunto  $O_\alpha$  y que los  $\{O_\alpha\}$  forman un recubrimiento de  $M$ ), de modo que:

1. Para cada  $O_\alpha$  existe una función  $x_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$ , donde  $U_\alpha$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , de modo que la función  $x_\alpha$  (que tendrá  $n$  componentes:  $x_\alpha(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ ) es biyectiva y continua y la inversa es también continua.
2. Si dos subconjuntos  $O_\alpha, O_\beta$  se solapan; i.e.:  $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$ , consideremos la función  $f$  definida como  $f = x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ ; i.e.:

$$f \equiv x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha [O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x_\beta [O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$$

Entonces  $f$  y  $f^{-1}$  (que son funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ ) son  $C^\infty$ .

**Observación 2.1.3** Como en el caso de las superficies, las funciones  $x_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$  se llaman en Física sistemas de coordenadas (y normalmente, no nos molestamos demasiado en especificar el dominio  $O_\alpha$  ni el recorrido  $U_\alpha$ ); mientras que en Matemáticas se llaman cartas coordenadas. Nosotros utilizaremos indistintamente un nombre u otro.

**Observación 2.1.4** A fin de evitar que podamos fabricar variedades nuevas introduciendo un nuevo sistema de coordenadas, o introduciendo un abierto  $O_{\gamma'} \subset O_\gamma$  y definiendo allí nuevas coordenadas, se requiere en la definición anterior que el recubrimiento  $\{O_\alpha\}$  y la familia de cartas (o sistemas de) coordenadas  $\{x_\alpha\}$  sea maximal, esto es: que todos los sistemas de coordenadas compatibles con los requisitos (1) y (2) de la definición estén incluidos. Ni que decir tiene que esto no supone ninguna complicación para los desarrollos que vienen a continuación y no debe preocuparnos.

**Observación 2.1.5** Si los cambios de coordenadas son continuos simplemente (ni siquiera diferenciables) hablamos de variedades topológicas, si son diferenciables tan sólo  $n$  veces, de variedades  $C^n$ . Nosotros supondremos siempre que nuestras variedades son  $C^\infty$  (suaves: smooth en inglés) y las llamaremos simplemente variedades (en lugar de variedades diferenciables); éste es desde luego el caso de la Física, donde las variedades de interés son, en muchos casos, de dimensiones bajas: dimensión 2 (superficies en  $\mathbb{R}^3$  incluyendo el plano  $\mathbb{R}^2$ ), dimensión 3: el propio espacio  $\mathbb{R}^3$  (o alguna región abierta de éste), dimensión 4: diferentes tipos de espacio-tiempo (sobre los cuáles está formulada la Teoría de la Relatividad). Hay otros casos de interés en que los puntos de la variedad no son necesariamente o directamente identificables como puntos en el sentido geométrico (i.e.: elementos de  $\mathbb{R}^3$  o de alguna superficie contenida allí, o incluso puntos del espacio-tiempo): por ejemplo dado un sistema holónomo en mecánica clásica, el conjunto de todas las configuraciones posibles, tiene estructura de variedad diferenciable (es el llamado espacio de configuraciones del sistema) siendo sus coordenadas las coordenadas canónicas  $q = (q^1, \dots, q^f)$  donde  $f$  el número de grados de libertad del sistema.

**Teorema 2.1.5** Dado un subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^n$ , consideremos las siguientes afirmaciones: (i)  $\mathcal{S}$  es una superficie, (ii)  $\mathcal{S}$  es un conjunto de nivel regular para una función diferenciable  $f : (\mathbb{R}^3 \supset) U \rightarrow \mathbb{R}$ , y (iii)  $\mathcal{S}$  es la gráfica de una función diferenciable  $\varsigma : (\mathbb{R}^2 \supset) \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces se verifica: (iii)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (i) y las tres afirmaciones son localmente equivalentes.

El conjunto tangente a una superficie en cada punto resulta ser un plano vectorial, revisar (Aguirre, 2007), que puede verse como la imagen de la diferencial de cualquier parametrización de la superficie en torno al punto.

Sean  $\mathcal{S}$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y  $p \in \mathcal{S}$ . Generalizado para el espacio tangente  $\mathbf{T}_p\mathbb{R}^n$ , denominamos **conjunto tangente a  $\mathcal{S}$  en  $p$**  al conjunto

$$\mathbf{T}_p\mathcal{S}^n := \{\alpha'(0) \mid \alpha \in C(p, \mathcal{S})\} \subset \mathbf{T}_p\mathbb{R}^n$$

Donde  $C(p, \mathcal{S})$  es la familia de curvas por  $p$  en  $\mathcal{S}$ . Si  $\mathcal{U}$  es abierto de  $\mathcal{S}$  (en la topología relativa) y  $p \in \mathcal{U}$ , resulta  $\mathbf{T}_p\mathcal{U} = \mathbf{T}_p\mathcal{S}$  (en particular,  $\mathbf{T}_p\mathbb{U} = \mathbf{T}_p\mathbb{R}^n$  si  $\mathbb{U}$  es abierto de  $\mathbb{R}^n$ ).

**Proposición 2.1.1** Sea  $M (\subset \mathbb{R}^3)$  una superficie y sea  $p \in M$ .

1. Si  $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{U}$  es una parametrización (local) de  $M$  en torno a  $p$ , entonces se verifica:  
 $\mathbf{T}_pM = \text{Im}(d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi)$ .
2. El conjunto  $\mathbf{T}_pM$  es un subespacio de  $\mathbf{T}_p\mathbb{R}^3$  de dimensión 2, denominado **plano tangente a  $M$  en  $p$** .

### 2.1.2. TENSORES

Muchos fenómenos físicos se presentan matemáticamente mediante tensores, los cuales, por necesidad son representados en un sistema de referencia, de este modo surge el concepto de componentes del tensor. Si bien los tensores son independientes del sistema de referencia, las componentes serán dependientes y variaran con éste. mas información revisar ([Anonimo, 2011](#)). Los tensores pueden ser clasificados según su orden: (ver ([Chavez, 2005](#))).

- ★ ESCALAR(Tensor de Orden 0): Cantidad que tiene magnitud pero no dirección (ejemplo: densidad de masa, temperatura, presión.). Los escalares pueden ser funciones del espacio y del tiempo y no necesariamente han de ser constantes.
- ★ VECTOR(Tensor de Orden 1): Cantidad que tiene magnitud y dirección (ejemplo: velocidad, aceleración, fuerza). Sera simbolizado por una letra y con una flecha en la parte superior i.e.:  $\vec{v}$ .
- ★ TENSOR DE SEGUNDO ORDEN: Cantidad que tiene magnitud y dos direcciones (ejemplo: tension, deformación). Sera simbolizado por una letra en negrita.

**Nota 2.1.3** Para los tensores de órdenes superiores se simbolizara con una letra en negrita o de un modo mas especial con el cual se dará el estudio de la relatividad general, su desarrollo se vera mas adelante con detalle; ver ([Jetzer, 2016](#)) para mas información en la forma de trabajo en *Relatividad o Geometría diferencial*.

**Teorema 2.1.6** Si tomamos que las transformaciones se dan según el teorema 2.1.4 e imponemos que en esta nueva base la magnitud del vector se mantenga invariante, entonces la transformación de coordenadas a de tomar una forma muy similar al de las bases, como.

$$A^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} A^i$$

**Demostración**

Tomemos el vector  $\vec{A}$ .

$$\vec{A} = A^1 e_1 + A^2 e_2 + \dots + A^n e_n$$

Y además se da la imposición que de igual a la forma siguiente de un nuevo sistema coordenado.

$$\vec{A} = A^{1'} e_{1'} + A^{2'} e_{2'} + \dots + A^{n'} e_{n'}$$

Tomando el teorema 2.1.4 podemos escribir.

$$\begin{aligned} \vec{A} = & A^1 \left( \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} e_{1'} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} e_{2'} + \dots + \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} e_{n'} \right) + A^2 \left( \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} e_{1'} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} e_{2'} + \dots + \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^2} e_{n'} \right) + \\ & \dots + A^n \left( \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} e_{1'} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^n} e_{2'} + \dots + \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} e_{n'} \right) \end{aligned}$$

Por lo que haciendo unos acomodo matemático se obtiene.

$$\begin{aligned} \vec{A} = & \left( A^1 \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} + A^2 \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} + \dots + A^n \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} \right) e_{1'} + \left( A^1 \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} + A^2 \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} + \dots + A^n \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^n} \right) e_{2'} + \\ & \dots + \left( A^1 \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} + A^2 \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^2} + \dots + A^n \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} \right) e_{n'} \end{aligned}$$

Entonces para dar la igualdad con el vector expresado en las nuevas coordenadas, podemos escribir de la forma matricial de la forma:

$$\begin{pmatrix} A^{1'} \\ A^{2'} \\ \vdots \\ A^{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}$$

Usando el convenio de sumatorio de Einstein podemos expresarlo de la manera mas simplificada como:

$$A^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} A^j$$

**L.q.q.d.**

**Observación 2.1.6** *Las demostraciones que se muestran son algo muy detalladas y extensas, en donde se aplica el convenio de sumatorio de Einstein muy inapropiada o fuera de lugar, el caso es que si se usa el convenio de sumatorio de Einstein se puede acortar muchísimo estas demostraciones, como el teorema anterior de la forma.*

### Demostración

Tomando el vector en ambas formas, coordenadas *antiguas* y *nuevas* imponiendo la igualdad.

$$\vec{A} = A^i e_i = A^{j'} e_{j'}$$

Tomando en cuenta el teorema 2.1.4 se escribe.

$$A^i e_i = A^i \left( \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} e_{j'} \right)$$

Arreglando.

$$= \left( \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} A^i \right) e_{j'}$$

Se logra la igualdad:

$$A^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} A^i$$

**L.q.q.d.**

**Definición 2.1.12** *Un tensor de cualquier orden sera el objeto matemático que ha de mantener su magnitud invariante según cualquier base coordenada construida. Un tensor es aquel que confirma el teorema 2.1.6.*

**Nota 2.1.4** *Una primera visión a los ordenes de un vector son las siguientes:*

$$TENSOR = \begin{cases} Tensor(1, 0), & \text{si } A^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} A^j, \\ Tensor(0, 1), & \text{si } A_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} A_j. \end{cases}$$

## Producto Tensorial

Un concepto útil que nos permite definir tensores sobre espacios *más grandes* a partir de otros tensores sobre espacios *más pequeños* es el de producto tensorial. Los tensores aparecen frecuentemente en Física y con aun mas frecuencia los de orden superior el cual se discutirá en esta sección, son representando como momento cuadrupolar o gradiente del campo eléctrico, momentos de inercia, propiedades elásticas de sólidos, propiedades de transporte de fluidos, y también como veremos en la relatividad general, etc. En esta Sección unificaremos algunos conceptos ya introducidos y daremos una formulación general de los mismos. Para ver a los tensores de orden dos a más, primero debemos de definir el producto interno o punto de estos objetos matemáticos.

Tomando con un espacio vectorial  $V$  con base  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , y que el producto de dos espacios vectoriales  $V \otimes V$  se tiene la base de la forma:

$$\{e_1 \otimes e_m, e_n \otimes e_1, \dots, e_n \otimes e_m\}$$

De forma compacta tenemos:

$$V \rightarrow V \otimes V$$

$$\{e_i\} \mapsto \{e_i \otimes e_j\}$$

Por lo que en un espacio vectorial  $V$  los objetos matemáticos obtenidos de la combinación lineal son vectores o tensores de *orden 1*.

$$\vec{A} = A^i e_i$$

Y a la combinación lineal en este espacio vectorial  $V \otimes V$  se le conoce con el nombre de tensor de orden 2, siguiendo con la logica se puede generalizar a los tensores de orden superior, ver ([Briozzo, 2012](#)). se representa como:

$$\mathbb{T} = T^{ij} e_i e_j$$

**Definición 2.1.13** *El producto interno del espacio vectorial por el productora tensorial se define de la forma:*

$$(e_i \otimes e_j) \cdot (e_k \otimes e_m) = g_{ik}g_{jm} \tag{II.32}$$

De modo análogo, y pensando ahora en los vectores como aplicaciones lineales de  $V^*$  en  $C$ , podemos definir  $V$  como

$$V = \{ \vec{u} : V^* \rightarrow C, \vec{u} \text{ lineal} \}$$

Asimismo, podemos definir el espacio consistente en todos los operadores lineales  $A$  de  $V$  en  $V$ , como el conjunto.

$$T = \{ A : V^* \times V \rightarrow C, A \text{ lineal} \}$$

**Definición 2.1.14** *Entonces un tensor es una aplicación de un espacio vectorial al cuerpo escalar  $C$ . para cualquier orden, osea de la forma general.*

$$\mathbb{T} = \{ \mathbb{A}V \times V \times V \times \dots \times V \rightarrow C, \mathbb{A} \text{ lineal} \}$$

**Definición 2.1.15** *Un tensor es una aplicación multilineal de un espacio vectorial que pertenece a  $T_pM$  y va al cuerpo escalar contenido por  $T_pM$*

$$\bullet : T_pM \otimes T_pM \rightarrow T_pM$$

$$\mathbb{T}, (\vec{A} \otimes \vec{B}) \mapsto (T_{ij}e^i e^j) \cdot (\vec{A} \otimes \vec{B}) = \mathbb{T} (\vec{A} \otimes \vec{B})$$

**Teorema 2.1.7** *Tomando la definición 2.1.15 podemos decir que la forma a tomar los tensores son de la forma siguiente:*

$$\mathbb{T} (\vec{A} \otimes \vec{B}) = T_{ij}A^i B^j \tag{II.33}$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T}(\vec{A} \otimes \vec{B}) &= (T_{ij}e^i e^j) \cdot (\vec{A} \otimes \vec{B}) \\
 &= (T_{ij}e^i \otimes e^j) \cdot (A^k e_k \otimes B^m e_m) \\
 &= T_{ij}A^k B^m (e^i \otimes e^j) (e_k \otimes e_m) \\
 &= T_{ij}A^k B^m e^i \cdot e_k e^j \cdot e_m \\
 &= T_{ij}A^k B^m \delta_k^i \delta_m^j \\
 &= T_{ij}A^i B^j \delta_i^i \delta_j^j \\
 &= T_{ij}A^i B^j
 \end{aligned}$$

**L.q.q.d.**

### Cambio de Coordenadas

El comportamiento de las componentes de un tensor ante un cambio de base en los espacios  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{V}^*$  puede deducirse de la misma forma en que lo hicimos para las componentes de vectores, formas y operadores lineales.

**Teorema 2.1.8** *Si tomamos el teorema 2.1.4 podemos entonces tener el siguiente cambio de componentes de un tensor la forma:*

$$\mathbb{T} = T_{ij}e^i \otimes e^j = T_{i'j'}e^{i'} \otimes e^{j'}$$

$$T_{i'j'} = T_{km} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \tag{II.34}$$

### Demostración

Tomando la forma del tensor:

$$\mathbb{T} = T_{ij}e^i \otimes e^j$$

Usando el teorema 2.1.4 tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T} &= T_{ij} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} e^{k'} \right) \otimes \left( \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} e^{m'} \right) \\
 &= T_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} (e^{k'} \otimes e^{m'})
 \end{aligned}$$

Cambiando los indices.

$$\mathbb{T} = T_{km} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} (e^{i'} \otimes e^{j'})$$

Por lo tanto dando la imposición de igualar  $\mathbb{T} = T_{ij}e^i \otimes e^j = T_{i'j'}e^{i'} \otimes e^{j'}$  obtenemos:

$$T_{i'j'} = T_{km} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}}$$

**L.q.q.d.**

**Nota 2.1.5** *Se ira usando de ahora en adelante el convenio de sumatorio de Einstein ya que como se ve es mucho mas sencillo y rápido, por lo que si se haría por un desarrollo normal se llegaría a llevar dos o tres caras en una demostración.*

### Tensores de orden superior, Notación

Estos objetos matemáticos serán pertenecientes a la aplicación bilineal que corresponda, veamos los casos anteriores de orden uno y de orden dos, pero a parte de tratar el orden es importante ver que existe el tipo del Tensor que tienen la forma:

#### Orden Uno

Estos corresponden a los ya muy conocidos **vectores** y el tensor es la aplicación lineal al cuerpo escalar, dándonos un numero, entonces los tipos son de la forma:

$$\text{Tensor de orden uno} = \begin{cases} \mathbb{T} = T_i e^i \Rightarrow T_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} T_{j'}, & \text{si Tipo}(0, 1) \\ \mathbb{T} = T^i e_i \Rightarrow T^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} T^{j'}, & \text{si Tipo}(1, 0) \end{cases}$$

#### Orden Dos

Estos objetos corresponden a las formas siguientes, el tercer caso se puede volver a los otros dos realizando las transformaciones de variantes y contravariantes.

$$\text{orden dos} = \begin{cases} \mathbb{T} = T_{ij} e^i \otimes e^j \Rightarrow T_{ij} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^j} T_{k'm'}, & \text{si Tipo}(0, 2) \\ \mathbb{T} = T^{ij} e_i \otimes e_j \Rightarrow T^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} T^{k'm'}, & \text{si Tipo}(2, 0) \\ \mathbb{T} = T^i_j e_i \otimes e^j \Rightarrow T^i_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^j} T^{k'm'}, & \text{si Tipo}(1, 1) \end{cases}$$

#### Orden Tres y más

Los tensores de orden superior se expresan de las siguientes formas y muchas más.

$$sup = \begin{cases} \mathbb{T} = T_{ij\dots k} e^i \otimes e^j \otimes \dots \otimes e^k \Rightarrow T_{ijk} = \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^j} \dots \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^k} T^{l'm'n'}, & \text{si } Tipo(0, s) \\ \mathbb{T} = T^{ij\dots k} e_i \otimes e_j \otimes \dots \otimes e_k \Rightarrow T^{ijk} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} \dots \frac{\partial x^k}{\partial x^{n'}} T^{l'm'n'}, & \text{si } Tipo(r, 0) \\ \mathbb{T} = T^i_{jk} e_i \otimes e^j \otimes e^k \Rightarrow T^i_{jk} = \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^k} T^{lmn}, & \text{si } Tipo(1, 2) \end{cases}$$

### 2.1.3. GEODÉSICAS

En  $\mathbb{R}^N$  las rectas son curvas especiales por dos razones distintas. La primera razón es que una recta es la curva más corta entre dos puntos p y q. La segunda es que es la única curva donde el vector tangente está transportado paralelamente a si mismo a lo largo de la curva. En esta sección veremos cómo podemos generalizar cada uno de estos conceptos a variedades más generales, ver (Janssen, 2013).

La distancia de dos puntos según cualquier métrica según la imagen 2.10 que corresponde a una métrica euclidiana pero para el caso genérico lo podemos expresar según la ecuación II.35.

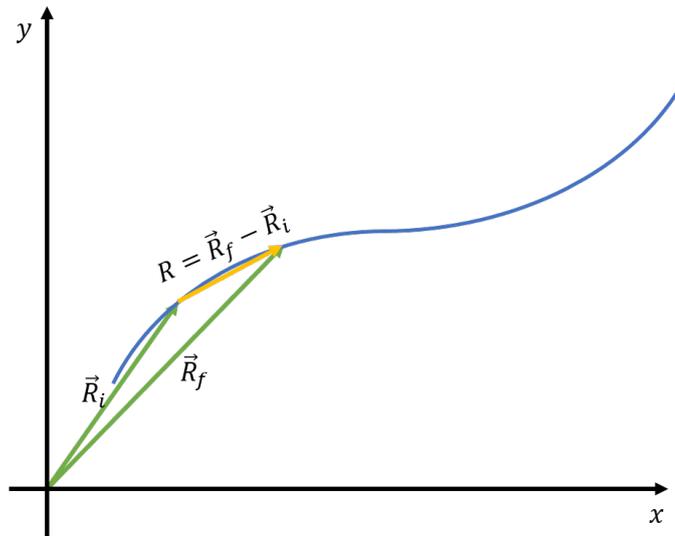


Figura 2.10: Imagen de la mínima distancia en una métrica euclidiana.

$$\Delta s = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \tag{II.35}$$

#### Deducción

Primeramente según la figura 2.10 se puede escribir la distancia de dos puntos por la definición del producto interno.

$$\begin{aligned} R_f - R_i &= A^i e_i - B^i e_i \\ &= (A^i - B^i) e_i \\ &= \Delta x^i e_i \end{aligned}$$

Aplicando el producto interno:

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= (R_f - R_i) \cdot (R_f - R_i) \\ &= \sqrt{(\Delta x^i e_i) \cdot (\Delta x^j e_j)} \\ &= \sqrt{g_{ij} \Delta x^i \Delta x^j} \end{aligned}$$

Haciendo un limite podemos obtener:

$$ds = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

Probando por fin la función a minimizar con la Ecuación que dieron a conocer Leonard Euler y Lagrange conocida por Euler-Lagrange, que corresponde a: (Linares, 2017), (Jetzer, 2016)

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial f}{\partial \left( \frac{dx^i}{d\lambda} \right)} \right) \quad (\text{II.36})$$

En donde la función de la ecuación II.35 se toma la siguiente forma:

$$ds = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda$$

Por lo que la función a poner en la ecuación de Euler-Lagrange sera:

$$f = \sqrt{g_{kj} u^k u^j}$$

En textos podemos consultar el resultado a obtener después de dar con el desarrollo de la ecuación anterior en la ecuación de Euler-Lagrange, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{du^m}{d\lambda} + \frac{1}{2} g^{im} (\partial_k g_{ip} + \partial_p g_{ik} - \partial_i g_{kp}) u^k u^p = - \left( g_{kj} u^k u^j \right)^{1/2} \left[ \frac{d}{d\lambda} \left( g_{kj} u^k u^j \right)^{-1/2} \right] u^m \quad (\text{II.37})$$

Haciendo un cambio de la toma del parámetro de  $\lambda$  por  $s$  ya que el cambio de este parámetro nos da la libertad de poder tener la siguiente ecuación, con la imposición de que  $S$  sea una parámetro reparametrizado.

$$\frac{du^m}{ds} + \frac{1}{2} g^{im} (\partial_k g_{ip} + \partial_p g_{ik} - \partial_i g_{kp}) u^k u^p = 0 \quad (\text{II.38})$$

### 2.1.4. CONEXIÓN

La conexión entre espacios tangentes  $T_P M$ , se da según el cambio que se da en un eje coordenado, lo cual viene a ser:

$$\frac{\partial e_\beta}{\partial x^i} = \Gamma^\gamma e_\gamma \tag{II.39}$$

En donde  $\Gamma$  se llama *símbolos de cristofel* los cuales nos dan los números que acompañan a los vectores de la base, osea nos muestra el *como* se da el cambio. Pero de una forma mejor estudiada y según a la definición 2.1.16 se da la forma precisa de los símbolos de cristofel.

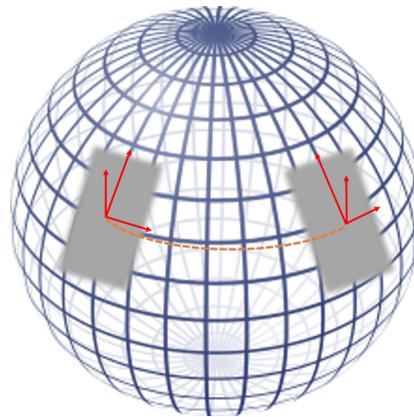


Figura 2.11: Representación de la conexión

**Definición 2.1.16 (Derivada Covariante)** Según el cambio que se tenga un vector en torno a un eje coordenado, el resultado se dice que es igual a la siguiente expresión.

$$\nabla_\alpha A^\beta = \frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} A^\gamma \tag{II.40}$$

y

$$\nabla_\alpha A_\beta = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} A_\gamma \tag{II.41}$$

Por lo tanto los Christoffel con la definición 2.1.16 y de las geodésicas toman la siguiente forma:

$$\Gamma^\alpha_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\gamma g_{\beta\delta} + \partial_\delta g_{\beta\gamma} - \partial_\beta g_{\gamma\delta}) \tag{II.42}$$

**Definición 2.1.17 (Derivada de Lie)** Es la diferencia de dos campos vectoriales, en donde si se tiene que la igualdad da cero quiere decir que tomando dos caminos se llega a un mismo punto en común.

$$\ell_A B^\alpha = A^\beta \nabla_\beta B^\alpha - B^\beta \nabla_\beta A^\alpha \quad (\text{II.43})$$

**Definición 2.1.18 (Vectores de Killing)** *Un vector de Killing nos ha de hablar de la simetría del espacio vectorial, en física se relaciona estrechamente con las cantidades conservadas, lo que corresponde a la ecuación siguiente:*

$$\ell_\xi g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\alpha \xi_\beta - \nabla_\beta \xi_\alpha = 0 \quad (\text{II.44})$$

### 2.1.5. TEORÍA GRAVITATORIA DE NEWTON

Sir Isaac Newton dio lo que se llevo en Europa *Revolucion Científica*” a mediados del siglo XVI hasta finales del XVII. La obra mas reconocida y controversial es desde luego el texto que escribió Isaac Newton en 1687, de titulo: **PRINCIPIA MATHEMATICA**. Estos impresos son los primeros textos que revolucionaron el mundo científico, para mas informacion revisar, ([Guardeno, 2012](#)) . Las leyes que describe Newton nos dan una inmensa información de asuntos mecánicos, lo que trataremos sera el estudio de órbitas, por lo que tenemos que ver a su mayor aportante de esta teoria, y a la vez un sustento de esta teoría, me refiero a las leyes de Kepler, la cual tratamos en la siguiente sección, para poner claras las cosas se escribe la bien conocida ecuación de ley de gravitación de Newton: ([Goldstein, 2006](#)), ([Janssen, 2013](#))

$$\vec{F}_G = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (\text{II.45})$$

**Nota 2.1.6** *El en planteamiento histórico el desarrollo de las leyes de kepler fueron las primeras que dieron lugar a la garivatación, pero en los estudios de hoy en día se toma cualquier forma de enseñanza, uno puede plantear las leyes de kepler y llegar a demostrar la ley de newton, o del caso contrario.*

Recordemos ahora el momento de torque, previamente tenemos:

**Definición 2.1.19 (Momento Angular)** *El momento angular de una partícula o masa puntual con respecto a un punto O del espacio se define como el momento de su cantidad de movimiento p con respecto a ese punto.*

$$\vec{L} = \vec{r}(t) \times \vec{P}(t)$$

El momento angular a de tener tres componentes  $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$  de las cuales dos serán ceros ;  $L_x = 0, L_y = 0$ . Por motivos de que se mueve en un plano, lo cual me quedaría solo la tercera componente  $\vec{L} = (0, 0, L_z)$ . Tomando el vector posición de la forma  $\vec{r}(t) = (x, y, z)$  y la cantidad de momento igual a  $\vec{P}(t) = (P_x, P_y, P_z)$  al desarrollar según la definición de momento angular nos queda  $\vec{L} = (yP_z - zP_y, -(xP_z - zP_x), xP_y - yP_x)$ , comparando, la tercera componente nos queda igual a:

$$L_z = xP_y - yP_x$$

Escribamos esta ecuación en coordenadas polares, tomando:

$$x = r\cos\theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta}$$

$$y = r\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}$$

Remplazando:

$$L_z = m \left[ r\cos\theta (\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}) - r\sin\theta (\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta}) \right]$$

$$L_z = m \left[ r^2\dot{\theta} (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \right]$$

$$L_z = mr^2\dot{\theta}$$

De donde se obtiene la relación del ángulo con el tiempo.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

Tomando las siguientes igualdades se dará la validación de la constancia de la cantidad *momento angular* de la definición 2.1.19

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{II.46}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{II.47}$$

Tomemos la definición de la fuerza gravitatoria de Newton:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

Haciendo un simple arreglo en el vector unitario tenemos:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Por lo que:

$$\vec{\tau} = 0 \tag{II.48}$$

Dado la ecuación II.48 y reemplazando en la ecuación II.46 se puede implicar que:

$$\vec{L} = \vec{C} \tag{II.49}$$

En el estudio de las órbitas planetarias sera interesante tomar en cuenta la representación siguiente para poder obtener algunos valores de posición y velocidad.

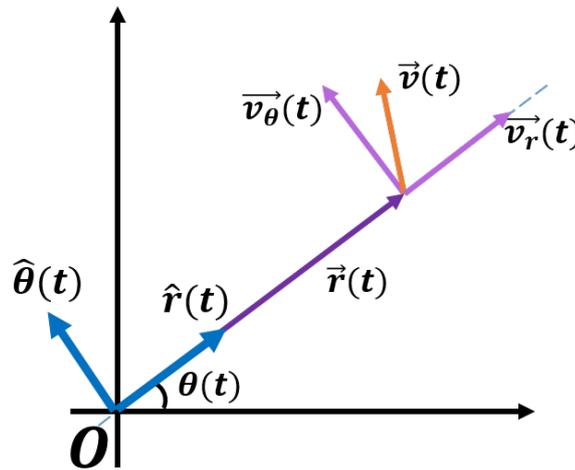


Figura 2.12: Representación de los vectores unitarios

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos \theta(t) \hat{x} + \sin \theta(t) \hat{y} \\ \hat{\theta} = -\sin \theta(t) \hat{x} + \cos \theta(t) \hat{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{r}} = \dot{\theta}(t) \hat{\theta}(t) \\ \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}(t) \hat{r}(t) \end{cases}$$

Entonces se analiza el vector radial  $\vec{r}(t)$ .

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{r}(t)$$

Por lo que derivando tenemos la velocidad:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t) \hat{r}(t) + r(t) \dot{\hat{r}}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \hat{r}(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\theta}(t) \quad (\text{II.50})$$

Dado la ecuación II.49, podemos tener:

$$\vec{L}(t) = cte$$

$$\vec{r} \times \vec{p} = cte$$

Si recordamos el valor de  $\vec{P} = m\dot{\vec{r}}$ , el valor de la masa  $m$  es constante y por lo tanto:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = cte$$

Teniendo la ecuación II.50, obtenemos:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = r(t) \hat{r}(t) \times \left( \dot{r}(t) \hat{r}(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\theta}(t) \right)$$

Teniendo entonces el valor siguiente.

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = r^2(t) \dot{\theta}(t) \hat{z} \quad (\text{II.51})$$

Volviendo a  $\vec{r} \times \vec{p}$ , tenemos según la ecuación II.51 lo siguiente:

$$\vec{r} \times \vec{p} = mr^2(t) \dot{\theta}(t) \hat{z}$$

El momento angular se encuentra como combinación lineal solo en el eje  $\hat{z}$ , de tal forma tenemos:

$$L\hat{z} = \vec{L} = mr^2(t) \dot{\theta}(t) \hat{z}$$

$$r^2(t) = \frac{L}{m\dot{\theta}(t)}$$

Por lo tanto:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{L}{mr^2(t)} \quad (\text{II.52})$$

Ahora bien, recordando la ecuación II.50 de velocidad y la ecuación II.52 anterior se obtiene lo siguiente:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \hat{r}(t) + \frac{L}{mr(t)} \hat{\theta}(t) \quad (\text{II.53})$$

Esta ecuación sera de ayuda para la formulación del campo potencial gravitatorio Newtoniano (TN).

### LEYES DE KEPLER

Johannes Kepler era un hombre que se dedicaba a la astrología, hoy en día esto nos resultara un oficio ridículo, y sobre todo desde el punto de vista científico, pero gracias a esto fue posible que Kepler daría sus grandes aportes, uno de los aportes que mas le podríamos deber a Kepler es el nombre *astrofísica* que el lo acuño al estudio de los astros y aspectos del cosmos, el nombre nace de la unión de la astrología y la astronomía, llamándose el así mismo astrofísico. Algo muy importante de resaltar de la vida de Kepler es que este hombre es el primero en hacer una novela científica, en ella tuvo un propósito netamente didáctico como todos los textos divulgativos de esta época, entre las obras cumbre se tiene: en 1597 *Mysterium cosmographicum*, en 1604 *Astronomia pars optica*, en 1609 *Astronomia nova* (en la cual se pronuncian las dos primeras leyes), en 1618 *Harmonice mundi* (en donde se pronuncia las tercera ley), en 1621 *Epitome astronomiae copernicanae*. El 15 de Noviembre de 1630 en una de sus paradas de un viaje a Linz falleze de una extraña enfermedad a la edad de 59 años. Mas informacion consultar, (López, 2012), (Goldstein, 2006)

- 1) **Primera Ley:** Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.

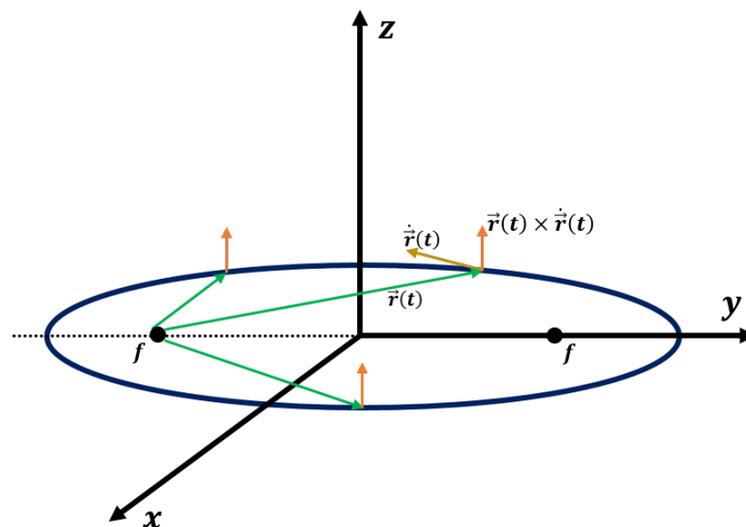


Figura 2.13: Representación gráfica de la primera ley de Kepler

Observando la figura 2.13 podemos decir que la órbita de un planeta se da en un plano, y

efectivamente es de esta manera, la cuestión es que como podemos demostrarlo; tomemos la siguiente derivación:

$$= \frac{d}{dt} (\vec{r}(t) \times \vec{r}'(t))$$

Pasamos a derivar y se obtiene:

$$= \vec{r}'(t) \times \vec{r}'(t) + \vec{r}(t) \times \vec{r}''(t)$$

Recordemos que  $\vec{r}''(t)$  es definición de aceleración y por tanto haciendo corresponder con la segunda ley de Newton tenemos:

$$\vec{r}''(t) = a = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = \frac{f(r) \vec{r}(t)}{m} \quad (\text{II.54})$$

Por lo que reemplazando a la derivación que teníamos previamente se obtiene:

$$= \vec{r}'(t) \times \frac{f(r)}{m} \vec{r}(t) = 0 \quad (\text{II.55})$$

Ya que da el valor de cero, podemos decir que el factor derivado es una constante:

$$\vec{r}(t) \times \vec{r}'(t) = \vec{C} \quad (\text{II.56})$$

Por lo que:

$$-\vec{r}(t) \perp \vec{C}$$

$$-\vec{r}'(t) \perp \vec{C}$$

Entonces decimos: Dados los factores  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{r}'(t) \in$  plano fijo  $\perp \vec{C}$ .

- 2) **Segunda Ley:** El radio vector que une un planeta y el Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.

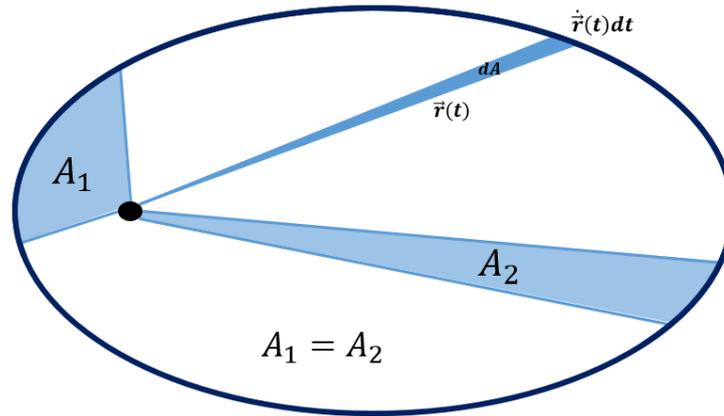


Figura 2.14: Representación gráfica de la segunda ley de Kepler

Tomando la figura 2.14 podemos decir que:

$$dA = \frac{|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) dt|}{2}$$

Tomando la diferencial y multiplicamos por la la masa y a la vez dividimos tenemos:

$$dA = \left| \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) m \right| \frac{dt}{2m}$$

Según la definición de momento angular tenemos simplificada la ecuación de la forma:

$$dA = \left| \vec{r}(t) \times \vec{P}(t) \right| \frac{dt}{2m}$$

$$dA = \frac{|\vec{L}|(t)}{2m} dt \tag{II.57}$$

Se toma ahora la derivada del área con respecto del tiempo quedándonos de la siguiente manera:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\vec{L}(t)}{2m} \tag{II.58}$$

Donde  $m$  es constante y  $\vec{L}$  es también constante según la primera ley de Kepler, por lo que se tiene:

$$\frac{dA}{dt} = C \tag{II.59}$$

Quedándonos entonces que el barrido de áreas con respecto al tiempo es igual a una constante, en otras palabras la segunda ley de Kepler queda demostrada.

- 3) **Tercera Ley:** Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.

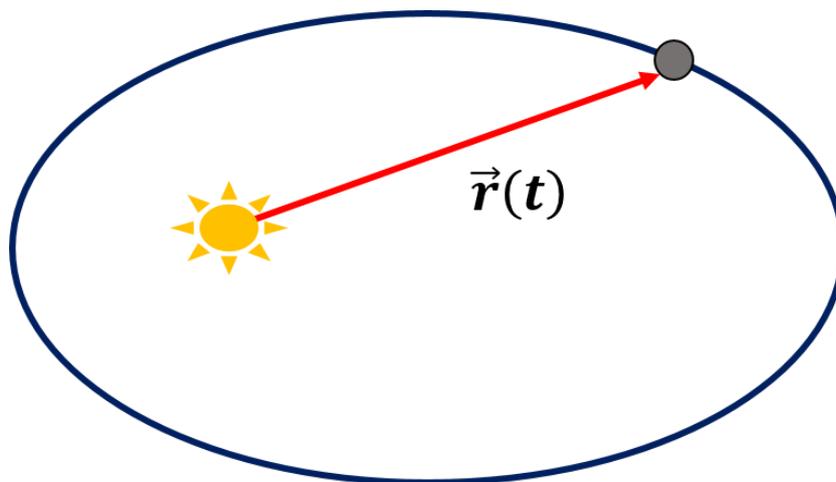


Figura 2.15: Representación gráfica de la tercera ley de Kepler

Matemáticamente:

$$T^2 \propto a^3 \tag{II.60}$$

En donde la constante de proporcionalidad es demostrada por Newton, quedando:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \tag{II.61}$$

**Demostración**

Para casos de trayectorias circulares, tenemos:

$$\sum F_r = ma_c$$

En donde la aceleración centrípeta, esta dada por:

$$a_c = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

La fuerza gravitacional dada por Newton, se expresa como:

$$\vec{F} = \frac{GMm}{r^2} (-\hat{r})$$

Reemplazando entonces en la segunda ley de Newton, decimos:

$$\vec{F} = \frac{GMm}{r^2} (-\hat{r}) \quad (\text{II.62})$$

Con la definición de frecuencia como  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  podemos decir entonces que:

$$\frac{GMm}{r^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad (\text{II.63})$$

quedándonos así la ecuación de la tercera ley de Kepler.

**L.q.q.d.**

### 2.1.6. TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

En Dinamarca, un astrónomo muy escrupuloso con las mediciones, Tycho Brahe, dispuso de toda una isla (Hven) para hacer sus cálculos en un observatorio (Uraniborg) sin restricción económica alguna. Después se sabría que el hombre descrito anteriormente, Johannes Kepler sería el que lo ayudaría a acabar este trabajo, pero quizá es conveniente mencionar al personaje que dio inicio a todo el estudio astronómico, me refiero al astrónomo polaco Nicolás Copérnico que en 1543 publica *De revolutionibus orbium coelestium*, libro en donde osaba decir que la Tierra giraba en torno al Sol, y no al revés. para mas información, ([Diaz, 2012](#)), el termino de relatividad ya se tenía en consideración desde la época de Galileo Galilei con sus transformación de coordenadas, pero nadie esperaba que se pudiera dar un gran cambio hasta la llegada de ALbert Einstein en el año de 1905 en donde propone su ley de la relatividad especial, en 1915 logra incluir la gravedad a su teoría, llamándola ahora Teoria General de la Relatividad, mas informacion, ([Lasekna, 2012](#)). Entonces ahora se mostrara el espacio-tiempo de Minkowski para poder ver un poco la similitud que habrá con la del espacio-tiempo de Schwarzschild, con el se dará el estudio de esta investigación, se detalla mas adelante. Para mas información matemática revisar ([Hartle, 2003](#)), ([d'Inverno, 1992](#)) aun así el mas completo es sin dudas ([Blau, 2011](#)).

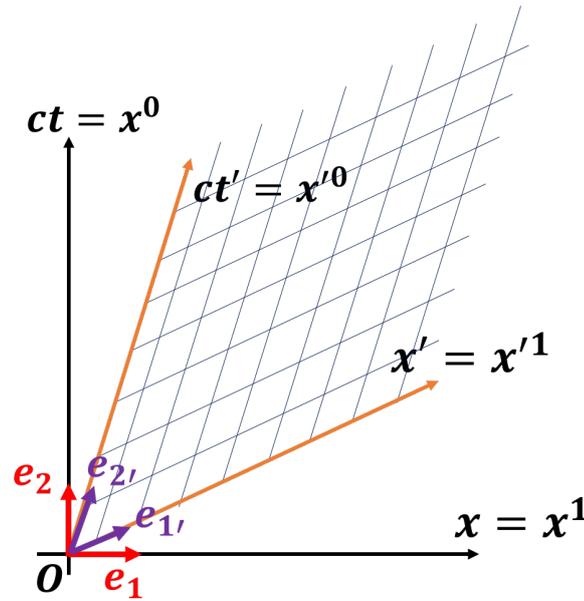


Figura 2.16: Espacio-Tiempo de Minkowski

El formalismo que se detalla a continuación es la versión matemática del trabajo de Albert Einstein, el matemático Alemán Hermann Minkowski desarrolla la teoría de la relatividad especial, el cual parte de los dos postulados de la relatividad especial:

- ♠ Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales. (Movimiento Rectilíneo uniforme)
- ♠ La velocidad de la luz es una constante universal, que es independiente del movimiento de la fuente de luz (Invarianza de C)

Entonces según la figura 2.16, lo que aremos será cambiar las coordenadas típicas por unas coordenadas que logren describir los postulados, con la ayuda del principio de simultaneidad. El cambio de coordenadas será de  $(ct, x) \rightarrow (ct', x')$  por lo que según algunos cálculos el nuevo espacio corresponde las bases siguientes:

$$\begin{cases} e_{0'} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} (e_0 + \frac{v}{c} e_1) \\ e_{1'} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} (\frac{v}{c} e_0 + e_1) \end{cases}$$

Donde: en libros se les define a los siguientes términos como:

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Ahora bien, las métricas que obedecen esta transformación de coordenadas, son: La antigua  $g_{\mu\nu}$  la nueva  $g_{\mu'\nu'}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.64})$$

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.65})$$

La consideración mas importante en relatividad es el análisis tensorial de los objetos (Blau, 2011), por lo que en relatividad se toma indices griegos en vez de latinos que es como se escribió en un inicio,  $(i, j, \dots) \rightarrow (\alpha, \beta, \dots)$ , ver teorema 2.1.4 la ecuación  $e_{\alpha'} = \partial_{\alpha} x^{\beta} e_{\beta}$ , al imponer esta ecuación se tiene la transformación de coordenadas, llamadas también transformación de Lorentz, por el físico Neerlandés Hendrik Antoon Lorentz, galardonado con el premio Nobel de física en el año de 1902.

$$\begin{cases} x^0 = \gamma x^{0'} + \gamma \beta x^{1'} \\ x^1 = \gamma \beta x^{0'} + \gamma x^{1'} \end{cases}$$

Aunque lo mas conocido es la inversa, y la mas utilizada desde luego, la transformación es la siguiente:

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma x^0 - \gamma \beta x^1 \\ x^{1'} = -\gamma \beta x^0 + \gamma x^1 \end{cases}$$

Tomando entonces el vector de la forma  $\Delta x^0 e_0 + \Delta x^1 e_1$ , y el tensor métrico de este espacio - tiempo, ecuaciones II.64 II.65, introduciendo al elemento de linea  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$  se obtiene:

$$ds^2 \equiv - (dx^0)^2 + (dx^1)^2 = (dx^{0'})^2 + (dx^{1'})^2$$

$$ds^2 \equiv -c^2 dt^2 + dx^2 \quad (\text{II.66})$$

Este es el elemento de linea o métrica del espacio - tiempo de Minkowski. (Landau and Lifshitz, 1971)

Albert Einstein dio a conocer todos sus puntos de vista desde 1905, con las publicaciones de varios artículos seminales acerca del movimiento browniano, la naturaleza corpuscular de la luz, la equivalencia entre masa y energía y sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento (artículo en donde nace la relatividad). Resalto los siguientes cuadros en inglés y español.

Year	Publications
1905	<i>Concerning an Heuristic Point of View Toward the Emission and Transformation of Light</i>
1905	<i>On the Motion of Small Particles Suspended in Liquids at Rest Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat</i>
1905	<i>On the electrodynamics of moving bodies</i>
1905	<i>Does the inertia of a body depend upon its energy-content?</i>
1905	<i>investigations on the theory of, the browian movement</i>

Cuadro 2.1: Lista de las publicaciones de Albert Einstein en inglés

Año	Publicaciones
1905	<i>Punto de vista heurístico concerniente a la emisión y la transformación de la luz</i>
1905	<i>Movimiento de partículas pequeñas suspendidas en líquidos en reposo exigido por la teoría cinético-molecular del calor</i>
1905	<i>Electrodinámica de los cuerpos en movimiento</i>
1905	<i>¿La inercia de un cuerpo depende de su contenido de energía?</i>
1905	<i>Investigaciones sobre la teoría del movimiento browniano</i>

Cuadro 2.2: Lista de las publicaciones de Albert Einstein en español

Algunas situación importantes en el transcurso de la historia de la relatividad, lo reflejo en el siguiente cuadro; en donde se puede apreciar que el primero dice *primera solución*, osea la primera persona que dio una solución a las ecuaciones de campo de Einstein E.C.E., la cual es la métrica de Schwarzschild y que se estudiara en la siguiente sección.

Año	Nombre	Aporte
1916	Schwarzschild	Primera solución
1939	Oppenheimer & Snyder	Colapso gravitatorio
1963	Kerr	solucion con rotacion
1972	Hawking	Emiten radiacion

Cuadro 2.3: Datos importantes en la relatividad sobre agujeros negros

### 2.1.7. MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD



El físico y matemático Karl Schwarzschild de origen alemán, fue un pionero en la teoría cuántica como también en la relatividad, en donde dio soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein E.C.E., así también logro el avance hacia las ideas sobre agujeros negros que ahora podemos confirmar, con las investigaciones que se dan en todo el mundo. Lo mas importante para el trabajo del calculo de la precesión de órbitas es trabajar con la métrica que dio Schwarzschild, entonces primeramente se expone algunos conceptos previos acerca de esta métrica.

Figura 2.17: Retrato de Karl Schwarz- (Lambourne, 2010) (Landau and Lifshitz, 1971).

child

Los productos escalares son:

$$g_{00} = - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)$$

$$g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

$$g_{22} = r^2$$

$$g_{33} = r^2 \text{Sen}^2 \theta$$

Por lo que el tensor métrico viene dado de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{Sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{II.67})$$

Para algunos casos tendremos la necesidad de saber en tensor métrico de la forma dual:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2GM}{c^2 r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{II.68})$$

Por lo tanto el elemento de línea según los argumentos anteriores tendremos:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Sustituyendo:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \text{Sen}^2 \theta (d\phi)^2 \quad (\text{II.69})$$

Para acotar la escritura de este elemento de línea se toma la siguiente igualdad:

$$(d\Omega)^2 = r^2 (d\theta)^2 + r^2 \text{Sen}^2 \theta (d\phi)^2$$

De donde nos queda:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} (dr)^2 + (d\Omega)^2 \quad (\text{II.70})$$

### Radio de Schwarzschild

Se toma la siguiente igualdad, a la que se le asigna el nombre de radio de Schwarzschild.

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (\text{II.71})$$

### Masa de Schwarzschild

El nombre que se designa corresponde a la siguiente igualdad, para simplificar algunos cálculos y de escritura.

$$m = \frac{GM}{c^2} \quad (\text{II.72})$$

### Símbolos de Christoffel

En este Espacio - Tiempo podemos notar cuatro casos de simplicidad al momento de calcular los símbolos de Christoffel, de la ecuación II.42 tenemos:

$$\Gamma_{bc}^a = 0$$

$$\Gamma_{ab}^a = \Gamma_{ba}^a = \frac{1}{2} g^{aa} \partial_b g_{aa}$$

$$\Gamma_{bb}^a = -\frac{1}{2} g^{aa} \partial_a g_{bb}$$

$$\Gamma_{aa}^a = \frac{1}{2} g^{aa} \partial_a g_{aa}$$

Entonces con la ayuda de las ecuaciones II.67 y II.68 se logra encontrar de manera sencilla las siguientes 9 símbolos de Christoffel.

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{GM}{r^2 c^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{GM}{r^2 c^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{GM}{r^2 c^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \text{Sen}^2 \theta \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\text{Sen} \theta \text{Cos} \theta$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{32}^3 = \cot \theta$$

### Tensor de Riemann

En la teoría General de la Relatividad, existen tres tensores que son de muy importancia para estudiar y especificar la curvatura de un espacio-tiempo curvo: el tensor de Einstein  $G$ , el tensor de Ricci y el tensor de Riemann  $R$ . Por lo tanto usando la siguiente fórmula: (d'Inverno, 1992)

$$(\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_\beta \partial_\alpha) e_\gamma = R^\sigma{}_{\gamma\alpha\beta} e_\sigma \quad (\text{II.73})$$

Podemos entonces calcular los tensores de Riemann de esta métrica de Schwarzschild.

$$R^1{}_{221} = \frac{GM}{rc^2}$$

$$R^0{}_{202} = -\frac{GM}{rc^2}$$

$$R^0{}_{101} = \frac{2GM}{r^2(rc^2 - 2GM)}$$

$$R^0{}_{303} = -\frac{2GM}{r^2(rc^2 - 2GM)}$$

$$R^1{}_{331} = \frac{GM \sin^2 \theta}{rc^2}$$

$$R^1{}_{001} = \frac{2GM(rc^2 - 2GM)}{r^4 c^4}$$

$$R^2{}_{121} = \frac{GM}{r^2(-rc^2 + 2GM)}$$

$$R^2{}_{332} = -\frac{2GM \sin^2 \theta}{rc^2}$$

$$R^2{}_{002} = \frac{GM(-rc^2 + 2GM)}{rc^2}$$

$$R^3{}_{131} = \frac{GM}{r^2(rc^2 - 2GM)}$$

$$R^3{}_{232} = \frac{2GM}{rc^2}$$

$$R^3{}_{003} = \frac{GM(-rc^2 + 2GM)}{r^4 c^4}$$

### Cantidades Conservadas

Las cantidades fundamentales en física son el momento angular y la energía (Blau, 2011), las cuales obtendremos de la definición 2.1.18.

**Definición 2.1.20 (Energía)** *Según el calculo de las ecuaciones de Killing para hallar cantidades conservadas en un espacio, se obtiene la energía como:*

$$\underline{p} \cdot \xi^{(temporal)} = -\frac{E}{c} \quad (\text{II.74})$$

Con esta definición podemos trabajar para llegar a un resultado muy importante para la ecuación de órbitas planetarias. Desarrollando:

$$m\underline{u} \cdot \xi^{(temporal)} = -\frac{E}{c}$$

$$mu^\alpha e_\alpha \cdot e_0 = -\frac{E}{c}$$

El índice  $\alpha$  a de tomar el valor 0 por que de esta forma existe.

$$mu^0 e_0 e_0 = -\frac{E}{c}$$

Remplazando lo que corresponde:

$$m \frac{d(ct)}{d\tau} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) = -\frac{E}{c}$$

Por lo tanto obtenemos la relación.

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \quad (\text{II.75})$$

**Definición 2.1.21 (Momento Angular)** *Con el estudio de los vectores de Killing se da la definición del momento angular de la forma:*

$$m\underline{u} \cdot \xi = \text{cantidad conservada} \quad (\text{II.76})$$

Con la definición anterior calculamos la cantidad relacionada con el momento angular.

$$mu^\alpha \cdot e_\alpha e_3 = J$$

Con  $\alpha$  igual a 3 ya que es el único caso de existencia.

$$mu^3 e_3 \cdot e_3 = J$$

Recordando que  $g_{33}$  es igual a  $e_3 \cdot e_3$ .

$$mu^3 g_{33} = J$$

Reemplazando lo que corresponde:

$$m \frac{d\phi}{d\tau} r^2 \text{Sen}^2\theta = J$$

Obtenemos:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{J}{mr^2 \text{Sen}^2\theta} \tag{II.77}$$

Pero tomamos un angulo en particular de la órbita, tomaremos un caso ideal de  $\theta = \pi/2$  para poder obtener 1 en el calculo del  $\text{Sen}^2\theta$ . Con esto asumido decimos que la órbita se da en el plano  $\mathbb{R}^2$  simplemente, ver figura 2.18. Con lo que obtenemos:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{J}{mr^2} \tag{II.78}$$

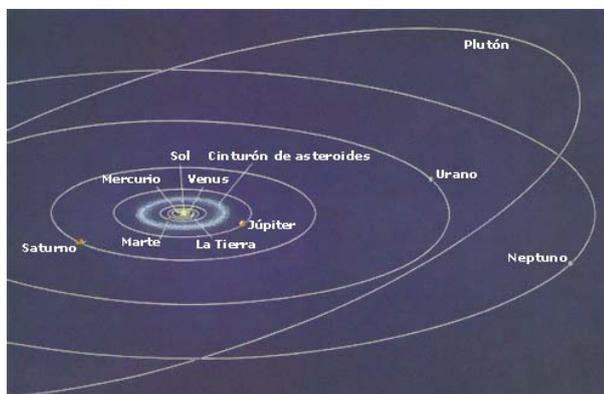


Figura 2.18: Diagramas de las órbitas de los planetas en general

## 2.2. MARCO CONCEPTUAL

**BIESEL, OWEN (2008).** En este artículo titulado *The Precession of Mercury's Perihelion*, se da una demostración de que la Relatividad General predice un índice de precesión del perihelio en la órbita de Mercurio alrededor del Sol (cuando las influencias debidas a otros planetas ya todos han sido contabilizados). La investigación llevo a las siguientes principales conclusiones:

1. Mercurio es una partícula de prueba que viaja a lo largo de una geodésico de este espacio-tiempo.
2. En la derivación del Schwarzschild se pudo tomar ese espacio-tiempo como asintóticamente plano.

**ZAIN, PATRICIO (2014).** En su artículo de investigación titulada *Relatividad General en Sistemas Planetarios*, en el cual el objetivo centra es presentar el efecto de la Relatividad General en la dinámica de los cuerpos que forman parte de los sistemas planetarios, tanto en el Sistema Solar como en Sistemas Extrasolares. Existe una población creciente de cuerpos menores en el Sistema Solar, y planetas extrasolares muy masivos con órbitas muy cercanas a la estrella central, donde la relatividad general tiene un efecto importante. Por lo tanto estos efectos relativistas son un tema de estudio actual muy importante dentro de las Ciencias Planetarias y la Mecánica Celeste. La investigación llevo a las siguientes principales conclusiones:

1. Los efectos relativistas generados por el Sol son relevantes para el argumento del perihelio, y son seculares.
2. El apartamiento entre las trayectorias clásicas y relativistas se amplifica en el Sistema Solar interior.
3. Para asteroides de baja distancia perihelica y semieje mayor, las contribuciones relativistas del Sol son suficientes para modelar su dinámica.

Este articulo tiene una gran importancia ya que muestra unas comparaciones numéricas de las teorías newtoniana y relativista, con lo cual da las conclusiones mencionadas líneas arriba.

**JOSE D, ÁVILA (2016).** En este artículo de título *Modelamiento de trayectorias gravitacionales alrededor de grandes cuerpos macroscópicos mediante la utilización de funciones anidadas en la forma de ecuaciones paramétricas*, de la carrera de Ingeniería Química en la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogota - Colombia, se expone como obtener unas ecuaciones paramétricas que permiten el modelamiento de trayectorias orbitales de objetos alrededor de grandes cuerpos macroscópicos, en particular los agujeros negros, sin el empleo de cálculo tensorial. El modelo matemático propuesto permite caracterizar trayectorias de parejas de agujeros negros utilizando parámetros cuyo valor depende básicamente de números enteros, de un modo muy semejante a como ciertos números cuánticos determinan estados cuánticos del átomo de hidrógeno, posibilitando un simple sistema de taxonomización de las mismas. La investigación llevo a las siguientes principales conclusiones:

1. En el presente trabajo se da la posibilidad de obtener una descripción matemática de trayectorias orbitales producidas por efecto de la gravitación -en especial el régimen de campo fuerte - a partir de transformaciones matemáticas realizadas sobre las ecuaciones paramétricas de un círculo.
2. El parámetro  $k$  dentro de la ecuación conocida en relatividad general para la ruta geodésica a través de un espacio-tiempo curvo, tiene la misma incidencia que el de  $k$  en la ecuación propuesta sobre la forma de las geometrías derivadas de estos esquemas matemáticos.

$$\begin{cases} x = \cos(f_x t) e^{q_x t} \cosh\left(\left(e^{\cos(p_x t)}\right)^{k_x}\right) \\ y = \cos(f_y t) e^{q_y t} \cosh\left(\left(e^{\cos(p_y t)}\right)^{k_y}\right) \\ z = \cos(f_z t) e^{q_z t} \cosh\left(\left(e^{\cos(p_z t)}\right)^{k_z}\right) \end{cases}$$

3. El modelo desarrollado presenta la ventaja de no estar sus parámetros haciendo parte de una división que pueda conducir al anularse sus valores a indeterminaciones o resultados infinitos.

Se escoge este artículo como una opción en el entendimiento de la programación ya que en el paper nos da ecuaciones a programas en forma paramétrica.

**POLLOCK, CHRIS (2003).** En su trabajo de investigación titulada *Mercury's Perihelion*, en la cual trata la formulación teórica de la formulación relativista encontrando ecuaciones que nos permiten dar la predictibilidad de la preesión de la órbita de mercurio. La investigación llegó a las siguientes principales conclusiones:

1. El cambio en el perihelio se observó inicialmente solo en la órbita de Mercurio
2. Más recientemente, se ha observado una desviación significativa del perihelio en otros planetas. Los cálculos de Einstein predicen un cambio para Venus de 8,6 segundos de arco por siglo

Para tener más información de temas matemáticos y de forma como trabajar la métrica es que es necesario este artículo en la investigación presente.

**SOLEDAD NEGRELLI, CAROLINA (2014).** En su trabajo de investigación titulada *Agujero negro regular en la geometría de Schwarzschild ? de Sitter*, en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de la Plata, en la cual trata de un trabajo referido a la Astrofísica de Agujeros Negros, se centra el trabajo de las ecuaciones de campo de Einstein y a su vez muestra la solución más usada de estas ecuaciones la cual es la métrica de Schwarzschild. La investigación llegó a las siguientes principales conclusiones:

1. El cambio en el perihelio se observó inicialmente solo en la órbita de Mercurio
2. Más recientemente, se ha observado una desviación significativa del perihelio en otros planetas. Los cálculos de Einstein predicen un cambio para Venus de 8,6 segundos de arco por siglo

Se centra más en los agujeros negros pero este trabajo nos muestra el desarrollo de schwarzschild el cual es necesario para el estudio de la curvatura de la luz en presencia de cuerpos masivos y también en el desarrollo de la curva a seguir un cuerpo frente a un cuerpo masivo.

## Capítulo III

### III. MATERIALES Y MÉTODO

Teniendo bien en claro la base teórica redactada en el capítulo anterior, se dará ahora la concepción del método a usar, juntamente con el uso de las herramientas matemáticas para primero mostrar las ecuaciones que describen el movimiento de los planetas según las dos formulaciones teóricas TR y TN. Entonces a continuación se desarrolla las dos formulaciones, con las cuales se realizara el programa en Matlab.

#### 3.1. UBICACIÓN GEOGRÁFICA DEL ESTUDIO

La investigación esta enfocado al planeta mercurio, el cual esta ubicado en la órbita mas próxima al Sol del Sistema Solar, apenas a unos 58 millones de kilómetros.

#### 3.2. PERIODO DE DURACIÓN DEL ESTUDIO

El periodo de duración de la realizaron del trabajo de investigación, rondo unos 6 meses, desde finales de Julio y finales de diciembre del año 2018.

actividades	2018						2019
	J	A	S	O	N	D	Noviembre
Revisión bibliografica	x	x	x	x			
Ejecución del proyecto					x		
Presentación del proyecto					x		
Revisión y aprobación del proyecto						x	
Ejecución del borrador de tesis			x	x	x	x	
Sustentación							x

Figura 3.1: Periodo de realización de tesis

#### 3.3. PROCEDENCIA DEL MATERIAL UTILIZADO

1. Matemáticas.
2. Datos del planeta Mercurio.
3. Programa Matlab

### 3.4. POBLACIÓN Y MUESTRA DEL ESTUDIO

Se analiza al planeta mercurio de su irregularidad al dar su movimiento de traslación alrededor del sol.

### 3.5. PROCEDIMIENTO Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

#### 3.5.1. FORMULACIÓN NEWTONIANA

Tomemos entonces la teoría de Newton para empezar, de una manera casi parecida se tiene texto (Goldstein, 2006). La energía del sistema a de ser la suma de la cinética y la potencial, por lo que tenemos de la forma:

$$E = K + U \quad (\text{III.1})$$

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{GMm}{r}$$

Tomando la ecuación II.53.

$$E = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2(t) + \frac{L^2}{m^2 r^2(t)} \right) - \frac{GMm}{r}$$

Realizando los arreglos respectivos tenemos el potencial gravitatorio Newtoniano (PN) de la forma:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2(t) + \frac{L^2}{2mr^2(t)} - \frac{GMm}{r} \quad (\text{III.2})$$

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2(t)} - \frac{GMm}{r} \quad (\text{III.3})$$

Procedamos a derivar con respecto al tiempo, una cuestión importante desde luego ya que el cambio con respecto del tiempo es lo que nos interesa. El primer termino de la derecha corresponde a la energía cinética, el segundo termino corresponde al potencial centrifugo y por ultimo y mas importante son los dos últimos términos a lo cual recibe el nombre de *Potencial Efectivo* denotado por  $U_{eff}$ . Obteniendo:

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{r}^2(t) \right) + \frac{d}{dt} (U_{eff}(r))$$

AL derivar se tiene:

$$0 = m\ddot{r}(t)\dot{r}(t) + \frac{\partial U_{eff}(r)}{\partial r} \frac{dr}{dt}$$

$$m\ddot{r}(t) = -\frac{\partial}{\partial r} U_{eff}(r)$$

Reemplazando el valor de  $U_{eff}$  y derivando con respecto a  $r$  se obtiene:

$$m\ddot{r}(t) = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2} \quad (III.4)$$

Esta ecuación nos da la posición del cuerpo, pero al querer saber las órbitas necesitamos expresarla en términos de  $r$  y  $\theta$ , es por eso que según el siguiente cambio de variable se lograra.

$$r = \frac{1}{u(\theta)} \quad (III.5)$$

Introduciendo este cambio de variable a la primera derivada de  $r$  con respecto al tiempo  $t$  se tiene:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\frac{1}{u(\theta)}}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

Recordando de la ecuación II.52.

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m} u^2$$

Por lo que se tiene:

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{L}{m} u^2$$

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \quad (III.6)$$

Derivando por segunda vez:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) = \ddot{r} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \right)$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt}$$

Teniendo en cuenta la ecuación III.6.

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{L}{m} u^2$$

De donde se tiene:

$$\ddot{r} = -\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (\text{III.7})$$

Ahora, tomando la ecuación III.7 y reemplazando en la ecuación III.4, se tiene:

$$m \left( -\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) = \frac{L^2}{m} u^3 - GMmu^2$$

Haciendo algunos arreglos o procesos lógicos se obtiene:

$$-\frac{L^2}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{L^2}{m} u - GMm$$

Y finalmente se obtiene la ecuación de **Binet**, que es de la forma:

$$\boxed{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}} \quad (\text{III.8})$$

Esta ecuación es la que describe las órbitas planetarias, esta ecuación no se introducirá en el programa, lo que se programe será la solución de esta ecuación, entonces para solucionar esta ecuación procedemos por los casos de solución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de coeficientes constantes (esta teoría no es muy relevante para esta investigación, razón por la cual no se detallará a profundidad):

Tomemos entonces como solución de esta ecuación diferencial la suma siguiente:

$$u = u_p + u_g \quad (\text{III.9})$$

Para la solución general  $u_g$  igualamos la ecuación a cero, como:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = 0 \quad (\text{III.10})$$

Esta ecuación acepta la solución siguiente

$$u_g = A \cos(a\theta + \phi)$$

De donde al derivar e introducir a la ecuación III.10, el valor de  $c$  toma el valor de 1, la constante  $\phi$  como es parámetro de fase la optamos por el valor de cero, quedándonos:

$$u_g = A \cos(\theta)$$

El valor de  $A$  como constante la igualamos al valor de:

$$A = -e \frac{GMm^2}{L^2}$$

Ahora para el valor de la solución particular se toma simplemente de la forma:

$$u_p = \frac{GMm^2}{L^2} \tag{III.11}$$

Remplazando a la ecuación III.9 y realizando la factorización necesaria llegamos a:

$$u = \frac{GMm^2}{L^2} (1 - e \cos \theta) \tag{III.12}$$

Recordando el cambio de variable que se hizo, de  $u = 1/r$ , podemos entonces describir la ecuación anterior de la forma.

$$r(\theta) = \frac{L^2}{GMm^2 (1 - e \cos \theta)} \tag{III.13}$$

Tomando la base teórica del capítulo anterior podemos decir que esta ecuación representa una elipse.

### 3.5.2. FORMULACIÓN RELATIVISTA

Como segundo proceso, pasamos a obtener las ecuaciones importantes y necesarias para la programación, la ecuación de **Binet** relativista (EBR), se encuentra del análisis de la métrica de Schwarzschild, ecuación II.69. El factor de la izquierda se toma igual a  $-c^2(d\tau)^2$ , ya que nuestro observador se mantiene pegado en el objeto y por tanto se tiene esta equivalencia de tiempo propio. También se puede entender como que el objeto está acoplado a la trayectoria del planeta o cuerpo, dando así que sus medidas de  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  son iguales a 0. Por lo tanto se tiene: (recordar  $\theta = 0$ ) (d'Inverno, 1992)

$$-c^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

Recordando las ecuaciones II.75 y II.78

$$-c^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 \left(\frac{E}{mc^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{J}{mr^2}\right)^2$$

Realizando un poco de trabajo matemático, se llega a:

$$-c^2 = - \frac{E^2}{m^2 c^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2}$$

$$-c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) = -\frac{E^2}{m^2c^2} + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$$

$$-c^2 + \frac{2GM}{r} = -\frac{E^2}{m^2c^2} + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$$

Factorizando  $c^2$  en la parte izquierda de la igualdad.

$$\frac{E^2}{m^2c^2} - c^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) - \frac{2GM}{r}$$

$$c^2 \left[ \left(\frac{E}{m^2c^2}\right)^2 - 1 \right] = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) - \frac{2GM}{r}$$

Entonces, arreglando un poco se obtiene la siguiente ecuación que corresponde al campo potencial gravitatorio de la relatividad general (PR).

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) - \frac{2GM}{r} = c^2 \left[ \left(\frac{E}{m^2c^2}\right)^2 - 1 \right] \quad (\text{III.14})$$

$$\frac{mc^2}{2} \left[ \left(\frac{E}{m^2c^2}\right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{2mr^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) - \frac{GMm}{r} \quad (\text{III.15})$$

$$U_{eff} = \frac{J^2}{2mr^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) - \frac{GMm}{r} \quad (\text{III.16})$$

Para continuar y encontrar la ecuación de Binet tomaremos la ecuación III.14, y procesemos a hacer el cambio de variable, de la manera siguiente:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau}$$

Usando la ecuación II.78, se obtiene:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{J}{mr^2}$$

Por tanto introduciendo este valor a la ecuación III.14, se tiene.

$$\left(\frac{J}{mr^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) - \frac{2GM}{r} = c^2 \left[ \left(\frac{E}{m^2c^2}\right)^2 - 1 \right]$$

Despejando la ecuación para la diferencial del radio con respecto a  $\phi$ .

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) - m^2r^3 \frac{2GM}{J^2} = \left(\frac{mcr^2}{J}\right)^2 \left[ \left(\frac{E}{m^2c^2}\right)^2 - 1 \right] \quad (\text{III.17})$$

Del mismo modo que en el caso Newtoniano se toma el cambio de  $r = 1/u(\phi)$ , para así obtener:

$$\left(\frac{d\frac{1}{u}}{d\phi}\right)^2 = \left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2$$

E incorporando este resultado a la ecuación III.17

$$\frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{u^2} - \frac{2GM}{uc^2} - m^2 \frac{2GM}{J^2} \frac{1}{u^3} = \left(\frac{mc}{J}\right)^2 \left[ \left(\frac{E}{m^2 c^2}\right)^2 - 1 \right] \frac{1}{u^4}$$

Realizando los arreglos necesario se puede llegar a:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - \frac{2GMu^3}{c^2} - m^2 \frac{2GM}{J^2} u = \left(\frac{mc}{J}\right)^2 \left[ \left(\frac{E}{m^2 c^2}\right)^2 - 1 \right]$$

De una mejor manera se tiene:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \left(\frac{mc}{J}\right)^2 \left[ \left(\frac{E}{m^2 c^2}\right)^2 - 1 \right] + \frac{2GMm^2}{J^2} u + \frac{2GMu^3}{c^2}$$

Ahora simplemente se deriva con respecto a  $\phi$  y así finalmente se obtiene la ecuación de **Binet** para el caso relativista , que es de la forma:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GMm^2}{J^2} + \frac{3GMu^2}{c^2}} \quad (III.18)$$

Para dar solución a esta ecuación diferencial, primeramente tomaremos el parámetro con el cual se tiene una solución por serie.

$$\varepsilon = \frac{3G^2 M^2}{J^2 c^4}$$

Quedándonos la ecuación a resolver de la forma:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GMm^2}{J^2} + \varepsilon \left(\frac{J^2 u^2}{\frac{GM}{c^2}}\right) \quad (III.19)$$

La cual acepta una solución de la forma:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) \quad (III.20)$$

Pasamos a derivar esta solución para así introducirla a la ecuación III.19 y obtener los valores  $u_0$  y  $u_1$ .

$$u' = u'_0 + \varepsilon u'_1 + O(\varepsilon^2)$$

$$u'' = u_0'' + \varepsilon u_1'' + O(\varepsilon^2)$$

Al remplazar tenemos:

$$u_0'' + \varepsilon u_1'' + O(\varepsilon^2) + u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) = \frac{GMm^2}{J^2} + \varepsilon \left( \frac{J^2 u_0^2}{GM} \right)$$

$$u_0'' + u_0 - \frac{GMm^2}{J^2} + \varepsilon \left( u_1'' + u_1 - \frac{J^2 u_0^2}{GM} \right) + O(\varepsilon^2) = 0$$

Ahora para resolver la ecuación optamos que el tercer termino de la izquierda, la que se encuentra entre paréntesis sea igual a cero.

$$u_1'' + u_1 = \frac{J^2 u_0^2}{GM} \tag{III.21}$$

Ya que tomamos el valor de cero a la ecuación anterior, podemos ver que al hacer eso nos devuelve la misma ecuación diferencial de Newton, razón por la cual , ahora tomamos el valor de  $u_0$  como su solución de la EDN.

$$u_0 = \frac{GMm^2}{J^2} (1 - e \cos \phi)$$

Introduciendo este valor a la ecuación III.21.

$$u_1'' + u_1 = \frac{J^2}{GM} \left( \frac{GMm^2}{J^2} (1 - e \cos \phi) \right)^2$$

Se procede a desarrollarse.

$$u_1'' + u_1 = \frac{GMm^4 c^2}{J^2} (1 - e \cos \phi)^2$$

$$u_1'' + u_1 = \frac{GMm^4 c^2}{J^2} (1 - 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi)$$

$$u_1'' + u_1 = \frac{GMm^4 c^2}{J^2} \left( 1 - 2e \cos \phi + e^2 \left( \frac{\cos 2\phi}{2} + \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$u_1'' + u_1 = \frac{GMm^4 c^2}{J^2} \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \right) - \frac{2GMm^4 c^2}{J^2} e \cos \phi + \frac{GMm^4 c^2}{2J^2} e^2 \cos 2\phi$$

La ecuación diferencial III.21 acepta la solución siguiente:

$$u_1 = A + B\phi \sin \phi + C \cos 2\phi$$

Derivando esta ecuación, podremos dar valores precisos a las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

$$u_1' = B \sin \phi + B\phi \cos \phi - 2C \sin 2\phi$$

$$u_1'' = 2B \cos \phi - B\phi \sin \phi - 4C \cos 2\phi$$

Remplazando:

$$\begin{aligned} &2B \cos \phi - B\phi \sin \phi - 4C \cos 2\phi + A + B\phi \sin \phi + C \cos 2\phi = \\ &= \frac{GMm^4c^2}{J^2} \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) - \frac{2GMm^4c^2}{J^2} e \cos \phi + \frac{GMm^4c^2}{2J^2} e^2 \cos 2\phi \end{aligned}$$

Reduciendo la ecuación, nos queda

$$\begin{aligned} &A + 2B \cos \phi - 3C \cos 2\phi = \\ &= \frac{GMm^4c^2}{J^2} \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) - \frac{2GMm^4c^2}{J^2} e \cos \phi + \frac{GMm^4c^2}{2J^2} e^2 \cos 2\phi \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos los valores:

$$\begin{cases} A = \frac{GMm^4c^2}{J^2} \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) \\ B = -\frac{GMm^4c^2}{J^2} e \\ C = -\frac{GMm^4c^2}{6J^2} e^2 \end{cases}$$

Por lo cual el valor de  $u_1$  queda expresado por:

$$u_1 = \frac{GMm^4c^2}{J^2} \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) - \frac{GMm^4c^2}{J^2} e\phi \sin \phi - \frac{GMm^4c^2}{6J^2} e^2 \cos 2\phi$$

Factorizando:

$$u_1 = \frac{GMm^4c^2}{J^2} \left[1 - e\phi \sin \phi + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi\right)\right]$$

Ahora bien, según la solución propuesta aun inicio, ecuación III.20, se escribe lo siguiente:

$$u = \frac{GMm^2}{J^2} (1 - e \cos \phi) + \varepsilon \frac{GMm^4c^2}{J^2} \left[1 - e\phi \sin \phi + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi\right)\right]$$

$$\boxed{u = \frac{GMm^2}{J^2} \left[1 - e \cos \phi + m^2c^2\varepsilon \left(1 - e\phi \sin \phi + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi\right)\right)\right]} \quad \text{(III.22)}$$

Tomando  $e^2$  igual a cero, por ser un valor de excentricidad muy pequeña, la ecuación nos queda así:

$$u = \frac{GMm^2}{J^2} [1 - e \cos \phi + m^2 c^2 \varepsilon (1 - e \phi \sin \phi)]$$

Despreciando mas valores de orden muy pequeño como  $m^2 c^2 \varepsilon$ , nos queda:

$$u = \frac{GMm^2}{J^2} [1 - e \cos \phi - m^2 c^2 \varepsilon e \phi \sin \phi]$$

Tomado una identidad trigonométrica, y a la vez haciendo uso de la siguientes afirmaciones, con  $A \ll 1$ .

$$\begin{cases} \cos A = 1 \\ \sin A = A \end{cases}$$

Se obtiene la ecuación de órbitas según la teoría de la relatividad

$$u = \frac{GMm^2}{J^2} [1 - e \cos (\phi (1 - m^2 c^2 \varepsilon))]$$

Recordando el cambio de variable  $u = 1/r$ , tenemos.

$$\boxed{r(\phi) = \frac{J^2}{GMm^2 [1 - e \cos (\phi (H))]} \tag{III.23}}$$

Donde:

$$H = 1 - E$$

$$E = \frac{3m^2 G^2 M^2}{J^2 c^2}$$

3.5.3. PRECESIÓN

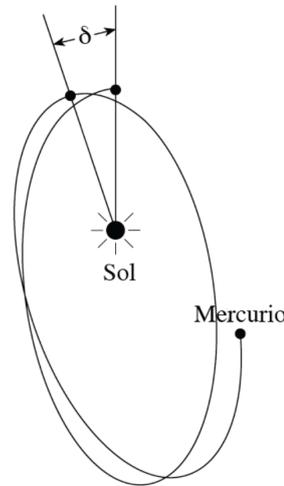


Figura 3.2: Representación de una precesión orbital

Este es el punto mas importante de la investigación, ya que con el proceso analítico que se seguirá a continuación podremos saber exactamente el angulo de precesión que presenta el planeta mercurio (dejamos entender con precesión al echo que no se llega a completar un cierre al dar una vuelta del punto de inicio con el final, ver figura 3.2 ), ya que el cambio de newton al relativismo es claro en los términos matemáticos aun en las gráficas que se vera mas adelante no nos muestra mucho cambio a grandes rasgos, por eso se dará el calculo analítico del angulo de precesión que presenta la órbita de mercurio y también luego programarlo en Matlab, para poder comparar con otros planetas de manera mas sencilla en otras investigaciones. De una manera casi similar (Pollock, 2003)

EL periodo del planeta viene a ser:

$$periodo = \frac{2\pi}{1 - m^2 c^2 \epsilon} \approx 2\pi (1 + m^2 c^2 \epsilon) \tag{III.24}$$

Y la precesión de la forma:

$$precesion = 2\pi (m^2 c^2 \epsilon) = \frac{6\pi G^2 M^2 m^2}{J^2 c^2} \tag{III.25}$$

Tomando la ecuación II.58 podemos decir que:

$$ab\pi = \frac{L}{2m} T$$

$$T = \frac{2mab\pi}{L}$$

Elevando al cuadrado toda la ecuación se tiene:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (1 - e^2) m^2 a^4}{L^2} \quad (\text{III.26})$$

Ahora tomando la tercera ley de Kepler, ecuación II.63, tenemos:

$$\frac{T^2}{4\pi^2 a^3} = \frac{1}{GM} \quad (\text{III.27})$$

De las ecuaciones III.26 y III.27, se obtiene:

$$\frac{1}{(1 - e^2) a} = \frac{m^2 GM}{L^2}$$

Con la cual reemplazando a la ecuación III.25, se obtiene lo siguiente,

$$\boxed{\text{precesion} = \frac{6\pi GM}{c^2 (1 - e^2) a}} \quad (\text{III.28})$$

### 3.5.4. MATLAB

MATLAB es un entorno de cálculo técnico de altas prestaciones para cálculo numérico y visualización. Integra: (Moore, 2007), (Fernández, 2009)

∇ Análisis numérico

∇ Cálculo matricial

∇ Procesamiento de señales

∇ Gráficos

Lo que se usara para la programación es el entorno de gráficos, cada ecuación que tenemos líneas arriba se ploteara bajo ciertas restricciones que se mostrara en los resultados y discusión, así también para terminar se dará un programa completo de interfaces gráficas, echo con la app de Matlab conocida como GUI (también conocida como interfaces gráficas de usuario o interfaces de usuario), con la cual se permiten un control sencillo (con uso de ratón) de las aplicaciones del calculo de órbitas planetarias, observando el campo potencial y su órbita planetaria.

Entonces aquí se muestra los códigos que se iso en MATLAB para cada caso, y también el programa completo en GUI de MATLAB

```

1. function grafica_del_potencial_newtoniano
2. % Se programara el plot de la energia potencial
3. % Datos
4. G = 1 ; % Constante gravitacional
5. M = 1 ; % Masa del Sol
6. m = 1 ; % Masa del Planeta
7. L = 1 ; % Momento angular
8. % Dominio del radio
9. r = -10:3.14/100:10;
10. % Potencial Newtoniano
11. U = (L * L)./(2 * m * r. ^ 2) - (G * M * m)./r;
12. % Grafica
13. plot(r,U, 'r')
14. grid
15. axis([-5,5,-10,10])
16. title('Potencial Newtoniano')
17. xlabel('r')
18. ylabel('U(r)')

```

Cuadro 3.1: Primer Código en MATLAB

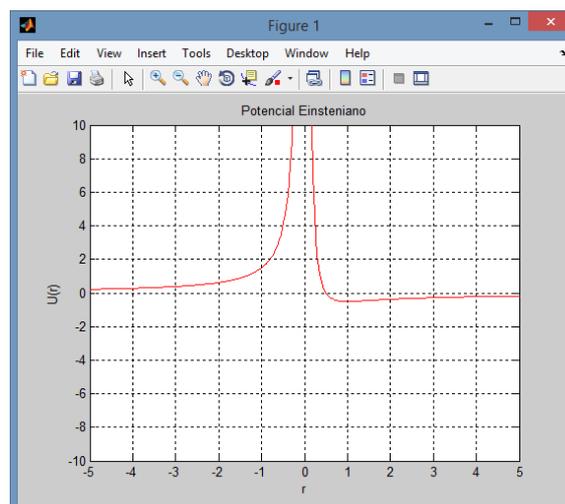


Figura 3.3: Primera captura del programa con datos simples

```

1. function grafica.del.potencial relativista
2. % Se programara el plot de la energia potencial
3. % Datos
4. G = 1 ; % densidad
5. c = 1 ; % calor especifico
6. M = 1 ; % calor especifico
7. m = 1 ; % calor especifico
8. L = 1 ; % calor especifico
9. % Dominio del radio
10. r = -10:3.14/100:10;
11. % Potencial Newtoniano
12. U = ((L * L)./(2 * m * r. ^ 2)). * (1 - (2 * G * M)./(r * c. ^ 2)) - (G * M * m)./r;;
13. % Grafica
14. plot (r,U, 'r')
15. grid
16. axis ([-5, 5,-10,10])
17. title ('Potencial Einsteniano')
18. xlabel ('r')
19. ylabel ('U(r)')

```

Cuadro 3.2: Segundo Código en MATLAB

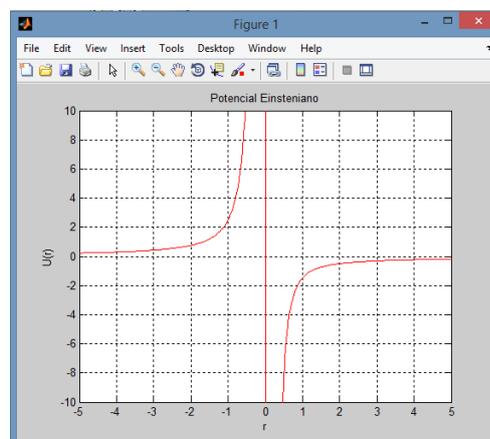


Figura 3.4: Segunda captura del programa con datos simples

```
1. function grafica_del_la_orbita
2. % Se programara el plot de la orbita planetaria
3. % Datos
4. G = 1 ; % densidad
5. M = 1 ; % calor especifico
6. m = 1 ; % calor especifico
7. L = 1 ; % calor especifico
8. % Angulo de Barrido
9. ang = 0:0.0001:4*pi;
10. % Grafica de la Orbita
11. R1 = (L.^2.*AU)./(G.*M.*m.^2). * 1./(1 - 0,203.*cos(ang));
12. x = R1.*cos(ang);
13. y = R1.*sin(ang);
14. % Grafica
15. plot(x,y,'r')
16. grid
17. title('Orbita Newtoniana')
18. xlabel('x')
19. ylabel('y(x)')
```

Cuadro 3.3: Segundo Código en MATLAB

```

1. function grafica.del.la.orbita
2. % Se programara el plot de la orbita planetaria
3. % Datos
4. G = 1 ; % densidad
4. c = 1; ; % densidad
5. M = 1 ; % calor especifico
6. m = 1 ; % calor especifico
7. L = 1 ; % calor especifico
7. T = 1 + 7,995 * 10 ^ (-8) ; % calor especifico
8. % Angulo de Barrido
9. ang = 0:0.0001:4*pi;
10. % Grafica de la Orbita
11. R2 = (L.^2. * AU)./(G. * M. * m.^2). * 1./(1 - 0,203. * cos(ang. * T));
12. x = R2. * cos(ang);
13. y = R2. * sin(ang);
14. % Grafica
15. plot(x,y,'r')
16. grid
17. title('Orbita Relativista')
18. xlabel('x')
19. ylabel('y(x)')

```

Cuadro 3.4: Segundo Código en MATLAB

## 3.6. VARIABLES

### 3.6.1. VARIABLE INDEPENDIENTE

1. Teoría Newtoniana.
2. Teoría Relativista.

### 3.6.2. VARIABLE DEPENDIENTE

Modelado de la precesión en la órbita de mercurio con Matlab.

## Capítulo IV

### IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección trataremos los modelos matemáticos programados en Matlab, ayudándonos constantemente de la figura y tomando datos de las siguientes fuentes de Internet: <https://www.nasa.gov/planetme> y [https://es.wikipedia.org/wiki/Mercurio\(planeta\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Mercurio(planeta)). Para un mejor entendimiento y análisis de las ecuaciones, se toma las unidades de siempre (SI) para luego pasarlas a las unidades astronómicas (UA), entonces los primeros datos importantes son:

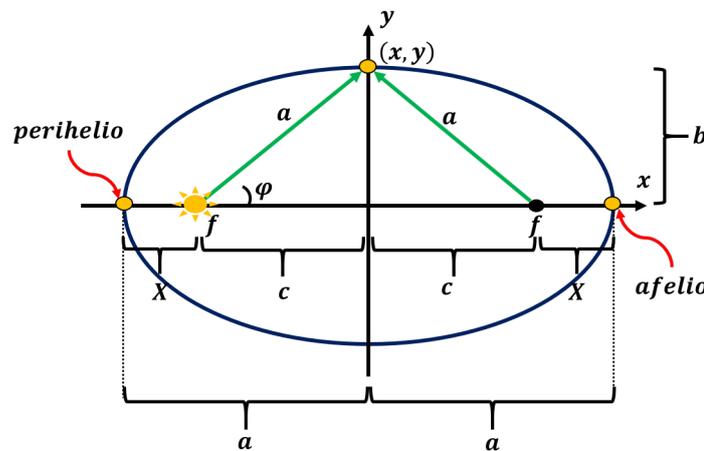


Figura 4.1: Representación de una órbita con sus principales elementos para la mejor comprensión

$$\begin{cases} \text{Perihelio} = 46001195642,3793m \equiv 0,307499UA \\ \text{Afelio} = 69816877462,0779m \equiv 0,466697UA \end{cases}$$

**Nota 4.0.1** Se puede encontrar los valores anteriores partiendo de la ecuación II.29 de excentricidad, y del eje mayor  $a$  corresponde a  $0,387098UA$ . La excentricidad de la órbita de mercurio es:

$$e = 0,20563069$$

Se ha de necesitar también los datos de eje mayor y menor de la elipses, los cuales se pueden encontrar fácilmente con la nota 2.1.2 inciso 1 y la ecuación II.29.

$$\begin{cases} a = 0,387098UA \equiv 5,7909 \times 10^{10}m \\ b = 0,378825UA \equiv 5,6672 \times 10^{10}m \end{cases}$$

Ahora uno de los datos mas relevantes es el momento angular, el cual se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

$$L = \frac{2m(\pi ab)}{t}$$

$$L = \frac{2\pi (3,302 \times 10^{23} kg) (5,7909 \times 10^{10} m) (5,6672 \times 10^{10} m)}{87,9391 dias \left(\frac{24h}{1dia}\right) \left(\frac{60min}{1h}\right) \left(\frac{60s}{1min}\right)}$$

$$L = 8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}$$

Entonces podemos ya mencionar todas los datos a ser usados en la investigación, obtenidos de las paginas mencionadas lineas arriba:

$$\left\{ \begin{array}{l} e = 0,20563069 \\ a = 0,387098UA \equiv 5,7909 \times 10^{10} m \\ Constante\ de\ Gravitacion = 6,67408 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \\ Masa\ del\ Sol = 1,989 \times 10^{30} kg \\ Masa\ del\ Planeta\ (Mercurio) = 3,302 \times 10^{23} kg \\ Veloidad\ de\ la\ Luz = 299792458 \frac{m}{s} \\ Momento\ angular = 8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s} \\ t = 87,9391 dias \equiv 0,2408 años \end{array} \right.$$

Y también tener presente las magnitudes a usarse:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1AU = 149597870700m \\ 1m = 6,6846 \times 10^{-12} AU \end{array} \right.$$

**Nota 4.0.2** Para la obtención de los datos se tiene las siguientes fuentes secundarias de información científica..

<https://www.astromia.com/>

<https://www.nasa.gov/planetmercury>

[https://es.wikipedia.org/wiki/Mercurio\\_\(planeta\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Mercurio_(planeta))

[https://www.esa.int/esl/ESA\\_in\\_your\\_country/Spain/Todo\\_sobre\\_Mercurio](https://www.esa.int/esl/ESA_in_your_country/Spain/Todo_sobre_Mercurio)

<http://www.isas.jaxa.jp/e/snews/2006/1109.shtml>

#### 4.1. ECUACIONES

★ La ecuación III.3 con los datos queda expresada de la forma siguiente:

$$U_{eff} = \frac{\left(8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}\right)^2}{2 (3,302 \times 10^{23} kg) r^2} - \frac{\left(6,6742 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right) (1,989 \times 10^{30} kg) (3,302 \times 10^{23} kg)}{r}$$

$$U_{eff} = \frac{1,2160 \times 10^{54}}{r^2} Nm^3 - \frac{4,3832 \times 10^{43}}{r} Nm^2$$

Convirtiendo la unidad de metro a UA debido a que es un numero muy grande el de la ecuación, se tiene entonces:

$$U_{eff} = \frac{1,2160 \times 10^{54}}{r^2} N(6,6846 \times 10^{-12} AU)^3 - \frac{4,3832 \times 10^{43}}{r} N(6,6846 \times 10^{-12} AU)^2$$

$$U_{eff} = \frac{3,6321 \times 10^{20}}{r^2} N AU^3 - \frac{1,9586 \times 10^{21}}{r} N AU^2 \quad (IV.1)$$

★ Ahora para el caso de la ecuación III.16 se tiene:

$$U_{eff} = \frac{\left(8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}\right)^2}{2 (3,302 \times 10^{23} kg) r^2} - \frac{\left(6,6742 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right) (1,989 \times 10^{30} kg) \left(8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}\right)^2}{(3,302 \times 10^{23} kg) (299792458 \frac{m}{s})^2 r^3} - \frac{\left(6,6742 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right) (1,989 \times 10^{30} kg) (3,302 \times 10^{23} kg)}{r}$$

$$U_{eff} = \frac{1,2160 \times 10^{54}}{r^2} Nm^3 - \frac{3,5921 \times 10^{57}}{r^3} Nm^4 - \frac{4,3832 \times 10^{43}}{r} Nm^2$$

$$U_{eff} = \frac{1,2160 \times 10^{54}}{r^2} N(6,6846 \times 10^{-12} AU)^3 -$$

$$\frac{3,5921 \times 10^{57}}{r^3} N(6,6846 \times 10^{-12} AU)^4 - \frac{4,3832 \times 10^{43}}{r} N(6,6846 \times 10^{-12} AU)^2$$

$$U_{eff} = \frac{3,6321 \times 10^{20}}{r^2} NAU^3 - \frac{7,1720 \times 10^{12}}{r^3} NAU^4 - \frac{1,9586 \times 10^{21}}{r} NAU^2 \quad (IV.2)$$

★ La ecuación III.13 queda así:

$$r(\theta) = \frac{\left(8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}\right)^2}{\left(6,6742 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right) (1,989 \times 10^{30} kg) (3,302 \times 10^{23} kg)^2 [1 - e \cos(\theta)]}$$

$$r(\theta) = \frac{5,5485 \times 10^{10}}{[1 - 0,20563069 \cos(\theta)]} m$$

$$r(\theta) = \frac{5,5485 \times 10^{10}}{[1 - 0,20563069 \cos(\theta)]} \times (6,6846 \times 10^{-12} AU)$$

$$r(\theta) = \frac{0,3709}{[1 - 0,20563069 \cos(\theta)]} AU \quad (IV.3)$$

★ La ecuación III.23 queda así:

$$r(\phi) = \frac{\left(8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}\right)^2}{\left(6,6742 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right) (1,989 \times 10^{30} kg) (3,302 \times 10^{23} kg)^2 [1 - e \cos(\phi(H))]}$$

Donde los valores E y H vienen a ser:

$$E = \frac{3m^2 G^2 M^2}{J^2 c^2}$$

$$E = \frac{3(3,302 \times 10^{23} kg)^2 \left(6,6742 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)^2 (1,989 \times 10^{30} kg)^2}{\left(8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}\right)^2 (299792458 \frac{m}{s})^2}$$

$$E = 7,9859 \times 10^{-8}$$

Y

$$H = 1 - E = 1 - 7,9859 \times 10^{-8}$$

$$H = 0,999999920143$$

Entonces escribimos:

$$r(\phi) = \frac{5,5485 \times 10^{10}}{[1 - 0,20563069 \cos(\phi \times 0,999999920143)]} m$$

$$r(\phi) = \frac{5,5485 \times 10^{10}}{[1 - 0,20563069 \cos(\phi \times 0,999999920143)]} \times (6,6846 \times 10^{-12} AU)$$

$$r(\phi) = \frac{0,3709}{[1 - 0,20563069 \cos(\phi \times 0,99)]} AU \quad (IV.4)$$

★ La ecuación III.28 viene a ser:

$$\delta = \frac{6\pi \left(6,67408 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right) (1,989 \times 10^{30} kg)}{(299792458 \frac{m}{s})^2 (1 - 0,20563069^2) (5,7909 \times 10^{10} m)}$$

$$\delta = 5,0199 \times 10^{-7} rad$$

**Nota 4.1.1** Este resultado es también obtenible sin ningún problema desde la ecuación III.25.

Hacemos el cambio de radianes a segundos de arco debido a que es muy pequeño el valor obtenido:

$$\delta = 5,0199 \times 10^{-7} rad \times \left(\frac{180}{\pi rad}\right) \times \left(\frac{3600''}{1}\right)$$

$$\delta = 0,1035'' \quad (IV.5)$$

Se toma una frecuencia usual de 100 años que corresponde a un siglo para hacer mas notorio el cambio del angulo de precesión, por lo tanto:

$$N = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} = \frac{1\text{orbita}}{0,2408\text{anos}} \times \left( \frac{100\text{anos}}{1\text{siglo}} \right)$$

$$N = 415,3354 \frac{\text{orbitas}}{\text{siglo}} \tag{IV.6}$$

Entonces multiplicando las ecuaciones IV.5 y IV.6 se tiene.

$$\delta N = \Delta = 0,1035 \times (415,3354)$$

$$\Delta = 43,0058''/\text{siglo}$$

(IV.7)

Comparando este resultados de 43.0058 por siglo con el siguiente libro y dos antecedentes, sus resultados también se encuentran en arcos de segundos por siglo.

	TESIS	Libros	Articulos (antecedentes )	
Nombres a comprarar	Alex Rossi Quispe Rodriguez	introducing einstein's relativity	the precession of Mercury's Perihelion	relatividad general en sistemas planetarios
$\delta N$	43.0058	$43.1 \pm 0.5$	43.084	43.0

Cuadro 4.1: Comparación del resultados de la precesión en arcos de segundo por siglo

## 4.2. GRÁFICAS

En esta sección se presentan las gráficas de los potenciales gravitatorios y como también las trayectorias de Mercurio según ambas teorías, Newton y Einstein. A la vez se muestra las comparaciones de estas gráficas para la discusión pertinente.

Antes de mostrar las gráficas, se presenta a continuación el esquema del potencial gravitatorio que al dar una energía en particular se obtiene una determinada órbita, en este caso es elíptica. Sabemos que esta no es la única posibilidad de movimiento de un cuerpo celeste, las otras posibilidades son las gráficas de las secciones cónicas. (Circunferencia, Parábola, Elipse Hipérbola.)

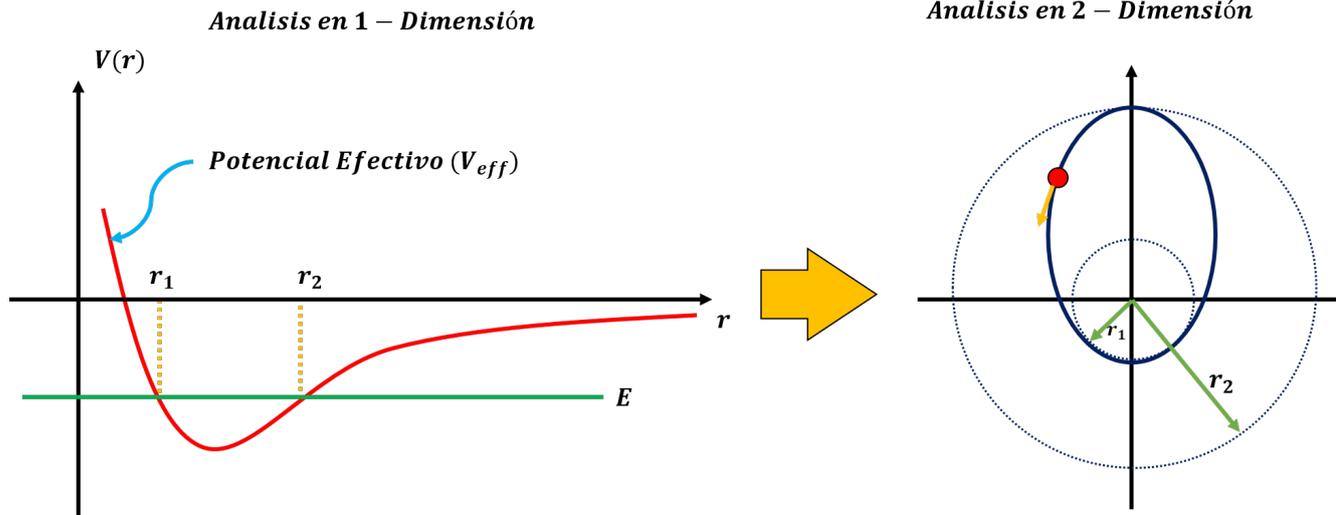


Figura 4.2: Representación del potencial gravitatorio y su órbita

La figura ?? nos indica claramente, la situación de tomar una energía negativa por lo cual esto ha de coincidir con las imágenes que se tendrán mas adelante. La trayectoria que se obtiene de esta energía es una elipse, y desde luego es lo esperado por las observaciones experimentales.

★ Comparación gráfica de los potenciales Gravitatorios de Newton y de Einstein.

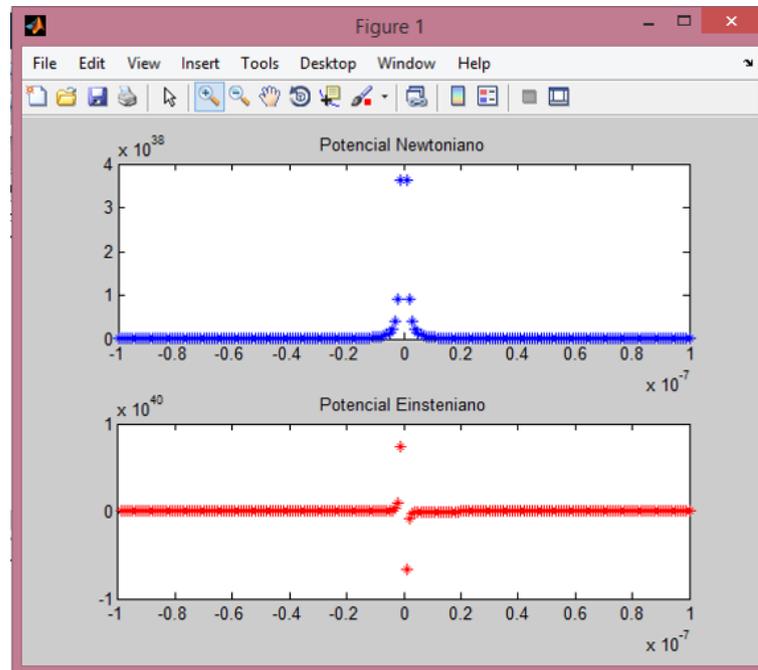


Figura 4.3: Comparación de Potenciales Gravitatorios, imagen uno

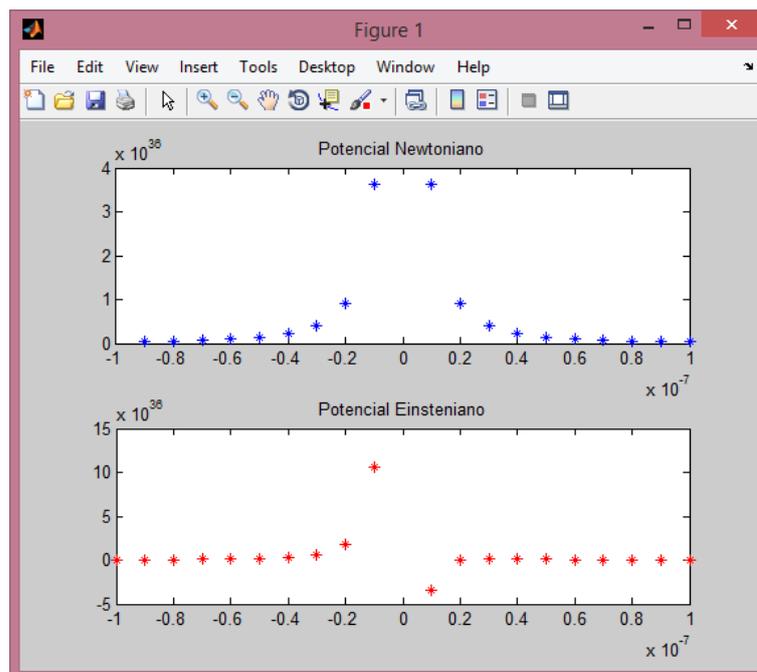


Figura 4.4: Comparación de Potenciales Gravitatorios, imagen dos

★ El potencial Newtoniano ya dado con los valores reales de la sección anterior, se obtiene la gráfica siguiente:

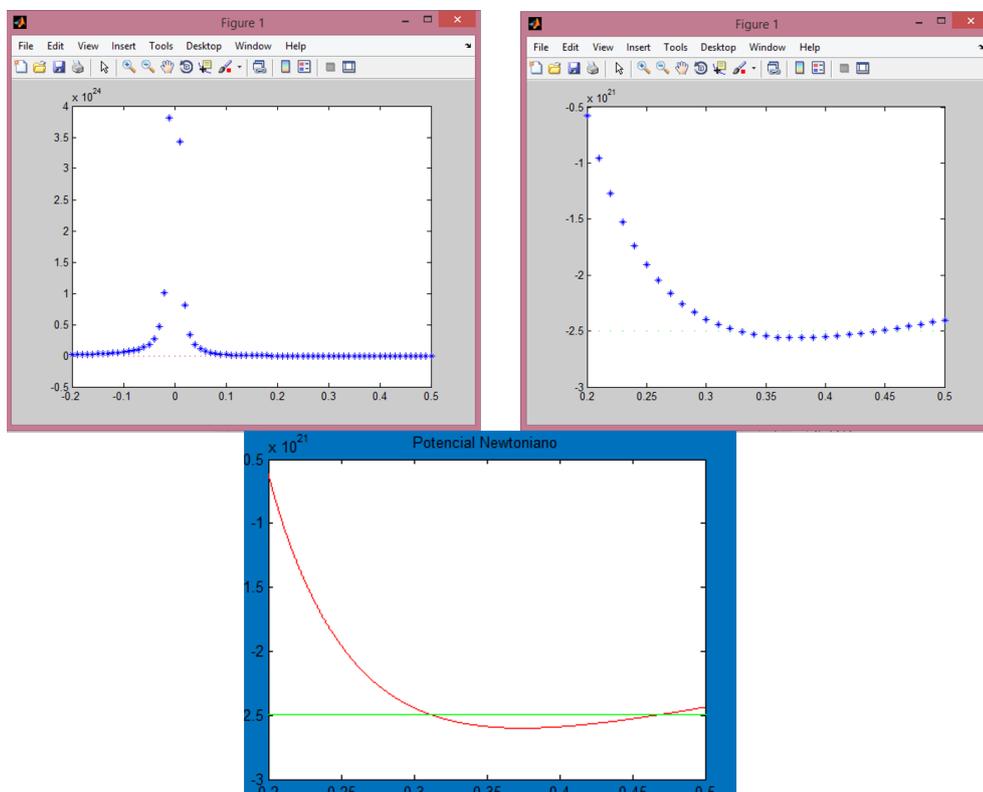


Figura 4.5: Gráfica del potencial de Newton para Mercurio

★ Gráfica de la trayectoria del planeta Mercurio según Newton.

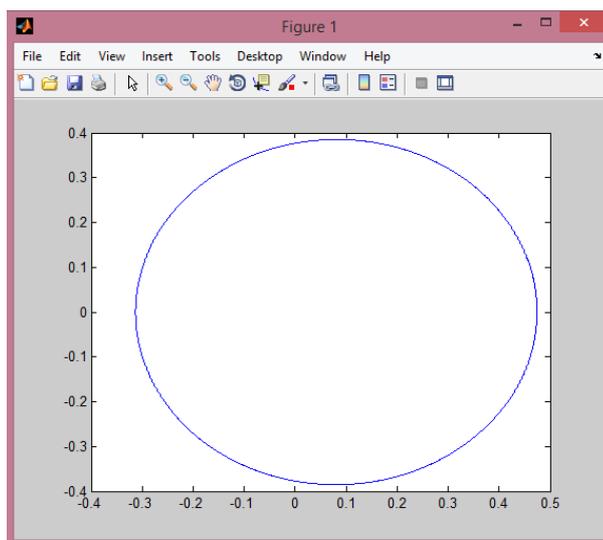


Figura 4.6: Trayectoria de Mercurio según Newton

★ El potencial Einsteiniano ya dado con los valores reales de la sección anterior, se obtiene la gráfica siguiente:

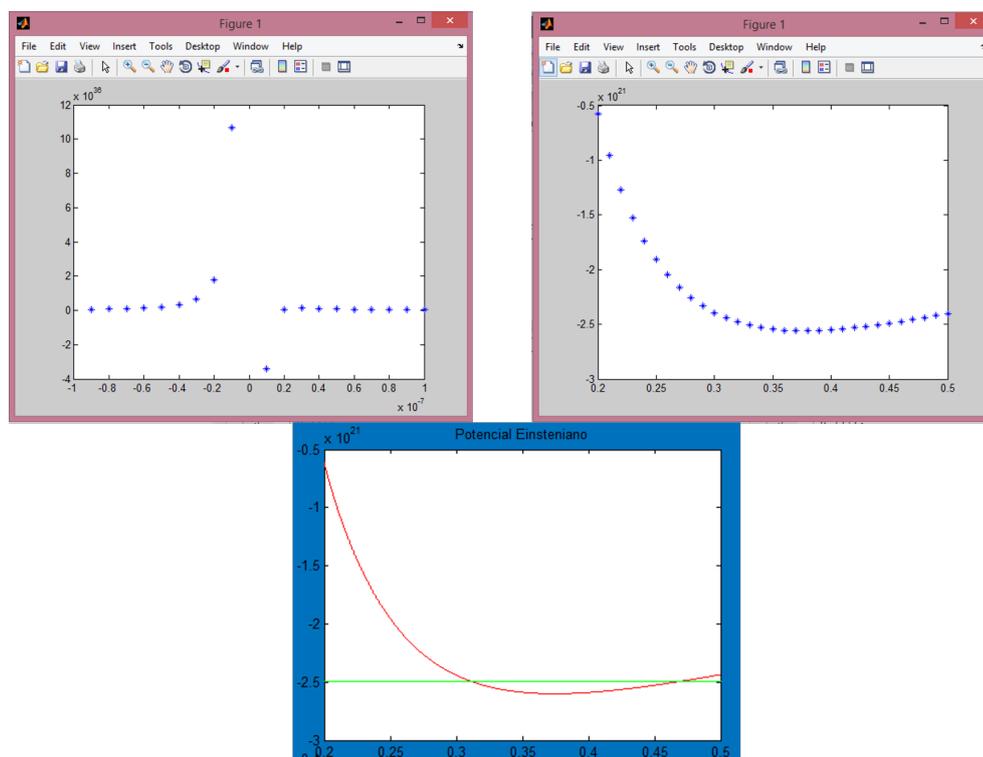


Figura 4.7: Gráfica del potencial de Einstein para Mercurio

★ Gráfica de la trayectoria del planeta Mercurio según Einstein.

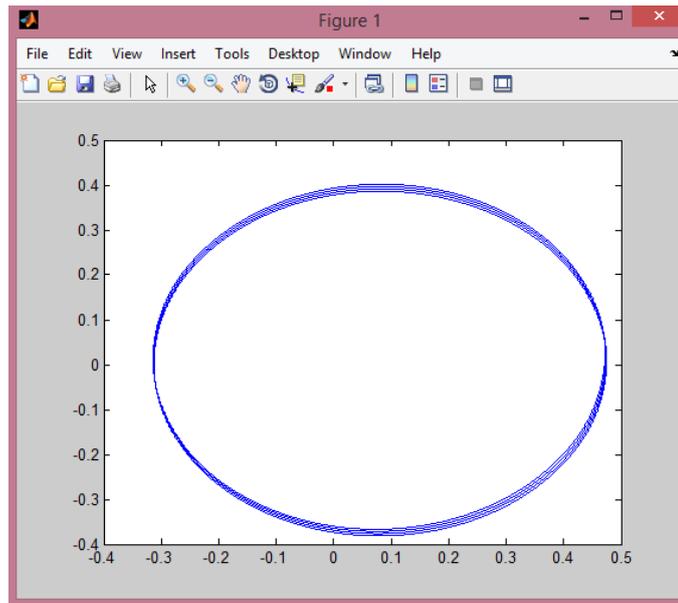


Figura 4.8: Trayectoria de Mercurio según Newton

★ Interfaz del Software completo.

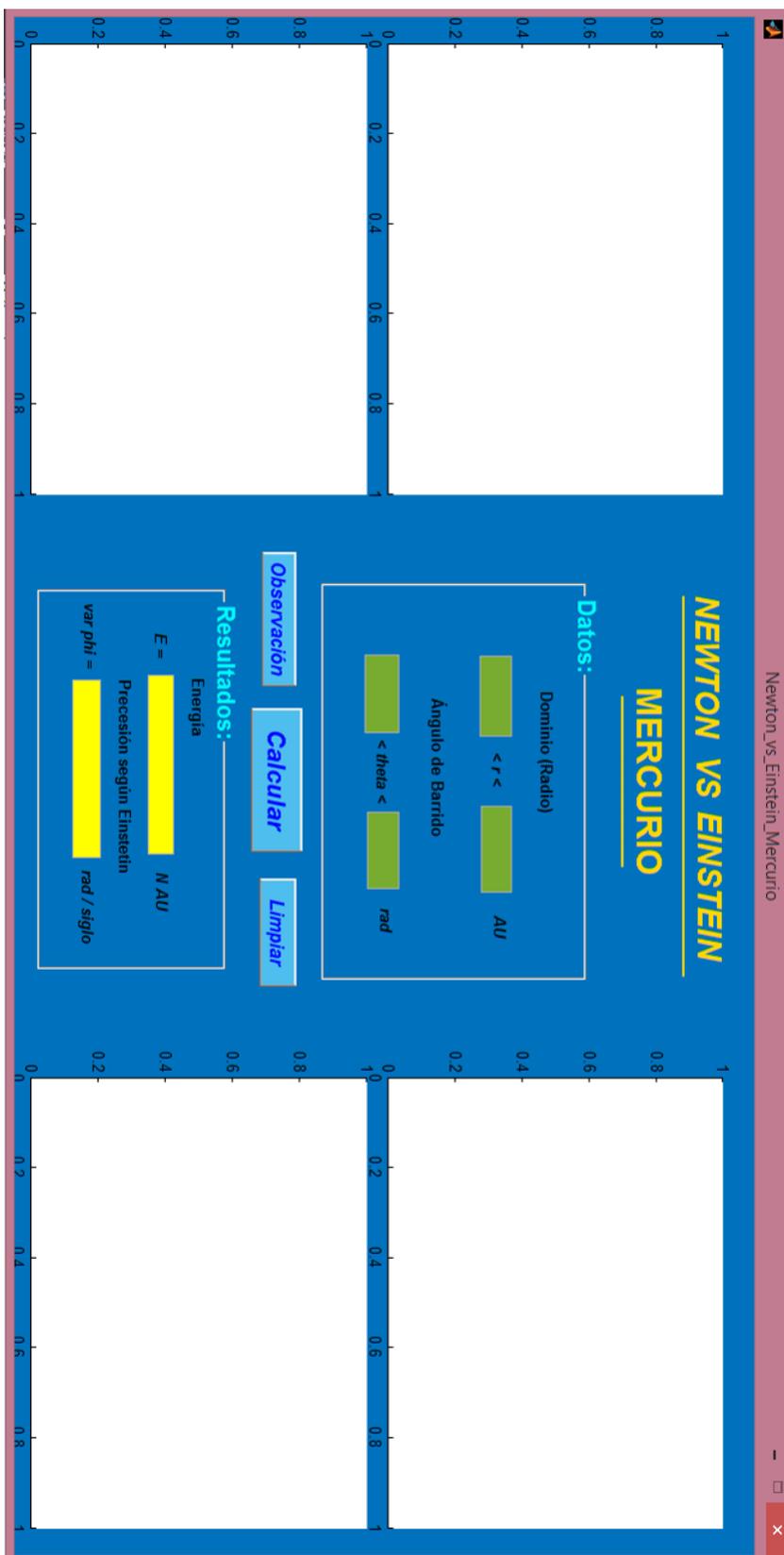


Figura 4.9: interfaz completa para todo el análisis

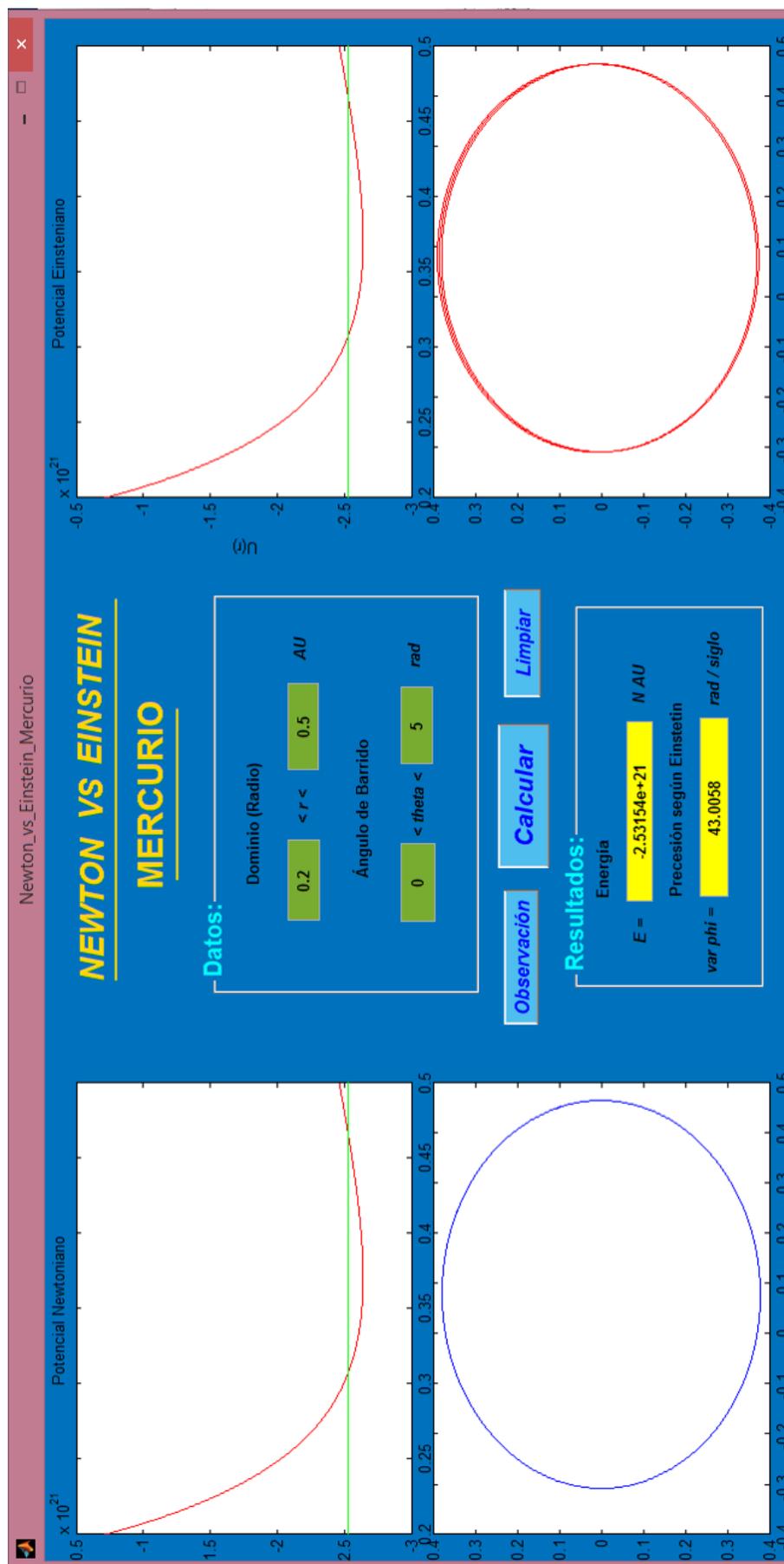


Figura 4.10: interfaz completa para todo el análisis

**Nota 4.2.1** Para calcular la energía es simplemente remplazar el radio menor o mayor a la ecuación de potencia gravitatorio de Newton o de Einstein.

$$U_{eff} = \frac{3,6321 \times 10^{20}}{r^2} N AU^3 - \frac{1,9586 \times 10^{21}}{r} N AU^2$$

$$U_{eff} = \frac{3,6321 \times 10^{20}}{0,4653^2} N AU^3 - \frac{1,9586 \times 10^{21}}{0,4653} N AU^2$$

$$U_{eff} = -2,53154 \times 10^{21}$$

**Nota 4.2.2** Para obtener el código y la interfaz echa en Matlab, visite el sitio web siguiente.

[https://drive.google.com/open?id=1pJyiWDIHPv7tR2d\\_zpCUdui3r7ct43vf](https://drive.google.com/open?id=1pJyiWDIHPv7tR2d_zpCUdui3r7ct43vf)

## Capítulo V

### V. CONCLUSIONES

En el presente trabajo de investigación se llegaron a las siguientes conclusiones.

- a) Se logro modelar el potencial gravitatorio y las trayectorias de estos potenciales para el planeta Mercurio (El mas cercano al Sol), con los datos obtenidos de las paginas mencionadas en el capitulo 4 se logra dar el modelado, optando los dos formatos teóricos hoy conocidos, los cuales son: Teoría Gravitatoria de Newton y la Teoría de la Relatividad General.
- b) Se realizo un estudio detallado de las teorías de Newton de la gravedad y de la teoría de campo de Einstein, de este ultimo se tomo la solución de Schwarzschild, dando así el estudio del potencial gravitatorio dado por estas dos teorías, observando que las gráficas no coinciden en ciertos parámetros del radio, por lo que respecta al planeta Mercurio entre los radios máximos y mínimo no se presenta alguna variación. Mas bien el en aspecto de la ecuación polar de la órbita se obtiene un parámetro extra que lo llamamos H, encontrado este paramento faltante en la teoría de Newton se logra dar la explicación teórica de la preseción de Mercurio.

$$r(\phi) = \frac{0,3709}{[1 - 0,20563069 \cos(\phi \times H)]}$$

- c) Se da a conocer las diferencias que tienen ambas teorías y así se calculo la preseción de la órbita de mercurio de unos 43.0058 arco segundos por siglo, se toma por siglo debido a que es muy poca la cantidad apreciable ya que mientras mas grande sea el radio la longitud de arco es también mas grande, coincidiendo así con las observaciones.
- d) Finalmente se logra dar la interfaz gráfica diseñada en Matlab para dar una simplificación completa de toda la investigación que se dio acerca del planeta Mercurio, con el cual se completa una investigación teórica y a la vez practica para el estudio de órbitas de otros planetas. El código se encuentra en el enlace que se indica en la pagina 106.

## Capítulo VI

### VI. RECOMENDACIONES

- a) En este trabajo se mostró las dos teorías de gravitación, con las cuales se da el modelado en orbitas, lo que ahora se puede trabajar es en ver que pasa con otros planetas e identificar la excentricidad que se obtienen.
- b) Se muestra el formalismo de la solución de Schwarzschild mostrando el lagrangiano (elemento de linea o invariante) con el cual se trabajo y se mostró los Símbolos de christoffel, ya con esto se puede proseguir al estudio de un agujero negro.
- c) Para el modelado de la trayectoria de Mercurio se utilizo el programa de Matlab, debido a varias características necesarias que este programa ofrece, por lo cual recomiendo algunos programas mas sencillos de poder utilizar y observar gráficas: *geogebra*, *scientific workplace*, *wolfram mathematica*. Y como otro alternativo de programación se recomienda *java*.

## VII. BIBLIOGRAFÍA

- Aguirre, E. (2007). Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Nota de Clases.
- Anonimo (2011). Algunos Conceptos simples en Geometría. Notas de Clase.
- Baldeon, A. V. (2014). Introducción al análisis matemático.
- Blau, M. (2011). Lecture notes on general relativity. Albert Einstein Center for Fundamental Physics Bern Germany.
- Briozzo, C. B. (2012). Métodos Matemáticos de la Física. Notas de Trabajo.
- Cantero, A. T. (2004). Variedades tensores y física. Versión 1.1.0.
- Chavez, E. W. V. (2005). Mecánica del Medio Continuo Conceptos Básicos. Tercera Edición.
- Diaz, J. L. H. (2012). El Heliocentrismo. Grandes ideas de la Ciencia.
- d'Inverno, R. A. (1992). Introducing Einstein's relativity. Clarendon Press.
- Fernández, M. C. (2009). Manual básico de matlab.
- Goldstein, H. (2006). Mecánica Clasica. Edit. Reverte,S.A.
- Guardeno, A. J. D. (2012). La ley de la Gravedad. Grandes ideas de la Ciencia.
- Hartle, J. B. (2003). Gravity An Introduction to Einstein's General Relativity. Edit. Adam Black.
- Janssen, B. (2013). Teoría de la Relatividad General. Dpto de Física Teórica y del Cosmos.
- Jetzer, P. (2016). General Relativity. Physik Institut der Universitat Zrich.
- Lambourne, R. J. (2010). Relativity, gravitation and cosmology. Cambridge University Press.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1971). The classical theory of fields.
- Lasekna, D. B. (2012). El espacio es una cuestión del tiempo. Grandes ideas de la Ciencia.
- Linares, D. L. J. A. (2017). Geometría y curvatura. Una aproximación al estudio de la geometría diferencial de superficies. Academia de Ciencias de la Región de Murcia.
- López, E. B. (2012). El movimiento Planetario. Grandes ideas de la Ciencia.
- Moore, H. (2007). MATLAB para ingenieros. Pearson.
- Pollock, C. (2003). Mercury's Perihelion. Edit. Desconocido.

## Apéndice A

### MODELADO DE LA ÓRBITA NEWTONIANA

#### 1.1. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$$

$$y(a) = b$$

El problema de valor inicial (PVI o Problema de Cauchy) tiene al menos una solución definida en algún intervalo que contiene al punto  $a$ . Si  $f(x, y)$  es continua en algún rectángulo del plano  $XY$  que contiene al punto  $(a, b)$  (**TEOREMA DE EXISTENCIA**). Si además, la derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}$  es continua en ese rectángulo, entonces la solución es única en algún intervalo (tal vez más pequeño) que contiene al punto  $x = a$  (**TEOREMA DE UNICIDAD**)

#### 1.2. ÓRBITA NEWTON

Tomando las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

$$r(\theta) = \frac{L^2}{GMm^2(1 - e\cos\theta)}$$

Juntando las dos ecuaciones para poder resolverlas, se tiene:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{G^2 M^2 m^3}{L^3 (1 - e\cos\theta)^2}$$

Introducirles los datos y llevándolo a unidades de tiempo en años nos queda:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{27,801191885}{(1 - 0,205\cos\theta)^2} \frac{1}{\text{años}}$$

#### 1.3. COMPROBATORIO

Cumple el teorema de existencia, dada la ecuación siguiente que es continua en el rectángulo siguiente de  $2 \times 2$ :

$$f(\theta, t) = \frac{27,801191885}{(1 - 0,205\cos\theta)^2}$$

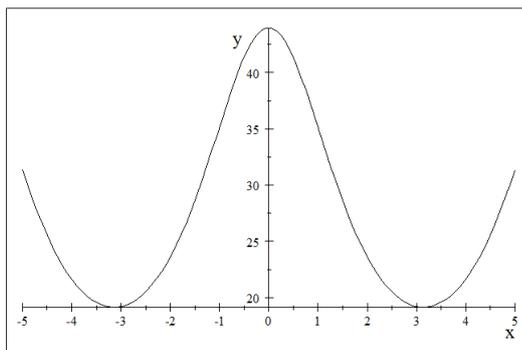


Figura 1.1: Gráfica de la ecuación  $f(\theta, t)$

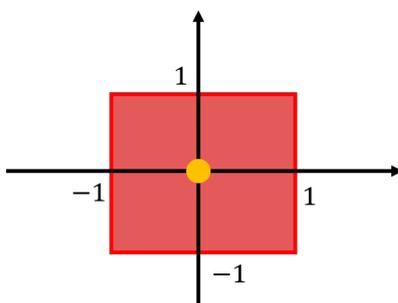


Figura 1.2: Rectángulo propuesto

Cumple el teorema de unicidad, dado la derivada parcial y que es continua en el rectángulo anterior propuesto.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, t) = -\frac{11,402148867285 \text{Sen}\theta}{(1 - 0,205 \text{Cos}\theta)^3}$$

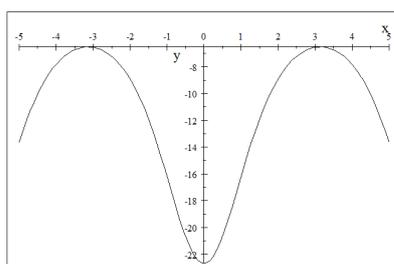


Figura 1.3: Gráfica de la derivada de la función con respecto a theta  $\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, t)$

### 1.4. SIMULADO

Para esta simulación usamos el método de EULER en la ecuaciones de el angulo y el tiempo:

$$theta = theta + h * F$$

Ya con este dato del ángulo podemos saber el radio y lograr una simulación introduciendo a las ecuaciones de  $X$  y  $Y$ .

El código en MATLAB se encuentra en el link siguiente:

<https://drive.google.com/open?id=17gniJ0kSKKm401XRBdqfyWewLMcdw2rg>

## Apéndice B

### MERCURIO

Mercurio es el planeta más pequeño de nuestro sistema solar. Simplemente es un poco más grande que la luna de la Tierra. Es el planeta más cercano al sol pero no es realmente el más caliente. Venus es el más caliente.

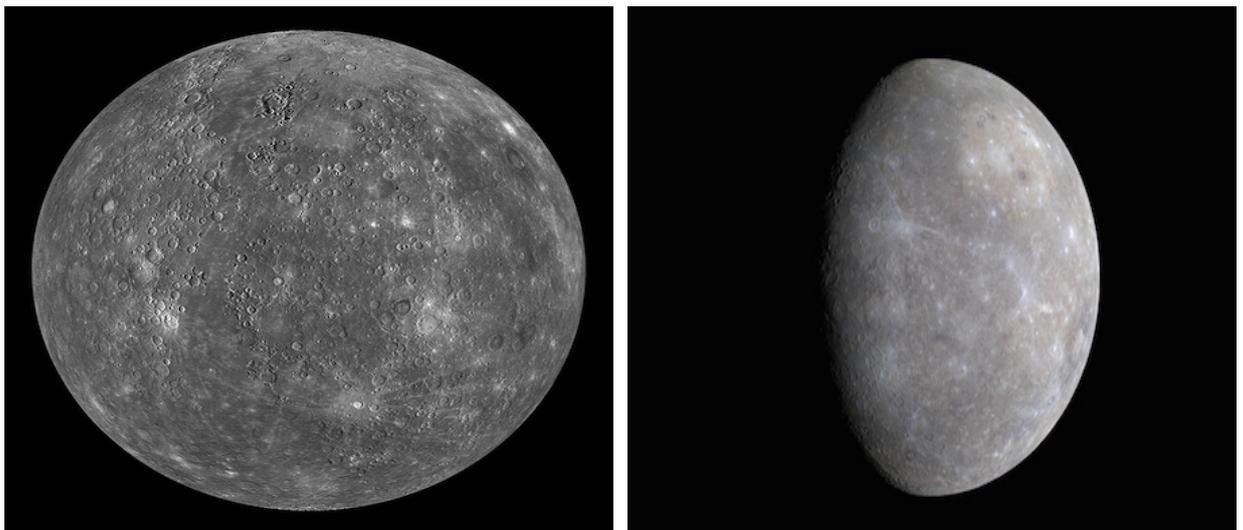
Junto con Venus, la Tierra y Marte, Mercurio es uno de los planetas rocosos. Tiene una superficie sólida que está cubierta de cráteres. Tiene una atmósfera delgada y no tiene ninguna luna. A Mercurio le gusta simplificar las cosas.

Este planeta pequeño da vueltas lentamente comparado con la Tierra, por lo tanto, un día dura un largo tiempo. A Mercurio le lleva 59 días de la Tierra hacer una rotación completa. Un año en Mercurio pasa rápido. Debido a que es el planeta más cercano al sol, no le lleva mucho tiempo cubrir toda la circunferencia. Completa una revolución alrededor del sol en solo 88 días de la Tierra. Si vivieras en Mercurio, tendrías un cumpleaños cada tres meses.



(a) Aquí puedes ver que Mercurio es de un color gris claro. (b) El cráter grande, con forma de estrella hacia la parte inferior de la esfera se denomina Debussy.

Figura 2.1: Primeras imágenes



(a) Este es el horizonte norte de Mercurio visto por la nave espacial MESSENGER durante su tercer sobrevuelo. (b) A la fotografía de Mercurio se le ha agregado colores para que puedas ver mejor las variaciones y los cráteres en la superficie.

Figura 2.2: Segundas imágenes

## Apéndice C

### MESSENGER

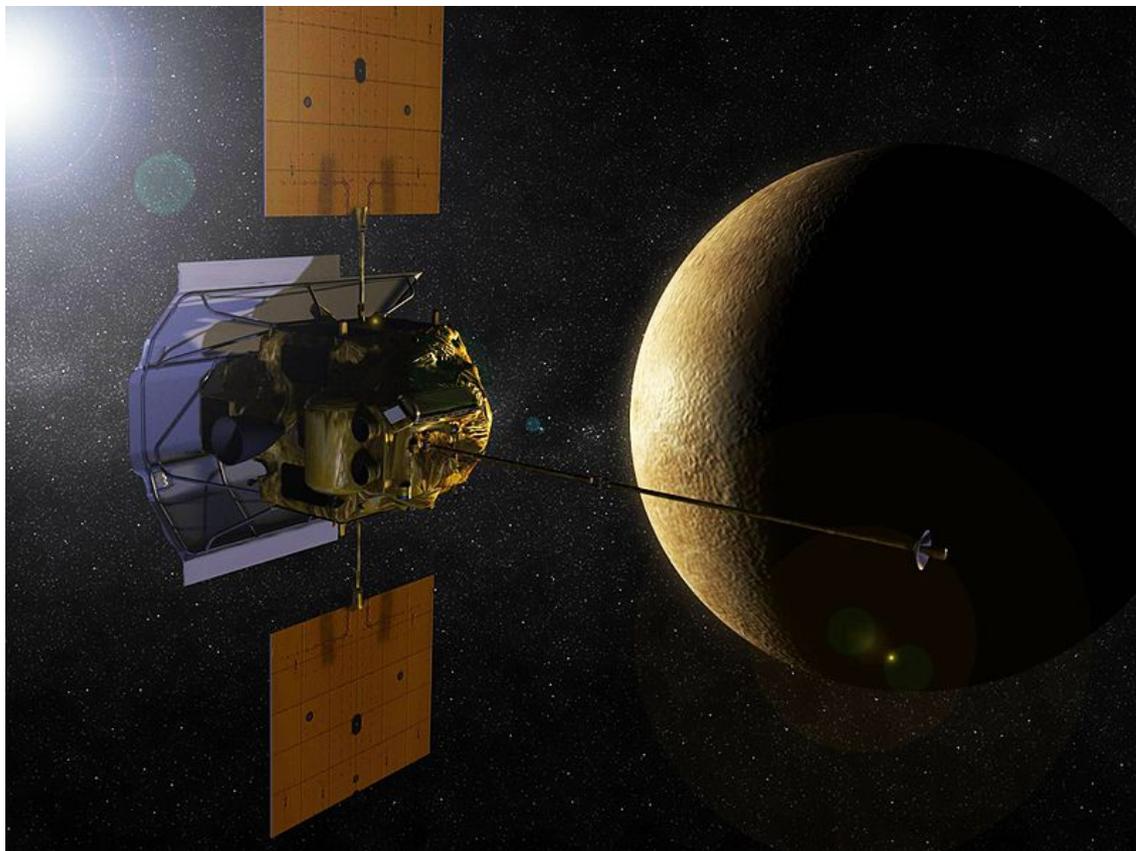


Figura 3.1: Representación artística de la sonda MESSENGER en órbita de Mercurio

Fue una sonda espacial no tripulada de la NASA, lanzada rumbo a Mercurio el 3 de agosto de 2004 y que entró en órbita alrededor de dicho planeta el 18 de marzo de 2011 para iniciar un período de observación orbital de un año terrestre de duración. Durante su trayecto, la sonda ha sobrevolado la Tierra el 1 de agosto de 2005, y dos sobrevuelos a Venus (el 24 de octubre de 2006 y el 5 de junio de 2007) y tres a Mercurio (en 2008 y 2009) antes de la inserción orbital. La sonda consiguió sobrevivir cuatro años más hasta que la NASA decidió dar por terminado el proyecto y dejar que la sonda colisionara contra Mercurio el 30 de abril de 2015. Durante su misión consiguió datos muy valiosos sobre la superficie del planeta y descubrió la existencia de agua congelada en un resquecio donde nunca recibe el Sol.

El nombre MESSENGER es un acrónimo de Mercury Surface, Space ENvironment, GEOchemistry and Ranging (Superficie, Ambiente Espacial, Geoquímica y Medición de Mercurio). Su nombre también significa mensajero, elegido porque Mercurio era el mensajero de los dioses en la mitología romana. Esta sonda ha sido la primera en colocarse en órbita de Mercurio, ya que hasta ahora el planeta sólo ha sido visitado por la Mariner 10, que realizó tres sobrevuelos en 1974 y 1975

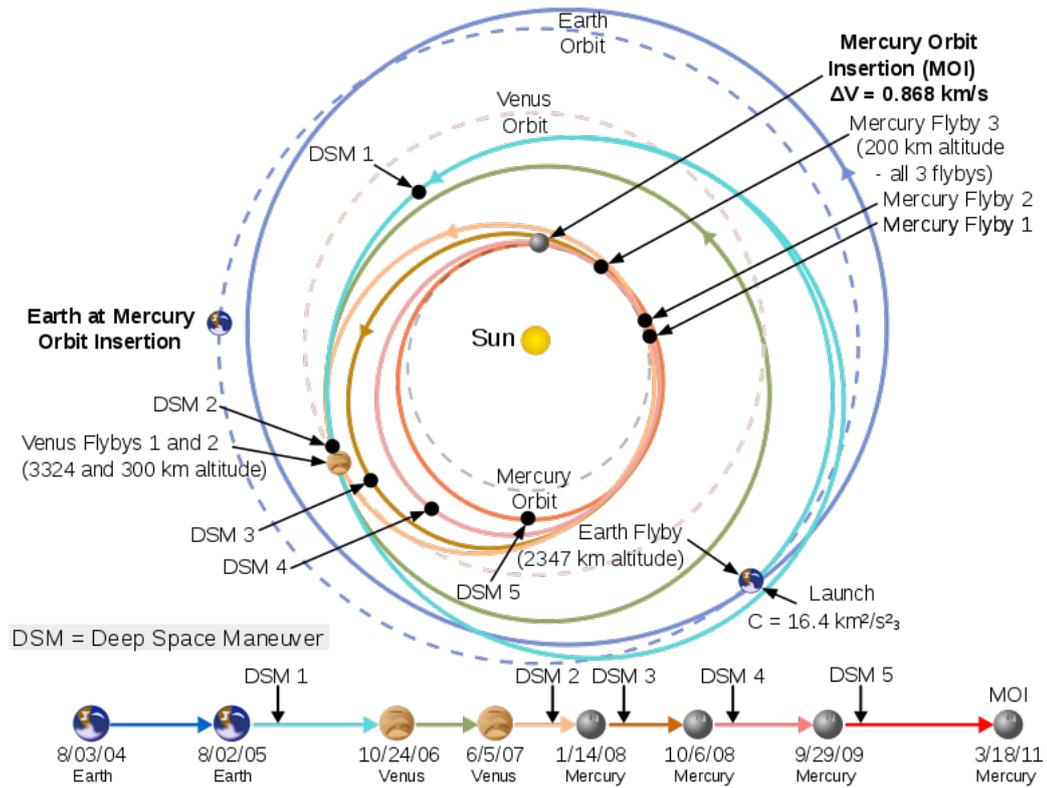


Figura 3.2: Trayectoria del MESSENGER.

## Apéndice D

### EUROPA Y JAPÓN LANZA AMBICIOSA MISIÓN HACIA MERCURIO



Figura 4.1: La nave BepiColombo iniciará mañana su largo periplo hasta Mercurio (La Vanguardia)

Una misión conjunta entre Europa y Japón a Mercurio, ha despegado de la Guayana Francesa en su largo viaje. Un cohete Arianespace Ariane 5 ECA con la nave espacial emparejada se lanzó a las 9:45 p.m. EDT (0145 GMT, 20 de octubre) de Kourou, Guayana Francesa.

La misión, BepiColombo, lleva el nombre de Giuseppe Bepi Colombo (1920-1984), científico, matemático e ingeniero de la Universidad de Padua, Italia, quien implementó por primera vez la maniobra de asistencia gravitatoria interplanetaria durante la misión Mariner 10 de 1974, una técnica ahora comúnmente utilizada por sondas planetarias.

Bepicolombo pasará siete años navegando hacia su objetivo, donde se separará en dos naves espaciales y orbitará Mercurio durante un año, o dos, si se extiende la misión. Las medidas tomadas allí no solo podrían resolver misterios persistentes sobre el planeta más interno, sino también sobre la formación de nuestro sistema solar y los vecinos.

Será un largo viaje. Aunque la órbita de Mercurio está un poco más lejos de la Tierra que la de Marte, y si a Marte se llega en siete meses, la nave BepiColombo que se lanza la próxima noche desde Kurú, en la Guayana francesa, va a necesitar siete años para llegar hasta el planeta Mercurio.

La diferencia se debe a que a Marte se puede ir directamente, sin escalas, ya que se despega en dirección contraria al Sol. Pero para ir a Mercurio sin ser engullida por la enorme gravedad del Sol, BepiColombo

deberá completar dieciocho órbitas a la estrella en un viaje de 9.000 millones de kilómetros o 60 veces la distancia de la Tierra al Sol antes de dejarse atrapar por el minúsculo campo gravitatorio del planeta.

Pero su largo viaje no va a ser desaprovechado tampoco. A medida que se desplaza, un instrumento a bordo realizará las mediciones más precisas hasta la fecha de las órbitas de Mercurio y la Tierra alrededor del Sol.

Los científicos podrán usar estas medidas para perseguir una de sus aficiones favoritas: tratar de encontrar algún defecto en la teoría de la relatividad general de Einstein.



Figura 4.2: ESA-CNES-Arianespace