



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS



**“APLICACIÓN DEL PROBLEMA DE FLUJO DE COSTO MÍNIMO
EN REDES EN LA EJECUCIÓN DE PROYECTOS DE
EDIFICACIÓN (OBRAS DE CONCRETO ARMADO)”**

TESIS

PRESENTADA POR:

EDWIN RENE ESTEBA AVALOS

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

PUNO – PERÚ

2020



DEDICATORIA

A Dios, por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante esta vida.

*A mi padre **Rene Esteba**, por los ejemplos de perseverancia, fortaleza y constancia que lo caracterizan y que me ha infundado siempre, por el valor mostrado para salir adelante ante cualquier adversidad y por todo el apoyo durante mi formación personal y profesional.*

*A mi madre **Cipriana Avalos**, por darme la vida, por el cariño y comprensión, por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, comprensión, amor y sobre todo por sus valores que caracteriza como una madre verdadera y única. Gracias por su oración, que me ha permitido ser una persona de bien.*

*A mi hermana **Janeth**, por el apoyo incondicional ya que siempre he contado contigo para todo, y por la participaron directa o indirectamente en la elaboración de mi proyecto de investigación.*

Edwin 



AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por bendecirnos con la inteligencia y sabiduría para llegar hasta donde hemos llegado, por consiguiente, hacemos realidad este sueño anhelado. Eres el padre celestial de nuestras vidas, ponemos en tus manos nuestras vidas y nuestro espíritu.

Agradezco a mis padres y mi hermana por haber colaborado en hacer realidad el presente trabajo de investigación. Sobre todo, en guiarme en el camino de los valores y principios inquebrantables.

Agradezco a cada uno de los Docentes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas por haberme impartido sus conocimientos durante mi formación profesional que, en este andar por la vida, influyeron con sus lecciones y experiencias en formarme como persona de bien y preparada para los retos que nos pone la vida, a todos y a cada uno de ellos le agradezco. Gracias por forjarme un profesional competente y eficiente.

Agradezco a la Universidad Nacional del Altiplano y en especial a Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas por formarme un excelente profesional. Al mismo tiempo agradezco, a mi director de tesis Lic. Fabiola Torreblanca Loayza y a los Licenciados jurados (dictaminador) por su apoyo en hacer realidad el presente trabajo de investigación.

A todos mis compañeros tanto de físico matemático como a los de ingeniería civil, darles las gracias por los buenos momentos que hemos compartido. Creo que todos hemos aprendido y aprendemos continuamente de todos y de nosotros mismos, tanto profesional como personalmente. Y eso es enriquecedor en ambos ámbitos.

¡Gracias, a todos!



ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA	
AGRADECIMIENTOS	
ÍNDICE DE TABLAS	
ÍNDICE DE FIGURAS	
ÍNDICE DE ACRÓNIMOS	
RESUMEN	12
ABSTRACT.....	13

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Planteamiento del problema.....	16
1.2. Formulación o enunciado del problema.....	18
1.3. Delimitaciones de la investigación.....	18
1.4. Justificación de la investigación.....	19
1.5. Objetivos de la investigación	20
1.6. Hipótesis de la investigación.....	21
1.7. Matriz de consistencia.....	22

CAPITULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN (MARCO REFERENCIAL) ...	23
2.2. MARCO TEÓRICO.....	26
2.2.1. Programación Lineal	26
2.2.1.1. Definición (Problema de Programación Lineal - PPL):	28
2.2.1.2. El método gráfico	29
2.2.1.3. El método Simplex	30
2.2.1.4. Análisis de sensibilidad	31
2.2.1.5. Programación Lineal Entera	32
2.2.2. Teoría de Grafos	33
2.2.2.1. Definición (Grafo):	33
2.2.2.2. Definición (Grafo dirigido o dígrafo):.....	34
2.2.2.3. Definición (Sucesor o Incidencia):	35
2.2.2.4. Definición (Predecesor o Adyacencia):.....	35



2.2.2.5. Definición (Conjunto Potencia):.....	35
2.2.2.6. Definición (Camino o trayectoria):	36
2.2.2.7. Definición (Camino Simple):	36
2.2.2.8. Definición (Camino Elemental o Ruta):.....	36
2.2.2.9. Definición (Circuito):	37
2.2.2.10. Definición (Cadena):	37
2.2.2.11. Definición (Ciclo):.....	38
2.2.2.12. Definición (Conexa):	38
2.2.2.13. Definición (Subdígrafo):	38
2.2.2.14. Definición (Componente de un dígrafo):	38
2.2.2.15. Definición (Árbol):.....	39
2.2.2.16. Definición (Árbol de expansión):.....	39
2.2.2.17. Definición (Bosque):	39
2.2.2.18. Definición (Grado exterior y grado interior):.....	39
2.2.2.19. Definición (Grado de un nodo o vértice):.....	40
2.2.2.20. Proposición 1:.....	40
2.2.2.21. Proposición 2:.....	40
2.2.2.22. Proposición 3:.....	40
2.2.2.23. Proposición 4:.....	40
2.2.3. Representación matricial de grafos	41
2.2.4. Definición (Red):.....	42
2.2.5. Problema del flujo de costo mínimo.....	43
2.2.6. Propiedades de la matriz de restricciones.....	45
2.2.6.1. Proposición 5 (Rango de la matriz A):	46
2.2.6.2. Variable artificial.....	47
2.2.6.3. Caracterización de una matriz básica	48
2.2.6.4. Definición (Matriz básica del problema de flujo de redes):.....	49
2.2.6.5. Teorema 1:.....	49
2.2.6.6. Teorema 2:.....	49
2.2.7. Representación de una columna no básica en términos de las columnas básicas.	50
2.2.8. El Método simplex para problema de flujo en redes	51
2.2.8.1. Cálculo de las variables duales w y $z_{ij} - c_{ij}$	53
2.2.8.1.1. Interpretaciones de las variables w_i y de los costos reducidos $c_{ij} - z_{ij}$	55



2.2.8.2. Determinación de la columna de salida y pivoteo	56
2.2.8.3. Resumen del algoritmo simplex para redes	57
2.2.8.4. Determinación de una solución básica factible	58
2.2.9. Ejemplo problema de costo mínimo	60
2.2.10. Algoritmo Out-of-Kilter (Algoritmo de desviaciones).....	60
2.2.10.1. El dual del problema de flujo de costo mínimo y sus propiedades	61
2.2.10.2. Las condiciones de holgura complementaria	63
2.2.10.2.1. Los estados Kilter y números de Kilter para un arco	64
2.2.10.3. Resumen del algoritmo out-of-Kilter	67
2.2.11. Ejemplo (algoritmo out-of-Kilter).....	68
2.2.12. Modelos de optimización de redes (Casos Especiales del Problema de Costo Mínimo).....	68
2.2.12.1. Problema de Transporte (PT)	70
2.2.12.1.1. Teorema	72
2.2.12.2. Problema de Asignación.....	73
2.2.12.3. Problema de la Ruta más Corta	77
2.2.12.4. Problema de Flujo Máximo	78

CAPITULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. TIPO, NIVEL, DISEÑO Y MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN	80
3.1.1. Tipo de investigación	80
3.1.2. Nivel de investigación	80
3.1.3. Diseño de investigación.....	80
3.1.4. Método de investigación.....	81
3.2. ÁMBITO DE ESTUDIO.....	81
3.3. POBLACIÓN Y MUESTRA	81
3.3.1. Población	81
3.3.2. Muestra	82
3.4. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS	84
3.5. DESARROLLO DE LA METODOLOGÍA aplicando el Problema de flujo de costo mínimo en redes.....	89
3.5.1. Modelo Matemático al movimiento de tierra	92
3.5.2. Modelo Matemático al corte de acero	96
3.5.3. Modelo matemático a la programación de actividades	105



3.5.4. Modelo matemático a la asignación de personal 107

CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN 110

4.1.1. Optimizar el costo en obra con la aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes en proyectos edificación (partidas de concreto armado) 110

4.1.2. Optimizar el tiempo en obra con la aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes en proyectos edificación (partidas de concreto armado) 112

V. CONCLUSIONES..... 113

VI. RECOMENDACIONES 114

VII. REFERENCIAS..... 116

ANEXOS..... 119

Área : Programación Lineal

Tema : Teoría de Grafos

Línea de Investigación: Matemática Aplicada

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 22 DE DICIEMBRE DEL 2020



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Matriz de consistencia	22
Tabla 2: Estados Kilter	65
Tabla 3: Números Kilter	66
Tabla 4: Resumen de área construida y presupuesto de la obra en estudio	82
Tabla 5: Resumen de ambientes de la obra en estudio	83
Tabla 6. Relación de precedencias y tiempos de las actividades de ejecución del casco estructural	106
Tabla 7: Optimización de costos.....	111
Tabla 8. Optimización de tiempo.....	112



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ejemplo de un grafo	34
Figura 2. Ejemplo de un grafo dirigido.....	34
Figura 3. Grafo de ejemplo para la definición 2.2.2.5	35
Figura 4. Grafo de ejemplo para las definiciones 2.2.2.6 al 2.2.2.12	37
Figura 5. Grafo de ejemplo para las matrices de adyacencia e incidencia	42
Figura 6. Grafo de ejemplo para las matrices de incidencia.....	45
Figura 7. Árbol de expansión.....	46
Figura 8. Una gráfica generalizada G	48
Figura 9. Un subgráfica de una base es un árbol de expansión enraizado.....	48
Figura 10. Ciclo formado añadiendo un arco no básico al árbol de la base.	50
Figura 11. Ejemplo de ciclo formado añadiendo un arco no básico (1,2).	51
Figura 12. Cálculo de los valores de las variables básicas.	52
Figura 13. Cálculo de los valores de las variables duales.....	54
Figura 14. Representación del modelo de Transporte con nodos y arcos.....	71
Figura 15. 3D de la Obra	83
Figura 16. Interfaz del Software Grafos	85
Figura 17. Opciones de solución del Software Grafos	87
Figura 18. Resultados del Análisis del Software Grafos	88
Figura 19. Solución en el grafo.....	88
Figura 20. Configuración de Análisis del Software Grafos.....	89
Figura 21. Presupuesto Estructuras Obra Educación Primaria.....	91
Figura 22. Botaderos propuestos para la eliminación.....	93
Figura 23. Análisis de Precios Unitarios de eliminación de material.....	93
Figura 24. Solución en Software Grafos.....	96



Figura 25. Plano en planta de la cimentación	99
Figura 26. Plano cimentación Z-1	100
Figura 27. Optimización de corte de acero zapata Z-01	103
Figura 28. Optimización de corte para toda la cimentación	104
Figura 29. Diagrama de redes	107
Figura 30. Diagrama de redes Asignación y solución	109
Figura 31. Resultado eliminación material	111
Figura 32. Resultado de corte de acero	111
Figura 33. Resultado de programación y asignación de actividades	112



ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

KKT:	Karush Kuhn Tucker
MD:	Modelos Determinísticos
ME:	Modelos Estocásticos
P:	Problema Primal
PD:	Problema Dual
PPL:	Problema de Programación Lineal
PT:	Problema de Transportes
CPM:	Critical Path Method (Método de Ruta Crítica)



RESUMEN

La presente investigación titulada “Aplicación del Problema de Flujo de Costo Mínimo en Redes en la Ejecución de Proyectos de Edificación (Obras de Concreto Armado)”, se realizó con el objeto de optimizar el costo y tiempo en obra aplicando el problema de flujo de costo mínimo en redes en proyectos de edificación (partidas de concreto armado). Para lo cual se propone el desarrollo de modelos matemáticos en la etapa de construcción del casco estructural, en la obra “Mejoramiento del Servicio de Formación Profesional en la Escuela Profesional de Educación Primaria de la Universidad Nacional Del Altiplano”, en el cual se recopilaban los datos obtenidos en el expediente técnico y en obra, finalmente con los datos obtenidos se formuló el modelo matemático del Problema de Flujo de Costo Mínimo y sus casos especiales para optimizar el costo y tiempo mediante hojas de Excel y software Grafos. Los resultados muestran que, al aplicar el Problema de Flujo de Costo Mínimo en Redes en la Ejecución de Proyectos de Edificación, en caso específico de la obra de Educación Primaria se optimizó el costo y tiempo en la ejecución del casco estructural. Finalmente se obtuvo buenos resultados al aplicar el Problema de Flujo de Costo Mínimo en Redes.

Palabras claves: Costo, Flujo en Redes, Grafos, Programación Lineal, Proyectos, Tiempo.



ABSTRACT

This research entitled "Application of the Minimum Cost Flow Problem in Networks in the Execution of Building Projects (Reinforced Concrete Works)", was carried out in order to optimize the cost and time on site by applying the cost flow problem minimum in networks in building projects (items of reinforced concrete). For which the development of mathematical models is proposed in the construction stage of the structural hull, in the work "Improvement of the Professional Training Service in the Professional School of Primary Education of the Universidad Nacional Del Altiplano ", in which the data obtained in the technical file and on site were compiled, finally with the data obtained the mathematical model of the Minimum Cost Flow Problem and its special cases were formulated to optimize the cost and time using Excel sheets and Graphs software. The results show that, by applying the Minimum Cost Flow Problem in Networks in the Execution of Building Projects, in the specific case of the Primary Education work, the cost and time in the execution of the structural shell was optimized. Finally, good results were obtained when applying the Minimum Cost Flow Problem in Networks.

Keywords: Cost, Flow in Networks, Graphs, Linear Programming, Projects, Time.



CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

La Programación Lineal constituye un importante campo de la optimización, muchos problemas prácticos de la investigación de operaciones pueden plantearse como problemas de programación lineal. Algunos casos especiales de programación lineal, tales como los *problemas de flujo de redes (problema del flujo de costo mínimo)* se consideraron en el desarrollo de las matemáticas lo suficientemente importantes como para generar por si mismos mucha investigación sobre algoritmos especializados en su solución. La programación lineal es un procedimiento o modelo matemático que consiste en optimizar una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones que expresamos mediante un sistema de inecuaciones lineales.

Por otra parte el rubro de la construcción viene creciendo significativamente en el Perú, y es uno de los sectores que mueve la economía de la población y que el PBI de la construcción aporta un porcentaje significativo al PBI del país, es por eso que el éxito de una obra para el sector de la construcción, implica un adecuado manejo de todos aquellos elementos y recursos que intervienen en ella, y tomando en cuenta que la industria de la construcción maneja recursos como costos de materiales, mano de obra, equipos, etc., entonces es de importancia establecer mecanismos adecuados para una buena administración, Por lo tanto, todo esfuerzo que promueva el uso de nuevas metodologías y técnicas de gestión al desarrollo de los proyectos de construcción ayudara de una manera directa en la reducción de las deficiencias que conlleva el modelo tradicional.



Para el presente estudio de investigación, se abordó una parte de la amplia teoría de grafos, problemas de flujo de redes, problema del flujo de costo mínimo, así como definiciones, teoremas. Con todo esto se aplicó el problema de Costo Mínimo y sus casos especiales en la Obra “Mejoramiento del Servicio de Formación Profesional en la Escuela Profesional de Educación Primaria de la Universidad Nacional Del Altiplano”, con el objetivo de plantear modelos de optimización en la etapa de la Construction del casco estructural y con los resultados obtenidos tomar decisiones para optimizar el costo y tiempo de las partidas que comprenden el proceso constructivo del caso estructural, en este trabajo se planea transmitir la importancia que la matemática (*problemas de flujo de redes*) tiene para poder optimizar diferentes procesos en los proyectos de edificación.

La presente investigación está estructurada de la siguiente manera:

- En el capítulo I, se realiza la introducción, el planteamiento y formulación del problema general y específicos. Incluye la delimitación, justificación, objetivos e hipótesis del trabajo de investigación.
- En el capítulo II, está la revisión literaria que contiene los antecedentes bibliográficos y el marco teórico.
- En el capítulo III, se desarrolla los materiales y métodos que contiene el diseño de investigación, ámbito de estudio, se determinó la población y muestra, se menciona las técnicas e instrumentos que se emplearon para la recolección de datos, así como el plan de desarrollo de la metodología, el procedimiento y análisis de datos.
- En el capítulo IV, se reporta los resultados de la investigación, la discusión de los resultados.
- En el capítulo V, están las conclusiones.



- En el capítulo VI, están las recomendaciones.
- En el capítulo VII, finalmente están las referencias y anexos.

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La programación lineal y en particular los problemas de flujo de redes constituyen un importante campo de la optimización. Estos son muy usados en la administración de empresas, ya sea para aumentar al máximo los ingresos o reducir al mínimo los costos de un sistema de producción y la teoría de grafos es una rama de la matemática discreta y de la matemática aplicada, nos ayuda a resolver numerosos problemas en diferentes ámbitos como flujo en redes, árboles genealógicos, distribución de espacios arquitectónicos, emparejamientos, programación de actividades, redes de agua, carreteras, circuitos eléctricos, entre otros.

Por otra parte, la industria de la construcción es una actividad importante de la economía de un país, los diversos estudios, en muchos países, muestran que los proyectos de construcción resultan muy costosos debido al desperdicio que en estos se generan en la etapa de construcción, además muy pocos llegan a culminarse en el tiempo programado. El éxito de una obra para el sector de la construcción, implica un adecuado manejo de todos aquellos elementos y recursos que intervienen en ella, lo que significa en hacer una adecuada elaboración de un análisis de costo y tiempo de los procesos constructivos que tengan como base la optimización de costo - tiempo.

Para esto se propone el uso de los modelos de optimización de redes que son un tipo especial de problemas de programación lineal, en el cual el problema del flujo de costo mínimo proporciona un enfoque unificado de muchas otras aplicaciones debido a



su estructura mucho más general. Esta estructura es tan general que incluye como casos especiales el problema de la ruta más corta y el de flujo máximo, al igual que los problemas de transporte y asignación. En razón de que el problema del flujo de costo mínimo es un tipo especial de problema de programación lineal, se puede resolver en forma eficiente mediante una versión simplificada del método simplex llamada método simplex de redes. El problema del flujo de costo mínimo que tiene una posición central entre los modelos de optimización de redes; primero, abarca una clase amplia de aplicaciones y segundo, su solución es muy eficiente. Al igual que el problema de flujo máximo, toma en cuenta un flujo en una red con capacidades de arco limitadas. Igual que el problema de ruta más corta, considera un costo (o distancia) para el flujo a través de un arco. Igual que el problema de transporte o el de asignación puede manejar varios orígenes (nodo fuente) y varios destinos (nodos demanda) para el flujo, de nuevo con costos asociados. La razón por la que el problema de flujo de costo mínimo se puede resolver de modo tan eficiente es que se puede formular como un problema de programación lineal y es posible resolverlo con una versión simplificada del método simplex llamada método simplex de redes. (Hiller & Liberman, 2010).

De aquí surge la principal motivación de este tema de investigación, que es aplicar el problema de flujo de costo mínimo en redes en la ejecución de proyectos de edificación que sirvan para la correcta *aplicación de modelos de optimización, identificación y control de la producción en obra* en nuestra región y que ayude a mejorar y optimizar el flujo de trabajo de la producción en la construcción.



1.2. FORMULACIÓN O ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Por lo tanto, se formula las siguientes interrogantes de investigación.

a. Problema general.

- ¿Es posible optimizar el costo y tiempo en obra con la aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes en la ejecución de proyectos de edificación (partidas de concreto armado)?

b. Problemas específicos.

- ¿La aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes optimiza el costo en la ejecución de proyectos de edificación (partidas de concreto armado)?
- ¿La aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes optimizará el tiempo en la ejecución de proyectos de edificación (partidas de concreto armado)?

1.3. DELIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

a. Delimitación espacial.

El presente trabajo de investigación se desarrolló en el ámbito de la ciudad de Puno, que comprende las obras que ejecuta la Universidad Nacional del Altiplano Puno a través de la Oficina de Ejecución de Inversiones (OEI), obras ejecutadas mediante la modalidad de administración directa y que está determinada por la obra “Mejoramiento del Servicio de Formación Profesional en la Escuela Profesional de Educación Primaria de la Universidad Nacional Del Altiplano”.



b. Delimitación temporal.

Corresponde a la implementación del problema de flujo de costo mínimo en redes en los procesos constructivos de edificaciones en la obra en estudio de la UNA - PUNO en periodos durante los años 2018 - 2019.

c. Delimitación conceptual.

Costo, Flujo en Redes, Programación Lineal, Proyectos, Tiempo.

1.4. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El propósito de la investigación es aplicar un modelo donde se tenga en cuenta las variables y restricciones relevantes al costo y tiempo, para realizar esto, una aplicación serían los modelos matemáticos, que brindan de forma práctica y económica soluciones en diversos campos de la investigación. Es por esto que el aplicar un modelo matemático a un determinado problema acerca a los investigadores a una metodología que permitirá tomar decisiones correctas en un tiempo adecuado ante problemas que se presenten a lo largo de nuestra vida académica y profesional, sin importar la naturaleza del problema todos comparten una misma situación, variables y restricciones de diferente índole y una necesidad de maximizar aspectos positivos o minimizar aquellos negativos. Por medio de los modelos matemáticos se busca realizar operaciones cada vez más productivas en las empresas de construcción buscando siempre el mejoramiento continuo.

Es por eso que el uso adecuado de un modelo matemático “Problema de flujo de costo mínimo en redes” el cual proporciona un enfoque unificado de muchas otras aplicaciones debido a su estructura mucho más general. Esta estructura es tan general que incluye como casos especiales el problema de la ruta más corta y el de flujo máximo, al



igual que los problemas de transporte y asignación, será de ayuda para lograr los buenos resultados de cualquier proyecto (adecuada optimización), esto nos permitirá controlar integralmente estimados, tiempos y costos detectando las desviaciones oportunamente lo que nos permitirá tomar las medidas correctivas a tiempo para cumplir con las metas establecidas.

El desarrollo de esta investigación es de interés y servirá de apoyo a la industria de la construcción, así como la definición de los alcances de las partes involucradas en el desarrollo de un proyecto, partiendo desde el inicio hasta el término de este, utilizando mecanismos que nos permitan procesar en forma adecuada la información que servirá como base para definir la tendencia en costo y tiempo de acuerdo a lo planificado y que haya una coordinación adecuada en la ejecución de proyectos de construcción.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

a. Objetivo general

- Optimizar el costo y tiempo en obra con la aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes en proyectos edificación (partidas de concreto armado).

b. Objetivos específicos

- Optimizar el costo en obra con la aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes en proyectos edificación (partidas de concreto armado).
- Optimizar el tiempo en obra con la aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes en proyectos edificación (partidas de concreto armado).



1.6. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

a. Hipótesis general

- La aplicación del Problema de flujo de costo mínimo en redes optimiza el costo y tiempo en la ejecución de proyectos de edificación (partidas de concreto armado).

b. Hipótesis específicas

- La aplicación del Problema de flujo de costo mínimo en redes optimiza el costo en la ejecución de proyectos de edificación (partidas de concreto armado).
- La aplicación del Problema de flujo de costo mínimo en redes optimiza el tiempo en la ejecución de proyectos de edificación (partidas de concreto armado).

1.7. MATRIZ DE CONSISTENCIA

Tabla 1: *Matriz de consistencia*

PROBLEMA		OBJETIVO	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
PRINCIPAL ¿Es posible optimizar el costo y tiempo en obra con la aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes en la ejecución de proyectos de edificación (partidas de concreto armado)?	PRINCIPAL Optimizar el costo y tiempo en obra con la aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes en proyectos edificación (partidas de concreto armado).	HIPÓTESIS GENERAL La aplicación del Problema de flujo de costo mínimo en redes optimiza el costo y tiempo en la ejecución de proyectos de edificación (partidas de concreto armado).	INDEPENDIENTE Aplicación del Problema de flujo de costo mínimo en redes.	La metodología que se aplicará para este trabajo de investigación del tipo básica - aplicada, para explicar la aplicación del Problema de flujo de costo mínimo en redes en la ejecución de proyectos de edificación en lo que concierne a costo y tiempo. Por cuanto esta será una alternativa para el uso por instituciones dedicadas a la industria de la construcción, para poder optimizar el costo y tiempo en proyectos de edificación. La recolección de información se realizará de dos maneras: Información Indirecta. - Recopilación de la información existente en fuentes bibliográficas (para analizar temas generales sobre la investigación a realizar); recurriendo a las fuentes originales en lo posible: éstas son libros, revistas especializadas, artículos escritos por autores expertos y páginas web de internet. Información Directa. - Este tipo de información se obtendrá mediante la aplicación de toma de datos en campo. TÉCNICAS QUE SE UTILIZARÁN EN LA INVESTIGACIÓN (obtención de datos) - Recolectar y organizar la información obtenida en la obra de mediante las fases de análisis y observación en campo. - Organizar la información obtenida en obra mediante las fases de observación en campo los cuales permitieron identificar la problemática en los procesos constructivos y proponer modelos matemáticos que ayuden nos ayuden a optimizar el proceso constructivo. - Procesar los datos de toda la información obtenida durante la etapa de construcción del proyecto en los formatos y softwares respectivos (Principalmente se creará hojas de cálculo en Excel y para obtener los resultados del modelo matemático se hará uso del software Grafos) entre otros (Microsoft Project, S10, WinQSB) - Utilizar la información para generar una base de datos, con los datos obtenidos generar un modelo matemático y realizar una propuesta del uso del modelo. - Posteriormente se concluirá sobre los resultados que se obtendrán y los beneficios que brindarán la aplicación del Problema de flujo de costo mínimo en redes en la ejecución de proyectos de edificación con el fin de incentivar su aplicación para una mejora en el ámbito de la construcción en la región.	
ESPECIFICO N° 1 ¿La aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes optimiza el costo en la ejecución de proyectos de edificación (partidas de concreto armado)?	ESPECIFICO N° 1 Optimizar el costo en obra con la aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes en proyectos edificación (partidas de concreto armado).	HIPÓTESIS ESPECIFICA N° 1 La aplicación del Problema de flujo de costo mínimo en redes optimiza el costo en la ejecución de proyectos de edificación (partidas de concreto armado).	DEPENDIENTE Optimización del costo y tiempo de proyectos de edificación.		
ESPECIFICO N° 2 ¿La aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes optimizará el tiempo en la ejecución de proyectos de edificación (partidas de concreto armado)?	ESPECIFICO N° 2 Optimizar el tiempo en obra con la aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes en proyectos edificación (partidas de concreto armado).	HIPÓTESIS ESPECIFICA N° 2 La aplicación del Problema de flujo de costo mínimo en redes optimiza el tiempo en la ejecución de proyectos de edificación (partidas de concreto armado).			

Fuente: Elaborado por el equipo de trabajo



CAPITULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN (MARCO REFERENCIAL)

(Santana, 2016) en su tesis “Un estudio de variantes del Método del Simplex en la resolución de Problemas de Flujos en Redes” desarrollado en San Cristóbal de La Laguna, España en la Universidad de La Laguna, indica en su tesis que el objetivo del trabajo es la aplicación de distintas variantes del Método del Simplex para la resolución de problemas de Flujo en Redes, concretamente al problema general de Flujo de Costo Mínimo, que realizando un estudio fundamentado de distintas variantes (Primal, Dual, Autodual) que son aplicadas a distintos casos particulares.

(Ullilen, 2015) en su tesis “Problema del Flujo en Redes y Programación Lineal” desarrollado en Lima, Perú en la Universidad Nacional de Ingeniería, indica que el objetivo de la tesis es de conocer técnicas que permitan resolver los problemas de transporte e intentar aplicarlas a la vida real. Una de estas técnicas que se presenta es la llama "problema del flujo en redes", que están orientadas a optimizar situaciones vinculadas a las redes de transporte, rutas entre ciudades, rutas entre máquinas de planta, aquellas situaciones que puedan representarse mediante una red donde los nodos representan las ciudades, clientes, áreas de zona de embarque, almacén, máquinas, y arcos que conectan cada par de nodos, con el objetivo de encontrar la ruta más corta, enviar el máximo fluido si una red está compuesta de varias máquinas por ejemplo, buscar formas minimizar los costos de transporte teniendo en cuenta los costos reales de transporte en lugar de minimizar el número de viajes o la total distancia de envío. En la tesis se



describen algunos algoritmos aplicables a estos modelos para encontrar la solución óptima al problema.

(Villaroel, 2012) en su tesis “Diseño e implementación de un modelo de programación lineal para optimizar la asignación presupuestal en el proyecto especial de infraestructura PROVIAS DESCENTRALIZADO – MTC” desarrollado en Lima, Perú en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, indica en su tesis que la asignación eficiente del presupuesto es uno de los factores esenciales para garantizar el cumplimiento de las metas trazadas por una organización. Siendo, el estado una entidad que por su naturaleza cuenta con recursos financieros limitados, la asignación presupuestal de las entidades públicas viene a ser un factor crítico para la consecución de los objetivos trazados. De tal modo, es muy importante identificar las causas que puedan generar ineficiencias en la asignación presupuestal de los recursos públicos, con la finalidad de darles solución y de tal forma incrementar la eficiencia de la asignación presupuestal hasta llevarla a un punto óptimo. Se diseña un modelo de programación lineal cuya función objetivo es maximizar el impacto socioeconómico y por consiguiente optimizar la asignación presupuestal. Dicho de otro modo, se realiza el modelo de programación lineal con la finalidad de hacer una distribución del presupuesto institucional de tal forma que se obtenga el mayor impacto socioeconómico con la ejecución de los proyectos viales.

(Rivera & Santillana, 2015) en su tesis “Algoritmo para la asignación de maquinarias a obras en la empresa constructora Aramsa Contratistas Generales S.A.C” desarrollado en Lima, Perú en la Universidad de San Martín de Porres, indica que la revisión de los modelos de Investigación Operativa (lineal, entera, no lineal, heurístico) y algoritmos relacionados a la mejora de asignación de recursos, son escasos el uso de



algoritmos para la mejora de la asignación de maquinarias de obras civiles en el Perú. El objetivo de la tesis es el desarrollo de un algoritmo para la mejora de asignación de maquinarias en las obras civiles del sector de la construcción, bajo el modelo Heurístico. Se ha probado la hipótesis que si se determina la reducción de costos de desplazamiento en la asignación de máquinas a obras civiles con el modelo heurístico; entonces, el margen de contribución total que perciba la empresa será el máximo. Las principales conclusiones a que se arribaron es que para la realización de un estudio de este tipo no se necesita grandes inversiones económicas ni tecnológicas, pues contando con recursos limitados se ha logrado desarrollar el presente estudio, que es el de brindar una herramienta útil y necesaria para que las organizaciones puedan optimizar la utilización de sus recursos y maximizar sus contribuciones y de esta manera cumplir con sus obligaciones como tal, y además se busca apoyar a las empresas del rubro de construcción para que por medio de modelos y herramientas tecnológicas optimicen la asignación de maquinarias y así puedan reducir costos.

(Condori, 2016) en su tesis “Optimización espacial de la red de carreteras de la región de Puno mediante la teoría de grafos” desarrollado en Puno, Perú en la Universidad Nacional del Altiplano, indica que la teoría de grafos es una rama de la matemática discreta y de la matemática aplicada, es un tratado que usa diferentes conceptos de diversas áreas como combinatoria, algebra, probabilidad, geometría de polígonos, aritmética y topología, nos ayuda a resolver numerosos problemas en diferentes ámbitos como flujo en redes, árboles genealógicos, distribución de espacios arquitectónicos, emparejamientos, programación de actividades, redes sociales, resultados de torneos, coloreado de regiones, circuitos eléctricos, entre otros. En nuestra realidad regional, al momento de ejecutar un proyecto vial de carreteras solo se analizan



aspectos socioeconómicos, demográficos y la integración con las demás localidades del espacio territorial en donde se ejecuta el proyecto; es decir se aspira lograr el desarrollo, integración y mejora de costos de transporte, sólo de las localidades por donde pasa la carretera. Pero hasta este momento nunca se ha analizado como es que la ejecución de un proyecto vial de carreteras influye en toda la estructura de la red regional de carreteras, como parte de un todo. Se utiliza la teoría de grafos, no tan solo para organizar, describir y expresar los fenómenos espaciales del territorio de la red de carreteras de la región Puno en términos matemáticos, sino, para determinar la importancia de la reordenación espacial que la red de carreteras, ha establecido sobre su territorio en dos aspectos: la situación nacional de la red y la situación regional de la red (con los que están en proyecto, estudio y construcción). En el cual los nodos están constituidos por los municipios puneños capitales de cada provincia superiores a 2000 habitantes (censo de población y vivienda del 2007), lo que permite incluir a la red a todos los núcleos urbanos y semiurbanos de la región; y los arcos son las carreteras asfaltadas que unen los nodos de la región, distinguiendo los de interés nacional, regional y vecinal.

2.2. MARCO TEÓRICO

2.2.1. Programación Lineal

Un problema de programación lineal está conformado por una función lineal de varias variables que se busca optimizar respetando una serie de restricciones también lineales. La técnica de programación lineal, como su nombre lo indica, es aplicable a modelos de optimización en los que la función objetivo y las restricciones cumplen con la condición de ser lineales. Esta técnica es empleada en una gran variedad de casos en campos de agricultura, industria, transporte, economía, salud, ciencias sociales y de la conducta, y militar (Taha, 2004). La programación lineal es la herramienta más importante de la investigación de operaciones. Así lo describe Taha:



“En realidad, debido a su tremenda eficiencia de cálculo, la programación lineal forma la columna vertebral de los algoritmos de solución para otros modelos de investigación de operaciones, como las programaciones entera, estocástica y no lineal.”

(Taha, 2004, p. 11)

De tal modo, los modelos de programación lineal son los más importantes y más usados por que se pueden resolver problemas muy grandes en poco tiempo de cálculo y con un bajo consumo de recursos computacionales y además porque este tipo de modelo es la base del desarrollo de otras áreas.

Los Modelos Matemáticos se dividen básicamente en Modelos Determinísticos (MD) o Modelos Estocásticos (ME). En el primer caso (MD) se considera que los parámetros asociados al modelo son conocidos con certeza absoluta, a diferencia de los Modelos Estocásticos, donde la totalidad o un subconjunto de los parámetros tienen una distribución de probabilidad asociada. El modelo de programación lineal está compuesto por diferentes partes, estas se deben de colocar según este orden:

- Variables de Decisión, pueden ser dependientes o independientes. En cualquier modelo de programación lineal, deben describir por completo las decisiones que se tienen que tomar.
- Función Objetivo, expresa la relación entre las variables de decisión, de forma lineal. Esta función se puede maximizar o minimizar.
- Restricciones, estas son funciones de las variables de decisión, también de forma lineal que permiten limitar los recursos. Estas restricciones pueden ser ecuaciones o inecuaciones, binarias, enteras o mixtas.



- Rango de Existencia, indica el rango de valores que pueden tomar las variables de decisión. Estas pueden ser Reales, Binarias, Enteras, etc.

Existen diversas soluciones que ofrece esta programación lineal, entre ellas se tiene:

- Solución, es el conjunto de valores que pueden tomar las variables de decisión.
- Solución Factible, es la solución tomando en cuenta las restricciones del modelo, satisfaciendo cada una de ellas.
- Solución Óptima Factible, es la solución que optimiza la función objetivo.

“El objeto de la programación lineal es optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal de n variables sujeto a restricciones lineales de igualdad o desigualdad. Mas formalmente, se dice que un problema de programación lineal consiste en encontrar el óptimo (máximo o mínimo) de una función lineal en un conjunto que puede expresarse como la intersección de un número finito de hiperplanos y semiespacios en \mathbb{R}^n .” (Castillo et al., 2002, p. 75)

Esta definición que hace (Castillo et al., 2002) en su libro señala de manera clara la composición de la estructura de un problema de programación lineal y se detalla de manera más específica en la siguiente definición.

2.2.1.1. Definición (Problema de Programación Lineal - PPL):

La forma más general de un problema de programación lineal (PPL) consiste en minimizar o maximizar



$$Z = f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

sujeto a;

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p - 1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, q - 1 \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

donde p , q y m son enteros positivos tales que

$$1 \leq p \leq q \leq m$$

En la ecuación anterior, el replanteamiento matemático señalado en (1) se denomina Función Objetivo o Función de Coste, y las representaciones que se muestran en (2) se denominan restricciones del sistema. Estas restricciones son el conjunto de condiciones que debe cumplir una posible solución óptima. Estas condiciones parten de la naturaleza física, económica o de ingeniería que posee un problema. Las restricciones definen el conjunto de soluciones factibles, es decir, las soluciones que cumplen con todas las condiciones establecidas y dentro de las cuales se encuentra la solución óptima.

2.2.1.2. El método gráfico

El método gráfico es una herramienta de solución para los modelos ideales de programación lineal. Se denominan ideales pues es casi imposible encontrar en la realidad sistemas con condiciones tan básicas que permitan aplicar el método gráfico. Por lo tanto,



este método que sirve para ilustrar sencillamente los conceptos introductorios de la programación lineal. En algunas ocasiones; es posible, pero muy poco recomendable, resolver modelos con tres variables de decisión. Sin embargo, para problemas con más variables, que son todos los problemas de sistemas reales, es imposible resolverlos por el método gráfico. (Prawda, 2004)

2.2.1.3. El método Simplex

El algoritmo llamado método simplex fue desarrollado en 1947 por el matemático George Dantzig para resolver modelos de programación lineal. A través del tiempo, el método simplex original ha sido modificado a fin de llegar a un algoritmo más eficiente para resolver grandes problemas de programación lineal por computadora.

La solución óptima de un modelo de programación lineal está asociada a un punto esquina del espacio de soluciones. Este resultado es la clave del método simplex algebraico y en general para dar una solución a cualquier problema de programación lineal. Para hallar este resultado del punto esquina con el método simplex es necesario el uso de procesos computarizados que determinan de manera algebraica los puntos de esquina.

Para cumplir con este objetivo se debe, en primer lugar, convertir las restricciones de desigualdad en ecuaciones para posteriormente poder trabajar con ellas de manera sistemática. Una de las características principales del método simplex es que resuelve los problemas de programación lineal en iteraciones donde cada iteración aproxima el valor de los puntos de esquina hacia aquel valor que optimiza el valor de la función objetivo. El desarrollo del método simplex implica un gran volumen de tediosos cálculos por lo



que los softwares especializados son una gran herramienta para dar soluciones automatizadas a los modelos de programación lineal. (Taha, 2004)

El formato estándar que tienen los problemas de programación lineal a resolverse por el método simplex obedece a la siguiente estructura detallada en la siguiente definición que hace (Castillo et al., 2002) de la siguiente forma.

El método simplex se aplica a un PPL en el formato estándar siguiente.

Minimizar

$$f(x) = c^T X \quad (3)$$

sujeto a

$$AX = b; \quad b \geq 0 \quad (4)$$

y

$$X \geq 0 \quad (5)$$

Donde $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ es la matriz columna de los coeficientes de la función objetivo, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ es el vector columna de las variables iniciales, y A es una matriz $m \times n$ que contiene los coeficientes de las restricciones.

2.2.1.4. Análisis de sensibilidad

Los modelos de programación lineal son representaciones bien definidos de una situación real cualquiera en donde los parámetros de dicho modelo (coeficientes de la



función objetivo y de las restricciones) asumen valores estáticos (Taha, 2004). Con la finalidad de incrementar la aplicación de la programación lineal en la práctica se requiere incorporar una dimensión dinámica que estudie el impacto que tiene la modificación en los parámetros del modelo sobre la solución óptima. A este proceso se le conoce como análisis de sensibilidad pues investiga la sensibilidad de la solución óptima frente a los cambios que puedan realizarse en los modelos (Taha, 2004). Wayne coincide en la idea principal de este enunciado, así expresa que:

“La solución óptima de una programación lineal se basa en una toma instantánea de las condiciones que prevalecen en el momento de formular y resolver el modelo. En el mundo real, los ambientes de decisión rara vez permanecen estáticos, y es esencial determinar cómo cambia la solución óptima cuando cambian los parámetros del modelo. Eso es lo que hace el *análisis de sensibilidad*. Proporciona técnicas de cómputo eficientes para estudiar el comportamiento dinámico de la solución óptima que resulta al hacer cambios en los parámetros del modelo.” (Taha, 2004, p. 115)

2.2.1.5. Programación Lineal Entera

A diferencia de la programación lineal en donde las variables toman valores reales, la programación lineal entera, está relacionada con la resolución de problemas de optimización, como en muchos casos realistas, donde por lo menos una de las variables debe tomar solo valores enteros no negativos. (Villaroel Figueroa, 2012). O como lo define Taha:



“Los programas lineales enteros son aquellos en los que algunas o todas las variables están restringidas a tener valores enteros (o discretos). La programación lineal entera tiene aplicaciones prácticas importantes. (...)” (Taha, 2004, p. 361)

Entre los ejemplos prácticos de problemas de programación entera se pueden mencionar: ubicación de insumos, secuenciamiento de trabajos en líneas de producción, balance de líneas de montaje, problemas de asignación biunívoca, control de inventarios, reemplazo de máquinas, entre otros. Uno de los métodos más importantes para la resolución de problemas de programación lineal entera, según R. E. Gomory, se basa en cierto modo en el método simplex antes mencionado. Sin embargo, existe otro método de naturaleza combinatoria que consiste en simplificar el problema original en otros más pequeños y tal vez más fáciles. Así mismo, reducir el conjunto de soluciones posibles en subconjuntos más pequeños que permitan realizar un análisis más sencillo. Este método es el de Ramificación y Acotación o Branch and Bound (Castillo et al., 2002)

En la sección 2.2.2 se presentan los conceptos básicos de teoría de grafos que son utilizados en esta tesis (Bazaraa, Jarvis, & Sherali, 2010; Mayorquín, 2004; Ullilen, 2015). Y en la sección 2.2.3 se ilustran la representación matricial de los grafos.

2.2.2. Teoría de Grafos

2.2.2.1. Definición (Grafo):

Un grafo es una pareja de conjuntos $[V, A]$, donde V es un conjunto de puntos llamados vértices o nodos y A es un conjunto de líneas que unen todos o algunos de los vértices llamados arcos o aristas. Se denota con $G = [V, A]$.

Ejemplo:

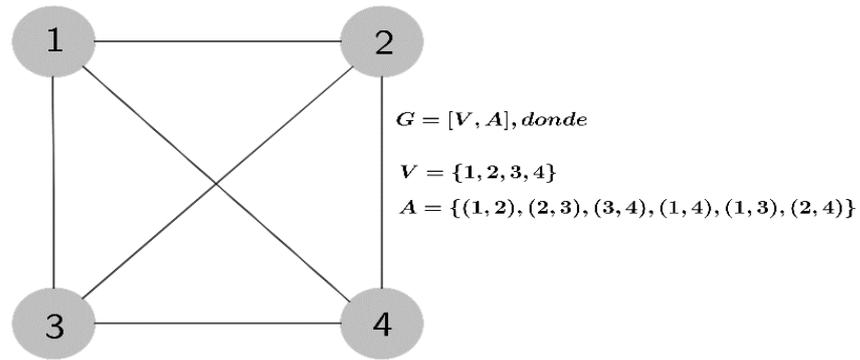


Figura 1. Ejemplo de un grafo
Fuente: (Mayorquín, 2004)

2.2.2.2. Definición (Grafo dirigido o dígrafo):

Un grafo dirigido o dígrafo es una pareja de conjuntos $[V, A]$, donde V es un conjunto de puntos llamados vértices o nodos y A es un subconjunto de pares ordenados de vértices.

Ejemplo:

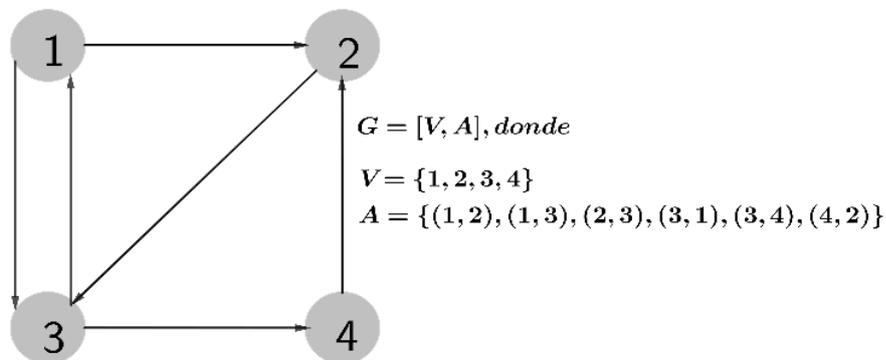


Figura 2. Ejemplo de un grafo dirigido
Fuente: (Mayorquín, 2004)

Un arco puede representarse como la pareja (i, j) , donde $i, j \in V$ son los nodos que unen dicho arco. Si $a = (i, j) \in A$, i es el nodo inicial de a y j es el nodo final de a .

Para las definiciones 2.2.2.3, 2.2.2.4 y 2.2.2.5 sea $G = [V, A]$ un grafo dirigido y sea $i \in V$.

2.2.2.3. Definición (Sucesor o Incidencia):

Se llama sucesor de i a todo nodo $j \in V$ tal que existe (i, j) .

2.2.2.4. Definición (Predecesor o Adyacencia):

Se llama predecesor de i a todo nodo $j \in V$ tal que existe (j, i) .

2.2.2.5. Definición (Conjunto Potencia):

$\Gamma^+, \Gamma^-: V \rightarrow \wp(V)$ (Conjunto de potencia de V), donde, para $i \in V$:

$$\Gamma^+(i) = \{\text{Sucesores de } i\} = \{j \in V / (i, j) \in A\}$$

$$\Gamma^-(i) = \{\text{Predecesores de } i\} = \{j \in V / (j, i) \in A\}$$

Como ejemplo considérese el grafo dirigido de la Figura 3.

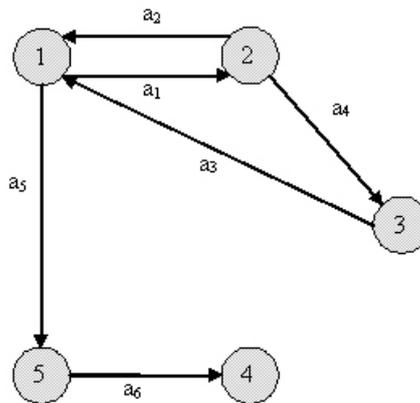


Figura 3. Grafo de ejemplo para la definición 2.2.2.5
Fuente: (Mayorquín, 2004)

Puede verificarse fácilmente, por ejemplo, que:

$$\Gamma^+(1) = \{2,5\}, \Gamma^+(2) = \{1,3\}, \Gamma^+(4) = \phi, \Gamma^-(1) = \{2,3\}, \Gamma^-(5) = \{1\}.$$

Nuevamente para las definiciones 2.2.2.6, 2.2.2.7 y 2.2.2.8 considérese un grafo $G = [V, A]$ dirigido.

2.2.2.6. Definición (Camino o trayectoria):

Un camino es una secuencia de arcos en el cual el nodo final de uno es el nodo inicial del que sigue en la secuencia. Un camino puede representarse con la secuencia de los arcos que lo forman o por la secuencia de nodos extremos de estos arcos (cuando no haya confusión) o por la secuencia alternada de nodos y arcos. Si $a_1 = (i_1, i_2)$ es el primer arco del camino y $a_q = (i_q, i_{q+1})$ es el último se dice que el camino, es un camino de i_1 a i_{q+1} .

2.2.2.7. Definición (Camino Simple):

Un camino simple es un camino $i_1, a_1, i_2, a_2, \dots, a_{q-1}, i_q$ tal que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$.

2.2.2.8. Definición (Camino Elemental o Ruta):

Un camino elemental es un camino $i_1, a_1, i_2, a_2, \dots, a_{q-1}, i_q$ tal que $i_j \neq i_k$ si $j \neq k$.

Dicho en otras palabras, un camino simple es uno en el cual no se repiten arcos y uno elemental es uno en el que no se repiten nodos. Obsérvese que todo camino elemental es también simple. Como ejemplo considérese el grafo de la Figura 4.

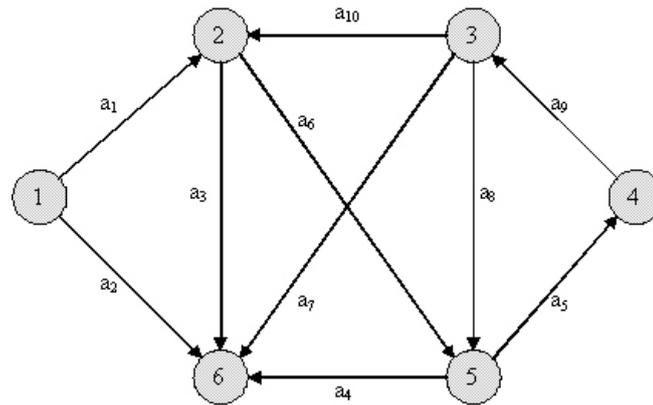


Figura 4. Grafo de ejemplo para las definiciones 2.2.2.6 al 2.2.2.12
Fuente: (Mayorquín, 2004)

La secuencia a_5, a_9, a_8, a_5 es un camino de 5 a 4. También puede representarse: $5, a_5, 4, a_9, 3, a_8, 5, a_5, 4$ ó $5, 4, 3, 5, 4$. Este camino no es ni simple ni elemental. El camino a_6, a_5, a_9, a_8, a_4 es camino simple y no elemental. El camino a_6, a_5, a_9 es camino simple y elemental.

2.2.2.9. Definición (Circuito):

Un circuito es un camino $i_1, a_1, i_2, a_2, \dots, a_{q-1}, i_q$ donde el nodo final de a_{q-1} y el inicial de a_1 coinciden, es decir, un circuito es un camino cerrado.

En el grafo de la Figura 4, a_5, a_9, a_8 es un circuito.

2.2.2.10. Definición (Cadena):

Una cadena es una secuencia de aristas (o arcos) a_1, a_2, \dots, a_q donde toda a_i está conectada con a_{i-1} por un extremo y con a_{i+1} por el otro.

Una cadena puede denotarse con la secuencia de nodos y arcos como en el caso de un camino, aunque conviene señalar que la sola secuencia de nodos puede



resultar insuficiente para describirla puesto que entre dos nodos puede existir más de un arco.

En el grafo de la Figura 4: a_{10}, a_9, a_5 (ó 2,3,4,5) es una cadena que une los nodos 2 y 5.

2.2.2.11. Definición (Ciclo):

Un ciclo es una cadena cerrada. Tener en cuenta que todo camino es una cadena, pero no recíprocamente. Cada circuito es un ciclo, pero no inversamente.

$camino \Rightarrow cadena$

$circuito \Rightarrow ciclo$

2.2.2.12. Definición (Conexa):

Un grafo dirigido o dígrafo es conexa si existe una cadena de cada nodo de G a cualquier otro nodo de G .

2.2.2.13. Definición (Subdígrafo):

Un subdígrafo $G' = [V', A']$ de un subdígrafo de $G = [V, A]$, aquella que satisface $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$, en el entendimiento que si $(i, j) \in A'$ entonces tanto i como j pertenecen a V' ; si $G' \neq G$ se dice que G' es un subdígrafo propio de G ; si $V' = V$, entonces se dice que G' es un subdígrafo de expansión de G .

2.2.2.14. Definición (Componente de un dígrafo):

El componente de un dígrafo G , es un subdígrafo conexo de G , que no es subdígrafo propio de otro dígrafo conexo.

2.2.2.15. Definición (Árbol):

Un árbol es un dígrafo conexo que no tiene ciclos.

2.2.2.16. Definición (Árbol de expansión):

Un árbol de expansión, es un subdígrafo con respecto a algún dígrafo subyacente G , además es un árbol que incluye a todos y cada uno de los nodos del dígrafo G , es decir, se trata de un subdígrafo conexo de expansión sin ciclos.

Tener en cuenta:

un dígrafo: árbol \Rightarrow conexidad \wedge árbol de expansión

2.2.2.17. Definición (Bosque):

Un bosque, es un dígrafo sin ciclos esto es tiene un árbol (subdígrafo), como cada una de sus componentes.

Observación: No confundir componente con subdígrafo, son distintos.

2.2.2.18. Definición (Grado exterior y grado interior):

Sea $G = [V, A]$ un grafo dirigido, y sea $i \in V$. El grado exterior de i es el número de arcos que tienen a_i como vértice inicial, se denota $g^+(i)$. El grado interior de i es el número de arcos que tienen a_i como extremo final, se denota $g^-(i)$.

Obsérvese que $g^+(i)$ es igual a la cardinalidad de $\Gamma^+(i)$ y $g^-(i)$ es igual a la cardinalidad de $\Gamma^-(i)$. Además, es fácil verificar que, si n es el número de arcos y m es el número de nodos de G , entonces:

$$\sum_{i=1}^n g^+(i) = \sum_{i=1}^n g^-(i) = n \quad (6)$$

2.2.2.19. Definición (Grado de un nodo o vértice):

El grado de $i \in V$, es el número de arcos que tienen a i como uno de sus extremos.

Se denota por $g(i)$.

Una expresión formal matemática del grado de un nodo es:

$$g^+(i) + g^-(i) = g(i) \quad (7)$$

En la Figura 4 se tiene que $g^+(6) = 0, g^-(6) = 4, g(6) = 4$.

2.2.2.20. Proposición 1:

Sea T un árbol con $m(\geq 2)$ nodos y sea (i, j) un arco de T entonces al eliminar el arco (i, j) de T , dejando los nodos i y j en T , se descompone T en dos arboles T_1 y T_2 .

Prueba (Bazaraa et al., 2010, p. 457):

2.2.2.21. Proposición 2:

Sea T un árbol propio, entonces T tiene por lo menos dos terminales.

Prueba (Bazaraa et al., 2010, p. 458):

2.2.2.22. Proposición 3:

Un árbol T con m nodos tiene $(m - 1)$ arcos.

Prueba (Bazaraa et al., 2010, p. 458):

2.2.2.23. Proposición 4:

(Caracterización equivalente de un árbol T)

1. T es conexa y no tiene ciclos.
2. T es conexa y tiene $(m - 1)$ arcos.



3. T contiene $(m - 1)$ y ningún ciclo.
4. T es conexa y al desconectar cualquier arco de T se obtienen dos componentes.
5. T contiene una única cadena que conecta cada par de nodos.

Prueba (Bazaraa et al., 2010, p. 458):

2.2.3. Representación matricial de grafos

Los grafos pueden ser representados algebraicamente por medio de matrices.
(Mayorquín, 2004)

Sea $G = [V, A]$ un grafo dirigido, la **matriz de adyacencia de G** es una matriz B cuadrada de $m \times m$; donde m es el número de nodos de G , y se forma mediante:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1. & \text{si } (i, j) \in A \\ 0. & \text{si } (i, j) \notin A \end{cases}$$

La **matriz de incidencia de G** es una matriz M de dimensión $m \times n$, donde m y n son el número de nodos y arcos de G , respectivamente, cuyos elementos son:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1. & \text{si } i \text{ es extremo inicial del arco } a_j \\ -1. & \text{si } i \text{ es extremo final el arco } a_j \\ 0. & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si se considera el grafo de la Figura 5, sus matrices de adyacencia e incidencia son B y M respectivamente.

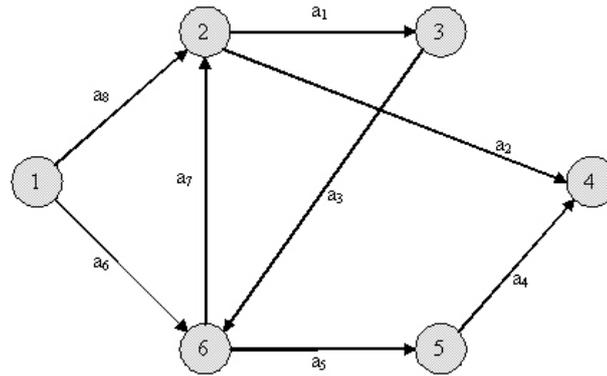


Figura 5. Grafo de ejemplo para las matrices de adyacencia e incidencia
Fuente: (Mayorquín Gutiérrez, 2004)

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Damos una definición formal de Red, que es un concepto que será utilizado de aquí en adelante.

2.2.4. Definición (Red):

Una red $R = [V, A]$ es un grafo dirigido (dígrafo) cuyos arcos y/o nodos tienen asociados números, estos números típicamente representan costos, tiempo, capacidades o flujos en el caso de arcos y ofertas o demandas en el caso de nodos.

2.2.5. Problema del flujo de costo mínimo

(Bazaraa, 2009), Consideremos una red R , que consta de un conjunto finito de nodos $V = \{1, \dots, m\}$ y de un conjunto finito de arcos $A = \{(i, j), \dots, (s, t)\}$ que unen un par de nodos diferentes en V , se dice que el arco (i, j) es incidente en los nodos i y j y está dirigida del nodo i al nodo j , supondremos que la red tiene m nodos y n arcos.

A cada nodo i en R se le asocia un número b_i , que representa la oferta neta disponible de un artículo ($b_i > 0$) o la demanda neta disponible de un artículo ($b_i < 0$). Algunas veces, los nodos con $b_i > 0$ se llaman orígenes, y los nodos con $b_i < 0$ se llaman destinos. Si $b_i = 0$ ningún artículo está disponible en el nodo i y ningún artículo se requiere, en este caso algunas veces se dice que el nodo i es un nodo intermedio (o de transbordo). Asociado con cada arco (i, j) se tiene el número x_{ij} , que representa la cantidad de flujo sobre el arco (se supone que $0 \leq x_{ij}$) y el número c_{ij} , que es el costo unitario de transporte a lo largo del arco.

Se supondrá en la red que la oferta total es igual a la demanda total, es decir

$$\sum_{i=0}^m b_i = 0$$

En el caso de que

$$\sum_{i=0}^m b_i > 0,$$

entonces se agrega un nodo artificial $m + 1$ con demanda neta disponible

$$b_{m+1} = - \sum_{i=0}^m b_i < 0,$$

y se agregan arcos con costo cero de cada nodo que tiene la oferta neta disponible ($b_i > 0$) al nuevo nodo $m + 1$ y además se tiene una nueva ecuación respecto al nodo $m + 1$ con

$$b_{m+1} = - \sum_{i=0}^m b_i.$$

El problema del flujo de costo mínimo en una red puede plantearse explícitamente como sigue:

Minimizar:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (8)$$

Sujeta a:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

y

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

Hay que entender que la sumatoria y desigualdades son tomados sobre la existencia de arcos. El problema consiste en embarcar la oferta disponible a través de la red para satisfacer la demanda a un costo mínimo total. Las restricciones (9) se llaman ecuaciones de conservación de flujo o ecuaciones de Kirchhoff e indican que, en la red, no se puede crear ni destruir flujo. En las ecuaciones de conservación, $\sum_{j=1}^m x_{ij}$ representa el flujo total que sale del nodo i , mientras que

$\sum_{k=1}^m x_{ki}$ es el flujo total que entra al nodo i . Estas ecuaciones requieren que el flujo neto que sale del nodo i , o sea, $\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki}$, sea igual a b_i .

Si $b_i < 0$, entonces el flujo que entra a i debe ser mayor que el que sale de i .

De la sección 2.2.6 en adelante se presentan los conceptos de Problema del flujo de costo mínimo (Bazaraa et al., 2010; Bazaraa & Jarvis, 1991; Ullilen Marcilla, 2015).

2.2.6. Propiedades de la matriz de restricciones

Consideremos la matriz A de coeficientes, asociada con el conjunto de restricciones del problema de flujo de costo mínimo, la matriz A tiene un renglón por cada nodo de la red, y una columna por cada arco en la red, cada columna de A contiene dos coeficientes distintos de ceros que son $+1$ y -1 , si el arco fuese (i, j) esto contiene un $+1$ en el renglón i y un -1 en el renglón j .

Cada columna de A , respecto al arco (i, j) se denota por $a_{ij} = e_i - e_j$ en donde e_i y e_j son los vectores unitarios en \mathbb{R}^m con un elemento uno (1) en la posición i y j respectivamente y los restantes elementos ceros (0).

A la matriz A se le denomina matriz de incidencia nodo-arco de la red del problema de flujo de costo mínimo.

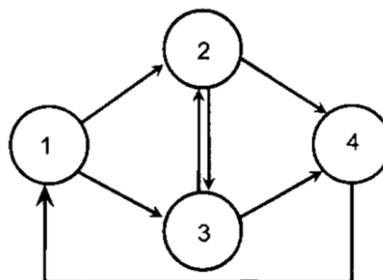


Figura 6. Grafo de ejemplo para las matrices de incidencia
Fuente: (Bazaraa & Jarvis, 1991)

La matriz de incidencia A de la Figura 6 es:

$$A = \begin{matrix} & (1,2) & (1,3) & (2,3) & (2,4) & (3,2) & (3,4) & (4,1) \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2.2.6.1. Proposición 5 (Rango de la matriz A):

A es una matriz de rango $m - 1$ (Se supone que A es una matriz de incidencia nodo-arco de una red conexa).

Prueba (Bazaraa et al., 2010, pp. 459–460):

Por ejemplo, si se seleccionan las columnas (1,3), (2,3) y (3,4) de la matriz de incidencia nodo-arco para la red de la Figura 6, entonces después de descartar el renglón 4, se tiene la siguiente matriz triangular (inferior):

$$B_T = \begin{matrix} & (1,3) & (2,3) & (3,4) \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

El árbol de expansión correspondiente está dado por:

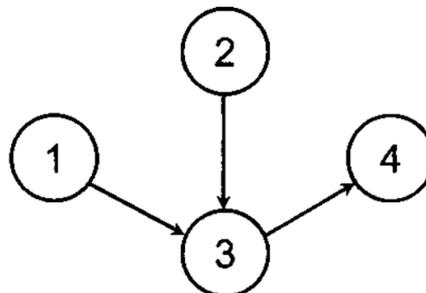


Figura 7. Árbol de expansión
Fuente: (Bazaraa et al., 2010)

2.2.6.2. Variable artificial

(Bazaraa et al., 2010; Ullilen Marcilla, 2015) El método simplex siempre se inicia con una matriz de restricciones de rango total. En la Proposición 5 (Rango de la matriz \mathbf{A}): se demostró que el rango de \mathbf{A} es $m - 1$. Por lo tanto se requiere la introducción de una variable artificial x_m (valor real) correspondiente al nodo m (aunque es posible elegir cualquier otro nodo por la observación dada en la sección anterior), se obtiene la nueva matriz de restricciones $[\mathbf{A}; \mathbf{e}_m]$ (\mathbf{e}_m es un vector unitario en \mathbb{R}^m con 1 en la m -posición y los elementos restantes son 0), no es necesario penalizar con un costo c_m a la variable artificial, desde que la variable artificial para cualquier solución factible del problema de flujo de costo mínimo debe ser cero ($x_m = 0$), en efecto como cada columna de \mathbf{A} contiene -1 y $+1$, para cada arco (i, j) en el renglón i aparece 1 y en el renglón j aparece -1 , en su respectiva columna; el término x_{ij} cuando se suman las m ecuaciones lineales del sistema $[\mathbf{A}; \mathbf{e}_m]x = b$ ($x = \{x_{ij}\}_{(i,j) \in A}$ y $b = \{b_i\}_{i \in V}$) se va eliminar, desde que aparecen x_{ij} y $-x_{ij}$ en la suma entonces como la $\sum b_i = 0$, se obtiene que la variable artificial $x_m = \sum b_i = 0$.

El arco con un sólo extremo se denomina arco raíz, si se hace más flexible la definición se considera como un arco que parte del nodo m y termina en el espacio (véase la Figura 8), el nodo asociado a m se denomina nodo raíz.

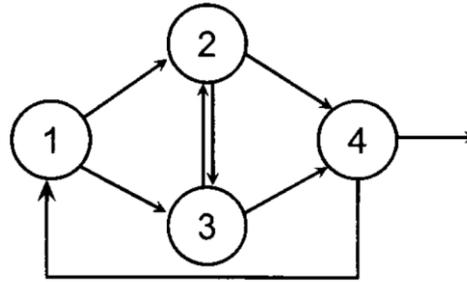


Figura 8. Una gráfica generalizada G
Fuente: (Bazaraa et al., 2010)

2.2.6.3. Caracterización de una matriz básica

(Bazaraa et al., 2010) Se determinó el rango de A examinando cualquier submatriz asociada con un árbol de expansión. Este también demuestra que un árbol de expansión junto con una variable artificial simple es una base para la matriz A . Una gráfica de este tipo se denomina *árbol de expansión enraizado* ó *árbol de expansión con raíz* y se ilustra en la Figura 9.

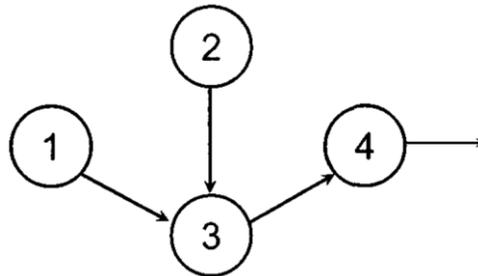


Figura 9. Un subgráfica de una base es un árbol de expansión enraizado
Fuente: (Bazaraa et al., 2010)

Tener en cuenta que la matriz B de base asociada obtenida al agregar el arco raíz y el nodo raíz como la última columna y fila, respectivamente, a B_T es triangular inferior, porque B_T es triangular inferior y la columna de arco raíz es e_m . Esto se muestra a continuación para la Figura 9.



$$B_T = \begin{matrix} & (1,3) & (2,3) & (3,4) & \text{arco raiz} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Un árbol de expansión enraizado corresponde a una base (triangular inferior) para $[A; e_m]$. Lo contrario de esto también es cierto. Es decir, cualquier base para $[A; e_m]$ es una matriz de incidencia de arco-nodo de un árbol de expansión enraizado.

2.2.6.4. Definición (Matriz básica del problema de flujo de redes):

Sea una matriz $[A; e_m]$ de nodo-arco incidencia, una submatriz $B(m \times m)$ de $[A; e_m]$ es definido base del problema del flujo de redes si es de rango m .

2.2.6.5. Teorema 1:

Considere un problema de flujo de costo mínimo en una red definido sobre una red conexa G con un arco raíz. Entonces B es una matriz base del problema si y solo si es la matriz de incidencia de nodo-arco de un árbol de expansión enraizado G .

Prueba: (Bazaraa et al., 2010, p. 463; Ullilen Marcilla, 2015, p. 46).

2.2.6.6. Teorema 2:

Sea la matriz A de incidencia nodo-arco, el determinante de toda submatriz cuadrada de A es $+1, -1$ ó 0 .

Prueba: (Bazaraa et al., 2010, p. 464; Ullilen Marcilla, 2015, p. 46).

2.2.7. Representación de una columna no básica en términos de las columnas básicas.

(Bazaraa et al., 2010, p. 465; Ullilen Marcilla, 2015) Consideremos el subdígrafo G_B correspondiente a un árbol de expansión enraizado y eligiendo cualquier arco no básico (p, q) de G que no está en G_B , por ser G_B un árbol existe una única cadena que une los nodos p y q , y junto con el arco no básico (p, q) constituyen un ciclo, si tenemos los arcos que conforman el ciclo $\{(p, j), (k, j), (k, l), (l, s) \dots (q, t)\}$ en G_B y el arco no básico (p, q) (Ver Figura 10).

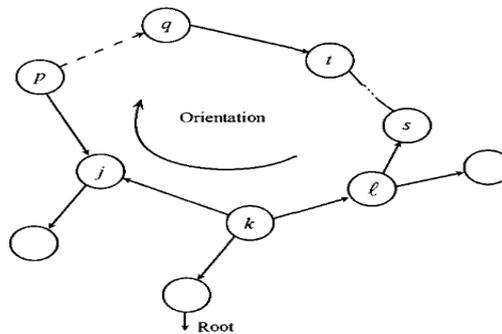


Figura 10. Ciclo formado añadiendo un arco no básico al árbol de la base.
Fuente: (Bazaraa et al., 2010)

Para obtener una dirección de dicho ciclo, se proporciona una dirección paralela consistente con el arco no básico (p, q) , un arco básico (correspondiente a la columna básica) en el ciclo paralelo a la orientación recibe un coeficiente de -1 y un arco básico en el ciclo opuesto a la dirección recibe un coeficiente $+1$, esto es volviendo al arco (p, q) :

$$a_{pq} - a_{pj} + a_{kj} + \dots + a_{qt} = (e_p - e_q) - (e_p - e_j) + (e_k - e_j) + \dots + (e_q - e_t) = 0$$

$$a_{pq} = (+1)a_{pj} + (-1)a_{kj} + \dots + (-1)a_{qt}$$

$$a_{pq} = a_{pj} - a_{kj} + \dots - a_{qt}$$

Como un ejemplo, considérese el subdígrafo básico de la Figura 9, la cual es una base para la red de la Figura 8. Supóngase que se busca la representación del arco no básico (1,2). Usando la regla anterior, obtiene

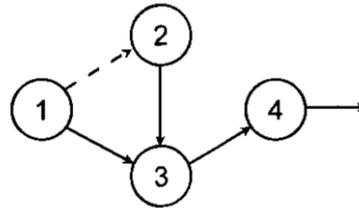


Figura 11. Ejemplo de ciclo formado añadiendo un arco no básico (1,2).
Fuente: (Bazaraa et al., 2010)

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{13} - a_{23} \\ &= (e_1 - e_3) - (e_2 - e_3) \\ &= e_1 - e_2 \end{aligned}$$

Nótese que los coeficientes en la representación de la columna no básica a_{pq} en terminos de las columnas basicas da origen al vector y_{pq} , es decir los elementos en la tabla simplex bajo la columna (p, q) . Puesto que la columna artificial nunca aparece en la representación de cualquier otra columna y puesto que la variable artificial permanece básica en el valor de cero, puede seleccionarse cualquier valor para el coeficiente de costo asociado, por ejemplo $c_a = 0$.

2.2.8. El Método simplex para problema de flujo en redes

Los pasos generales a seguir son los siguientes (Bazaraa et al., 2010, p. 466):

1. Encontrar una solución básica factible inicial.
2. Luego calcular $z_j - c_j$ para cada variable no básica x_j .
3. Si se logra la optimalidad detenerse, en caso contrario elegir la columna de entrada.
4. En caso de no obtener la optimalidad, determinar la columna de salida y pivotear.

Supongamos ahora que se tiene a la mano una solución básica factible, el problema está definido sobre un dígrafo con raíz. El proceso de cálculo para la obtención de una solución básica factible avanza de los extremos (nodos terminales) del árbol del subdígrafo que representa dicha matriz base hacia la raíz (véase Figura 12).

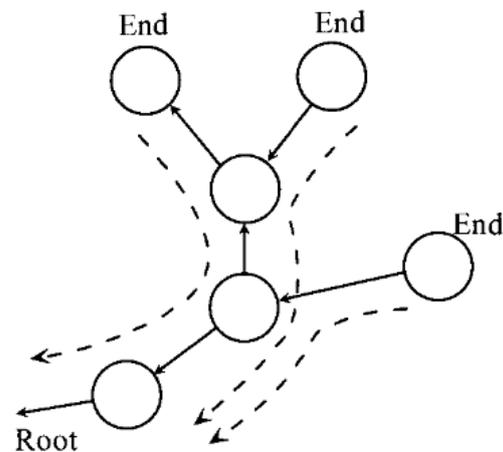


Figura 12. Cálculo de los valores de las variables básicas.
Fuente: (Bazaraa et al., 2010)

Recordar que las variables no básicas x_{pq} (correspondiente a los arcos no básicos (p, q)) están en el nivel cero, a medida que se avanza de un nodo a otro se va resolviendo la ecuación del nodo, esto es, sea el nodo i se resuelve la ecuación

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = b_i.$$

El mecanismo para calcular y_{pq} vía el sistema $\mathbf{B}y_{pq} = a_{pq}$ es la siguiente, al conectar el arco no básico (p, q) a la cadena formada al unir el nodo p al nodo q en la subdígrafo G_B se forma un ciclo, entonces proporcionamos una dirección a dicho ciclo paralelo al arco (p, q) , si el arco básico (k, l) que participa en dicho

ciclo está en la misma dirección del arco (p, q) entonces $y_{(pq)kl}$ obtendrá el valor -1 , esto es $y_{(pq)kl} = -1$, si (k, l) estuviera en dirección contraria entonces $y_{(pq)kl} = +1$, y en *caso* de que el arco básico (k, l) no participará en el ciclo $y_{(pq)kl} = 0$.

2.2.8.1. Cálculo de las variables duales w y $z_{ij} - c_{ij}$

(Bazaraa et al., 2010, p. 469; Ullilen Marcilla, 2015, p. 48). A fin de calcular $z_{ij} - c_{ij}$ para cada variable no básica x_{ij} , primero calculemos el vector multiplicador dual o simplex w (vector en \mathbb{R}^m) a través del sistema $w^T B = c_B$ y luego determinamos $z_{ij} - c_{ij}$ a través de la expresión:

$$z_{ij} - c_{ij} = w^T a_{ij} - c_{ij} = w^T (e_i - e_j) - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$$

Donde w_i y w_j son la i -ésima y j -ésima componente de w , los componentes de w son también conocidos como variables duales. Tener en cuenta que a lo largo de los arcos básicos del árbol se tiene que $w_i - w_j = c_{ij}$.

El proceso de cálculo de las variables duales consiste en trabajar de la raíz del árbol básico hacia los extremos (véase Figura 13), por lo tanto $z_{ij} - c_{ij}$ puede calcularse convenientemente sobre la red.

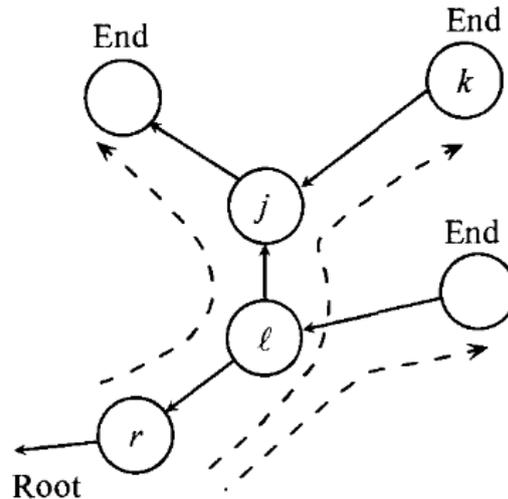


Figura 13. Cálculo de los valores de las variables duales.
Fuente: (Bazaraa et al., 2010)

Observación: en cada nodo i hay un valor w_i , lo que realmente nos interesa de los w_i es la diferencia entre las variables duales correspondientes a dos nodos, sean el nodo i y el nodo j la diferencia sería $w_i - w_j$; una manera de hallar esa diferencia, es considerar que el valor de la variable dual en el respectivo nodo artificial (correspondiente a la variable artificial) es cero, y luego calcular el valor de cada w_i pero trabajando de la raíz (nodo artificial) del árbol hacia los extremos (nodos terminales); esto no es muy relevante cuando tomamos la diferencia, desde que la diferencia va depender solo de los costos c_{ij} , esto es debido a la estructura de la matriz incidencia nodo-arco, si queremos hallar la diferencia $w_i - w_j$ para un arco no básico (i, j) , conectamos (i, j) al árbol y obtenemos un ciclo, sean los arcos básicos que forman el ciclo $\{(j, k), (k, l), (p, l), \dots, (i, q)\}$ (conjunto finito), dando una orientación al ciclo paralelo al arco (i, j) , consideremos $+1$ si la dirección es opuesta al ciclo, -1 si la dirección está en el mismo sentido del ciclo, por lo tanto:

$$w_i - w_j = (-1)c_{jk} + (-1)c_{kl} + (+1)c_{pl} + \dots + (+1)c_{iq}$$



Observar que inicialmente al nodo artificial le dimos un valor dual igual a cero, pero desde que la diferencia de variables duales depende de los costos, cualquier valor dual que le demos al respectivo nodo artificial, la diferencia se sigue manteniendo. La diferencia de variables duales depende de los costos del ciclo de los arcos básicos actuales, la elección de la raíz de un árbol es arbitraria, las consideraciones a tomar en cuenta con respecto a esta elección, son de orden de tipo informático, esto puede ser importante para reducir al mínimo los cambios en el pivote.

2.2.8.1.1. Interpretaciones de las variables w_i y de los costos reducidos $c_{ij} - z_{ij}$

Consideremos un árbol, a las variables w_i se les denominará potenciales nodales, esto se debe, a que si consideramos los valores c_{ij} como presiones o fuerzas invertidas a lo largo del arco (i, j) y supongamos que el potencial del nodo raíz (correspondiente a la variable artificial) es cero, la ecuación $w_i - w_j - c_{ij}$ tiene la siguiente interpretación:

1. Si $w_i - w_j - c_{ij} = 0$, la diferencia de los potenciales nodales en el arco (i, j) o la fuerza neta $w_i - w_j$ es igual a la contrapresión ejercida por c_{ij} , los arcos básicos cumplen esta condición.
2. Si $w_i - w_j - c_{ij} > 0$, la diferencia de los potenciales nodales es mayor que la contrapresión ejercida por c_{ij} , esto forzara al flujo a tender por el arco (i, j) .
3. Si $w_i - w_j - c_{ij} \leq 0$, la diferencia de los potenciales nodales es por lo menos menor igual que la contrapresión ejercida por c_{ij} , si esto es cierto

para los arcos no básicos, entonces el sistema está en equilibrio y existe una situación óptima.

Si definimos $w_i = -\pi_i$, de modo que interpretamos el valor de π_i como el incremento en el costo en el nodo i si se crea una unidad adicional en el nodo i (tener en cuenta que la función objetivo del problema dual contiene términos de la forma $b_i w_i$, donde b_i representa la cantidad demandada), la ecuación $w_i - w_j - c_{ij} = -\pi_i + \pi_j - c_{ij}$ tiene diferentes interpretaciones, si interpretamos cada nodo como un mercado:

1. Los arcos básicos cumplen $-\pi_i + \pi_j - c_{ij} = 0$ esto es $\pi_j = \pi_i + c_{ij}$, es decir, la empresa se quiebra inclusive si se adquiere una unidad adicional en el mercado i , se transporta a lo largo de c_{ij} , se lleva y se vende al mercado j .
2. Si para un arco no básico $\pi_j > \pi_i + c_{ij}$, un empresario podría considerar rentable comprar en el mercado i y vender en el mercado j , la ganancia neta por unidad sería de $\pi_j - \pi_i - c_{ij} (> 0)$.
3. Para cualquier arco no básico $\pi_j < \pi_i + c_{ij}$, por consiguiente, la empresa mencionada no es rentable, si la anterior desigualdad es cierta para todos los arcos no básicos, el sistema de mercado se encuentra en equilibrio.

2.2.8.2. Determinación de la columna de salida y pivoteo

Se explicó anteriormente el método para calcular $z_{ij} - c_{ij}$ para un arco no básico, esencialmente se identificó el proceso de pivoteo, esto es, se toma el máximo valor positivo de los $z_{ij} - c_{ij}$ de las variables no básicas.

$$z_{ij} - c_{ij} = \text{máximo}\{z_{rs} - c_{rs} : z_{rs} - c_{rs} > 0\}$$

Entonces x_{ij} es un candidato a entrar a la base, el paso siguiente es introducir el arco (i, j) al dígrafo, y se obtiene un ciclo con el arco (i, j) , los arcos que forman dicho ciclo, con sus respectivos valores x_{kl} incrementan una cierta cantidad $\Delta > 0$, depende de la dirección proporcionada a dicho ciclo, si dicho arco (k, l) está en la misma dirección se incrementa $+\Delta$ y si está en la dirección contraria se incrementa $-\Delta$, hasta que uno de los arcos básicos de dicho ciclo obtenga el valor de acotamiento inferior factible cero ($x_{kl} = 0$), entonces dicho arco saldrá de la base, está determinación de la variable salida y el ajuste de los valores de la variables básicas según se ha descrito son equivalentes a efectuar la prueba usual de razón mínima y pivoteo. (Bazaraa et al., 2010, pp. 472–474; Ullilen Marcilla, 2015, pp. 50–51):

2.2.8.3. Resumen del algoritmo simplex para redes

PASO DE INICIALIZACIÓN:

Encontrar una solución básica factible inicial representada por un árbol de expansión con raíz, con r como nodo de raíz. Luego calcular los flujos básicos x_B y las variables duales w asociados con este árbol básico.

PASO PRINCIPAL:

Calcular $\delta_{pq} = z_{pq} - c_{pq} = w_p - w_q - c_{pq} = \text{máximo}\{z_{ij} - c_{ij} : w_i - w_j - c_{ij} : (i, j) \text{ es un arco no básico}\}$. Si $z_{pq} - c_{pq} \leq 0$, detener el proceso, la solución actual es óptima, en caso contrario agregar (p, q) al árbol básico, y determinar el único ciclo que se forma al trazar la cadena básica que conecta p y q , determinar el flujo máximo $\Delta \geq 0$ que es posible enviar a lo largo de este ciclo en la dirección

del arco entrada (p, q) , si $\Delta \rightarrow \infty$ detener el proceso, el problema no está acotado, si Δ es finito, determinar un arco básico de salida de bloqueo (u, v) . Actualice los flujos ajustando adecuadamente los flujos en el ciclo por Δ . Desconecte (u, v) del árbol base y descompóngalo en dos árboles T_1 y T_2 , donde el nodo raíz $r \in T_1$. Actualizar el árbol básico agregándole el arco (p, q) y actualizar las variables duales aumentando o disminuyendo respectivamente los valores duales actuales de los nodos en T_2 por δ_{pq} , según si p o q es el nodo principal en T_2 , luego repetir el paso principal.

2.2.8.4. Determinación de una solución básica factible

En los puntos anteriores se ha asumido que el problema se define en un dígrafo que tiene un arco raíz y que teníamos una solución factible básica inicial representada por un árbol de expansión enraizado. Ahora se verá un método para encontrar tal solución. Consideremos un matriz A° sin la columna artificial adicional. Agregando variable de holgura si es conveniente, se logra plantear el problema dado en la forma de minimizar $\{cx: A^\circ x = b, x \geq 0\}$, en donde A° es $m \times n$ y las columnas compuestas de $\{+, -\}e_i$, esto es, columnas de vectores unitarios que tienen un $+1$ en algún renglón o un -1 en otro renglón, y ceros; en los elementos restantes. Se presentará la aplicación de un inicio completamente artificial para tener un problema con estructura de red:

1. Se agrega una columna artificial por cada renglón de A° , en donde la i -ésima columna artificial es $\{+, -\}e_i$ dependiendo del signo de b_i , es decir, $+e_i$ si $b_i \geq 0$ y $-e_i$ si $b_i \leq 0$.
2. Agregue un renglón redundante definido por el negativo de la suma de los renglones de la matriz A° extendida.

3. Donde agregamos un vector de variables artificiales x_a .

$$\begin{array}{|c|cccc}
 \hline
 \mathbf{A}^0 & \pm 1 & & & \\
 & & \pm 1 & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & \pm 1 \\
 \hline
 -\mathbf{1A}^0 & \mp 1 & \mp 1 & \dots & \mp 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_a \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|}
 \hline
 \mathbf{b} \\
 \hline
 \mathbf{1b} \\
 \hline
 \end{array}$$

Sea el sistema anterior denotado por $\mathbf{A}^{\circ}_{nueva} \mathbf{x}' = \mathbf{b}_{nueva}$. Observe que cada columna en $\mathbf{A}^{\circ}_{nueva}$ tiene exactamente un $+1$, uno -1 y ceros en el resto. Por tanto, puede verse como un dígrafo.

Observaciones:

1. Este nuevo dígrafo tiene un nodo adicional $(m + 1)$ debido al nuevo renglon en $\mathbf{A}^{\circ}_{nueva}$.
2. La estructura de $\mathbf{A}^{\circ}_{nueva}$ contiene también todos los arcos originales de la estructura anterior \mathbf{A}° , en donde las columnas unitarias de \mathbf{A}° , ahora con la nueva estructura de $\mathbf{A}^{\circ}_{nueva}$ representan arcos que terminan o comienzan en el nuevo nodo $(m + 1)$.
3. El nuevo dígrafo tiene m nuevos arcos.
4. El nuevo dígrafo es evidentemente conexo, la suma de los elementos de \mathbf{b}_{nueva} es también cero.
5. Al designar el nuevo nodo $(m + 1)$ como el nodo raíz r y agregando la columna unitaria $e_{(m+1)}$ a $\mathbf{A}^{\circ}_{nueva}$ que actúa como el único arco raíz del problema, se obtiene un sistema lineal de rango total.
6. Una base factible para este nuevo problema está dada por el árbol de expansión con raíz definido por los m arcos artificiales agregados junto con

el arco raíz. Empezando con esta base factible, usando costos idóneos en cada caso, hasta alcanzar factibilidad, en cada caso, si hay factibilidad es posible eliminar todos los arcos artificiales, con costos de gran M en el problema, y continuar con la optimización.

2.2.9. Ejemplo problema de costo mínimo

Resolver el problema (Bazaraa et al., 2010, pp. 466–473):

2.2.10. Algoritmo Out-of-Kilter (Algoritmo de desviaciones)

(Bazaraa et al., 2010; Ullilen Marcilla, 2015). El problema primal (P) del flujo de costo mínimo, con el cual nosotros trabajaremos es de la forma:

Minimizar:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

Sujeta a:

(P)

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (10).a$$

$$x_{ij} \geq l_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (10).b$$

$$x_{ij} \leq u_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (10).c$$

Donde hay que entender que la sumatoria y desigualdades es tomado sobre la existencia de arcos. Nosotros llamaremos ecuación de conservación de flujo a cualquier flujo $\{x_{ij}\}_{(i,j) \in A}$ satisfaciendo la restricción (10).a, en el cual representa una dígrafo dirigido que denotaremos por $G = (V, A)$ donde V representa los nodos y A representa los arcos, existen m nodos y n arcos; y además

supondremos que existe a lo menos un arco dirigido entre dos nodos; una conservación de flujo satisfaciendo las restricciones $(l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij})$, $x_{ij} \geq l_{ij}$ y $x_{ij} \leq u_{ij}$ es llamado un flujo factible. Asumiremos que c_{ij} , l_{ij} y u_{ij} son enteros y que $0 \leq l_{ij} \leq u_{ij}$.

Desde que el lado derecho de la restricción (10).a son ceros, nosotros concluimos que el flujo sobre la red no tiene un punto inicial y un punto terminal.

Observaciones:

1. El dígrafo no necesariamente es conexo.
2. Observar que en este dígrafo no existen nodos terminales con grado igual a 0, todos los nodos son de grado a lo menos 1.
3. El problema primal (10) no necesariamente tiene solución, puede ocurrir también que el conjunto de flujo factible sea igual a vacío.

2.2.10.1. El dual del problema de flujo de costo mínimo y sus propiedades

Si asociamos una variable dual a cada nodo sobre la ecuación de conservación de flujo, otra variable dual h_{ij} sobre la restricción $x_{ij} \leq u_{ij}$ y por último una variable dual v_{ij} sobre la restricción $x_{ij} \geq l_{ij}$, la formulación del problema dual (PD) (Bazaraa et al., 2010) para el problema primal del flujo de costo mínimo sobre la red, es dado por:

Maximizar:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m l_{ij} v_{ij} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m u_{ij} h_{ij} \quad \text{(PD)} \quad (11)$$

Sujeta a:



$$w_i - w_j + v_{ij} - h_{ij} \leq c_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

$$h_{ij}, v_{ji} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

$$w_i: \text{sin restricción} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Donde las sumatorias y las restricciones son tomados sobre la existencia de arcos.

Observaciones:

1. El problema dual tiene muy interesante estructura. Supongamos que nosotros seleccionamos cualquier conjunto de $\{w_i\}_{i \in V}$ (vamos a asumir que todos los $\{w_i\}_{i \in V}$ son enteros). Si nosotros definimos:

$$v_{ij} = \text{máximo} \{0, c_{ij} - w_i + w_j\} \quad (12)$$

$$h_{ij} = \text{máximo} \{0, -(c_{ij} - w_i + w_j)\} \quad (13)$$

Entonces la restricción dual para el arco (i, j) , se convierte:

$$v_{ij} - h_{ij} = c_{ij} - w_i + w_j; \quad h_{ij} \geq 0, v_{ij} \geq 0$$

Dado que (12) y (13) y cualquier conjunto de w_i 's, se cumple la relación $v_{ij} - h_{ij} = c_{ij} - w_i + w_j$, esto es, el problema dual posee una solución factible.

2. Observar que en si el problema primal (P) tiene solución (en el sentido que el valor de la función objetivo valuado en la solución primal del problema primal es finito) entonces el problema dual (PD) también tiene solución, los valores de la función objetivo del problema primal y dual valuados en las soluciones del problema primal y dual respectivamente coinciden.

3. Si el problema primal tuviera conjunto factible igual al vacío, entonces no se podría decir nada sobre la solución del problema dual.
4. Observar que $u_{ij} \geq 0$ y $l_{ij} \geq 0$ fueron necesarias, para formular el problema dual escrita arriba.
5. Fijar los valores $(w_i)_{i=1,m}$ sobre cualquier valor entero, y dada las definiciones (12) y (13); entonces existe una solución factible dual.

2.2.10.2. Las condiciones de holgura complementaria

La complementaria condición de holgura, para la optimalidad del problema primal (P) son las condiciones de optimalidad de Karush Kuhn Tucker (KKT) (Bazaraa et al., 2010), esto es, si existen $\{x_{ij}\}_{(i,j) \in A}$ satisfaciendo (10).a, (10).b) y (10).c), además existen $\{w_i\}_{i \in V}$, $\{h_{ij}\}_{(i,j) \in A}$, $\{v_{ij}\}_{(i,j) \in A}$ satisfaciendo:

$$w_i - w_j + v_{ij} - h_{ij} - c_{ij} = 0 \quad (14)$$

$$h_{ij}, h_{ij} \geq 0 \quad (15)$$

$$(x_{ij} - l_{ij})v_{ij} = 0 \quad (16)$$

$$(u_{ij} - x_{ij})h_{ij} = 0 \quad (17)$$

entonces $\{x_{ij}\}_{(i,j) \in A}$ es una solución optimal para el problema primal (P).

Para todo arco (i,j) sobre el dígrafo definamos $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$, normalmente es conocido como el costo reducido para el arco (i,j) .

Dado un conjunto $\{w_i\}_{i \in V}$ enteros nosotros podemos calcular los valores $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$; utilizando las definiciones (12) y (13), y las condiciones de KKT (16) y (17), una solución factible $\{x_{ij}\}_{(i,j) \in A}$ satisfaciendo

(10).a, (10).b) y (10).c) para que cumpla las condiciones de Karush Kuhn Tucker debe satisfacer lo siguiente:

$$\text{Si } z_{ij} - c_{ij} < 0 \Rightarrow^{(12)} v_{ij} > 0 \Rightarrow^{(16)} x_{ij} = l_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (18)$$

$$\text{Si } z_{ij} - c_{ij} > 0 \Rightarrow^{(13)} h_{ij} > 0 \Rightarrow^{(17)} x_{ij} = u_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } z_{ij} - c_{ij} = 0 &\Rightarrow^{(12),(13)} v_{ij} = h_{ij} = 0 \\ &\Rightarrow^{(10),(11),(16),(17)} l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (20)$$

Una conservación de flujo $\{x_{ij}\}_{(i,j) \in A}$ el cual satisface las 3 condiciones de arriba (18), y (20) entonces será una solución optimal del problema, esto se debe que la función objetivo es lineal por lo tanto convexa, y las restricciones están compuestas por funciones afines y lineales que son convexas. El problema, consiste en buscar valores w_i y x_{ij} satisfaciendo la ecuación de conservación de flujo y las respectivas cotas (10).b) y (10).c), bajo las tres condiciones de arriba (18), (19) y (20) que deben ser satisfechas.

2.2.10.2.1. Los estados Kilter y números de Kilter para un arco

(Bazaraa et al., 2010). Sean el conjunto de flujos $\{x_{ij}\}_{(i,j) \in A}$ satisfaciendo (10).a) y el conjunto $\{w_i\}_{i \in V}$, definamos $\{h_{ij}\}_{(i,j) \in A}$ y $\{v_{ij}\}_{(i,j) \in A}$ según (12) y (13), en efecto se cumple (14) y (15), entonces:

Se dice que el arco (i, j) se encuentra en el estado in-Kilter cuando el conjunto $\{x_{ij}, w_i, w_j, h_{ij}, v_{ij}\}$, cumple las condiciones (10).a, (10).b), (16) y (17).

Se dice que el arco (i, j) se encuentra en el estado out-of-Kilter cuando el conjunto $\{x_{ij}, w_i, w_j, h_{ij}, v_{ij}\}$, viola una de las condiciones (10). a), (10). b), (16) y (17).

Observar en la Tabla 2, que para un arco (i, j) hay 5 posibles estados in-Kilter y 10 posibles estados out-of-Kilter.

El objetivo de este tema es cambiar el estado out-of-Kilter del arco (i, j) a un estado in-Kilter; esto se puede realizar de dos maneras: la primera manera es cambiar el flujo x_{ij} sobre el arco (i, j) , al incrementar o disminuir el valor de x_{ij} , si uno observa en la Tabla 2 esto se hace moviéndose arriba o abajo en una particular columna de Tabla 2.

Otra manera es cambiar los valores w_i y w_j , esto se hace moviéndose hacia atrás o hacia adelante a lo largo de una fila en la Tabla 2.

Tabla 2: *Estados Kilter*

	$z_{ij} - c_{ij} < 0$	$z_{ij} - c_{ij} = 0$	$z_{ij} - c_{ij} > 0$
$x_{ij} > u_{ij}$	Out-of-Kilter	Out-of-Kilter	Out-of-Kilter
$x_{ij} = u_{ij}$	Out-of-Kilter	in-Kilter	in-Kilter
$l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$	Out-of-Kilter	in-Kilter	Out-of-Kilter
$x_{ij} = l_{ij}$	in-Kilter	in-Kilter	Out-of-Kilter
$x_{ij} < l_{ij}$	Out-of-Kilter	Out-of-Kilter	Out-of-Kilter

Fuente: (Bazaraa et al., 2010)

Una medida de distancia para el problema primal (P) (que periódicamente reduzca la distancia para alcanzar la optimalidad de las condiciones de Karush Kuhn Tucker), es llamado el número de Kilter k_{ij} para un arco (i, j) , que es definido aquí como el cambio mínimo de flujo sobre el arco que es necesario para alcanzar el estado in-Kilter, este número de Kilter está representado en la Tabla 3:

Tabla 3: *Números Kilter*

	$z_{ij} - c_{ij} < 0$	$z_{ij} - c_{ij} = 0$	$z_{ij} - c_{ij} > 0$
$x_{ij} > u_{ij}$	$ x_{ij} - l_{ij} $	$ x_{ij} - u_{ij} $	$ x_{ij} - u_{ij} $
$x_{ij} = u_{ij}$	$ x_{ij} - l_{ij} $	0	0
$l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$	$ x_{ij} - l_{ij} $	0	$ x_{ij} - u_{ij} $
$x_{ij} = l_{ij}$	0	0	$ x_{ij} - u_{ij} $
$x_{ij} < l_{ij}$	$ x_{ij} - l_{ij} $	$ x_{ij} - l_{ij} $	$ x_{ij} - u_{ij} $

Fuente: (Bazaraa et al., 2010)

Notar desde que todos los números de Kilter en la Tabla 3 están en valor absoluto, esto implica que el número de Kilter en un arco es no negativo. El número de Kilter de un arco es cero, si el arco está en in-Kilter; es positivo, si el arco está en out-of-Kilter.

Mas referencia sobre el Algoritmo Out-of-Kilter revisar: (Bazaraa et al., 2010, pp. 567, 595)



2.2.10.3. Resumen del algoritmo out-of-Kilter

El algoritmo completo consiste de tres fases: la fase inicial, la fase primal y la fase dual.

Fase inicial, iniciar con un camino de flujo: decir cada $x_{ij} = 0$ y un conjunto inicial de enteros variables duales decir cada $w_i = 0$, computar $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$.

Fase primal, determinar el estado y el número de Kilter para cada arco, si todos los arcos están en in-kilter, parar la solución es obtenida. Otro caso, seleccionar un arco out-of-Kilter (p, q) . Dado la red G construimos una nueva red G' como indicamos en la fase primal, para cada arco (i, j) en G que está en uno de los estados de Kilter que permite un flujo incremento, colocar el arco (i, j) en G' , con un permitido flujo incremento. Para cualquier arco (i, j) en G que está en uno de los estados de Kilter que permite un flujo decrecimiento, colocar un arco (j, i) en G' , con un permitido flujo, para estos arcos en G que son miembros del estado que no permiten cambio de flujo, no colocar el arco en G' .

En G' se intenta construir un circuito conteniendo el arco out-of-Kilter (p, q) , encontrar un tal circuito es llamado break through. Si tal un circuito es disponible, determinar un flujo cambio Δ , igual al mínimo cambio del flujo permitido sobre arcos del circuito en G' . Cambiar el flujo sobre cada arco del asociado ciclo en G , por la cantidad Δ . usando la orientación especificada por el circuito como la dirección de crecimiento. En particular sea $x'_{ij} = x_{ij} + \Delta$ si (i, j) fuese miembro del circuito en G' , sea $x'_{ij} = x_{ij} - \Delta$ si (j, i) fuese miembro del circuito en G' , sea $x'_{ij} = x_{ij}$ otro caso. Repetir la fase primal. Si no hay circuitos conteniendo arco

(p, q) que sea disponible en G' , pasar a la fase dual. No encontrar ningún circuito es llamado no break through.

Fase dual, determinar el conjunto de nodos de X que pueden ser alcanzados del nodo q a lo largo de algún camino en G' . Sea $X' = V - X$, en G definamos:

$$S_1 = \{(i, j): i \in X, j \in X', z_{ij} - c_{ij} < 0, x_{ij} \leq u_{ij}\}$$

$$S_2 = \{(i, j): i \in X', j \in X, z_{ij} - c_{ij} > 0, x_{ij} \geq l_{ij}\}$$

Sea

$$\theta = \min_{(i,j) \in S_1 \cup S_2} \{|z_{ij} - c_{ij}|, +\infty\}$$

Si $\theta = +\infty$ para no hay solución factible. Otro caso cambiar los $\{w_i\}_{i \in V}$ y de esto los $\{z_{ij} - c_{ij}\}_{(i,j) \in A}$ de acuerdo a:

$$w_i = \begin{cases} w_i + \theta, & i \in X \\ w_i & i \in X' \end{cases}$$

$$(i, j) \in (X, X) \cup (X', X') \Rightarrow (z_{ij} - c_{ij})' = z_{ij} - c_{ij}.$$

$$(i, j) \in (X, X') \Rightarrow (z_{ij} - c_{ij})' = (w_i + \theta) - w_j - c_{ij} = z_{ij} - c_{ij} + \theta.$$

$$(i, j) \in (X', X) \Rightarrow (z_{ij} - c_{ij})' = w_i - (w_j + \theta) - c_{ij} = z_{ij} - c_{ij} - \theta.$$

2.2.11. Ejemplo (algoritmo out-of-Kilter)

Ejemplo (Bazaraa et al., 2010, pp. 587–588; Ullilen Marcilla, 2015, pp. 72–74)

2.2.12. Modelos de optimización de redes (Casos Especiales del Problema de Costo Mínimo)

(Hillier & Lieberman, 2010) menciona que los problemas de redes surgen en una gran variedad de situaciones. Las redes de transporte, eléctricas y de comunicaciones predominan en la vida diaria. La representación de redes se utiliza de manera amplia en áreas tan diversas como producción, distribución, planeación de proyectos, localización



de instalaciones, administración de recursos y planeación financiera, por mencionar sólo algunos ejemplos. En realidad, una representación de redes proporciona un poderoso apoyo visual y conceptual para mostrar las relaciones entre las componentes de los sistemas, de tal modo que se usa casi en todos los ámbitos científicos, sociales y económicos.

Los modelos de optimización de redes son un tipo especial de problemas de programación lineal, en el cual en el apartado 2.2.5 *Problema del flujo de costo mínimo* proporciona un enfoque unificado de muchas otras aplicaciones debido a su estructura mucho más general. Esta estructura es tan general que incluye como casos especiales el problema de la ruta más corta y el de flujo máximo, al igual que los problemas de transporte y asignación. En razón de que el problema del flujo de costo mínimo es un tipo especial de problema de programación lineal, se puede resolver en forma eficiente mediante 2.2.8 *El Método simplex para problema de flujo en redes*.

El problema del flujo de costo mínimo que tiene una posición central entre los modelos de optimización de redes; primero, abarca una clase amplia de aplicaciones y segundo, su solución es muy eficiente. En el *problema de flujo máximo*, toma en cuenta un flujo en una red con capacidades de arco limitadas, el *problema de ruta más corta*, considera un costo (o distancia) para el flujo a través de un arco, y el *problema de transporte o el de asignación* puede manejar varios orígenes (nodo fuente) y varios destinos (nodos demanda) para el flujo, de nuevo con costos asociados. La razón por la que el problema de flujo de costo mínimo se puede resolver de modo tan eficiente es que se puede formular como un problema de programación lineal y es posible resolverlo con una versión simplificada del método simplex llamada método simplex de redes.



Otro problema de redes que se considera es la que implica la determinación del modo más económico de realizar un proyecto de forma que éste pueda terminarse en su fecha límite. Se utiliza una técnica llamada método *CPM* (Critical Path Method / Método de la Ruta Crítica) para formular un modelo de red del proyecto y los trueques entre tiempo y costo para sus actividades. Después se utiliza el análisis de costo marginal o la programación lineal para resolver el plan de proyecto óptimo.

Se presenta a partir de la sección 2.2.12.1 en adelante las definiciones de los modelos de optimización de redes que son utilizados en esta tesis (Bazaraa & Jarvis, 1991; Prawda, 2004; Rincón Abril, 2001; Taha, 2004)

2.2.12.1. Problema de Transporte (PT)

El problema general se representa en la red de la Figura 14. Hay m fuentes (orígenes) y n destinos, cada fuente y cada destino representados por un **nodo**. Los **arcos** representan las rutas que enlazan las fuentes y los destinos. El arco (i, j) que une a la fuente i con el destino j conduce dos clases de información: el costo de transporte c_{ij} por unidad, y la cantidad transportada x_{ij} . La cantidad de oferta en la fuente i es a_i y la cantidad de demanda en el destino j es b_j . El objetivo del modelo es determinar las incógnitas x_{ij} que minimicen el costo total de transporte, y que al mismo tiempo satisfagan las restricciones de oferta y demanda.

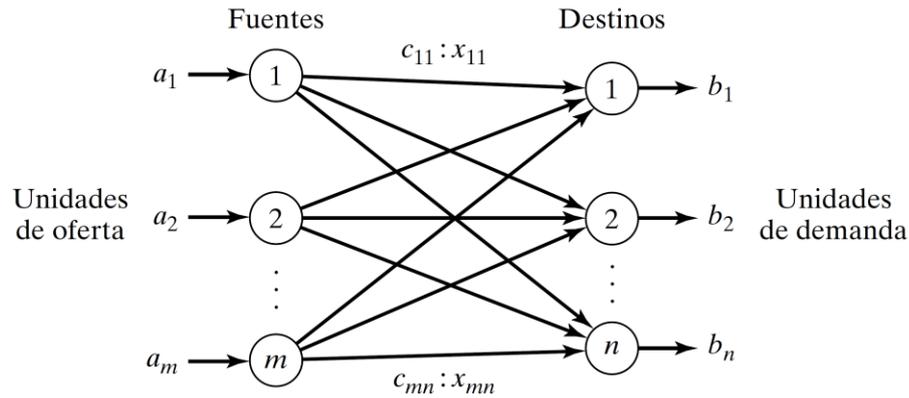


Figura 14. Representación del modelo de Transporte con nodos y arcos.
Fuente: (Taha, 2004)

El problema de transportes en una red puede plantearse explícitamente como sigue:

Minimizar:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (21)$$

Sujeta a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$



Con la adición de variables de holgura, en ambos casos se puede asignar coeficientes de costos iguales a cero, el problema de transportes (PT) se reduce a:

Minimizar:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Sujeta a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (PT)$$

(23)

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

2.2.12.1.1. Teorema

Una condición necesaria y suficiente para que la estructura del problema de transportes (PT) tenga solución es que la oferta total sea igual a la demanda total, es decir:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Prueba: De la formulación (PT) se tiene:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$



Si se suma sobre todas las fuentes (orígenes), no se afecta la igualdad, es decir:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i \quad (24)$$

Por otro lado, de la formulación (PT) se tiene:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Sumando sobre todos los destinos,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j \quad (25)$$

Las igualdades (24) y (25) establecen la prueba del teorema.

Mas referencia sobre Problemas de Transportes consultar (Bazaraa et al., 2010, pp. 513–535; Bazaraa & Jarvis, 1991, pp. 341–367; Ullilen Marcilla, 2015, pp. 107–126)

2.2.12.2. Problema de Asignación

El problema de asignación puede considerarse un caso especial de aplicación de los modelos de optimización de redes en el que los **elementos asignados** son recursos destinados a la **realización de actividades**. Por ejemplo, los elementos asignados pueden ser nuevos empleados contratados por una empresa. La asignación de personas a tareas es una de las aplicaciones más



frecuentes del problema de asignación. Igualmente, los elementos asignados pueden ser máquinas, vehículos, plantas o lapsos de tiempo.

Problema de decisión.

Determinar cómo asignar cada uno de los elementos (asignados $i = 1, 2, 3, \dots, n$) a cada una de las actividades (tareas $j = 1, 2, 3, \dots, n$), de tal manera que a cada tarea le corresponda uno y un solo asignado si para cada actividad existe un coeficiente de efectividad y se debe optimizar la efectividad total.

Los problemas de asignación se ajustan a la siguiente estructura:

- ~ El número de elementos asignados es igual al número de actividades.
- ~ Cada elemento se asigna exactamente a una sola actividad.
- ~ Cada actividad debe ser realizada por un solo elemento asignado.
- ~ Se dispone de coeficientes c_{ij} , que miden la efectividad de asignar el elemento $i = 1, 2, 3, \dots, n$ a la actividad $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Cualquier problema que satisface todas estas suposiciones se puede resolver en forma extremadamente eficiente mediante los algoritmos diseñados especialmente para los problemas de asignación. Las primeras tres suposiciones son muy restrictivas. Muchos problemas no las cumplen por completo. Sin embargo, con frecuencia es posible reformular la aplicación para hacerlo. Se pueden usar elementos asignados o actividades ficticias.

Variables de decisión.

El modelo matemático para el problema de asignación utiliza las siguientes variables de decisión:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si se asigna } i \text{ a la tarea } j \\ 0, & \text{no se asigna } i \text{ a la tarea } j \end{cases} \quad ; \text{ para } i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$



Entonces, cada x_{ij} es una variable binaria (toma valores 0 ó 1) y el problema de asignación, es un caso particular de programación entera cero-uno.

Función Objetiva.

Corresponde a la función que calcula la efectividad total. Debe disponerse del coeficiente c_{ij} , que mide la efectividad de asignar el elemento i a la tarea j .

Entonces:

$$\text{Mín}(Z) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{nn}x_{nn}$$

$$\text{Mín}(Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Restricciones.

Las asignaciones para **cada elemento = 1**

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + \dots + x_{2n} &= 1 \\ &\vdots \\ x_{n1} + x_{n2} + x_{n3} + \dots + x_{nn} &= 1 \end{aligned}$$

Esto es:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Las asignaciones para **cada actividad = 1**



$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} + x_{31} + \dots + x_{n1} &= 1 \\x_{12} + x_{22} + x_{32} + \dots + x_{n2} &= 1 \\&\vdots \\x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \dots + x_{nn} &= 1\end{aligned}$$

Esto es:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Modelo de Programación Lineal.

Minimizar:

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (26)$$

Sujeta a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si se asigna } i \text{ a la tarea } j \\ 0, & \text{no se asigna } i \text{ a la tarea } j \end{cases} \quad ; \text{ para } i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

El primer conjunto de restricciones precisa que cada asignado realiza exactamente

una asignación, mientras que el segundo conjunto muestra que se requiere que cada asignación sea realizada por un asignado.

Mas referencia sobre Problemas de Asignación consultar (Bazaraa et al., 2010, pp. 535–551; Bazaraa & Jarvis, 1991, pp. 367–375)

2.2.12.3. Problema de la Ruta más Corta

Para el análisis de este modelo se puede suponer una red conexa y no dirigida con dos nodos principales llamados origen y destino. A cada uno de los arcos no dirigidos se asocia una distancia. El objetivo del problema es encontrar la ruta más corta o trayectoria con la mínima distancia total, que va desde el origen al destino.

El algoritmo de solución para este problema se fundamenta en el análisis de toda la red, partiendo del origen e identificando sucesivamente la ruta más corta desde el origen a cada uno de los nodos en orden ascendente de sus distancias. Se obtiene la solución del problema al llegar al nodo destino.

Minimizar:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (28)$$

Sujeta a:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = \text{nodo fuente} \\ 0, & \text{si } i \neq \text{nodo fuente ó nodo terminal} \\ -1, & \text{si } i = \text{nodo terminal} \end{cases} \quad (29)$$

$$x_{ij} \geq 0; \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, m$$



Más referencia sobre Problemas de la Ruta más Corta consultar (Bazaraa et al., 2010, pp. 619–639; Bazaraa & Jarvis, 1991, pp. 462–470; Ullilen Marcilla, 2015, pp. 84–91)

2.2.12.4. Problema de Flujo Máximo

Se considera la situación en la que se enlazan un nodo fuente y un nodo destino mediante una red de arcos de un solo sentido. Cada arco tiene una capacidad máxima de flujo admisible. El **objetivo consiste en obtener la máxima cantidad de flujo entre el nodo fuente y destino.**

Supóngase que cada arco (i, j) de una red dirigida tiene asociado un número no negativo c_{ij} denominado la capacidad del arco. Si esta capacidad representa la máxima cantidad de algún artículo que pueda enviarse a través del arco, la pregunta inmediata es, ¿Cuál es la cantidad máxima del artículo que se puede enviar de un nodo a otro, dentro de la red?

Lo anterior obliga a considerar el problema de hallar el máximo flujo posible desde un nodo fuente O , a un nodo depósito o terminal T . El modelo matemático de este problema se expresa de la siguiente forma:

Variables de decisión.

c_{ij} : Cantidad de flujo a través del arco (i, j) .

Restricciones.

La cantidad de flujo a través de cada arco \leq La capacidad de flujo a través de este arco.

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}$$

En los nodos diferentes al fuente y terminal, la ley de conservación se cumple, esto es, la cantidad que entra al nodo es igual a la cantidad que fluye hacia fuera, por lo tanto:

Maximizar:

$$f = \sum_{j=1}^m x_{ij} \quad (30)$$

Sujeta a:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = \begin{cases} f, & \text{si } i = \text{nodo fuente} \\ 0, & \text{si } i \neq \text{nodo fuente } \acute{o} \text{ nodo terminal} \\ -f, & \text{si } i = \text{nodo terminal} \end{cases} \quad (31)$$

$$0 \leq l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}; \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, m$$

El término f representa el valor del flujo total. Se llama flujo posible a cualquier conjunto de valores que satisfacen las restricciones anteriores. Es evidente que este modelo corresponde a un problema lineal en donde el objetivo es maximizar el valor de f sujeto a las anteriores restricciones.

Mas referencia sobre Problema de Flujo Máximo consultar (Bazaraa et al., 2010, pp. 607–619; Bazaraa & Jarvis, 1991, pp. 453–462; Ullilen Marcilla, 2015, pp. 75–83)



CAPITULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. TIPO, NIVEL, DISEÑO Y MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN

3.1.1. Tipo de investigación

Por el tipo de investigación, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación aplicada, en razón, que se utilizaron conocimientos de las ciencias matemáticas (programación lineal, teoría de grafos) a fin de aplicarlas en la ejecución de proyectos de edificación (casco estructural), para poder optimizar el costo y tiempo.

3.1.2. Nivel de investigación

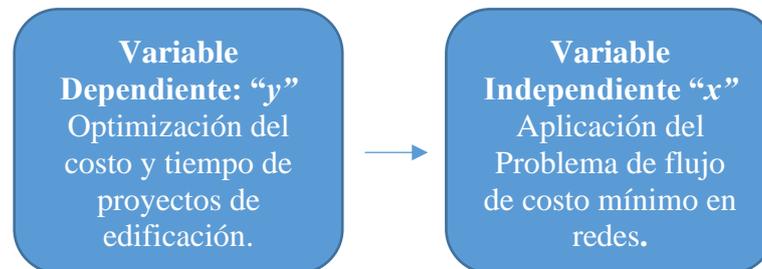
De acuerdo con la naturaleza del estudio de investigación, reúne por su nivel las características de un estudio descriptivo. ya que toda investigación se basa en profundizar los resultados del tema apropiado, también incrementa los conocimientos que existen en la aplicación del problema del flujo de costo mínimo en el modelo matemático para la ejecución de proyectos de edificación. (Muñoz Raso, 2015)

3.1.3. Diseño de investigación

El diseño de la investigación es de tipo no experimental, ya que no hubo manipulación de variables independientes. De diseño transeccional debido a que se describieron relaciones entre dos o más variables y los datos fueron recogidos en un momento determinado. (Hernández Sampieri, 2017)

3.1.4. Método de investigación

El método que se utiliza es deductivo y aplicativo, porque se analiza las definiciones, propiedades, de programación lineal, teoría de grafos, flujo de redes, y la aplicación del modelo matemático en la ejecución de proyectos de edificación.



3.2. ÁMBITO DE ESTUDIO

El presente estudio de investigación se realizó en el departamento, provincia y distrito de Puno, el proyecto se encuentra emplazado dentro de los límites de la Ciudad Universitaria, propiedad de la Universidad Nacional del Altiplano, el cual se ubica en el sector Noreste de la ciudad de Puno entre los barrios Llavini, San José, y Alto San José al que antiguamente se le denominaba Fundo Valderrama”.

Departamento: Puno

Provincia: Puno

Distrito: Puno

Ciudad universitaria – UNA – Puno

3.3. POBLACIÓN Y MUESTRA

3.3.1. Población

La población a investigar está conformada por el proyecto que viene ejecutando la Universidad Nacional del Altiplano a través de la Oficina de Ejecución de Inversiones OEI. En el periodo 2018-2019. Y está determinada por aquellos Proyectos en Edificaciones en una cantidad de 01 obra o proyecto, lo cual

representa el 20% del total de proyectos en ejecución, así mismo se consideró el área de construcción del proyecto respecto al monto de inversión para su ejecución, que a continuación se pasan a detallar en la

Tabla 4 y Tabla 5.

3.3.2. Muestra

La muestra de estudio está conformada por la construcción del casco estructural, se seleccionaron las partidas que conciernen al de obras de concreto armado.

Tabla 4: *Resumen de área construida y presupuesto de la obra en estudio*

N°	CÓDIGO SNIP	NOMBRE (OBRA)	MONTO DE INVERSIÓN	ÁREA CONSTRUIDA
				TOTAL ÁREA CONSTRUIDA: 1772.46 M2
				PRIMER NIVEL Área Construida: 426.64 M2
				SEGUNDO NIVEL Área Construida: 483.07 M2
1	315443	“MEJORAMIENTO DEL SERVICIO DE FORMACIÓN PROFESIONAL EN LA ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN PRIMARIA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO”	S/. 3, 104,203.73	TERCER NIVEL Área Construida: 486.15 M2
				CUARTO NIVEL Área Construida: 376.60 M2

Fuente: Expediente Técnico

Tabla 5: *Resumen de ambientes de la obra en estudio*

N°	OBRA	DISTRIBUCIÓN DE AMBIENTES
1	“MEJORAMIENTO DEL SERVICIO DE FORMACIÓN PROFESIONAL EN LA ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN PRIMARIA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO”	PRIMER NIVEL: 426.64 M2 01 auditorio, 01 control de sonido y video, 01 Sala de usos múltiples, Servicios Higiénicos (SS.hh.) damas, SS.hh. varones, Ss.hh. discapacitados.
		SEGUNDO NIVEL: 483.07 M2 Aula Taller 01, Aula Taller 02, Aula Académica 01, Aula Académica 02, Deposito de material administrativo, Ss.hh. damas, Ss.hh. varones, Ss.hh. discapacitados.
		TERCER NIVEL: 486.15 M2 Aula Taller 03, Aula Académica 03, Aula Académica 04, Laboratorio de Computo, Tutoría, Ss.hh. damas, Ss.hh. varones, Ss.hh. discapacitados.
		CUARTO NIVEL: 376.60 M2 Secretaria / Sala de espera, Departamento Académico, Dirección de estudios, Decanato + Deposito, Cafetería, Ss.hh. damas, Ss.hh. varones, Ss.hh. discapacitados.

Fuente: Expediente Técnico



Figura 15. 3D de la Obra
Fuente: Expediente Técnico



3.4. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Técnicas: La investigación permitió aplicar las siguientes técnicas

- Observación.
- Análisis documental.

Instrumentos: Los instrumentos que se utilizaron son los siguientes:

- a) Guías de Observación, se utilizaron para recopilar la información durante la ejecución del proyecto y conocer las características, se realizaron a través de Hojas de Campo.
- b) Guías de Análisis documental, se utilizó este instrumento mediante la revisión de documentos tales como libros, artículos, tesis, expediente técnico, para la aplicación del Problema de flujo de costo mínimo en redes en la ejecución de proyectos de edificación.
- c) Software, se utilizó principalmente las hojas de cálculo de Microsoft Excel mediante su complemento Solver y para obtener los resultados del modelo matemático se hará uso del software Grafos (Rodríguez Villalobos, 2010, 2012) entre otros para procesar los datos obtenidos en campo y presentar los respectivos resultados.

El software Grafos es completamente gratuito, no tiene ninguna limitación funcional ni de uso en el tiempo. El software Grafos ha sido desarrollado por el Prof. Dr. Alejandro Rodríguez Villalobos quien es docente e investigador en la Universitat Politècnica de València, Grafos es un software para la construcción, edición y análisis de grafos. El software es de utilidad para la docencia y el aprendizaje de la teoría de grafos (graph theory), y otras disciplinas relacionadas como la ingeniería de organización industrial, la logística y el transporte,

investigación operativa, el diseño de redes, etc. Grafos se puede usar perfectamente para el modelado y resolución de problemas reales de cierto tamaño y complejidad. Un grafo representa un modelo de una realidad. Este modelo podrá ser analizado desde distintos puntos de vista gracias a los algoritmos y funciones incorporados en el software Grafos. La filosofía de Grafos es: “dibujar, modelar, resolver y analizar”. Con esto se pretende que el usuario tenga libertad absoluta para tratar y abordar los problemas de grafos. Usted podrá dibujar libremente el grafo sin preocuparse del análisis o algoritmo que utilizará posteriormente. Grafos le avisará en caso de no factibilidad o de cualquier otro requerimiento para un análisis en particular.

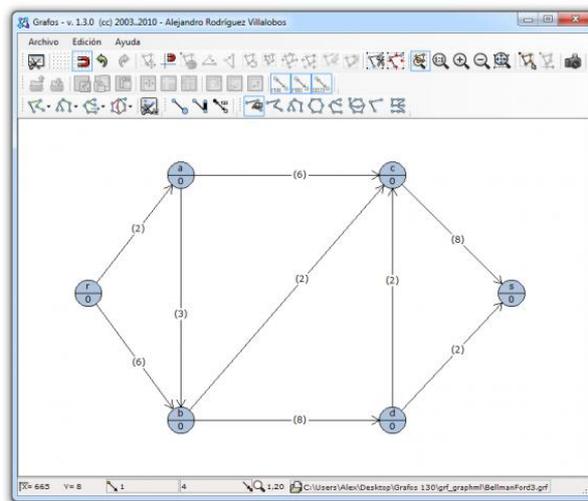


Figura 16. Interfaz del Software Grafos
Fuente: (Rodríguez Villalobos, 2010)

Para el uso de los algoritmos en Grafos, en el modo de edición gráfico observará una barra de herramientas con los siguientes botones.



Desde esta barra podrá desplegar y utilizar todos los posibles algoritmos de Grafos que están organizados en las siguientes categorías:



- Caminos
 - Camino mínimo
 - Camino máximo
- Árboles
 - Árbol mínimo
 - Árbol máximo
 - Árbol de valor total mínimo
 - Árbol de valor total máximo
- Flujos
 - Flujo máximo
 - Problema de transbordo
 - Problema de asignación
 - Localización a coste mínimo
- Rutas
 - Circuito euleriano
 - Problema de viajante de comercio
 - Problema de m viajeros de comercio
 - Problema de rutas de vehículos (VRP)
 - Problema de rutas con vehículos capacitados (CVRP)

Al desplegar cualquiera de las categorías (con un grafo construido en pantalla) se observará que algunas opciones están habilitadas y otras no. Para la aplicación de algunos algoritmos, Grafos requiere de algún dato de entrada, como un nodo origen seleccionado (origen), un nodo destino seleccionado (destino), un conjunto de nodos seleccionados (selección), o meta-datos para los problemas CVRP (VRP-XML). Los algoritmos que no requieren datos de entrada estarán siempre habilitados y podrán ser utilizados directamente, en cambio, para habilitar el resto de algoritmos deberá seleccionar (origen, destino, otros) según se indica en la opción de menú elegida.

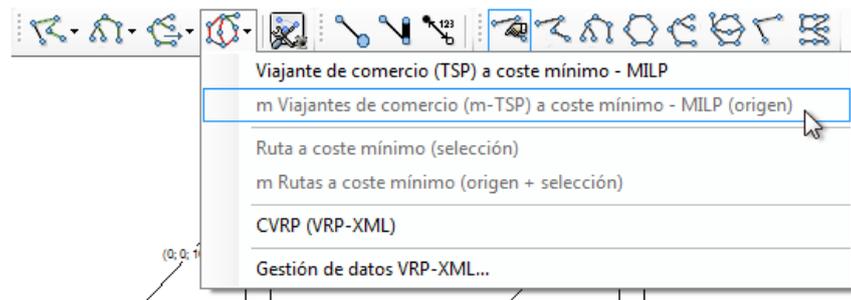


Figura 17. Opciones de solución del Software Grafos
Fuente: (Rodríguez Villalobos, 2010)

Para activar un nodo origen (Nd1) debe hacer clic sobre él con el botón izquierdo del ratón, el nodo destino (Nd2) se selecciona haciendo clic el botón derecho del ratón. Conforme se encuentre el estado de la selección, observará que se activan o desactivan las opciones de menú. En el caso de que Grafos requiera información adicional, se mostrará en pantalla una pequeña ventana con los datos de entrada. Grafos da libertad para analizar un mismo grafo desde diferentes puntos de vista en cualquier momento, en caso de que la estructura del grafo no sea coherente con el algoritmo, de que falten datos asociados a los arcos, o de no factibilidad, etc. Grafos le avisará. Si todo es correcto, a continuación, el algoritmo comenzará su proceso de cálculo. El tiempo requerido dependerá del tipo de heurística, de la complejidad del problema a resolver, y por supuesto de la capacidad de cómputo de su ordenador. Al finalizar el algoritmo, ocurrirán varias cosas:

- Se muestra una ventana con los Resultados del Análisis. Donde se muestra la solución obtenida en modo texto, y el tiempo total de cómputo para el algoritmo seleccionado.

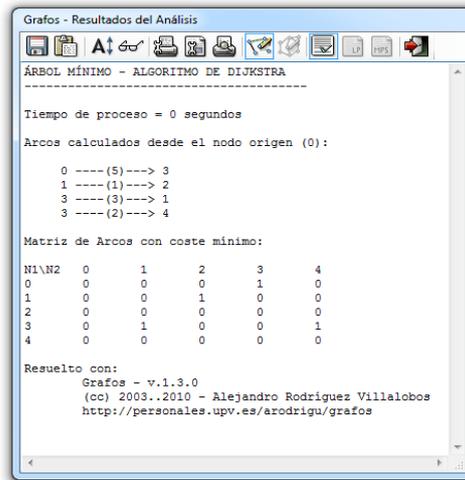


Figura 18. Resultados del Análisis del Software Grafos

Fuente: (Rodríguez Villalobos, 2010)

Utilizar esta ventana es algo bastante intuitivo. Fácilmente podrá guardar el texto de la solución, copiarlo al portapapeles, imprimirlo, cambiar el tamaño de letra (útil para monitores grandes), visualizar/ocultar la solución dibujada.



- Se dibujará la solución sobre el grafo, subrayando los arcos y nodos de la solución.

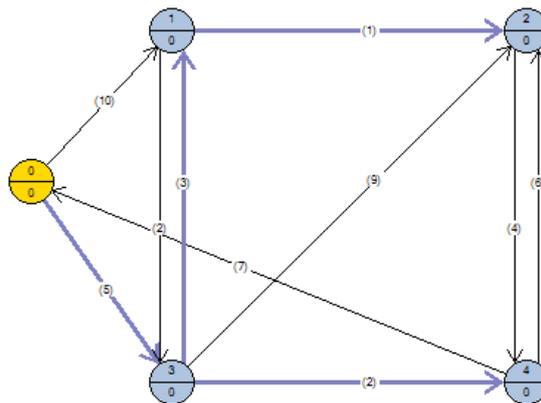


Figura 19. Solución en el grafo

Fuente: (Rodríguez Villalobos, 2010)

La solución se dibujará según los colores elegidos y trazos elegidos en Configuración de los Análisis. Es muy fácil, personalizar los colores y el trazado. Ocultando el dibujado de la solución (ventana de Resultados del Análisis), el grafo se dibujará como antes de la ejecución del algoritmo. En cualquier caso, es bueno guardar el estado del grafo antes y después de ejecutar el algoritmo.

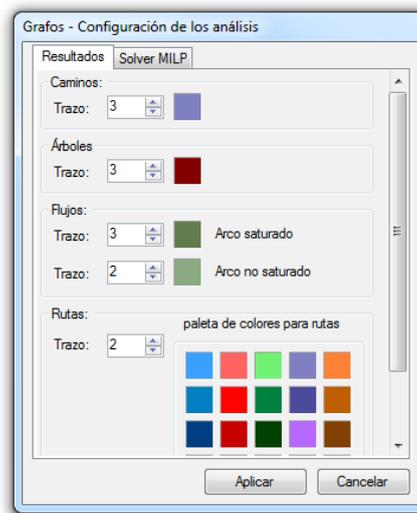


Figura 20. Configuración de Análisis del Software Grafos
Fuente: (Rodríguez Villalobos, 2010)

Para más referencia del Software Grafos Ver el libro: “Grafos - software para la construcción, edición y análisis de grafos”. Y visitar la página Web: <http://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php>

3.5. DESARROLLO DE LA METODOLOGÍA APLICANDO EL PROBLEMA DE FLUJO DE COSTO MÍNIMO EN REDES

A continuación, se procede con el desarrollo de la metodología, en primer lugar, se realizó una observación y análisis de la obra de Educación Primaria donde se aplicó el Problema de flujo de costo mínimo en redes en las diferentes componentes de ejecución de proyectos de edificación. La ejecución de obra “Mejoramiento del Servicio de



Formación Profesional en la Escuela Profesional de Educación Primaria de la Universidad Nacional Del Altiplano” inicio el 02 de Julio del 2018, en el estudio realizado a la obra las principales observaciones fueron:

- Al proceso constructivo.
- Al personal obrero.
- A las maquinarias y herramientas.
- La forma de planificación, que durante el desarrollo del proyecto se hizo notable la falta de planificación coordinada en todo lo referente al manejo de materiales, herramientas y equipos.
- La falta de reuniones entre la residencia de obra y los jefes de cuadrilla para realizar una adecuada planificación que eran necesarias para ejecutar de mejor manera el proyecto.
- La falta de indicadores para medir la productividad del proyecto, ya que el único indicador visible de medición fue el avance de las actividades constructivas.
- La falta de registros documentales que permitan realizar una retroalimentación que ayuden a una mejora continua.
- El procedimiento empírico en el desarrollo constructivo.

Se muestra el presupuesto de la obra “Mejoramiento del Servicio de Formación Profesional en la Escuela Profesional de Educación Primaria de la Universidad Nacional Del Altiplano” en las partidas concernientes a las estructuras.



Item	Descripción	Und.	Metrado	Precio (S/.)	Parcial (S/.)
02	ESTRUCTURAS				1,206,714.30
02.01	MOVIMIENTO DE TIERRAS				117,490.51
02.01.01	NIVELACION DEL TERRENO				2,682.60
02.01.01.01	NIVELACION DEL TERRENO	m2	641.77	4.18	2,682.60
02.01.02	EXCAVACION MASIVAS				35,502.20
02.01.02.01	CORTE Y EXPLANACION CON MAQUINARIA (Terreno Roca Fracturada)	m3	1,742.50	14.83	25,841.28
02.01.02.02	EXCAVACION CON MAQUINARIA PARA ZAPATAS (Terreno Roca Fracturada)	m3	484.80	16.45	7,974.96
02.01.02.03	EXCAVACION CON MAQUINARIA PARA VIGAS DE CIMENTACION (Terreno Roca Fra	m3	102.49	16.45	1,685.96
02.01.03	RELLENOS				37,942.73
02.01.03.01	RELLENO Y COMPACTADO MANUAL DE FUNDACIONES CON MATERIALPRESTA	m3	564.54	67.21	37,942.73
02.01.04	NIVELACION INTERIOR Y APISONADO				13,532.74
02.01.04.01	NIVELACION INTERIOR Y APISONADO - AMBIENTES	m2	496.25	27.27	13,532.74
02.01.05	ELIMINACION DE MATERIAL EXCEDENTE				27,830.24
02.01.05.01	ELIMINACION DE MATERIAL EXCEDENTE PROVENIENTE DE EXCAVACIONES DE	m3	2,447.69	11.37	27,830.24
02.02	OBRAS DE CONCRETO SIMPLE				5,022.44
02.02.01	CIMENTOS CORRIDOS				5,022.44
02.02.01.01	CIMENTOS CORRIDOS:CONCRETO CICLOPEO: MEZCLA C:H 1:10 + 30% PIEDRA	m3	36.06	139.28	5,022.44
02.02.02	SOBRECIMENTOS				9,738.63
02.02.02.01	SOBRECIMENTOS: MEZCLA DE CONCRETO 1:8 (C:H) +25% DE PIEDRA MEDIANA	m3	12.55	223.73	2,807.81
02.02.02.02	SOBRECIMENTOS: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	160.92	43.07	6,930.82
02.02.03	SUB ZAPATAS				15,566.58
02.02.03.01	SUB ZAPATAS: MEZCLA C:H 1:12 + 30% PIEDRA GRANDE. MAXIMO DE 6"	m2	110.96	140.29	15,566.58
02.02.04	SOLADO PARA ZAPATAS				11,065.24
02.02.04.01	SOLADO PARA ZAPATAS C:H, 1:12 E=4"	m2	249.89	38.78	9,690.73
02.02.04.02	SOLADO PARA VIGAS DE CIMENTACION E=4" MEZCLA C:H 1:12	m2	36.87	37.28	1,374.51
02.02.05	GRADAS DE CONCRETO SIMPLE				17,922.27
02.02.05.01	GRADERIOS AUDITORIO: CONCRETO F'C= 175KG/CM2+25% DE P.M. MAXIMO DE	m3	53.28	329.33	17,546.70
02.02.05.02	GRADERIOS AUDITORIO: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	8.72	43.07	375.57
02.02.06	FALSO PISO				14,691.57
02.02.06.01	FALSO PISO DE 4" =CONCRETO FC=140Kg/cm2	m2	388.05	37.86	14,691.57
02.02.07	VEREDAS				14,321.05
02.02.07.01	VEREDAS: RELLENO, NIVELACION Y COMPACTADO CON EQUIPO	m2	136.40	39.85	5,435.54
02.02.07.02	VEREDAS: CONCRETO F'C=140 KG/CM2	m2	136.40	39.79	5,427.36
02.02.07.03	VEREDAS: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	75.40	37.11	2,798.09
02.02.07.04	VEREDAS: JUNTAS ASFALTICAS Y/O BRUNAS	m	85.50	7.72	660.06
02.03	OBRAS DE CONCRETO ARMADO				971,344.46
02.03.01	ZAPATAS AISLADAS				73,787.28
02.03.01.01	ZAPATAS AISLADAS: CONCRETO F'C=210 Kg/cm2	m3	51.36	295.65	15,184.58
02.03.01.02	ZAPATAS AISLADAS: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	13.80	50.06	690.83
02.03.01.03	ZAPATAS AISLADAS: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm2	kg	13,788.54	4.20	57,911.87
02.03.02	LOSA DE CIMENTACION				69,194.71
02.03.02.01	LOSA DE CIMENTACION: CONCRETO F'C=210 KG/CM2	m3	77.83	318.37	24,778.74
02.03.02.02	LOSA DE CIMENTACION:ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	84.12	48.63	4,090.76
02.03.02.03	LOSA DE CIMENTACION: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm2	kg	9,601.24	4.20	40,325.21
02.03.03	VIGAS DE CIMENTACION				45,313.13
02.03.03.01	VIGAS DE CIMENTACION: CONCRETO F'C=210 Kg/cm2	m3	36.70	317.24	11,642.71
02.03.03.02	VIGAS DE CIMENTACION: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	183.52	59.57	10,932.29
02.03.03.03	VIGAS DE CIMENTACION: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm2	kg	5,413.84	4.20	22,738.13
02.03.04	PLACAS VERTICALES				53,400.25
02.03.04.01	PLACAS VERTICALES: CONCRETO F'C=210 Kg/cm2	m3	34.74	378.63	13,153.61
02.03.04.02	PLACAS VERTICALES: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	277.06	100.18	27,755.87
02.03.04.03	PLACAS VERTICALES: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm2	kg	2,952.90	4.23	12,490.77
02.03.05	PLACAS INCLINADAS				95,554.79
02.03.05.01	PLACAS INCLINADAS: CONCRETO F'C=210 Kg/cm2	m3	26.34	412.42	10,863.14
02.03.05.02	PLACAS INCLINADAS: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	438.14	171.68	75,219.88
02.03.05.03	PLACAS VERTICALES: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm2	kg	2,239.19	4.23	9,471.77
02.03.06	COLUMNAS RECTAS				154,151.11
02.03.06.01	COLUMNAS RECTAS: CONCRETO F'C=210 Kg/cm2	m3	111.57	370.60	41,347.84
02.03.06.02	COLUMNAS RECTAS: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	1,060.48	49.14	52,111.99
02.03.06.03	COLUMNAS RECTAS: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm2	kg	14,415.98	4.21	60,691.28
02.03.07	COLUMNAS DE ARRIOSTRE				40,324.69
02.03.07.01	COLUMNAS DE ARRIOSTRE: CONCRETO F'C=175 KG/CM2	m3	15.93	424.45	6,761.49
02.03.07.02	COLUMNAS DE ARRIOSTRE: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	437.92	55.64	24,365.87
02.03.07.03	COLUMNAS DE ARRIOSTRE: ACERO FY=4200 KG/CM2	kg	2,189.84	4.20	9,197.33
02.03.08	VIGAS RECTAS				191,366.16
02.03.08.01	VIGAS HORIZONTALES: CONCRETO F'C=210 Kg/cm2	m3	167.03	320.82	53,586.56
02.03.08.02	VIGAS HORIZONTALES: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	1,006.64	59.57	59,965.54
02.03.08.03	VIGAS HORIZONTALES: ACERO GRADO 60 FY= 4200 KG/CM2	kg	18,309.19	4.25	77,814.06
02.03.09	VIGAS DE CONFINAMIENTO				16,787.11
02.03.09.01	VIGAS DE CONFINAMIENTO: CONCRETO F'C=175 Kg/cm2	m3	8.75	317.24	2,775.85
02.03.09.02	VIGAS DE CONFINAMIENTO: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	137.05	62.72	8,595.78
02.03.09.03	VIGAS DE CONFINAMIENTO: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm2	kg	1,289.40	4.20	5,415.48
02.03.10	LOSAS ALIGERADAS				207,081.49
02.03.10.01	LOSAS ALIGERADAS: CONCRETO F'C=210 KG/CM2	m3	123.60	317.91	39,293.68
02.03.10.02	LOSAS ALIGERADAS: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	1,412.55	59.57	84,145.60
02.03.10.03	LOSAS ALIGERADAS: ACERO GRADO 60 FY=4200 KG/CM2	kg	8,033.85	4.25	34,143.86
02.03.10.04	LOSA ALIGERADA HORIZONTAL: LADRILLO HUECO DE 30x30x15cm	und	12,595.00	3.93	49,498.35
02.03.11	LOSA MACIZA				409.25
02.03.11.01	LOSA MACIZA : CONCRETO F'C=210 Kg/cm2	m3	0.31	315.81	97.90
02.03.11.02	LOSA MACIZA: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	3.04	44.76	136.07
02.03.11.03	LOSA MACIZA : ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm2	kg	41.34	4.24	175.28
02.03.12	ESCALERAS				22,939.24
02.03.12.01	ESCALERAS: CONCRETO F'C= 210KG/CM2	m3	25.36	303.62	7,699.80
02.03.12.02	ESCALERAS: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	79.94	43.07	3,443.02
02.03.12.03	ESCALERAS: ACERO GRADO 60 FY=4200 KG/CM2	kg	2,802.00	4.21	11,796.42
02.03.13	MESAS DE CONCRETO				1,035.25
02.03.13.01	MESAS DE CONCRETO: CONCRETO F'C=175 KG/CM2	m3	1.04	425.40	442.42
02.03.13.02	MESAS DE CONCRETO: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	m2	10.36	41.11	425.90
02.03.13.03	MESA DE CONCRETO: ACERO FY=4200 KG/CM2	kg	39.65	4.21	166.93
02.04	ESTRUCTURAS METALICAS				10,494.55
02.04.01	ESTRUCTURAS METALICAS PARA COBERTURA				10,494.55
02.04.01.01	TJERAL METÁLICO TM-01	und	3.00	25.76	77.28
02.04.01.02	TJERAL METÁLICO TM-02	und	5.00	254.16	1,270.80
02.04.01.03	CORREAS				2,771.31
02.04.01.03.01	TUBO RECTANGULAR LAC 50x25x2.0mm (CORREA)	m	91.50	16.94	1,550.01
02.04.01.03.02	APOYO TIPO I	und	6.00	76.50	459.00
02.04.01.03.03	APOYO TIPO II	und	10.00	76.23	762.30
02.04.01.04	COBERTURAS				6,375.16
02.04.01.04.01	COBERTURA DE PLANCHAS DE POLICARBONATO ALVEOLAR TRANSPARENTE	m2	47.29	134.81	6,375.16
02.05	VARIOS				13,700.00
02.05.01	ELIMINACION DE RESIDUOS SOLIDOS DE LA OBRA	und	1.00	4,950.00	4,950.00
02.05.02	PRUEBAS DE CONTROL DE CALIDAD	und	1.00	4,950.00	4,950.00
02.05.03	TRANSPORTE INTERNO DE MATERIALES	und	1.00	2,000.00	2,000.00
02.05.04	TRANSPORTE DE MATERIALES A LA OBRA	VJE	6.00	300.00	1,800.00
02.06	IMPACTO AMBIENTAL				5,357.00
02.06.01	TRABAJOS DE RESTAURACION				5,357.00
02.06.01.01	RESTAURACION DE AREA AFECTADA POR CAMPAMENTO	m2	500.00	2.62	1,310.00
02.06.01.02	RESTAURACION DE AREA AFECTADA POR PATIO DE MAQUINAS	m2	400.00	2.88	1,152.00
02.06.01.03	SELLADO DE LETRINAS	m2	20.00	49.23	984.60
02.06.01.04	REVEGETALIZACION CON ESTOLONES DE PASTO Y TERRENO AGRICOLA	m2	60.00	31.84	1,910.40

Figura 21. Presupuesto Estructuras Obra Educación Primaria

Fuente: Expediente Técnico



Se realizó la propuesta de modelos matemáticos de optimización del Problema de flujo de costo mínimo en redes y sus casos especiales en las partidas concernientes al casco estructural (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** 1), se muestran en la *Tabla 7* y *Tabla 8* el resumen de optimización de costo y tiempo de ejecución del casco estructural:

3.5.1. Modelo Matemático al movimiento de tierra

Toda edificación genera varios metros cúbicos (m^3) de movimientos de tierras al realizar la excavación para la cimentación de una edificación en los cuales intervienen maquinarias como excavadoras, retroexcavadoras, cargadores frontales y volquetes los cuales tienen que eliminar el material excedente proveniente de las excavaciones a un botadero. En estos modelos se analiza el requerimiento óptimo de maquinaria necesaria para la eliminación del material excedente proveniente de las excavaciones.

La partida de ELIMINACIÓN DE MATERIAL EXCEDENTE PROVENIENTE DE EXCAVACIONES DISTANCIA=10KM, se dio por orden de servicio a una empresa encargada en el rubro. Se cuentan con dos botaderos: Cancharani a una distancia de 8 km y Uros Chulluni a una distancia de 6 km. Se propusieron modelos de optimización requeridos para la eliminación del material excedente de excavaciones.

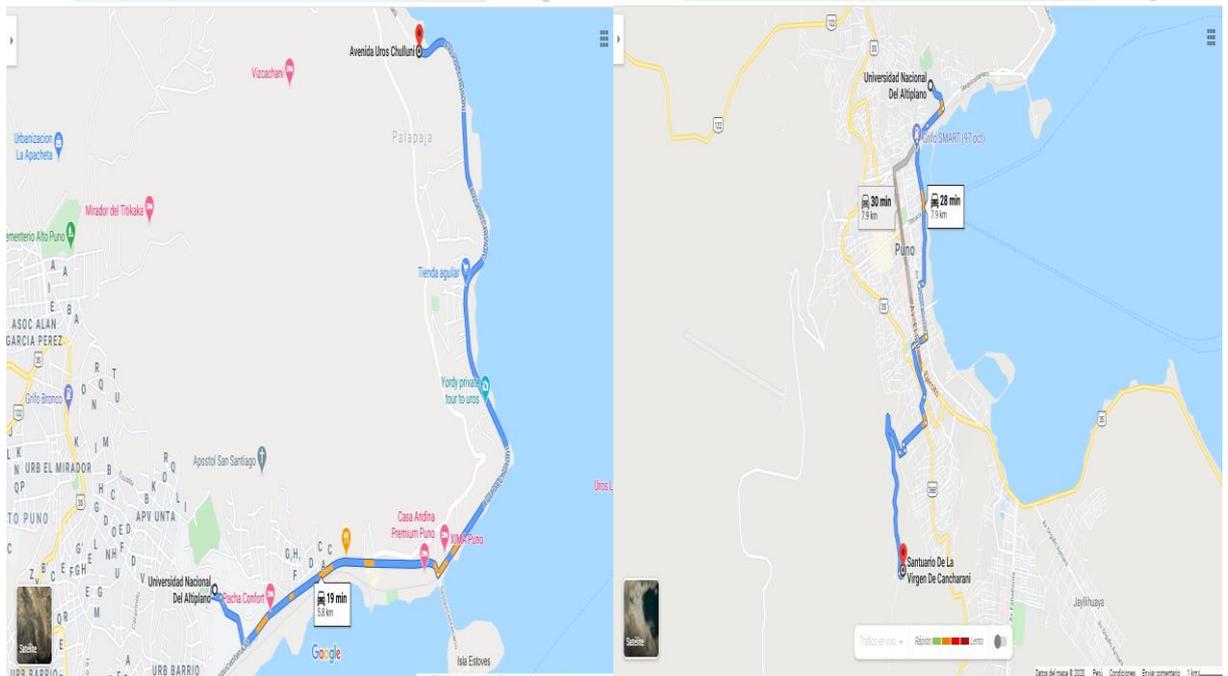


Figura 22. Botaderos propuestos para la eliminación
Fuente: Elaborado por el equipo de trabajo

Análisis de precios unitarios

Presupuesto	0111098	MEJORAMIENTO DEL SERVICIO DE FORMACION PROFESIONAL EN LA ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACION PRIMARIA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO		Fecha presupuesto	30/11/2017	
Subpresupuesto	001	SUB PRESUPUESTO ESTRUCTURAS				
Partida	02.01.05.01	ELIMINACION DE MATERIAL EXCEDENTE PROVENIENTE DE EXCAVACIONES DISTANCIA =10 KM				
Rendimiento	m3/DIA	MO. 180.0000	EQ. 180.0000	Costo unitario directo por : m3	11.37	
Código	Descripción Recurso	Unidad	Cuadrilla	Cantidad	Precio S/.	Parcial S/.
	Mano de Obra					
014700024	OPERADOR DE EQUIPO	hh	2.0000	0.0889	11.52	1.02
0147010001	CAPATAZ	hh	0.1000	0.0044	12.67	0.06
0147010002	OPERARIO	hh	1.0000	0.0444	11.52	0.51
0147010004	PEON	hh	1.0000	0.0444	8.88	0.39
						1.98
	Equipos					
0337010001	HERRAMIENTAS MANUALES	%MO		3.0000	1.98	0.06
0348040023	CAMION VOLQUETE 4x2 140-210 HP 6 M3	hm	1.0000	0.0444	120.00	5.33
0349040008	CARGADOR FRONTAL S/LLANTAS 100-115 HP 2-2.25 YD3	hm	0.5000	0.0222	180.00	4.00
						9.39

Figura 23. Análisis de Precios Unitarios de eliminación de material
Fuente: Expediente Técnico

- La empresa contratada para la eliminación de material excedente mediante la *ORDEN DE SERVICIO N° 03185*, dispone de 3 tipos de volquetes V1, V2 y V3 y se tiene que eliminar 2500 m³ de material excedente de excavación. Se dispone de 2 volquetes del tipo V1 con capacidad de 15 m³ y un costo de S/. 90 por viaje,



2 volquetes del tipo V2 con capacidad de 12 m^3 y un costo de S/. 85 por viaje y 1 volquete del tipo V3 con capacidad de 17 m^3 y un costo de S/. 100 por viaje. Se desea saber: ¿Cuál es el número posible de viajes que debe realizar cada tipo de volquete para que el costo sea mínimo?

VOLQUETES	CANTIDAD	CAPACIDAD	COSTO/VIAJE
V1	2	15	S/. 90
V2	2	12	S/. 85
V3	1	17	S/. 100

Debe de Transportarse (eliminarse) 2500 m^3

Planteamiento

x_i = Número de viajes de Volquetes tipo i ($i = 1,2,3$) que se utiliza

Min

$$Z = 90x_1 + 85x_2 + 100x_3$$

S.a.

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 60$$

$$x_3 \leq 60$$

$$15x_1 + 12x_2 + 17x_3 = 2500$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Existe alguna solución posible para el problema, por lo que podemos pasar a la Fase II para calcularla.

La solución óptima es $Z = 15508.333333333$

$X_1 = 60$

$X_2 = 48.3333333333333$

$X_3 = 60$



- La empresa contratada para la eliminación de material excedente, dispone de 3 tipos de volquetes V1, V2 y V3 y que tienen que eliminar 900, 580 y 1020 m³ de material excedente de excavación respectivamente. El Material debe ser eliminado en 2 botaderos I (Cancharani) y II (Uros Chulluni), que se pueden eliminar 1800 y 700 m³ respectivamente. Los costos de transportar por cada m³ se indican en la siguiente tabla.

Volquetes	I	II	Eliminación/Oferta
V1	S/. 6.00 (90/vje)	S/. 5.87 (88/vje)	900 m ³
V2	S/. 7.08 (85/vje)	S/. 6.83 (82/vje)	580 m ³
V3	S/. 5.88 (100/vje)	S/. 5.59 (95/vje)	1020 m ³
Demanda	1800 m ³	700 m ³	

De qué manera debe de organizarse el transporte a fin de que los gastos sean mínimos.

Planteamiento

x_{ij} = Cantidad de material a eliminar en el Volquete i ($i = V_1, V_2, V_3 = 1, 2, 3$) hasta el botadero j ($j = I, II = 1, 2$)

Min

$$W = 6.00x_{11} + 5.87x_{12} + 7.08x_{21} + 6.83x_{22} + 5.88x_{31} + 5.59x_{32}$$

S.a.

$$x_{11} + x_{12} \leq 900$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 580$$

$$x_{31} + x_{32} \leq 1020$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 1800$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 700$$

$$x_{ij} \geq 0$$

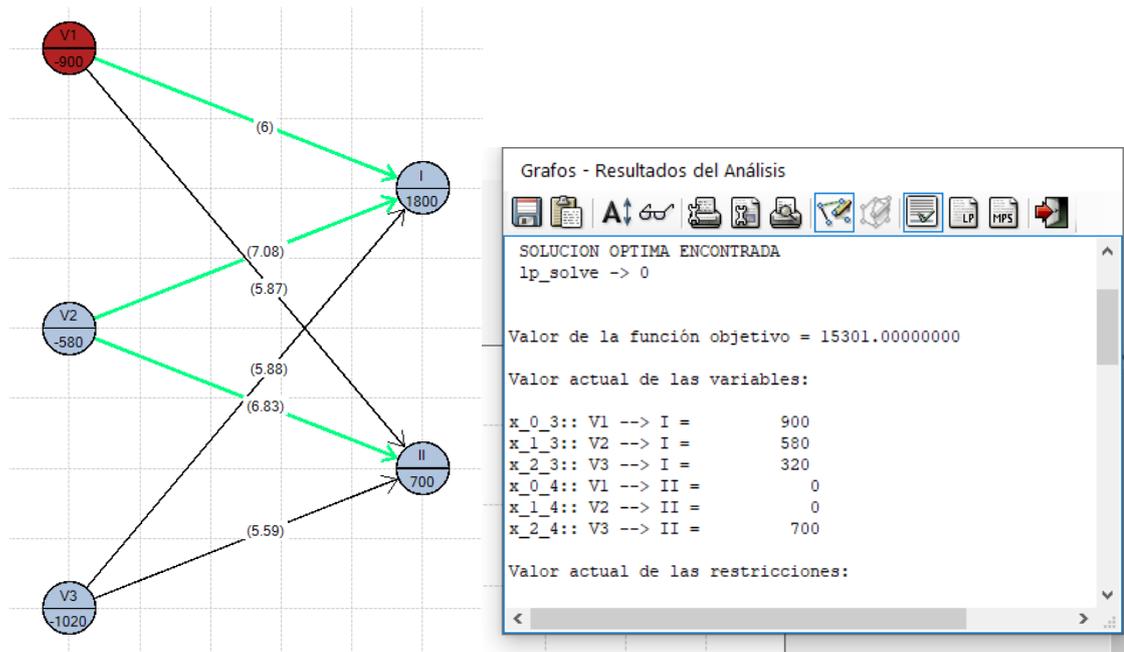


Figura 24. Solución en Software Grafos
Fuente: Elaborado por el equipo de trabajo

3.5.2. Modelo Matemático al corte de acero

En toda edificación se produce miles de cortes de barras de acero corrugado. En estas operaciones no existen mayores herramientas de control de pérdidas o similar que siquiera sugieran como manejar las diferentes longitudes y cantidades de barras de acero corrugado de modo que podamos conocer de antemano cuáles serán las pérdidas reales de corte. Esta labor se ha dejado tradicionalmente al capataz de fierriería quien debe manejar el aprovechamiento de los cortes de barras que se vayan a generar. Hemos dicho que un proyecto puede requerir miles de piezas de acero corrugado, las combinaciones de corte escapan a cualquier control humano, por lo que es importante contar con herramientas que ayuden a optimizar los cortes buscando el óptimo posible y ayudando significativamente a controlar las pérdidas de las barras de construcción.

La solución a este tipo de problemas se basa en modelos matemáticos genéricos.

- (a) Minimizando el número posible de esquemas de corte, la función objetivo está dado por la ecuación (32):

$$\text{Min} \sum_{j \in J}^n x_j = f(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (32)$$

(b) Minimizando los desperdicios totales producto del corte, la función objetivo esta dado por la ecuación (33):

$$\text{Min} \sum_{j \in J}^n r_j x_j = f(r, x) = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n \quad (33)$$

La forma matricial de las restricciones, están dadas por las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad (35)$$

(c) Minimizando este problema mediante el método de grafos (Valério de Carvalho, 1996): Dado las varillas de longitud W y las demandas de longitudes $w_1, w_1, w_1, \dots, w_m$, el problema consiste en determinar un patrón de corte valido que puede modelarse como un problema para determinar un camino valido en un gráfico acíclico y orientado con $W + 1$ vértices.

Consideremos un grafo $G = (V, A)$ con $V = \{0, 1, 2, \dots, W\}$ y $A = \{(k, l) : 0 \leq k \leq l \leq W \text{ y } l - k = w_i \text{ para } i \leq m\}$.

Lo que significa que hay un arco orientado entre dos vértices si existe una demanda con el largo correspondiente. Considerar también sin pérdida de



generalidades, arcos adicionales entre $(k, k + 1), k = 0, 1, \dots, W - 1$, correspondiente a porciones libres de la varilla, es decir pérdidas laterales.

Un patrón de corte es válido si hay un camino entre los vértices 0 y W . Los arcos que conforman el camino definen el patrón de corte.

Si un camino corresponde al flujo de una unidad entre los vértices 0 y W , múltiples caminos corresponderán a múltiples patrones de corte. Por las propiedades de descomposición de flujos (Ahuja et al., 1993), todos los flujos no negativos pueden representarse por caminos y ciclos.

El grafico que define el problema es acíclico y por lo tanto cualquier flujo puede descomponerse en caminos orientados que conectan el nodo oferta (0) al nodo demanda (W).

El problema se formula como un problema de minimización de flujo entre el nodo 0 y el nodo W con restricciones adicionales que imponen que la suma de los flujos de los arcos que representan cada demanda debe ser mayor o igual a la cantidad demandada.

Considerando las variables de decisión $x_{ij}, i < j$ correspondiente a los arcos orientados $(i, j) \in A$, que significan que el número de demanda de largo $j - i$ colocados en un patrón de corte a una distancia de i unidades del borde izquierdo de la varilla.

La formulación del problema es la siguiente:

$$\text{Min } z \quad (36)$$

Sujeto a:

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(j,k) \in A} x_{jk} = \begin{cases} -z; & \text{si } j = 0 \\ 0; & \text{si } j = 1, 2, \dots, W - 1 \\ +z; & \text{si } j = W \end{cases} \quad (37)$$

$$\sum_{(k,k+w_i) \in A} x_{k,k+w_i} \geq b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (38)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad \forall (i, j) \in A \quad (39)$$

Se muestra en la Figura 25 el plano en planta de la cimentación.

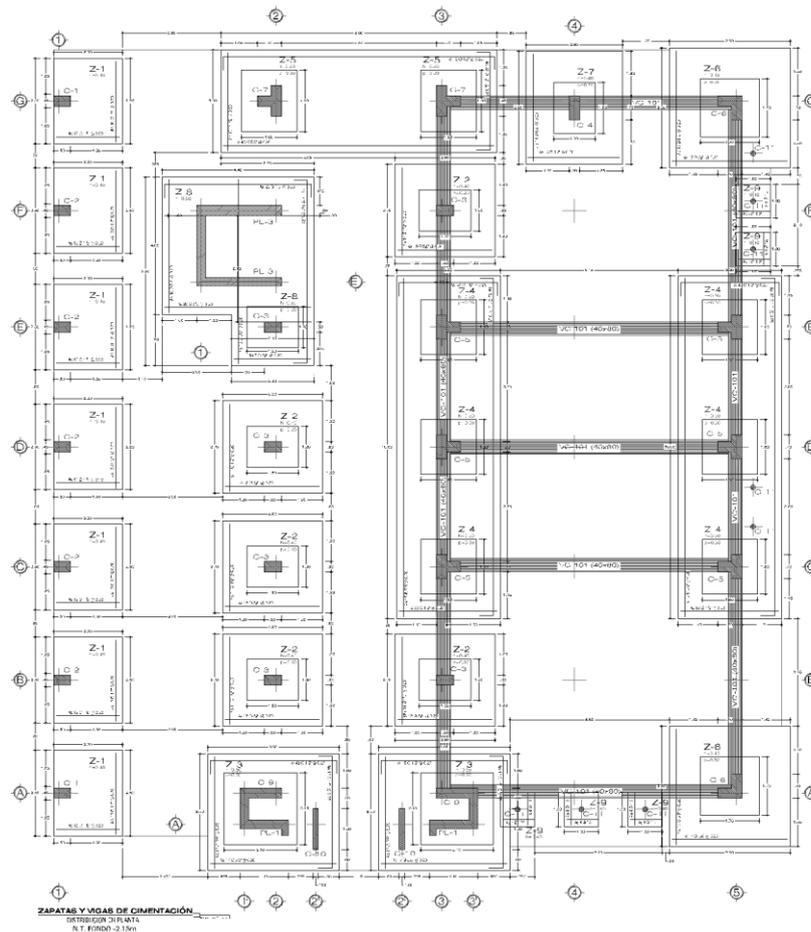


Figura 25. Plano en planta de la cimentación
Fuente: (Expediente Técnico)

En la obra “Mejoramiento del Servicio de Formación Profesional en la Escuela Profesional de Educación Primaria de la Universidad Nacional Del Altiplano” se requiere el corte de acero para el armado de distintos tipos de zapatas, "x" tramos de varillas de

acero de distintas longitudes e "y" tramos de distintas longitudes. Se desarrollarán los distintos patrones de corte para las distintas zapatas de la edificación. (Ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** 1)

Por ejemplo, para la zapata Z-1

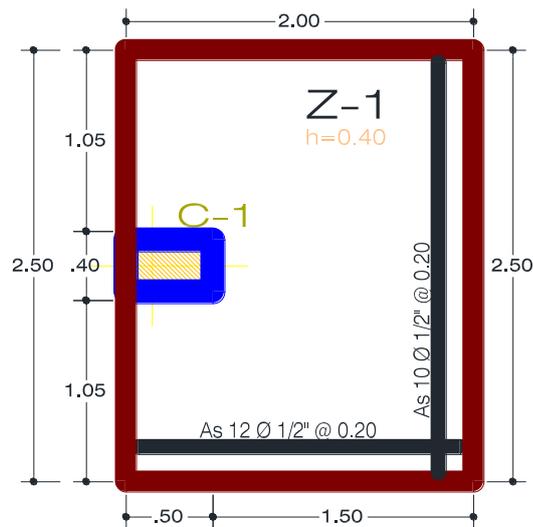


Figura 26. Plano cimentación Z-1
Fuente: (Expediente Técnico)

- En el almacén de fierro se tienen fierros de 9 metros, las cuales son cortadas para los diferentes elementos de construcción de la cimentación (zapata Z-1), las cuales son cortadas en 2.40 metros y 1.85 metros. El fierro de 9 metros puede ser cortado en 4 patrones diferentes de corte tal y como se muestra en la tabla siguiente:

Patrón	2.4 metros	1.85 metros	Desperdicio(m)
#1	3	0	1.80
#2	2	2	0.50
#3	1	3	1.05



#4	0	4	1.60
----	---	---	------

Si en obra para las zapatas del tipo Z-1 se requieren 70 fierros de 2.40 metros, y 84 de 1.85 metros. La pregunta sería ¿Cuántos fierros de 9 metros se necesitan para cortar, y que patrón se debería utilizar para que el desperdicio sea el mínimo?

Primer Método:

Para modelar este problema de decisión, denotaremos por x_i el número de varillas de fierro cortadas con el patrón $i = 1, \dots, 4$.

Sea la demanda $70 \times 2.40 + 84 \times 1.85 = 323.40$ metros, la cantidad de fierro realmente cortadas es:

$$9(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Y por lo tanto el desperdicio total es:

$$9(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - 323.40$$

Esto implica que cuando nosotros minimizamos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ el número total de varillas de fierro de 9 metros que necesitan ser cortadas, también minimizamos el desperdicio total, y viceversa. El número real de fierro de 2.40 y 1.85 metros obtenidas en el proceso de cortar es:

$$3x_1 + x_2 + x_3 \geq 70$$

$$2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 84$$

Dado que las variables x_i deben ser enteros no negativos, $i = 1, \dots, 4$, podemos resumir la formulación de cortar las varillas de fierro como:

Min

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

S.a.



$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 70$$

$$2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 84$$

$$x_i \geq 0$$

La solución óptima a este problema, utilizando el Excel, es cortar un total de 39 varillas de 9 metros y utilizar 36 veces el patrón #2 y 3 veces el patrón #3. El desperdicio total sería $36 \times 0.50 + 3 \times 1.60 = 22.80$ metros.

Segundo Método:

Para modelar este problema de decisión, denotaremos por x_i el número de varillas de fierro cortadas con el patrón $i = 1, \dots, 4$. Minimizando los desperdicios totales producto del corte, la función objetivo está dado por:

Min

$$Z = 1.80x_1 + 0.50x_2 + 1.05x_3 + 1.60x_4$$

S.a.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 70$$

$$2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 84$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 39$$

$$x_i \geq 0$$

La solución óptima a este problema, utilizando el Excel, es cortar un total de 39 varillas de 9 metros y utilizar 36 veces el patrón #2 y 3 veces el patrón #3. El desperdicio total sería $36 \times 0.50 + 3 \times 1.60 = 22.80$ metros.

Tercer Método:

Se puede modelar también usando el método de grafos, solo que la restricción es que los cortes que se realicen sean números enteros.

Todos los modelos de optimización de corte de acero se realizaron en Microsoft Excel mediante su complemento de Solver, los demás modelos de optimización de corte de zapatas se muestran en el (**Error! No se encuentra el origen de la referencia. 1**).

APLICACIÓN DEL PROBLEMA DE FLUJO DE COSTO MINIMO EN REDES							
CORTE DE ACERO EN ZAPATAS Z-01							
En la obra de Educación Primaria se requieren, para el armado de 7 zapatas aisladas (Z-01), 70 tramos de varillas de acero de 2.40 metros y 84 tramos de 1.85 metros. Se cuentan 39 varillas de 9 metros y se proponen lo siguientes patrones de corte:							
		N° de Zapatas:		7			
		N° tramos X:		10			
		N° tramos Y:		12			
		# Tramos de varillas:	Longitud del tramo	Long.Total	N° varillas		
	X	70	2.40	168.00	19.00		
	Y	84	1.85	155.40	18.00		
PATRON 1	2.40	2.40	9M	2.40	1.80		
PATRON 2	2.40	2.40	9M	1.85	1.85 0.50		
PATRON 3	2.40	1.85	9M	1.85	1.85 1.05		
PATRON 4	1.85	1.85	9M	1.85	1.85 1.60		
Sea:							
x_i : numero de varillas cortadas con el patron i							
Minimizar Z = 1.80 x_1 + 0.50 x_2 + 1.05 x_3 + 1.60 x_4							
s.a.:							
3 x_1 + 2 x_2 + 1 x_3 + 0 x_4					\geq	70	
0 x_1 + 2 x_2 + 3 x_3 + 4 x_4					\geq	84	
1 x_1 + 1 x_2 + 1 x_3 + 1 x_4					\leq	39	
$x_i \geq 0$							
Función Objetivo		1	2	3	4		
	Variables	0.00	36.00	0.00	3.00		
	Cortes sob	1.80	0.50	1.05	1.60		
	SOLUCION	22.80					
Restricciones	TIPOS DE CORTE	1	2	3	4	Disponible	TOTAL
	A	3	2	1	0	70	72
	B	0	2	3	4	84	84
	C	1	1	1	1	39	39
Solución: Usar acero del:							
	Patron 1	Patron 2	Patron 3	Patron 4			
	0	36	0	3			
	\emptyset 1/2"	\emptyset 1/2"	\emptyset 1/2"	\emptyset 1/2"			

Figura 27. Optimización de corte de acero zapata Z-01
Fuente: Elaborado por el equipo de trabajo



3.5.3. Modelo matemático a la programación de actividades

El desarrollo de un proyecto consiste en la ejecución de un conjunto de actividades, estando el comienzo de cada una de ellas subordinado a la conclusión de otras. Los métodos PERT (Programme Evaluation and Review Technique), desarrollado por la U.S. Navy durante el proyecto Polaris, CPM (Critical Path Method), por encargo de la compañía Dupont, y otros similares, fueron ampliamente utilizados a partir de los sesenta, gracias a la introducción de los computadores electrónicos.(Recuero et al., 1994)

De la misma forma en toda obra se realiza una programación de las actividades, la programación de actividades es un caso típico de aplicación de la teoría de grafos, aunque presenta ciertas peculiaridades, tales como que los arcos, que representan las actividades, están limitados por sus vértices extremos, acontecimientos, pero tienen un tiempo propio de inicio, además de su duración. Así, un cambio en una actividad afectará a otras dependiendo no sólo de sus relaciones topológicas (conexiones entre vértices), sino de sus tiempos de comienzo, se presenta la planificación y programación de proyectos mediante grafos del casco estructural desde la Cimentación hasta la losa del 1er Nivel.

Tabla 6. Relación de precedencias y tiempos de las actividades de ejecución del casco estructural

	ACTIVIDAD	PREDECESORA	DURACIÓN
	ESTRUCTURAS OBRA ADMINISTRACIÓN		
	MOVIMIENTO DE TIERRAS		
	NIVELACIÓN DEL TERRENO		
A1 =	NIVELACIÓN DEL TERRENO	ACT PREVIAS	20
	EXCAVACIÓN SIMPLES		
A2 =	CORTE Y EXPLANACIÓN CON MAQUINARIA (Terreno Roca Fracturada)	A1	9
A3 =	EXCAVACIÓN CON MAQUINARIA PARA ZAPATAS (Terreno Roca Fracturada)	A2	3
A4 =	EXCAVACIÓN CON MAQUINARIA PARA VIGAS DE CIMENTACIÓN (Terreno Roca Fracturada)	A3	1
	ELIMINACIÓN DE MATERIAL EXCEDENTE		
A5 =	ELIMINACIÓN DE MATERIAL EXCEDENTE PROVENIENTE DE EXCAVACIONES DISTANCIA =10 KM	A3, A4	14
	OBRAS DE CONCRETO SIMPLE		
	SUB ZAPATAS		
A6 =	SUB ZAPATAS: MEZCLA C:H 1:12 + 30% PIEDRA GRANDE. MÁX. DE 6"	A3	3
	SOLADO PARA ZAPATAS		
A7 =	SOLADO PARA ZAPATAS C:H, 1:12 E=4"	A6	4
A8 =	SOLADO PARA VIGAS DE CIMENTACIÓN E=4" MEZCLA C:H 1:12	A7	1
	OBRAS DE CONCRETO ARMADO 1ER NIVEL		
	ZAPATAS AISLADAS		
A9 =	ZAPATAS AISLADAS: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm ²	A7FC-6	45
A10 =	ZAPATAS AISLADAS: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	A9	2
A11 =	ZAPATAS AISLADAS: CONCRETO F _c =210 Kg/cm ²	A10	3
	LOSA DE CIMENTACIÓN		
A12 =	LOSA DE CIMENTACIÓN: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm ²	A7FC-5	30
A13 =	LOSA DE CIMENTACIÓN: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	A12	9
A14 =	LOSA DE CIMENTACIÓN: CONCRETO F _c =210 KG/CM ²	A13	5
	VIGAS DE CIMENTACIÓN		
A15 =	VIGAS DE CIMENTACIÓN: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm ²	A7	22
A16 =	VIGAS DE CIMENTACIÓN: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	A15	21
A17 =	VIGAS DE CIMENTACIÓN: CONCRETO F _c =210 Kg/cm ²	A16	3
	PLACAS VERTICALES		
A18 =	PLACAS VERTICALES: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm ²	A11	3
A19 =	PLACAS VERTICALES: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	A18	7
A20 =	PLACAS VERTICALES: CONCRETO F _c =210 Kg/cm ²	A19	1
	PLACAS INCLINADAS		
A21 =	PLACAS INCLINADAS: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm ²	A17	3
A22 =	PLACAS INCLINADAS: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	A21	15
A23 =	PLACAS INCLINADAS: CONCRETO F _c =210 Kg/cm ²	A22	1
	COLUMNAS RECTAS		
A24 =	COLUMNAS RECTAS: ACERO GRADO 60 F _y = 4200 Kg/cm ²	A14FC-2	12
A25 =	COLUMNAS RECTAS: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	A24FC-3	18
A26 =	COLUMNAS RECTAS: CONCRETO F _c =210 Kg/cm ²	A25FC-3	4
	VIGAS RECTAS		
A27 =	VIGAS HORIZONTALES: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	A26FC-2	15
A28 =	VIGAS HORIZONTALES: ACERO GRADO 60 FY= 4200 KG/CM ²	A27FC-3	8
A29 =	VIGAS HORIZONTALES: CONCRETO F _c =210 Kg/cm ²	A28, A32FC+1	1
	LOSAS ALIGERADAS		
A30 =	LOSAS ALIGERADAS: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	A26FC-2	4
A31 =	LOSAS ALIGERADAS: ACERO GRADO 60 FY=4200 KG/CM ²	A30FC-2	1
A32 =	LOSA ALIGERADA HORIZONTAL: LADRILLO HUECO DE 30x30x15cm	A31	1
A33 =	LOSAS ALIGERADAS: CONCRETO F _c =210 KG/CM ²	A31, A32	1
	LOSA MACIZA		
A34 =	LOSA MACIZA: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	A30FC-3	4
A35 =	LOSA MACIZA: ACERO GRADO 60 FY=4200 Kg/cm ²	A34	4
A36 =	LOSA MACIZA: CONCRETO F _c =210 Kg/cm ²	A35	1
	ESCALERAS		
A37 =	ESCALERAS: ENCOFRADO Y DESENCOFRADO	A26	3
A38 =	ESCALERAS: ACERO GRADO 60 FY=4200 KG/CM ²	A37	2
A39 =	ESCALERAS: CONCRETO F _c = 210KG/CM ²	A38, A32FC+1	1

Fuente: Elaborado por el equipo de trabajo

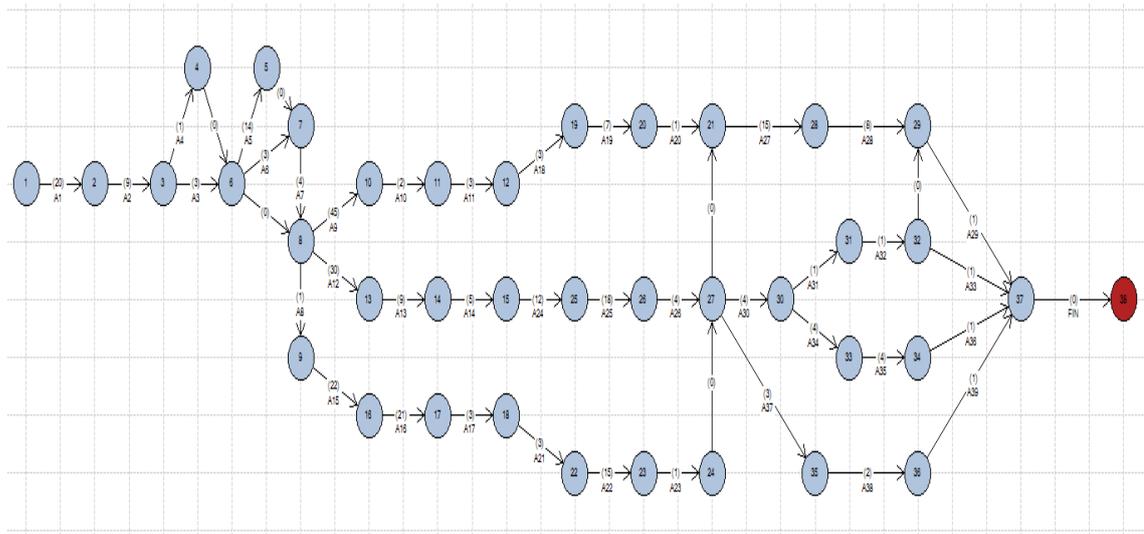


Figura 29. Diagrama de redes
Fuente: Propia (Desarrollado en Software Grafos)

3.5.4. Modelo matemático a la asignación de personal

La adecuada asignación de personal en una obra es muy importante para poder garantizar y mejorar una adecuada culminación de las actividades designadas. En la obra se tienen diferentes cuadrillas de trabajo (fierro, carpinteros, volantes) se quiere manejar una adecuada asignación del personal a una tarea determinada.

- En la obra de Educación Primaria se tiene tres actividades a realizar (encofrados de placas rectas, placas inclinadas, columnas). Se tiene el problema de determinar que cuadrilla llevaran a cabo las actividades. El rendimiento de cada actividad según la cada cuadrilla se presenta en la siguiente tabla.

Cuadrilla / Actividad	A1	A2	A3
C1	10	6	10
C2	11	7	12
C3	9	6	11

¿Cómo deben ser asignados los trabajos si se quieren maximizar los rendimientos totales de todos ellos, se desea encarga una actividad a cada cuadrilla?

Variables de Decisión:

x : Cantidad de actividades i ($i = 1,2,3$) que se asignan a la cuadrilla j ($j = 1,2,3$)

W : Maximizando los rendimientos.

Max

$$W = 10x_{11} + 11x_{12} + 9x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 6x_{23} + 10x_{31} + 12x_{32} + 11x_{33}$$

S.a.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

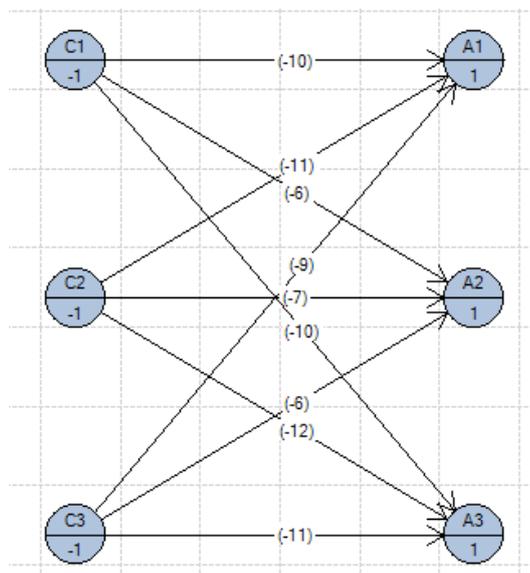
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

$$x_{ij} > 0 \quad \forall i, j \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3 \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}$$



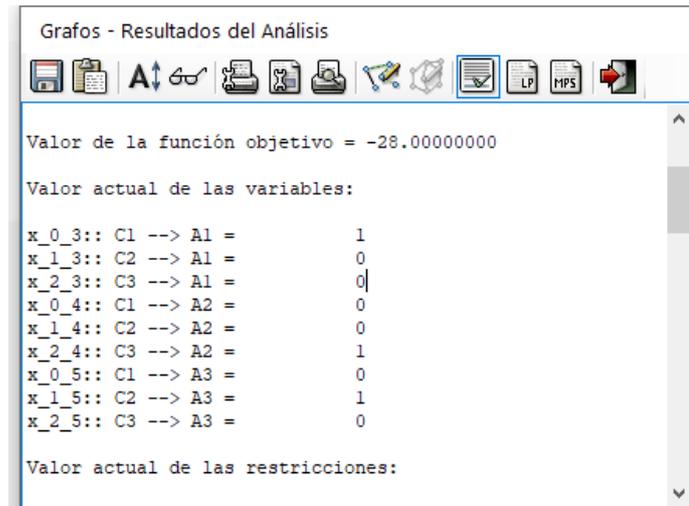


Figura 30. Diagrama de redes Asignación y solución
Fuente: Elaborado por el equipo de trabajo (Desarrollado en Software Grafos)

La solución es que la cuadrilla C1 realice la actividad A1, la cuadrilla C2 realice la actividad A3, y cuadrilla C3 realice la actividad A2.

Se presentan los demás modelos en el **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia. 1.**



CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan los principales resultados de la investigación, en los cuales se muestra que la Aplicación del Problema de Flujo de Costo Mínimo en Redes en la ejecución de Proyectos de Edificación (Obras De Concreto Armado), Los resultados fueron hallados en el Software Grafos y hojas de cálculo Microsoft Excel que tiene incorporado una poderosa herramienta llamada Solver, que me permite optimizar. Los resultados se agrupan por objetivos que persigue la investigación, como se muestra a continuación:

4.1.1. Optimizar el costo en obra con la aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes en proyectos edificación (partidas de concreto armado)

- Con respecto al movimiento de tierra, en la partida de eliminación de material excedente se obtuvo los siguientes resultados:

Costos Totales

Volquetes: S/15,301.00

Excavadora y Cargador
(65HM): S/11,483.00

Costo total de Eliminación Real: **S/26,784.00**

Costo de Eliminación del Expediente
Técnico: **S/27,830.24**

Ahorro: S/1,046.24

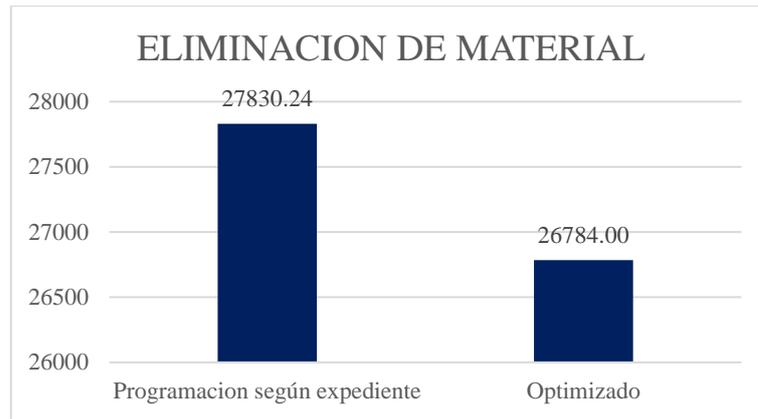


Figura 31. Resultado eliminación material

Fuente: Elaborado por el equipo de trabajo (Desarrollado en Software Grafos)

Se optimizo: S/.1046.24.

- Con respecto al corte de acero se obtuvo los siguientes resultados:

Tabla 7: Optimización de costos

Ø	Peso (kg/m)	% desperdicio	Costo (\$/Kg)
1/2"	0.99	8%	3.10
5/8"	1.55	8%	

Ø	Expediente			Modelo	
	Long (m)	kg	8% desp.	Long (m)	kg
1/2"	2206.65	2188.78	2372.39	2241.00	2222.85
5/8"	1370.70	2126.61	2305.02	1476.00	2289.98
	3577.35	4315.39	4677.41	3717.00	4512.83

Optimización: **164.58 Kg**

Soles: **S/510.18**

Fuente: Elaborado por el equipo de trabajo

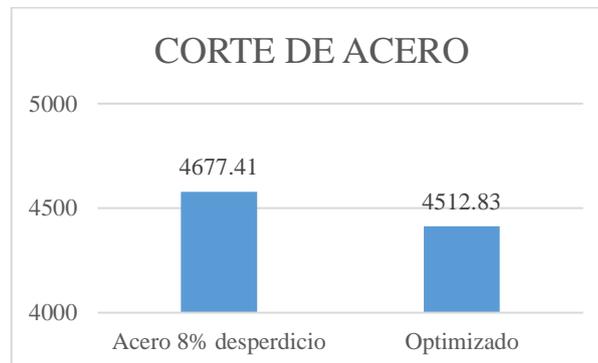


Figura 32. Resultado de corte de acero

Fuente: Elaborado por el equipo de trabajo

Se optimizo: 164.58 kg de acero, que en soles representa S/510.18.

4.1.2. Optimizar el tiempo en obra con la aplicación del problema de flujo de costo mínimo en redes en proyectos edificación (partidas de concreto armado)

- Con respecto a la programación de actividades y la adecuada asignación del personal se tienen los siguientes resultados.

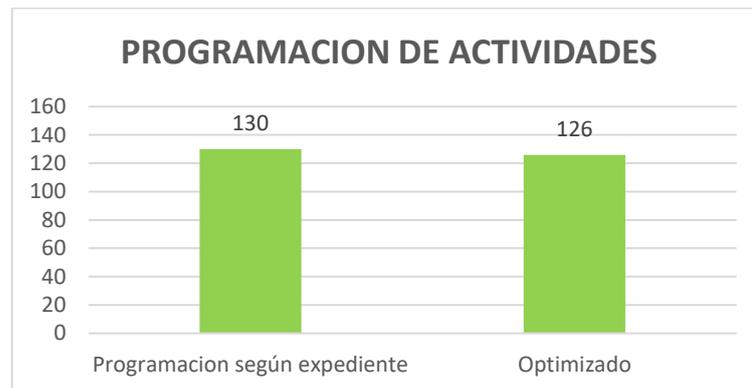


Figura 33. Resultado de programación y asignación de actividades
Fuente: Elaborado por el equipo de trabajo

Se optimizo: 4 días.

Tabla 8. *Optimización de tiempo*

Descripción	Expediente	Optimizado
Actividades	130 días	126 días

Fuente: Elaborado por el equipo de trabajo



V. CONCLUSIONES

En esta tesis se aplicó el Problema de Flujo de Costo Mínimo en Redes en la ejecución de Proyectos de Edificación (Obras De Concreto Armado), usados para optimizar el costo y tiempo.

- **PRIMERO:** Se aplicó el Problema de Flujo de Costo Mínimo en Redes para optimizar el costo:
 - Con respecto al movimiento de tierra, en la partida de eliminación de material excedente se optimizo S/.1046.24.
 - Con respecto a la optimización de corte de acero en la cimentación se optimizo 164.58 kg de acero, que multiplicando por el costo de S/. 3.10 por kg, se tendría un ahorro de S/.510.18.
- **SEGUNDO:** Se aplicó el Problema de Flujo de Costo Mínimo en Redes para optimizar el tiempo:
 - Con respecto a la aplicación de asignación de actividades y programación de actividades se tuvo una optimización de 4 días, desde el inicio de la cimentación hasta el vaciado de la losa del 1er nivel.
- **TERCERO:** Se logró optimizar una parte de los recursos aplicando el problema de costo mínimo en redes y sus casos especiales, además se deben desarrollar e implementar nuevas metodologías, y tecnologías en la construcción, para ayudar a optimizar mucho más los recursos.



VI. RECOMENDACIONES

- Para proyectos en el que se quiera aplicar el Problema de Flujo de Costo Mínimo en Redes, se recomienda tener en consideración la implicancia de equipos, materiales, mano de obra que juegan un papel importante en la ejecución de un proyecto, y estos son críticos que determinan el avance para poder maximizar la productividad y optimizar los recursos.
- Cada organización y proyecto es distinto, por lo que no existe una recomendación única ni procedimientos 100% definidos para lograr mejoras en la productividad y adecuada optimización de los recursos. Es por eso que se debe desarrollar nuevas metodologías, estrategias claras y nuevas tecnologías en la construcción, para ayudar a optimizar los recursos.
- Se recomienda el uso del software Grafos para la resolución de problemas de optimización el cual es un software que está totalmente alineado con la resolución de problemas de la teoría de grafos.
- Se recomienda tener en cuenta el Problema de Flujo de Costo Mínimo en Redes y sus casos especiales para trabajos de investigación, para problemas reales en pequeñas y medianas empresas de la región Puno para optimizar sus ganancias y minimizar sus gastos.
- La teoría de grafos es un área de las matemáticas que tiene muchas aplicaciones en la vida real como en la economía, ciencias sociales, red de comunicaciones, investigación operativa, ingeniería, etc. Por lo que se recomienda, realizar trabajos de investigación en esta área.



Para las Empresas Constructoras.

En vista de los resultados que se tuvo en esta investigación, se recomienda que se aplique el problema de costos mínimo y sus casos especiales para optimizar procesos constructivos.

Para la E. P. de Ciencias Físico Matemáticas.

Se debe dar una mayor difusión a nivel de pregrado sobre Problema de flujo en redes y Teoría de Grafos en la E. P. de Ciencias Físico Matemáticas y dar a conocer todas sus aplicaciones que se pueden realizar.

Para los Investigadores.

Para investigaciones futuras se recomienda la aplicación de más problemas de costo mínimo aplicados a diferentes áreas que no han sido utilizados en este trabajo de tesis.



VII. REFERENCIAS

- Ahuja, R., Tmagnanti, T., & Orlin, J. (1993). *NETWORK FLOWS Theory, Algorithms, and Applications* (1a ed.). Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458.
- Bazaraa, M. S., & Jarvis, J. J. (1991). *Programación Lineal y Flujo en Redes* (1a ed.). Editorial Limusa.
- Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (2010). *Linear programming and network flows* (4a ed.). Wiley Interscience.
- Castillo, E., Conejo, A. J., Pedregal, P., García, R., & Alguacil, N. (2002). Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia. En *España: Universidad de Castilla - La Mancha*.
- Condori Balcón, D. R. (2016). *Organización Espacial de la red de carreteras de la región de Puno mediante la teoría de grafos (tesis de pregrado)*. Universidad Nacional del Altiplano, Puno, Perú.
- Esparza Cruz, S., & Martínez Ramírez, M. H. (1997). *Planeación, Programación y Control De Obra*. Instituto Tecnológico de la Construcción, México D.F., México.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). *Introducción a la investigación de Operaciones* (9a ed.). Mc Graw Hill.
- Mayorquín, A. (2004). *Algoritmo Primal para resolver el Problema de Flujo a Costo Mínimo (tesis de pregrado)*. Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, México.
- Prawda, J. (2004). *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones*. Limusa Noriega Editores.
- Puchades Cortés, V., Mula Bru, J., & Rodríguez Villalobos, A. (2008). Aplicación de la Teoría de Grafos para mejorar la planificación de rutas de trabajo de una empresa del sector de la distribución automática. *Revista de Métodos Cuantitativos para la*



- Economía y la Empresa*, 6, 7–22.
- Recuero, A., Río, O., & Álvarez, M. (1994). Aplicación de la teoría de grafos a la planificación y programación de proyectos. *Informes de la Construcción*, 46(431), 49–60. <https://doi.org/10.3989/ic.1994.v46.i431.1132>
- Rincón Abril, L. A. (2001). *Investigación de operaciones para Ingenierías y Administración de Empresas*. Feriva S.A.
- Rivera Ortega, J. E., & Santillana Arrunátegui, A. A. (2015). *Algoritmo para la asignación de maquinarias a obras en la empresa constructora Aramsa Contratistas Generales S.A.C (tesis pregrado)*. Universidad de San Martín de Porres, Lima, Perú.
- Rodríguez Villalobos, A. (2010). *Grafos software para la construcción, edición y análisis de grafos* (1a ed.). Bubok Publishing S.L.
- Rodríguez Villalobos, A. (2012). *Grafos - software para la construcción, edición y análisis de grafos*. <http://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php>
- Santana Guerra, T. M. (2016). *Un estudio de variantes del Método del Simplex en la resolución de Problemas de Flujos en Redes (tesis de pregrado)*. Universidad de La Laguna, San Cristóbal de La Laguna, España.
- Suárez Hernández, C. A. (2003). *Diseño e Implementación de un Algoritmo para Optimizar el Flujo en una Red (tesis de pregrado)* [Escuela Superior Politécnica del Litoral - Instituto de Ciencias Matemáticas, Guayaquil, Ecuador.]. <https://doi.org/10.2307/j.ctvckq874.7>
- Taha, H. A. (2004). *Investigación de operaciones* (7a ed.). Pearson Educación.
- Ullilen Marcilla, R. F. (2015). *Problema del Flujo en Redes y Programación Lineal (tesis de pregrado)*. Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú.
- Valério de Carvalho, J. (1996). Exact solution of one-dimensional cutting stock problems using branch-and-bound and column generation. *Gestão & Produção*, 3(Abril), 33–



48.

Villaroel Figueroa, J. J. (2012). *Diseño e implementación de un modelo de programación lineal para optimizar la asignación presupuestal en el proyecto especial de infraestructura PROVIAS DESCENTRALIZADO – MTC (tesis de pregrado)*. Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Lima, Perú.



ANEXOS