



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS



**“EXISTENCIA DE UNA GEODÉSICA MÍNIMA DE UNA
SUPERFICIE COMPLETA”**

TESIS

PRESENTADA POR:

JOHN WILLIAMS LUPACA QUISPE

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO - PERU

2018



DEDICATORIA

*A mis padres quienes me apoyaron y motivaron
todo el tiempo, por ser la base de mi progreso y éxito.*

*A mis hermanitas Emma y Dayana, que es mi
inspiración para seguir estudiando.*



AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres Alipio y Cristina por el apoyo que me brindaron, por los valores que han inculcado y una buena educación, sobre todo darme el ejemplo de vida para seguir.

Agradezco el apoyo y dedicación de tiempo a mi asesor Julio Cesar Villalta Pacori y Derly Pari Mendoza, por haber compartido conmigo sus conocimientos y sobre todo su amistad.

También agradezco especialmente a mi compañera Andina Alay Lerma por compartirme sus conocimientos e incentivar me para seguir adelante con la investigación, también a mi compañera Monica Ari Sosa



ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA

AGRADECIMIENTOS

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN 8

ABSTRACT..... 9

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA..... 11

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA 11

1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN 12

1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO..... 12

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN..... 12

CAPITULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. CURVAS Y SUPERFICIES REGULARES..... 14

2.2. FUNCIONES DIFERENCIABLES SOBRE SUPERFICIES 16

2.3. EL PLANO TANGENTE 18

2.4. LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL 21

2.5. LA APLICACIÓN NORMAL DE GAUSS..... 23

2.6. LA SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL..... 28

2.7. CURVATURAS DE SUPERFICIES 32

2.8. ISOMETRIA..... 34

2.9. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD 37



2.10. DERIVADA COVARIANTE y TRANSPORTE PARALELO	43
2.11. GEODESICAS	46
2.12. LA APLICACIÓN EXPONENCIAL.	51
2.13. PROPIEDADES DE LAS GEODÉSICAS y ENTORNOS CONVEXOS	59

CAPITULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. UBICACIÓN.....	64
3.2. MATERIALES.....	64
3.3. PRESUPUESTO	64
3.4. MÉTODO.....	64

CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. SUPERFICIES COMPLETAS.....	66
V. CONCLUSIONES.....	80
VI. RECOMENDACIONES.....	81
VII. REFERENCIAS.....	82
ANEXOS.....	84

TEMA: Geometría Diferencial

ÁREA: Matemática Pura

LINEA DE INVESTIGACION: Matemática Pura

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 28 DE DICIEMBRE DEL 2018



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1–1 Superficie Parametrizada.....	15
Figura 2.2–1 Cambio de Parámetro (difeomorfismo).....	17
Figura 2.3–2 Vector Velocidad (Diferenciable).	20
Figura 2.5–1 La Banda de Mobius.....	24
Figura 2.5–2 La Aplicación de Gauss.....	24
Figura 2.5–3 Vector Normal N.....	24
Figura 2.7–1 La Proyección del Vector sobre la Normal.	33
Figura 2.8–1 Parametrización - Isometría Local.	36
Figura 2.10–1 Derivada Covariante.....	43
Figura 2.10–2 Campo Vectorial Paralelo.	45
Figura 2.11–1 Curvatura Normal.....	48
Figura 2.11–2 Curvaturas Geodésicas de un paralelo sobre la esfera unidad.....	48
Figura 2.12–1 La aplicación exponencial.	51
Figura 2.12–2 Esfera unidad S^2	53
Figura 2.12–3 Cono menos el vértice.	53
Figura 2.12–4 Coordenadas Polares.	54
Figura 2.12–5 La traza entre dos puntos.....	58
Figura 2.12–6 La traza fuera del contorno.....	58
Figura 2.13–1 Tangente Circulo Geodésico.	61
Figura 2.13–2 Geodésica Tangente al Circulo.....	62
Figura 2.13–3 Geodésica polares tangente.	63
Figura 2.13–4 Distancia Máxima.....	63
Figura 4.1–1 El cono y su aplicación exponencial.	67
Figura 4.1–2 Geodésica entre dos puntos.	68



Figura 4.1–3 Superficie $S \subset \bar{S}$	68
Figura 4.1–4 Única Geodésica.....	69
Figura 4.1–5 Geodésica α	69
Figura 4.1–6 Curva Diferenciable a Trozos.....	70
Figura 4.1–7 S completa no compacta.....	75
Figura 4.1–8 Geodésicas que una p_1 y p_2	75
Figura 4.1–9 Geodésica parametrizada por longitud de arco.	76
Figura 4.1–10 Geodésica alcanza su mínimo en x_0	79



RESUMEN

El presente de trabajo de investigación se realizó con la idea de presentar una demostración detallada y comprensible de la existencia de geodésicas mínimas. Primeramente, definimos los conceptos de curvas regulares, superficies regulares, plano tangente, primera forma fundamental y segunda forma fundamental, luego se estudia la geometría intrínseca de las superficies como: geodésicas, aplicación exponencial y entornos convexos. Posteriormente con estos conceptos definimos la geometría global como: superficies conexas, superficies completas. la hipótesis de completitud es más débil que la de compacidad, donde se ocupa las relaciones de las propiedades locales y globales de una superficie regular, entonces a partir de las construcciones de las proposiciones, teoremas locales y teoremas globales se da a conocer con más detalle la demostración de la existencia de geodésica mínima, que dados dos puntos cualesquiera de la superficie y la menor longitud de las curvas parametrizadas de una superficie completa regular y superficie conexa. Para este propósito de investigación, el tema de geodésicas mínimas es el punto de partida del estudio para superficies en n -dimensiones.

Palabras Clave: Geometría global, Geodésica mínima, Superficie completa.



ABSTRACT

The present research work was carried out with the idea of presenting a detailed and understandable demonstration of the existence of minimum geodesics. Firstly, we defined the concepts of regular curves, regular surfaces, tangent plane, first fundamental form and second fundamental form, then we studied the intrinsic geometry of surfaces as: geodesics, exponential application and convex environments. Later, with these concepts we define global geometry as: connected surfaces, complete surfaces. The hypothesis of completeness is weaker than that of compactness, where the relations of local and global properties of a regular surface are dealt with, then from the constructions of the propositions, local theorems and global theorems it is given more detail to prove the existence of minimum geodesics, than given any two points of the surface and the shorter length of the parameterized curves of a regular complete surface and connected surface. For this research purpose, the topic of minimum geodesics is the starting point of the study for n -dimensional surfaces.

Key Words: Complete Surface, Global geometry, Minimum geodetic.



CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

La geometría diferencial es el estudio de las formas geométricas usando las técnicas del cálculo diferencial. En la presente investigación haremos un estudio de la geometría diferencial de superficies (local y global). Para el estudio de las propiedades de la geometría local entendemos que dependen del comportamiento de la curva y superficies en el entorno de un punto. Además, denominamos geometría diferencial global, al estudio de las propiedades locales que influyen en el comportamiento total de las curvas y superficies.

El presente trabajo de investigación esta organizado en catorce temas, la sección (2.1) presenta la noción de curvas regulares y superficies regulares y a partir de estos conceptos se comienza a caracterizar el comportamiento de las superficies regulares. En la sección (2.2), la superficie parametrizada regular existe un entorno. En la sección (2.3), con la noción de superficies regulares podemos garantizar la existencia del plano tangente en todos los puntos de la superficie.

El estudio de las propiedades locales de una superficie regular comienza con el estudio de la geometría intrínseca, la primera forma fundamental y la segunda forma fundamental. En la sección (2.4), presentamos la primera forma fundamental donde se realizan los cálculos como longitud de arco, ángulos entre curvas y áreas de las regiones sobre la superficie. En la sección (2.5), se estudia la aplicación de Gauss. En la sección (2.6), se introduce el concepto de la segunda forma fundamental.

Luego se estudia la geometría intrínseca de las superficies que dependen de la primera forma fundamental. En la sección (2.7), se estudian las curvaturas de una superficie. En la sección (2.9), se estudian las isometrías para dos superficies regulares. En la sección (2.10), se determinan los símbolos de Christoffel en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental. En la sección (2.11), se introducen los conceptos de la derivada covariante y transporte paralelo. En la sección (2.12), se definen las geodésicas, y el concepto de derivada covariante. En la sección (2.13), se presentan los conceptos de la aplicación exponencial y finalmente en la sección (2.14), se presentan



las propiedades de las geodésicas y entornos convexos que permitieran demostrar la existencia de entornos convexos.

Para concluir, arribamos al objetivo de este importante trabajo de investigación que es estudiar la existencia de las geodésicas mínimas de una superficie completa y conexa, de modo que podamos entender los conceptos y resultados de la demostración de la existencia de una geodésica mínima.

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las aplicaciones de la geometría diferencial es una parte de la matemática que sirve para comprender conceptos de la geometría diferencial global, debido a muchos problemas abiertos y aplicaciones interesantes como, por ejemplo, aplicaciones de la caracterización de superficies compactas orientables.

La geometría diferencial global, aunque su tratamiento es simple, es amplio su campo de aplicaciones. A fin de obtener teoremas globales necesitamos, a parte de la conexidad y compacidad, algunas hipótesis globales que aseguren que la superficie no puede prolongarse más como superficie regular. Sin embargo, sería de utilidad disponer de alguna hipótesis más débil que la compacidad, esto nos permitirá esperar la validez de teoremas globales, en un contexto más general. Sus resultados importantes se hacen notar en el campo de topología, algebra lineal, calculo vectorial, análisis funcional y principalmente en la geometría diferencial y geometría remaniana.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Teniendo como punto de partida conceptos clásicos de la geometría diferencial, en esta ocasión se presentan los conceptos básicos de la geometría diferencial referidos las geodésicas en una superficie, así mismo, presentamos una demostración detallada de los resultados fundamentales del teorema Hopf Rinow y la generalización del teorema Hopf Rinow en el contexto de los espacios métricos. Se presenta una formulación más precisa del hecho de que una superficie no pueda prolongarse; luego demostramos que cada superficie completa no es prolongable y que existen superficies no prolongables que no son completas. Por ejemplo, una esfera y el plano son superficies completas, pues sus geodésicas están definidas para cada valor real.



1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

El problema de la existencia de una geodésica mínima de una superficie, debe ser consecuencia de la demostración del problema de superficies completas y conexas.

1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

En los estudios de pregrado se desarrolló el estudio de geometría diferencial local, si bien se adecua para muchos propósitos de la investigación, posee inconvenientes. Es por eso que el estudio se realiza sobre superficies geodésicas mínimas.

La investigación propuesto es un problema sobre la existencia de superficies geodésicas mínimas, que consiste demostrar bajo ciertas hipótesis de la completitud, pretendemos en esta investigación demostrar que dados dos puntos $p, q \in S$ de una superficie completa S , existe una geodésica que une los puntos p y q mínima, es decir, su longitud es menor o igual que la de cualquier otra curva que une p y q ; la demostración de este resultado fundamental se debe a Hopf y Rinow, constituye la razón principal por la que las superficies completas son más adecuadas que las no prolongables para la geometría diferencial.

El marco teórico de la geometría diferencial global tiene temas de aplicación matemática, física y en otras áreas. El aporte del problema de existencia de superficies geodésicas mínimas, tiene una utilidad en que dados dos puntos cualesquiera la longitud de la distancia es mínima en una superficie completa. La investigación obtenida será útil para consultas de estudiantes o profesionales que planteen problemas relacionados de superficies geodésicas mínimas.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1. Objetivo general

- ✓ Demostrar la existencia de una geodésica mínima en una superficie completa

1.5.2. Objetivos específicos

- ✓ Estudiar la existencia de entornos convexos para la existencia de una geodésica mínima.
- ✓ Mostrar algunos ejemplos de geodésica mínima.



- ✓ Estudiar las superficies completas para las geodésicas.



CAPITULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

En este capítulo se presenta un resumen de los resultados básicos necesarios para el desarrollo de los capítulos siguientes, abordaremos algunos conceptos junto de las curvas, superficies regulares, geometría intrínseca de superficies, transporte paralelo y geodésicas; tales conceptos son imprescindibles para la comprensión de la demostración de los resultados sobre la existencia de una geodésica mínima de una superficie completa.

2.1. CURVAS Y SUPERFICIES REGULARES

Definición 2.1.1 (curvas paramétricas). Una curva parametrizada diferenciable es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un intervalo $I = (a, b)$ de la recta real \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 .

Donde t se denomina parámetro de la curva, $\alpha'(t)$ es el vector tangente o vector velocidad:

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Llamaremos a cualquier punto t donde $\alpha'(t) = 0$ un punto singular de α .

Definición 2.1.2 (Curvas Regulares). Una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se denomina regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Definición 2.1.3 (Longitud de arco). La longitud de arco de una curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, desde el punto t_0 hasta $t \in I$, es

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

Donde $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ es la longitud del vector $\alpha'(t)$ en \mathbb{R}^3 . Ya s es el parámetro longitud de arco.

Definición 2.1.4. Una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ esta parametrizada por la longitud de arco si, y solamente si, $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$.

Definición 2.1.4 (Curvatura). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco $s \in I$, El número $|\alpha''(s)| = k(s)$ se denomina la curvatura de α en s .

Definición 2.1.5 (Superficies regulares). Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in S$, existe un entorno V en \mathbb{R}^3 y una aplicación $X : U \rightarrow V \cap S$ de un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que (fig. 2.1-1).

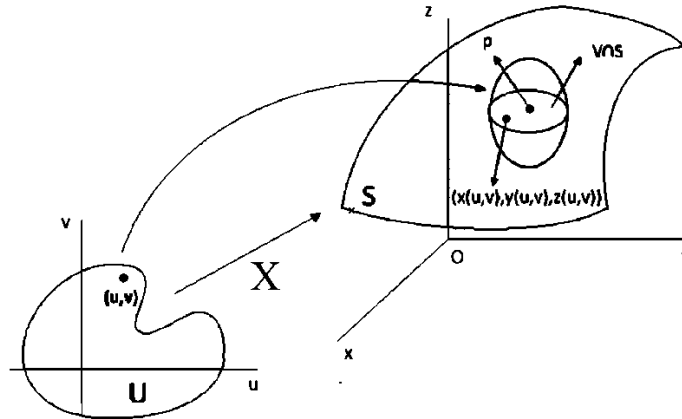


Figura 2.1-1 Superficie Parametrizada.

- (1). X es diferenciable, es decir $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in U$, las funciones componentes $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas de todo los órdenes en U .
- (2). X es un homeomorfismo. Como X es continua por la condición (1), esto significa que X admite una inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que es continua; es decir, X^{-1} es la restricción de una función continua $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida sobre un conjunto abierto W que contiene a $V \cap S$.
- (3). Condición de regularidad. Para cada $q \in U$, la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva. Es decir, si

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{pmatrix}, \text{ entonces } \frac{\partial X}{\partial u} \text{ y } \frac{\partial X}{\partial v} \text{ son linealmente}$$

independientes, es lo mismo decir que su producto vectorial es diferente de cero:

$$\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \neq 0$$

La aplicación X se denomina parametrización. El entorno $V \cap S$ se denomina entorno de coordenado o vecindad coordenada.

la condición (3) garantiza la existencia de un *plano tangente* en todos los puntos de $V \cap S$

Proposición 2.1.1. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable de un conjunto abierto U de \mathbb{R}^2 , entonces la gráfica de f , es decir, el subconjunto de \mathbb{R}^3 dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, es una superficie regular. (Do Carmo, 1995, Pág. 69)

Definición 2.1.6 (Imagen inversa de valor regular). Dada una aplicación diferenciable $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida en un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n , decimos que $p \in U$ es un punto crítico de F si la diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ no es una aplicación sobreyectiva (o sobre). La imagen $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de un punto crítico se denomina un valor crítico de F . Un punto de \mathbb{R}^m que no es un valor crítico de F se llama valor regular de F .

Proposición 2.1.2. Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $a \in f(U)$ es un valor regular de f , entonces $f^{-1}(a)$ es una superficie regular de \mathbb{R}^3 . (Do Carmo, 1995, Pág. 71)

Ejemplo 2.1.1. Demuestre S es una superficie regular, donde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ es el cilindro circular.

Solución. Consideremos

$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 2\pi\}$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y sea $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$X(x, y) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \tan\left(r - \frac{\pi}{2}\right) \right)$, las funciones coordenadas de X son diferenciables y es

claro que X es inyectiva.

2.2. FUNCIONES DIFERENCIABLES SOBRE SUPERFICIES

Proposición 2.2.1 (Cambio de Parámetro). Sea p un punto de una superficie regular S , y sean $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ y $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dos parametrizaciones de S tal que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. Entonces el “cambio de coordenadas” (ver la fig. 2.2-1) $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ es un difeomorfismo; es decir, h es diferenciable y tiene una inversa diferenciable. (Do Carmo, 1995, Pág. 82)

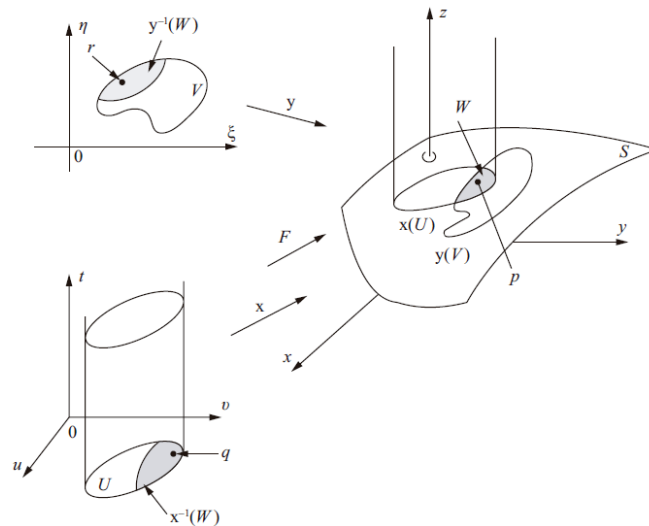


Figura 2.2–1 Cambio de Parámetro (difeomorfismo).

Definición 2.2.1 (Función diferenciable sobre una superficie). Sea $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función definida en un subconjunto abierto V de una superficie regular S . Se dice que f es diferenciable en $p \in V$ sí, para alguna parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ con $p \in X(U) \subset V$, la composición $f \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $X^{-1}(p)$.

Proposición 2.2.2. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular y $q \in U$. Entonces existe un entorno V de q en \mathbb{R}^2 tal que $X(V) \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular.

Demostración.

Sea una superficie parametrizada regular,

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Supongamos por regularidad que $(\partial(x, y) / \partial(u, v))(q) \neq 0$. Definimos la aplicación

$F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t) \quad , \quad (u, v) \in U \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$dF(u, v, t) = d(x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t)$$

Entonces,

$$\det(dF_q) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0 \quad .$$

Por el teorema de función inversa, existen entornos $q \in W_1$ y $F(q) \in W_2$ tal que $F: W_1 \rightarrow W_2$ es un difeomorfismo. Tomese $V = W_1 \cap U$ y obsérvese que la restricción $F|_V = X|_V$. Por tanto, $X(V)$ es difeomorfo a V , luego es una superficie regular. ■

2.3. EL PLANO TANGENTE

Definición 2.3.1. Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 y $p \in S$. El conjunto de vectores en p dado por:

$$\{w \in \mathbb{R}^3 / \text{existe } \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S, \text{ con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = w\}$$

se llama plano tangente a S en p y se denota por $T_p S$.

Proposición 2.3.1. Sea una parametrización $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de una superficie regular S en p , tal que $X(q) = p$. Entonces el conjunto de vectores a S en p es el subespacio vectorial $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ de dimensión 2.

Demostración.

Demostraremos que $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$.

Sea $w \in T_p S$, luego existe una curva $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, con $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = w$. Por la definición (2.3.1) también tenemos una curva $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, con $\alpha(0) = q$ y $\alpha'(0) = v$, tal que $\beta = X \circ \alpha$, tenemos

$$\begin{aligned}\beta(0) &= X \circ \alpha(0) \\ \beta'(0) &= \frac{d}{dt}(X \circ \alpha)(0) \\ &= dX_{\alpha(0)} \alpha'(0) \\ &= dX_q(v) \in dX_q(\mathbb{R}^2)\end{aligned}$$

Por tanto, $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$.

Por otro lado sea $w = dX_q(v)$, $\alpha(t) = vt + q$ en U , con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\alpha(0) = q$ y $\alpha'(0) = v$. Consideremos $\beta(t) = X \circ \alpha(t) = X(\alpha(t))$, entonces

$$\begin{aligned}\beta(0) &= X \circ \alpha(0) = X(\alpha(0)) = X(q) = p \\ \beta'(0) &= dX(\alpha(0))(\alpha'(0)) = dX_q(v) = w \in T_p(S)\end{aligned}$$



Por tanto, $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset T_p(S)$. luego $T_pS = dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$.

Ahora necesitamos demostrar que T_pS es un espacio vectorial.

Sea W_1 y W_2 vectores de T_pS , entonces

$$\beta_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S ; \quad \beta_1(0) = p ; \quad \beta_1'(0) = w_1$$

$$\beta_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S ; \quad \beta_2(0) = p ; \quad \beta_2'(0) = w_2$$

Y

$$\alpha_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U ; \quad dX_q(\alpha_1'(0)) = w_1$$

$$\alpha_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S ; \quad dX_q(\alpha_2'(0)) = w_2$$

como X es un homeomorfismo tenemos que $X(q) = p$.

Sea una curva $\phi(t) = q + t(\alpha_1'(0) + \alpha_2'(0))$ en U , $t \in (-\eta, \eta)$ y $\eta > 0$.

Consideramos la curva

$$\beta : (-\eta, \eta) \rightarrow S$$

$$\beta(t) = X \circ \phi(t)$$

Entonces,

$$\beta(0) = X \circ \phi(0) = X(\phi(0)) = X(q) = p$$

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= dX(\phi(0))(\phi'(0)) \\ &= dX_q(\phi'(0)) \\ &= dX_q(\alpha_1'(0) + \alpha_2'(0)) \\ &= dX_q(\alpha_1'(0)) + dX_q(\alpha_2'(0)) \\ &= w_1 + w_2 \in T_pS \end{aligned}$$

Sea la curva $\phi(t) = q + t\alpha'(0)$ en U , con $t \in (-\eta, \eta)$ y consideramos la curva

$$\beta : (-\eta, \eta) \rightarrow S$$

$$\beta(t) = X \circ \phi(t)$$

Entonces,

$$\beta(0) = X \circ \phi(0) = X(\phi(0)) = X(q) = p$$

$$\beta'(0) = dX(\phi(0))(\phi'(0)) = dX_q(\lambda\alpha'(0)) = \lambda W_1 \in T_p S$$

Luego $T_p S$ es un espacio vectorial. Como S es una superficie regular, la condición (3) de la definición (2.1.5) nos dice que dX_q es inyectiva, luego $\ker(dX_q) = 0$. Luego, $T_p S$ tiene dimensión 2. ■

Ejemplo 2.3.1. hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,0)$ dado por $X(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ de la superficie parametrizada.

Solución.

Notemos que $X(1,1) = (1,1,0)$

$$\left. \begin{array}{l} X_u = (1, 0, 2u)|_{(1,1)} = (1, 1, 0) \\ X_v = (0, 1, -2v)|_{(1,1)} = (0, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow X_u \times X_v = (-2, 2, 1)$$

Por lo tanto, el plano tangente es: $-2x + 2y + z = 0$

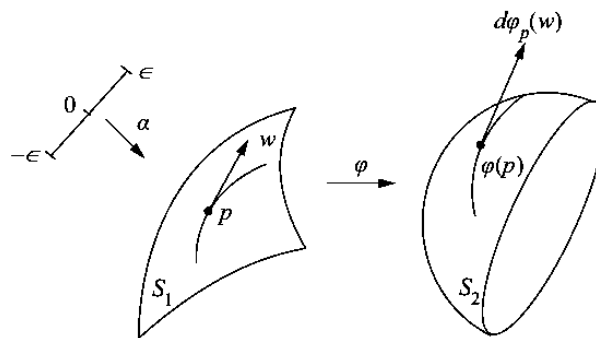


Figura 2.3–1 Vector Velocidad (Diferenciable).

El plano tangente también, se puede decir que es la diferencial de una aplicación entre superficies. Sea $\varphi: V \subset S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable de un conjunto abierto V y sean S_1 y S_2 dos superficies regulares. Si $p \in V$, sabemos que cada vector tangente $w \in T_p(S_1)$ es el vector velocidad $\alpha'(0)$ de una curva parametrizada diferenciable



$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ con $\alpha(0) = p$. La curva $\beta = \varphi \circ \alpha$ es tal que $\beta(0) = \varphi(p)$, y por tanto $\beta'(0)$ es un vector de $T_{\varphi(p)}(S_2)$ (fig. 2.3-2).

Ejemplo 2.3.2 Sea la esfera S^2 de radio r en \mathbb{R}^3 una parametrización por coordenadas está dada por:

$$X(u, v) = (r \cos u \sin v, r \sin u \sin v, r \cos v)$$

De donde:

$$X_u = (-r \sin u \sin v, r \cos u \cos v, 0) \quad y \quad X_v = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, -r \sin v)$$

Una base del espacio tangente a S^2 en el punto $X(\pi/2, \pi/2) = (0, r, 0)$ está formado por los vectores

$$X_u(\pi/2, \pi/2) = (0, 0, -r) \quad X_v(\pi/2, \pi/2) = (-r, 0, 0)$$

Cualquier vector $w \in T_p S^2$ es de la forma:

$w = (-r, 0, 0)w_1 + (0, 0, -r)w_2 = (-rw_1, 0, -rw_2)$, en particular, esto muestra que el plano tangente en $(0, r, 0)$ es paralelo al plano xz.

2.4. LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

Si $w_1, w_2 \in T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$, entonces $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ es igual al producto interior de w_1 y w_2 como vectores de \mathbb{R}^3 . A este producto interior, que es una forma bilineal simétrica, es decir, $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_2, w_1 \rangle_p$ y $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ es lineal, separadamente con respecto a w_1 y w_2 , corresponde una forma cuadrática $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0 \quad (1)$$

Definición 2.4.1 (Forma cuadrática). La forma cuadrática I_p en $T_p(S)$, definida por la ecuación (1), se denomina la primera fundamental de la superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ en $p \in S$.

La primera forma fundamental se expresa en la base $\{x_u, x_v\}$ asociada a la parametrización $x(u, v)$ en p . Como $w \in T_p(S)$ es el vector tangente de una curva parametrizada $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, con $p = \alpha(0) = x(u_0, v_0)$, obtenemos



$$\begin{aligned}
 I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \langle x_u u' + x_v v', x_u u' + x_v v' \rangle_p \\
 &= \langle x_u u' + x_v v', x_u u' \rangle_p + \langle x_u u' + x_v v', x_v v' \rangle_p \\
 &= \langle x_u u', x_u u' \rangle_p + \langle x_v v', x_u u' \rangle_p + \langle x_u u', x_v v' \rangle_p + \langle x_v v', x_v v' \rangle_p \\
 &= \langle x_u, x_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle x_u, x_v \rangle_p u' v' + \langle x_v, x_v \rangle_p (v')^2 \\
 &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2
 \end{aligned}$$

Donde se usa la notación $E = \langle x_u, x_u \rangle_p$, $F = \langle x_u, x_v \rangle_p$ y $G = \langle x_v, x_v \rangle_p$, que son llamados los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{x_u, x_v\}$ de $T_p(S)$.

Ejemplo 2.4.1. El plano que pasa por un punto p y tiene dirección $w_1 = (a, b, c)$ y $w_2 = (d, e, f)$ unitarios y ortogonales es parametrizado por $X(u, v) = p + u w_1 + v w_2$.

Luego, $X_u = w_1$ y $X_v = w_2$. Así

$$\begin{aligned}
 E &= \langle x_u, x_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = 1 \\
 F &= \langle x_u, x_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0 \\
 G &= \langle x_v, x_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.2. Sea el cilindro vertical parametrizado por $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ con $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$

Luego, $X_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ y $X_v = (0, 0, 1)$. Así

$$\begin{aligned}
 E &= \langle x_u, x_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1 \\
 F &= \langle x_u, x_v \rangle = 0 \\
 G &= \langle x_v, x_v \rangle = 1
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.3. La esfera S^2 de radio r está parametrizada por:

$$X(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u) \text{ con } 0 < u < \pi \text{ y } 0 < v < 2\pi.$$

Luego, $X_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u)$ y $X_v = (-r \sin u \sin v, r \cos u \cos v, 0)$

$$\begin{aligned}
 E &= \langle x_u, x_u \rangle = r^2 \\
 F &= \langle x_u, x_v \rangle = 0 \\
 G &= \langle x_v, x_v \rangle = r^2 \sin^2 u
 \end{aligned}$$

Definición 2.4.2 (Área). Sea $R \subset S$ una región acotada de una superficie regular contenida en el entorno coordenado de una parametrización $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. El número positivo

$$\iint_Q |X_u \wedge X_v| \, dudv = A(R), \quad Q = X^{-1}(R),$$

se denomina el área de R .

Ahora se define el área de R , es posible escribir usando la primera forma fundamental:

$$|X_u \times X_v| = |X_u| |X_v| \sin(u, v) \quad \text{y} \quad \langle X_u, X_v \rangle = |X_u| |X_v| \cos(u, v)$$

Es conveniente observar que $|X_u \wedge X_v|^2 + \langle X_u \wedge X_v \rangle^2 = |X_u|^2 \cdot |X_v|^2$,

Lo que prueba que el integrando de $A(R)$ se puede escribir como

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

2.5. LA APLICACIÓN NORMAL DE GAUSS

Definición 2.5.1 (Superficie Orientable). Se dice que una superficie regular S es orientable si es posible recubrirla con una familia de entornos coordenados de forma que si un punto p pertenece a dos entornos de esta familia, entonces el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo en p . A la elección de tal familia se denomina una orientación de S y, en este caso, S se denomina orientada. Si no es posible tal elección, la superficie se denomina no orientable.

Dada una parametrización $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de una superficie regular S en un punto $p \in S$, podemos elegir un vector normal unitario en cada punto de $X(U)$ mediante una regla

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(q), \quad q \in X(U),$$

Así, tenemos una aplicación $N: X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada $q \in X(U)$ un vector unitario normal $N(q)$. Todas las superficies orientables admiten un campo diferenciable de vectores unitarios normales definido en la totalidad de la superficie.

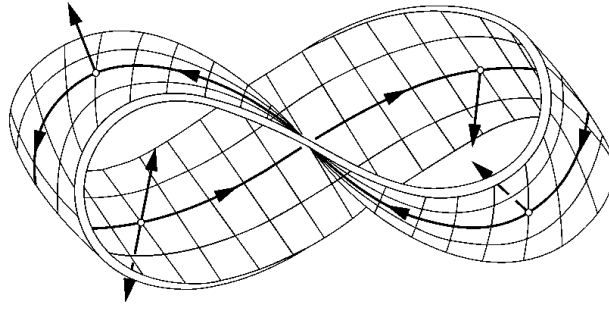


Figura 2.5-1 La Banda de Mobius.

En la banda de Mobius de la figura (2.5-1) no puede definirse tal campo. Esto puede verificarse tras una vuelta, el campo vectorial N se convertiría en $-N$, lo que contradice la continuidad de N . La banda de Mobius no es una superficie orientable.

Una orientación N en S induce una orientación sobre cada espacio tangente $T_p(S)$, $p \in S$, como sigue. Defínase una base $\{v, w\} \in T_p(S)$ como positiva si $\langle v \wedge w, N \rangle$ es positivo. Se ve que el conjunto de todas las bases positivas de $T_p(S)$ es una orientación para $T_p(S)$.

Definición 2.5.2 (Aplicación de Gauss). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con una orientación N . La aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma valores en la esfera unidad

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

La aplicación $N : S \rightarrow S^2$ así definida, se denomina la aplicación de Gauss de S (fig. 2.5-2).

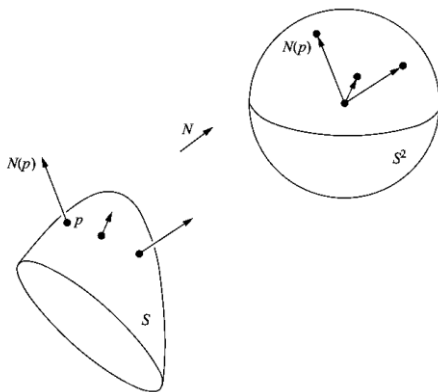


Figura 2.5-2 La Aplicación de Gauss.

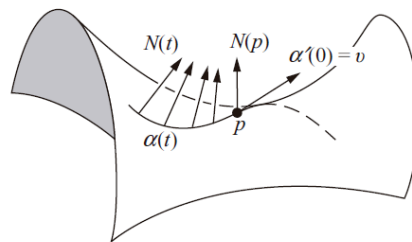


Figura 2.5-3 Vector Normal N.

La aplicación de Gauss es diferenciable. La diferencial lineal dN_p de N en $p \in S$ es una aplicación lineal de $T_p(S)$ en $T_{N(p)}(S^2)$. Como $T_p(S)$ y $T_{N(p)}(S^2)$ son planos paralelos, dN_p puede observarse como una aplicación lineal en $T_p(S)$.



La aplicación lineal $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$, para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ en S con $\alpha(0) = p$, consideremos la curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ en la esfera S^2 ; esto equivale a restringir el vector normal N , a la curva $\alpha(t)$. El vector tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ es un vector de $T_p(S)$ (fig. 2.5-3), mide la tasa de variación del vector normal N , restringido a la curva $\alpha(t)$, en $t=0$. Así, dN_p mide como N se aleja de $N(p)$ en un entorno de p . En el caso de curvas, esta medida viene dada por un número, la curvatura y en el caso de superficies, esta medida es caracterizada por una aplicación lineal.

Proposición 2.5.1. *La diferencial $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal auto adjunta.*

Demostración.

Como dN_p es lineal, entonces para que verificar que dN_p es autoadjunta. basta con demostrar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para una base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p(S)$.

Vamos usar la siguiente notación, si $w \in T_p(S)$ y $\{X_u, X_v\}$ es una base de $T_p(S)$, entonces w puede ser escrito como combinación lineal de dos vectores de la base

$$w = w^u X_u + w^v X_v, \quad w^u, w^v \in \mathbb{R}$$

y

$$dN_p(w) = dN_p(w^u X_u + w^v X_v) = w^u dN_p(X_u) + w^v dN_p(X_v) = w^u N_u + w^v N_v.$$

Puesto que,

$$w_1 = w_1^u X_u + w_1^v X_v; \quad w_1^u, w_1^v \in \mathbb{R}$$

$$w_2 = w_2^u X_u + w_2^v X_v; \quad w_2^u, w_2^v \in \mathbb{R}$$

es una combinación lineal de los vectores de la base E ,

$$dN_p(w_1) = w_1^u N_u + w_1^v N_v$$

$$dN_p(w_2) = w_2^u N_u + w_2^v N_v$$

entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle &= \langle dN_p(w_1), w_2^u X_u + w_2^v X_v \rangle \\
&= \langle dN_p(w_1), w_2^u X_u \rangle + \langle dN_p(w_1), w_2^v X_v \rangle \\
&= w_2^u \langle dN_p(w_1), X_u \rangle + w_2^v \langle dN_p(w_1), X_v \rangle \\
&= w_2^u \langle w_1^u N_u + w_1^v N_v, X_u \rangle + w_2^v \langle w_1^u N_u + w_1^v N_v, X_v \rangle \\
&= w_2^u \langle w_1^u N_u, X_u \rangle + w_2^u \langle w_1^v N_v, X_u \rangle + w_2^v \langle w_1^u N_u, X_v \rangle + w_2^v \langle w_1^v N_v, X_v \rangle \\
&= w_2^u w_1^u \langle N_u, X_u \rangle + w_2^u w_1^v \langle N_v, X_u \rangle + w_2^v w_1^u \langle N_u, X_v \rangle + w_2^v w_1^v \langle N_v, X_v \rangle
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle dN_p(w_2), w_1 \rangle &= \langle dN_p(w_2), w_1^u X_u + w_1^v X_v \rangle \\
&= \langle dN_p(w_2), w_1^u X_u \rangle + \langle dN_p(w_2), w_1^v X_v \rangle \\
&= w_1^u \langle dN_p(w_2), X_u \rangle + w_1^v \langle dN_p(w_2), X_v \rangle \\
&= w_1^u \langle w_2^u N_u + w_2^v N_v, X_u \rangle + w_1^v \langle w_2^u N_u + w_2^v N_v, X_v \rangle \\
&= w_1^u \langle w_2^u N_u, X_u \rangle + w_1^u \langle w_2^v N_v, X_u \rangle + w_1^v \langle w_2^u N_u, X_v \rangle + w_1^v \langle w_2^v N_v, X_v \rangle \\
&= w_1^u w_2^u \langle N_u, X_u \rangle + w_1^u w_2^v \langle N_v, X_u \rangle + w_1^v w_2^u \langle N_u, X_v \rangle + w_1^v w_2^v \langle N_v, X_v \rangle
\end{aligned}$$

Para que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$, por las expresiones anteriores tenemos que

$$\langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle$$

Sabemos que N es ortogonal a X_u y X_v entonces $\langle N, X_u \rangle = 0$ y $\langle N, X_v \rangle = 0$,

derivando con respecto a v y u , respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial v} \langle N, X_u \rangle = \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial u} \langle N, X_v \rangle = \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0.$$

Luego, $\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$, entonces es una aplicación autoadjunta ■

Siendo $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ una aplicación lineal auto adjunta, esto nos permite asociar a dN_p una forma cuadrática Q en $T_p(S)$, dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle, v \in T_p(S)$.

Ejemplo 2.5.1. Sea el plano, $\Pi: ax + by + cz + d = 0$. Sabemos que el vector (a, b, c) es un vector normal al plano, luego el vector normal unitario al plano Π dado por:

$$N(p) = \frac{(a, b, c)}{|(a, b, c)|} = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

que es el mismo vector para todo $p \in S$. Por tanto $dN(p) = 0, \forall p \in \Pi$.

Ejemplo 2.5.2. Sea el cilindro dado por la parametrización $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ donde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$. Luego

$$X_u = (-\sin u, \cos u, 0) \quad \text{y} \quad X_v = (0, 0, 1)$$

asi,

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} = \frac{(-\sin u, \cos u, 0) \wedge (0, 0, 1)}{|(-\sin u, \cos u, 0) \wedge (0, 0, 1)|} = \frac{(\cos u, \sin u, 0)}{\sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u}} = (\cos u, \sin u, 0)$$

Ejemplo 2.5.3. Sea la esfera S^2 de radio r . Consideraremos la parametrización para una parte de la esfera $X(u, v) = (u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2})$, con $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < r^2\}$

tenemos que

$$X_u = (1, 0, -u/\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}) \quad \text{y} \quad X_v = (0, 1, -v/\sqrt{r^2 - u^2 - v^2})$$

El vector normal unitario es:

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} = \frac{(1, 0, -u/\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}) \wedge (0, 1, -v/\sqrt{r^2 - u^2 - v^2})}{|(1, 0, -u/\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}) \wedge (0, 1, -v/\sqrt{r^2 - u^2 - v^2})|} = \frac{1}{r} (u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2})$$

2.6. LA SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

Definición 2.6.1 (Segunda forma fundamental). la forma cuadrática II_p , definida en $T_p(S)$ por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, se dice la segunda forma fundamental de S en p .

Definición 2.6.2 (Curvatura gaussiana y media). Sea $p \in S$ y sea $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ la diferencial de la aplicación de Gauss. El determinante de dN_p es la curvatura gaussiana K de S en p . El opuesto de la mitad de la traza de dN_p se denomina la curvatura media H de S en p .

Podemos escribir, en términos de las curvaturas principales

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Definición 2.6.3 (Puntos Umbilicos). Si en $p \in S$, $k_1 = k_2$, entonces se dice que p es un punto umbilico de S ; en particular, los puntos planos ($k_1 = k_2 = 0$) son puntos umbilicos.

Definición 2.6.4 (Curvatura normal). Sea C una curva regular en S que pasa por $p \in S$, k la curvatura de C en p , y $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, donde n es el vector normal a C y N es el vector normal a S en p . El número $k_n = k \cos \theta$ se denomina la curvatura normal de $C \subset S$ en p .

Consideremos una curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, donde s es el parametro longitud de arco de C , y con $\alpha(0) = p$. Si denotamos por $N(s)$ la restricción del vector normal N a la curva $\alpha(s)$, tenemos $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$. De donde,

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = -\langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle(p) = k_n(p) \end{aligned}$$

Significa que la segunda forma fundamental II_p para un vector unitario $v \in T_p(S)$ es igual a la curvatura normal de una curva regular que pasa por p y es tangente a v . El valor tangente a $\alpha(t)$ en p es $\alpha' = x_u u' + x_v v'$ y

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'$$

Como N_u y N_v pertenecen a $T_p(S)$, podemos escribir

$$N_u = a_{11}x_u + a_{21}x_v \quad ; \quad N_v = a_{12}x_u + a_{22}x_v \quad (2)$$

Por tanto,

$$dN(\alpha') = (a_{11}x_u + a_{21}x_v)u' + (a_{12}x_u + a_{22}x_v)v' = (a_{11}u' + a_{12}v')x_u + (a_{21}u' + a_{22}v')x_v ;$$

De donde

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix},$$

Esto prueba que en la base $\{x_u, x_v\}$, dN viene expresada por la matriz (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$;

Por otra parte, la expresión de la segunda forma fundamental en la base $\{x_u, x_v\}$ viene dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', x_u u' + x_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', x_u u' \rangle - \langle N_u u' + N_v v', x_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u u', x_u u' \rangle - \langle N_v v', x_u u' \rangle - \langle N_u u', x_v v' \rangle - \langle N_v v', x_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u, x_u \rangle (u')^2 - \langle N_v, x_u \rangle u' v' - \langle N_u, x_v \rangle u' v' - \langle N_v, x_v \rangle (v')^2 \\ &= \langle N, x_{uu} \rangle (u')^2 + \langle N, x_{uv} \rangle u' v' + \langle N, x_{vu} \rangle u' v' + \langle N, x_{vv} \rangle (v')^2 \\ &= \langle N, x_{uu} \rangle (u')^2 + 2\langle N, x_{uv} \rangle (u' v') + \langle N, x_{vv} \rangle (v')^2 \\ &= e(u')^2 + 2f(u' v') + g(v')^2 \end{aligned}$$

puesto que $\langle N, x_u \rangle = \langle N, x_v \rangle = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial u}(\langle N, x_u \rangle) = \frac{\partial}{\partial u}(0) \Rightarrow \langle N_u, x_u \rangle + \langle N, x_{uu} \rangle = 0 \Rightarrow -\langle N_u, x_u \rangle = \langle N, x_{uu} \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\langle N, x_u \rangle) = \frac{\partial}{\partial v}(0) \Rightarrow \langle N_v, x_u \rangle + \langle N, x_{uv} \rangle = 0 \Rightarrow -\langle N_v, x_u \rangle = \langle N, x_{uv} \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\langle N, x_v \rangle) = \frac{\partial}{\partial u}(0) \Rightarrow \langle N_u, x_v \rangle + \langle N, x_{vu} \rangle = 0 \Rightarrow -\langle N_u, x_v \rangle = \langle N, x_{vu} \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\langle N, x_v \rangle) = \frac{\partial}{\partial v}(0) \Rightarrow \langle N_v, x_v \rangle + \langle N, x_{vv} \rangle = 0 \Rightarrow -\langle N_v, x_v \rangle = \langle N, x_{vv} \rangle$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, x_u \rangle = \langle N, x_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, x_u \rangle = \langle N, x_{uv} \rangle = \langle N, x_{vu} \rangle = -\langle N_u, x_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, x_v \rangle = \langle N, x_{vv} \rangle \end{aligned}$$

Ahora, se obtiene los a_{ij} en términos de los coeficientes e, f, g . De la ecuación (2)

tenemos

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, x_v \rangle = \langle a_{11}x_u + a_{21}x_v, x_v \rangle = a_{11}\langle x_u, x_v \rangle + a_{21}\langle x_v, x_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle N_v, x_u \rangle = \langle a_{12}x_u + a_{22}x_v, x_u \rangle = a_{12}\langle x_u, x_u \rangle + a_{22}\langle x_v, x_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -e &= \langle N_u, x_u \rangle = \langle a_{11}x_u + a_{21}x_v, x_u \rangle = a_{11}\langle x_u, x_u \rangle + a_{21}\langle x_v, x_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -g &= \langle N_v, x_v \rangle = \langle a_{12}x_u + a_{22}x_v, x_v \rangle = a_{12}\langle x_u, x_v \rangle + a_{22}\langle x_v, x_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned} \tag{3}$$

Donde E, F y G son coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{x_u, x_v\}$.

Las relaciones (3) pueden expresarse en forma matricial por

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tag{4}$$

De donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1};$$

Donde $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$ representa la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. Se comprueba que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

luego,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = -\frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} eG-fF & -eF+fE \\ fG-gF & -fF+gE \end{pmatrix}$$

De donde se deducen las siguientes expresiones para los coeficientes (a_{ij}) de la matriz de dN en la base $\{x_u, x_v\}$;

$$a_{11} = \frac{fF-eG}{EG-F^2} ; a_{12} = \frac{gF-fG}{EG-F^2} ; a_{21} = \frac{eF-fE}{EG-F^2} ; a_{22} = \frac{fF-gE}{EG-F^2}. \quad (5)$$

Debe mencionarse que en la literatura las relaciones (2), conjuntamente con los valores de arriba, se conocen como las ecuaciones de Weingarten.

De la ecuación (5) obtenemos inmediatamente

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \quad (6)$$

Para calcular la curvatura media, recordamos que $-k_1$ y $-k_2$ son los autovalores de dN .

Por consiguiente, $-k_1$ y $-k_2$ satisfacen la ecuación

$$dN(v) = -kv = -kIv \text{ para algún } v \in T_p(S) ; v \neq 0 ,$$

Donde I es la aplicación identidad. Se deduce que la aplicación lineal $dN + kI$ no es invertible; entonces su determinante es cero. Así,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0$$

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

Como k_1 y k_2 son las raíces de esta ecuación cuadrática, concluimos que

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \quad (7)$$

Luego,

$$k^2 - 2Hk + K = 0 \quad (8)$$

y consecuentemente,

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

De esta relación se deduce que, si elegimos $k_1(q) \geq k_2(q)$, $q \in S$, entonces las funciones k_1 y k_2 son continuas en S . Además, k_1 y k_2 son diferenciables en S , salvo quizás en los puntos umbilicos ($H^2 = K$) de S .

Ejemplo 2.6.1. Calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental para el cilindro del Ejemplo (2.4.2),

$$\begin{aligned} X_u &= (-\sin u, \cos u, 0) & X_v &= (0, 0, 1) \\ X_{uu} &= (-\cos u, -\sin u, 0) & X_{vv} &= (0, 0, 0) \\ X_{uv} &= (0, 0, 0) & N &= (\cos u, \sin u, 0) \end{aligned}$$

De este modo, obtenemos los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} e &= \langle N, x_{uu} \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (-\cos u, -\sin u, 0) \rangle = -\cos^2 u - \sin^2 u = -1 \\ f &= \langle N, x_{uv} \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (0, 0, 0) \rangle = 0 \\ g &= \langle N, x_{vv} \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (0, 0, 0) \rangle = 0 \end{aligned}$$

2.7. CURVATURAS DE SUPERFICIES

Si $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ una curva parametrizada en una superficie parametrizada x , entonces α' es perpendicular al vector normal unitario y tangente a x . luego α' es perpendicular al vector normal unitario N de x , entonces α' , N y $N \times \alpha'$ son mutuamente vectores perpendiculares y unitarios. Como α' esta parametrizada por longitud de arco, α'' es perpendicular a α' , y luego es una combinación lineal de α' , N y $N \times \alpha'$.

$$\alpha'' = k_n N + k_g N \times \alpha' \quad (9)$$

Los escalares k_n y k_g son llamados la curvatura normal y la curvatura geodésica de α , respectivamente. cómo N y $N \times \alpha'$ son vectores perpendiculares, la ecuación (9) implica que

$$k_n = \langle \alpha'', \vec{N} \rangle, \quad k_g = \langle \alpha'', \vec{N} \times \alpha' \rangle \quad \text{y} \quad k^2 = |\alpha''|^2 = k_n^2 + k_g^2$$

En otras palabras, k_n es la longitud de la proyección del vector kn sobre la normal a la superficie en p , con un signo dado por la orientación N de S en p (fig. 2.7-1).

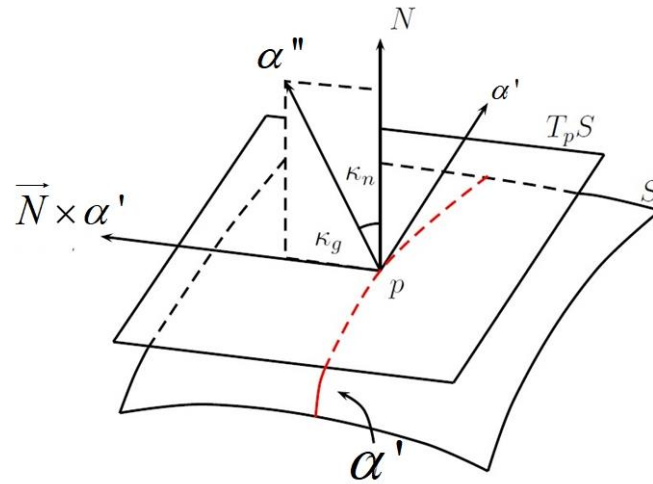


Figura 2.7-1 La Proyección del Vector sobre la Normal.

Definición 2.7.1 (Curvatura gaussiana y media). Sea $p \in S$ y sea $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ la diferencial de la aplicación de Gauss. El determinante de dN_p es la curvatura gaussiana K de S en p . El opuesto de la mitad de la traza de dN_p se denomina la curvatura media H de S en p .

Estas curvaturas en términos de las curvaturas principales y de las relaciones (7) y (8).

$$K = k_1 k_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Definición 2.7.2. Sea p un punto de una superficie S . Dos vectores no nulos $w_1, w_2 \in T_p(S)$ son conjugados, si $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle = 0$. Dos directrices r_1, r_2 en p son conjugadas, si existe un par de vectores no nulos w_1, w_2 paralelos a r_1 y r_2 , respectivamente, que son conjugados.

Ejemplo 2.7.1. En una esfera de radio r , demostrar que la curvatura normal es $\pm 1/r$.

Sabemos que, $\alpha'' = k_n N + k_g \times \alpha'$. Sea α una curva parametrizada sobre una esfera de centro en a y radio r . Entonces

$$|\alpha(s) - a| = r \Leftrightarrow \langle \alpha(s) - a, \alpha(s) - a \rangle = r^2$$



Derivando esta expresión, resulta

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) - a \rangle = 0$$

Derivando nuevamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \alpha''(s), \alpha(s) - a \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha''(s), \alpha(s) - a \rangle &= -\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = -1 \end{aligned}$$

Sabemos que el vector normal de la esfera es:

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = \pm \frac{1}{r} (\alpha(s) - a)$$

Por tanto,
$$k_n = \langle \alpha''(s), N \rangle = \pm \frac{1}{r} \langle \alpha''(s), \alpha(s) - a \rangle = \pm \frac{1}{r} (-1) = \mp \frac{1}{r}$$

2.8. ISOMETRIA.

Siempre considerando que S y \bar{S} son superficies regulares.

Definición 2.8.1 (Isometría). Un difeomorfismo $\varphi: S \rightarrow \bar{S}$ es una isometría si para todo $p \in S$ y todas las parejas $w_1, w_2 \in T_p(S)$ se tienen que

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$$

Se dice entonces que las superficies S y \bar{S} son isométricas.

En otras palabras, un difeomorfismo φ es una isometría si la diferencial $d\varphi$ preserva el producto interior. Siendo φ una isometría se sigue que,

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

para todo $w \in T_p(S)$. Recíprocamente, si un difeomorfismo φ preserva la primera forma fundamental, es decir,

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) \quad \text{para todo} \quad w \in T_p(S),$$

entonces,

$$\begin{aligned}
 2\langle w_1, w_2 \rangle &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\
 &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \\
 &= 2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle
 \end{aligned}$$

y, por tanto, φ es una isometría.

Proposición 2.8.1. *Admitamos la existencia de parametrizaciones $X : U \rightarrow S$ y $\bar{X} : U \rightarrow \bar{S}$ tales que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$ en U . Entonces la aplicación $\varphi = X \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow S$ es una isometría local.*

Demostración.

Sea $p \in X(U)$ y $v, w \in T_p S$, luego

$$v = v_1 X_u + v_2 X_v = dX_{(X^{-1}(p))}(v_1, v_2) \quad \text{y} \quad w = w_1 X_u + w_2 X_v = dX_{(X^{-1}(p))}(w_1, w_2)$$

tenemos que $d(\varphi(p)) = d\bar{X}(X^{-1}(p))dX^{-1}(p)$. Luego (fig. 2.8-1)

$$d(\varphi(p))(v) = d\bar{X}(X^{-1}(p))(v_1, v_2) = v_1 \bar{X}_u + v_2 \bar{X}_v$$

$$d(\varphi(p))(w) = d\bar{X}(X^{-1}(p))(w_1, w_2) = w_1 \bar{X}_u + w_2 \bar{X}_v$$

entonces,

$$\begin{aligned}
 I_p(v, w) &= \langle v_1 X_u + v_2 X_v, w_1 X_u + w_2 X_v \rangle \\
 &= \langle v_1 X_u, w_1 X_u + w_2 X_v \rangle + \langle v_2 X_v, w_1 X_u + w_2 X_v \rangle \\
 &= \langle v_1 X_u, w_1 X_u \rangle + \langle v_1 X_u, w_2 X_v \rangle + \langle v_2 X_v, w_1 X_u \rangle + \langle v_2 X_v, w_2 X_v \rangle \\
 &= v_1 w_1 \langle X_u, X_u \rangle + v_1 w_2 \langle X_u, X_v \rangle + v_2 w_1 \langle X_v, X_u \rangle + v_2 w_2 \langle X_v, X_v \rangle \\
 &= v_1 w_1 E + v_1 w_2 F + v_2 w_1 F + v_2 w_2 G \\
 &= v_1 w_1 E + (v_1 w_2 + v_2 w_1) F + v_2 w_2 G
 \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
 I_{\varphi(p)}(d(\varphi(p))(v), d(\varphi(p))(w)) &= \langle v_1 \bar{X}_u + v_2 \bar{X}_v, w_1 \bar{X}_u + w_2 \bar{X}_v \rangle \\
 &= \langle v_1 \bar{X}_u, w_1 \bar{X}_u + w_2 \bar{X}_v \rangle \bar{X}_v + \langle v_2 \bar{X}_v, w_1 \bar{X}_u + w_2 \bar{X}_v \rangle \\
 &= \langle v_1 \bar{X}_u, w_1 \bar{X}_u \rangle + \langle v_1 \bar{X}_u, w_2 \bar{X}_v \rangle + \langle v_2 \bar{X}_v, w_1 \bar{X}_u \rangle + \langle v_2 \bar{X}_v, w_2 \bar{X}_v \rangle \\
 &= v_1 w_1 \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle + v_1 w_2 \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle + v_2 w_1 \langle \bar{X}_v, \bar{X}_u \rangle + v_2 w_2 \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle \\
 &= v_1 w_1 \bar{E} + v_1 w_2 \bar{F} + v_2 w_1 \bar{F} + v_2 w_2 \bar{G} \\
 &= v_1 w_1 \bar{E} + (v_1 w_2 + v_2 w_1) \bar{F} + v_2 w_2 \bar{G}
 \end{aligned}$$

Como $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$, entonces $I_p(v, w) = I_{\varphi(p)}(d(\varphi(p))(v), d(\varphi(p))(w))$;
luego, φ es una isometría local. ■

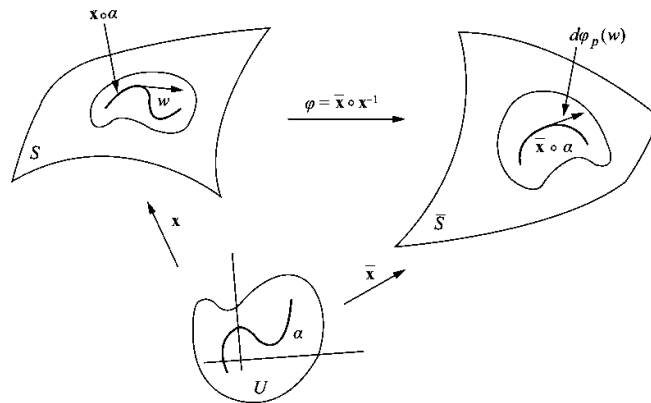


Figura 2.8–1 Parametrización - Isometría Local.

Ejemplo 2.8.1. En los ejemplos (2.4.1) y (2.4.2) para el plano y cilindro respectivamente, los coeficientes de la primera forma fundamental son:

Para el plano: $X_1(u, v) = p + uw_1 + vw_2$, donde $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$

Para el cilindro: $X_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, donde $\bar{E} = 1$, $\bar{F} = 0$, $\bar{G} = 1$

Implica que el plano y el cilindro son localmente isométricos, por la proposición (2.8.1)

2.9. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización en la orientación de S . A cada punto de $X(U)$ le podemos asignar un triedro natural definido por los vectores X_u , X_v y N .

Al expresar las derivadas de los vectores X_u , X_v y N con respecto a la base $\{X_u, X_v, N\}$, obtenemos

$$\begin{aligned}X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, \\X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \\X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N, \\X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, \\N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v, \\N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v,\end{aligned}\tag{10}$$

donde los a_{ij} , $i, j = 1, 2$, se obtuvieron en la sección (2.6) y los otros coeficientes están por determinarse. Los coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$, se denominan los símbolos de Christoffel de S en la parametrización X . Como $X_{uv} = X_{vu}$, se concluye que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ y $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$; es decir, los símbolos de Christoffel son simétricos con respecto a los subíndices.

Efectuando el producto interior de las cuatro primeras relaciones de (10) con N , se tiene,

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, N \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle X_u, N \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, N \rangle + L_1 \langle N, N \rangle = L_1$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, N \rangle = \Gamma_{12}^1 \langle X_u, N \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle X_v, N \rangle + L_2 \langle N, N \rangle = L_2$$

$$f = \langle X_{vu}, N \rangle = \langle \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N, N \rangle = \Gamma_{21}^1 \langle X_u, N \rangle + \Gamma_{21}^2 \langle X_v, N \rangle + \bar{L}_2 \langle N, N \rangle = \bar{L}_2$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, N \rangle = \Gamma_{22}^1 \langle X_u, N \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle X_v, N \rangle + L_3 \langle N, N \rangle = L_3$$

obtenemos inmediatamente $L_1 = e$, $L_2 = f$, $L_3 = g$, donde e, f, g son los coeficientes de la segunda forma fundamental de S . Para determinar los símbolos de Christoffel, efectuando el producto interior de las cuatro primeras relaciones con X_u , X_v en (10), y puesto que $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$, se tiene:

$$\begin{cases} \langle X_{uu}, X_u \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, X_u \rangle + e \langle N, X_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \\ \langle X_{uu}, X_v \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, X_v \rangle + e \langle N, X_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle X_{uv}, X_u \rangle = \Gamma_{12}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle X_v, X_u \rangle + f \langle N, X_u \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F \\ \langle X_{uv}, X_v \rangle = \Gamma_{12}^1 \langle X_u, X_v \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle X_v, X_v \rangle + f \langle N, X_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle X_{vu}, X_u \rangle = \Gamma_{21}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{21}^2 \langle X_v, X_u \rangle + f \langle N, X_u \rangle = \Gamma_{21}^1 E + \Gamma_{21}^2 F \\ \langle X_{vu}, X_v \rangle = \Gamma_{21}^1 \langle X_u, X_v \rangle + \Gamma_{21}^2 \langle X_v, X_v \rangle + f \langle N, X_v \rangle = \Gamma_{21}^1 F + \Gamma_{21}^2 G \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle X_{vv}, X_u \rangle = \Gamma_{22}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle X_v, X_u \rangle + g \langle N, X_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F \\ \langle X_{vv}, X_v \rangle = \Gamma_{22}^1 \langle X_u, X_v \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle X_v, X_v \rangle + g \langle N, X_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G \end{cases}$$

también, obteniendo el sistema

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v, \end{cases}$$

En la ecuación (11) el determinante del sistema es $EG - F^2 \neq 0$. De esta forma, es posible resolver y calcular los **símbolos de Christoffel** con respecto a sus términos de los coeficientes de la primera forma fundamental E, F, G y de sus derivadas.

Las expresiones de las derivadas de X_u , X_v y N con respecto a la base $\{X_u, X_v, N\}$, dependen de que se conozcan los coeficientes de la primera fundamental y la segunda forma fundamental de S . Un procedimiento para obtener relaciones entre estos coeficientes consiste en considerar las expresiones

$$\begin{aligned}(X_{uu})_v - (X_{uv})_u &= 0 \\ (X_{vv})_u - (X_{vu})_v &= 0\end{aligned}\tag{12}$$

$$N_{uv} - N_{vu} = 0$$

Las relaciones de (10), puede ser escritas en la forma

$$\begin{aligned}A_1 X_u + B_1 X_v + C_1 N &= 0 \\ A_2 X_u + B_2 X_v + C_2 N &= 0 \\ A_3 X_u + B_3 X_v + C_3 N &= 0\end{aligned}\tag{13}$$

donde A_i, B_i, C_i , $i=1,2,3$, son las funciones de E, F, G, e, f, g y de sus derivadas. Como los vectores X_u, X_v, N son linealmente independientes, (13) implica la existencia de nueve relaciones:

$$A_i = 0, \quad B_i = 0, \quad C_i = 0, \quad i=1,2,3$$

Resolvemos a partir de $A_i = 0, B_i = 0, C_i = 0$. Haciendo uso de los valores de (10), la primera relación en (12) puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}(X_{uu})_v - (X_{uv})_u &= 0 \\ (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN)_v - (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN)_u &= 0 \\ (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN)_v &= (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN)_u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\Gamma_{11}^1\right)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + \left(\Gamma_{11}^2\right)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e_v N + eN_v \\ & = \left(\Gamma_{12}^1\right)_u X_u + \Gamma_{12}^1 X_{uu} + \left(\Gamma_{12}^2\right)_u X_v + \Gamma_{12}^2 X_{vu} + f_u N + fN_u \end{aligned} \quad (14)$$

Usando de nuevo (10) en la ecuación (14), obtenemos

$$\begin{aligned} & \left(\Gamma_{11}^1\right)_v X_u + \Gamma_{11}^1 \left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN\right) + \\ & \left(\Gamma_{11}^2\right)_v X_v + \Gamma_{11}^2 \left(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN\right) + \\ & e_v N + e \left(a_{12} X_u + a_{22} X_v\right) = \left(\Gamma_{12}^1\right)_u X_u + \Gamma_{12}^1 \left(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN\right) + \\ & \left(\Gamma_{12}^2\right)_u X_v + \Gamma_{12}^2 \left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN\right) + \\ & f_u N + f \left(a_{11} X_u + a_{21} X_v\right) \end{aligned}$$

Agrupando los coeficientes de X_u, X_v, N , se obtiene

$$\begin{aligned} & \left(\left(\Gamma_{11}^1\right)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ea_{12}\right) X_u + \\ & \left(\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \left(\Gamma_{11}^2\right)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22}\right) X_v + \\ & \left(\Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v\right) N = \left(\left(\Gamma_{12}^1\right)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + fa_{11}\right) X_u + \\ & \left(\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \left(\Gamma_{12}^2\right)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + fa_{21}\right) X_v + \\ & \left(\Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f + f_u\right) N \end{aligned} \quad (15)$$

y la ecuación de los coeficientes de X_v , obtenemos

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \left(\Gamma_{11}^2\right)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \left(\Gamma_{12}^2\right)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + fa_{21}$$

introduciendo los valores de a_{ij} , se deduce que

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \left(\Gamma_{11}^2\right)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2}\right) = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \left(\Gamma_{12}^2\right)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + f \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2}\right)$$

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \left(\Gamma_{11}^2\right)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \left(\Gamma_{12}^2\right)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 = f \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2}\right) - e \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2}\right)$$

$$\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \left(\Gamma_{12}^2\right)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \left(\Gamma_{11}^2\right)_v - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = \frac{efF - egE - efF + f^2E}{EG - F^2}$$

$$\left(\Gamma_{12}^2\right)_u - \left(\Gamma_{11}^2\right)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -EK \quad (16)$$

Igualando los coeficientes de X_u en (14), se observa que la relación $A_1 = 0$ puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e a_{12} &= (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + f a_{11} \\ (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 &= f \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) - e \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \\ (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 &= - \frac{f^2 F - efG - egF + efG}{EG - F^2} \\ (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 &= - \frac{f^2 F - egF}{EG - F^2} = -F \frac{f^2 - eg}{EG - F^2} \\ (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 &= F \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = FK \end{aligned} \quad (17)$$

Igualando también en la ecuación (14) los coeficientes de N , obtenemos $C_1 = 0$ bajo la forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v &= \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f + f_u \quad \Rightarrow \quad e_v - f_u = \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f - \Gamma_{11}^1 f - \Gamma_{11}^2 g \\ e_v - f_u &= e \Gamma_{12}^1 + f (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g \Gamma_{11}^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Obsérvese que la relación (17) es simplemente otra versión (cuando $F \neq 0$) de la fórmula de Gauss (16).

Aplicando el mismo proceso a la segunda expresión de (12), obtenemos que de nuevo las ecuaciones $A_2 = 0$ y $B_2 = 0$ conducen a la fórmula de Gauss (16). Además, $C_2 = 0$ viene dada por

$$f_v - g_u = e \Gamma_{22}^1 + f (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g \Gamma_{12}^2 \quad (19)$$

finalmente, puede aplicarse el mismo proceso a la última expresión de (12), llegando a que $C_3 = 0$ es una identidad y a qué $A_3 = 0$ y $B_3 = 0$ de nuevo son las ecuaciones (18) y (19). Las ecuaciones (18) y (19) se denomina ecuaciones de Mainardi-Codazzi (**Ecuaciones de Compatibilidad**).

Observar cómo se simplifican las ecuaciones de Mainardi-Codazzi cuando el entorno coordinado no contiene puntos umbilicos y las curvas coordenadas son líneas de curvatura ($F = f = 0$). Entonces, las ecuaciones (18) y (19) pueden escribirse en la forma

$$e_v = e\Gamma_{12}^1 - g\Gamma_{11}^2, \quad g_u = g\Gamma_{12}^2 - e\Gamma_{22}^1,$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \frac{E_v}{E}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \frac{G_v}{G}, \end{aligned}$$

Entonces las ecuaciones de Mainardi - Codazzi adoptan la forma:

$$e_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \quad (20)$$

$$g_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \quad (21)$$

Ejemplo 2.9.1 La esfera S^2 parametrizada está dada por:

$$X(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u) \text{ con } 0 < u < \pi \text{ y } 0 < v < 2\pi.$$

$$\text{Luego, } X_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u), \quad X_v = (-r \sin u \sin v, r \cos u \cos v, 0) \text{ y}$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = r^2 \sin^2 u$$

Calcularemos los símbolos de Christoffel a partir de la ecuación (11),

$$\begin{aligned} E_u = E_v = 0, & \quad F_u = F_v = 0 \\ G_u = 2r^2 \sin u \cos u = r^2 \cos(2u), & \quad G_v = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 r^2 + \Gamma_{11}^2 0 = \frac{1}{2} 0, \\ \Gamma_{11}^1 0 + \Gamma_{11}^2 r^2 \sin^2(u) = 0 - \frac{1}{2} 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0 \\ \Gamma_{11}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 r^2 + \Gamma_{12}^2 0 = \frac{1}{2} 0, \\ \Gamma_{12}^1 0 + \Gamma_{12}^2 r^2 \sin^2(u) = \frac{1}{2} r^2 \cos(2u), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{12}^1 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{\cos(2u)}{2 \sin^2(u)} = \cot(u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 r^2 + \Gamma_{22}^2 0 = 0 - \frac{1}{2} r^2 \cos(2u), \\ \Gamma_{22}^1 0 + \Gamma_{22}^2 r^2 \sin^2(u) = \frac{1}{2} 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} r^2 \cos(2u) = -\sin(u) \cos(u) \\ \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

2.10. DERIVADA COVARIANTE y TRANSPORTE PARALELO

Un campo vectorial (tangente) de una superficie regular S en el conjunto abierto $U \subset S$ es una correspondencia w (diferenciable en p) que asigna a cada $p \in U$ un vector $w(p) \in T_p(S)$. Para alguna parametrización $X(u, v)$ en p , las componentes a y b de $w = aX_u + bX_v$ con respecto a la base $\{X_u, X_v\}$ son funciones diferenciables en p . Si w es diferenciable en cada $p \in U$ entonces w es diferenciable en U .

Definición 2.10.1 (Derivada Covariante). Sea w un campo vectorial diferenciable tangente a S a lo largo de una curva α en S . Se define la derivada covariante $(Dw/dt)(0)$ como la proyección de la derivada $(dw/dt)(0)$ del campo vectorial w en el plano tangente $T_p(S)$ es decir

$$\frac{Dw}{dt}(0) = \text{Proy}_{T_p(S)} \left(\frac{dw}{dt}(0) \right)$$

Sea $U \subset S$ y $p \in U$. Sea $y \in T_p(S)$. Consideremos una curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = y$ y sea $w(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, (fig. 2.10-1)

Sea $X(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ la expresión de α y sea

$$\begin{aligned} w(t) &= a(u(t), v(t))X_u + b(u(t), v(t))X_v \\ &= a(t)X_u + b(t)X_v \end{aligned}$$

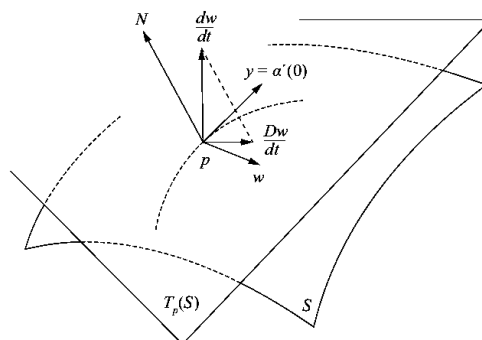


Figura 2.10–1 Derivada Covariante.

La expresión de $w(t)$ en la parametrización $X(u, v)$. Entonces

$$w(t) = a(t)X_u + b(t)X_v$$

$$\frac{dw}{dt} = a'X_u + a\left(\frac{\partial X_u}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial X_u}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) + b'X_v + b\left(\frac{\partial X_v}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial X_v}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dw}{dt} = a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b(X_{vu}u' + X_{vv}v') + a'X_u + b'X_v$$

donde la prima representa la derivada con respecto a t .

Como Dw/dt es la componente en el plano tangente de dw/dt , utilizando las expresiones en (10) de la sección (2.9) para X_{uu} , X_{uv} , X_{vv} y, suprimiendo la componente normal, obtenemos

$$\frac{dw}{dt} = a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b(X_{vu}u' + X_{vv}v') + a'X_u + b'X_v$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} = a\left(\left(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v\right)u' + \left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v\right)v'\right) + \\ b\left(\left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v\right)u' + \left(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v\right)v'\right) + a'X_u + b'X_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} = \left(a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv'\right)X_u + \\ \left(b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv'\right)X_v \end{aligned} \quad (22)$$

La ecuación (22) es claro que Dw/dt solo depende del vector $(u', v') = y$, no de la curva α . Además, en la ecuación (22) la superficie hace presencia a través la primera forma fundamental, es decir los símbolos de Christoffel. Por tanto, queda probada nuestra afirmación.

Definición 2.10.2. Una curva parametrizada $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ es la restricción a $[0, l]$ de una aplicación diferenciable de $(0 - \varepsilon, l + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, en S . Si $\alpha(0) = p$ y $\alpha(l) = q$ decimos que α une p con q . Se dice que α es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para $t \in [0, l]$.

De aquí en adelante será conveniente utilizar la notación del intervalo $[0, l] = I$.

Definición 2.10.3. Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizada en S . Un campo vectorial w a lo largo de α es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$ un vector

$$w(t) \in T_{\alpha(t)}(S)$$

El campo vectorial w es diferenciable en $t_0 \in I$ sí, para alguna parametrización $X(u, v)$ en $\alpha(t_0)$, las componentes $a(t), b(t)$ de $w(t) = a X_u + b X_v$ son funciones diferenciables de t en t_0 . Se dice que w es diferenciable en I si es diferenciable en cada punto $t \in I$.

Definición 2.10.4 (Campo vectorial paralelo). Se dice que un campo vectorial w , a lo largo de una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$, es paralelo si $Dw/dt = 0$ para cada $t \in I$. (fig. 2.10-2).

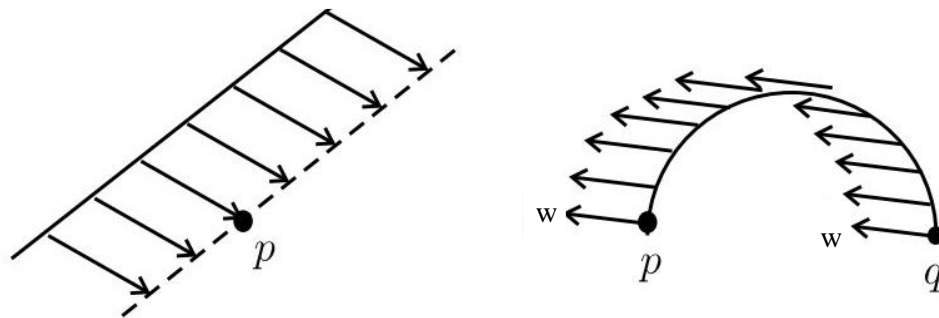


Figura 2.10–2 Campo Vectorial Paralelo.

Proposición 2.10.1. Sea w y v dos campos vectoriales paralelos a lo largo de $\alpha : I \rightarrow S$. Entonces $\langle w(t), v(t) \rangle$ es constante. En particular, $|w(t)|$ y $|v(t)|$ son constantes y ángulo entre $w(t)$ y $v(t)$ es constante.

Demostración.

Decir que el campo vectorial w es paralelo a lo largo de α significa que dw/dt es normal al plano tangente a la superficie en $\alpha(t)$; o sea,

$$\langle v(t), w'(t) \rangle = 0, \quad t \in I$$

Por otra parte, $v'(t)$ también es normal al plano tangente en $\alpha(t)$. Así,

$$\langle v(t), w(t) \rangle' = \langle v'(t), w(t) \rangle + \langle v(t), w'(t) \rangle = 0;$$

Es decir, $\langle v(t), w(t) \rangle = \text{constante}$. ■

Definición 2.10.6 (Transporte paralelo). Sea $\alpha: I \rightarrow S$ una curva diferenciable parametrizada en S , $p = \alpha(0)$ y $w_0 \in T_{\alpha(0)}(S)$ un vector tangente en p . Entonces el vector $w(t_1)$ en $\alpha(t_1)$ obtenido mediante el campo vectorial paralelo se llama el transporte paralelo de $w(t_0) = w_0$ a $\alpha(t_1)$ a lo largo de α en el punto t_1 . (fig. 2.10-4)

Definición 2.10.7. Una aplicación $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ es una curva parametrizada regular a trozos si α es continua y existe una subdivisión

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l$$

Del intervalo $[0, l]$ de forma que la restricción $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k$ es una curva parametrizada regular. Se denomina a cada $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ un arco regular de α .

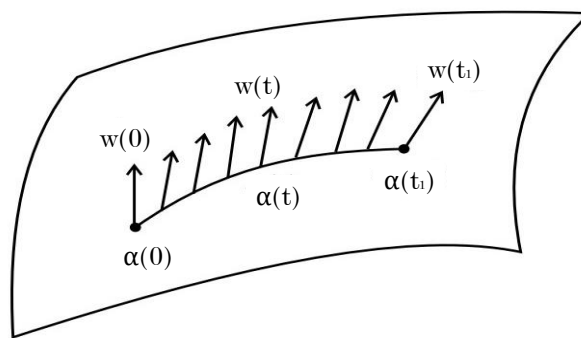


Figura 2.10–4 Transporte Paralelo de un vector.

Ejemplo 2.10.1. Del ejemplo (2.4.1), se tiene los coeficientes de la primera forma fundamental que son $E = 1$, $F = 0$ y $G = 1$ y con estos coeficientes calculamos los símbolos de Christoffel y sustituyendo a la ecuación (22), se obtiene que la derivada covariante es: $\frac{Dw}{dt}(0) = a'X_u + b'X_v$ coincide con la derivada usual.

2.11. GEODESICAS

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva diferenciable tales que $\alpha(0) = p \in S$ y $\alpha'(0) = w$. Podemos determinar una única curva $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p S$ que se proyecte ortogonalmente sobre $\alpha = \alpha(t)$, de modo que el vector tangente a $\bar{\alpha}$ sea w . (fig. 2.11-1)

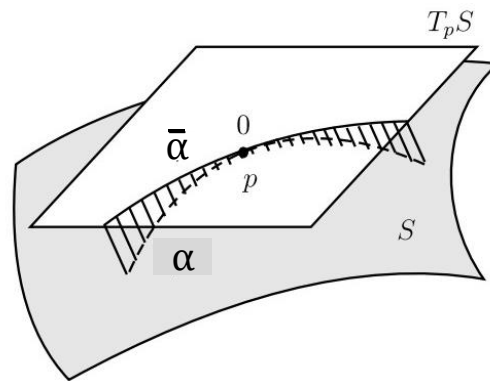


Figura 2.11-1 Curva α en S y curva $\bar{\alpha}$ en T_pS .

Ejemplo 2.11.1. Consideremos una recta en \mathbb{R}^2 dada por $\alpha(t) = p + tw$, pasando por el punto p y en dirección del vector $w = \alpha'(t)$. Entonces

$$\frac{d\alpha'}{dt}(t) = 0$$

Por lo tanto, la derivada covariante a lo largo de $\alpha(t)$ se anula, es decir,

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t) = 0$$

De esta manera una geodésica de \mathbb{R}^2 , es decir, una línea recta satisface que la derivada covariante de un campo vectorial tangente se anula, esto se define lo que es una geodésica para el caso general de una superficie S .

Definición 2.11.1 (Geodésica). Se dice que una curva parametrizada no constante $\gamma: I \rightarrow S$ es geodésica en $t \in I$ si el campo de sus vectores tangentes $\gamma'(t)$ es paralelo a lo largo de γ a t ; es decir,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0 ;$$

para todo $t \in I$.

Definición 2.11.1a. se dice que una curva regular conexa C en S es una geodésica si, para cada $p \in C$, la parametrización $\alpha(s)$ de un entorno coordenado de p por la longitud de arco s es una geodésica parametrizada; es decir, $\alpha'(s)$ es un campo paralelo a lo largo de $\alpha(s)$.

Definición 2.11.2. Sea w un campo diferenciable de vectores unitarios a lo largo de una curva parametrizada $\alpha: I \rightarrow S$ sobre una superficie orientada S . Como $w(t)$, $t \in I$, es un campo vectorial unitario, $(dw/dt)(t)$ es normal a $w(t)$ y por tanto

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \wedge w(t)).$$

El número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $[Dw/dt]$, se denomina el valor algebraico de la derivada covariante de w en t .

Definición 2.11.3. Sea C una curva regular orientada contenida en una superficie orientada S , y sea $\alpha(s)$ una parametrización de C por la longitud de arco S , en un entorno de $p \in S$. El valor algebraico de la derivada covariante $[D\alpha'(s)/ds] = k_g$ de $\alpha'(s)$ en p se denomina la curvatura geodésica de C en p .

Las geodésicas que sean curvas regulares están caracterizadas como las curvas cuya curvatura geodésica es cero.

El valor absoluto de la curvatura geodésica k_g de C en p es el valor absoluto de la componente tangencial del vector $\alpha''(s) = kn$, donde k es la curvatura de C en p y n es el vector normal a C en p . Recordando que el valor absoluto de la componente normal del vector kn es el vector absoluto de la curvatura normal k_n de $C \subset S$ en p , obtenemos inmediatamente que (fig. 2.11-1)

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2$$

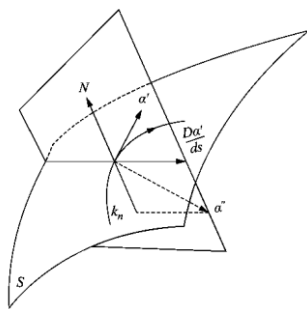


Figura 2.11-1 Curvatura Normal.

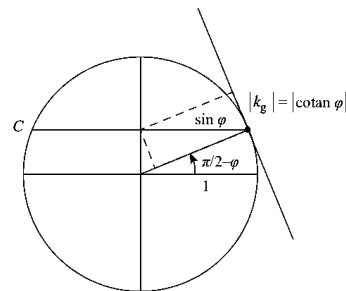


Figura 2.11-2 Curvaturas Geodésicas de un paralelo sobre la esfera unidad.

Ejemplo 2.11.1 Un paralelo C de colatitud φ de la esfera S^2 , el valor absoluto de la curvatura geodésica k_g puede calcularse a partir de la relación (fig. 2.11-2)

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = k_n^2 + k_g^2 = 1 + k_g^2, \text{ es decir } k_g^2 = \cot^2 \varphi, \text{ el signo de } k_g \text{ depende de las}$$

orientaciones de S^2 y C .



Observación. La curvatura geodésica de $C \subset S$ cambia de signo cuando cambia la orientación de C o bien la de S .

Lema 2.11.1. Sean v y w dos campos vectoriales diferenciables a lo largo de la curva $\varphi: I \rightarrow S$, con $|w(t)| = |v(t)| = 1$, $t \in I$. Entonces

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] - \left[\frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt}$$

donde φ es una de las determinaciones diferenciales del ángulo de v a w .

Demostración. (Do Carmo, 1995, Pág. 254)

Introducimos los vectores $\bar{v} = N \wedge v$ y $\bar{w} = N \wedge w$. Entonces

$$w = (\cos \varphi)v + (\sin \varphi)\bar{v}$$

$$\bar{w} = N \wedge w = (\cos \varphi)N \wedge v + (\sin \varphi)N \wedge \bar{v}$$

$$= (\cos \varphi)\bar{v} - (\sin \varphi)v$$

Diferenciando con respecto a t , obtenemos

$$w' = -(\sin \varphi)\varphi'v + (\cos \varphi)v' + (\cos \varphi)\varphi'\bar{v} + (\sin \varphi)\bar{v}'$$

Efectuando el producto interior de la última relación con \bar{w} , observando que $\langle v, \bar{v} \rangle = 0$.

$\langle v, v' \rangle = 0$, se concluye que

$$\langle w', \bar{w} \rangle = (\sin^2 \varphi)\varphi' + (\cos^2 \varphi)\langle v', \bar{v} \rangle + (\cos^2 \varphi)\varphi' - (\sin^2 \varphi)\langle \bar{v}', v \rangle$$

$$= \varphi' + (\cos^2 \varphi)\langle v', \bar{v} \rangle - (\sin^2 \varphi)\langle \bar{v}', v \rangle$$

Por otra parte, como $\langle v, \bar{v} \rangle = 0$, es decir,

$$\langle v', \bar{v} \rangle = -\langle v, \bar{v}' \rangle$$

Concluimos que

$$\langle w', \bar{w} \rangle = \varphi' + (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)\langle v', \bar{v} \rangle = \varphi' + \langle v', \bar{v} \rangle$$

Se deduce entonces que

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \langle w', \bar{w} \rangle = \varphi' + \langle v', \bar{v} \rangle = \frac{d\varphi}{dt} + \left[\frac{Dv}{dt} \right],$$

Pues que

$$\langle w', \bar{w} \rangle = \left\langle \frac{dw}{dt}, \bar{w} \right\rangle = \left[\frac{Dw}{dt} \right] \langle N \wedge w, \bar{w} \rangle = \left[\frac{Dw}{dt} \right],$$

Con lo que concluye la demostración del tema. ■

Se introduce las ecuaciones de una geodésica en un entorno coordenado. Sean $\gamma: I \rightarrow S$ una curva parametrizada de S y sea $X(u, v)$ una parametrización de S en un entorno V de $\gamma(t_0)$, $t_0 \in I$. Sea $J \subset I$ un intervalo abierto que contiene a t_0 tal que $\gamma(J) \subset V$. Sea $X(u(t), v(t))$, $t \in I$, la expresión de $\gamma: J \rightarrow S$ con respecto a la parametrización x . Entonces, el campo vectorial tangente $\gamma'(t)$, $t \in J$, viene dado por

$$w = u'(t)X_u + v'(t)X_v$$

Por tanto, w sea paralelo equivale a decir el sistema de ecuaciones diferenciales

$$u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0 \tag{23}$$

$$v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0$$

se obtiene de la ecuación (22) haciendo $a = u'$ y $b = v'$ e igualando a cero los coeficientes de X_u y X_v .

Proposición 2.11.1. *Dado un punto $p \in S$ y un vector $w \in T_p(S)$, $w \neq 0$, existe $\varepsilon > 0$ y una única geodésica parametrizada $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = w$.*

Demostración.

Por la ecuación (23), dado un sistema de coordenadas, una curva geodésica $\gamma = \gamma(t)$ debe satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales de geodésicas:

$$u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0$$

$$v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0$$

Con las condiciones iniciales $(u(0), v(0)) = p$ y $(u'(0), v'(0)) = w$. El teorema de existencia y unicidad garantiza la afirmación Anexo F. ■

Observación. La razón de tomar $w \neq 0$ en la proposición (2.11.1) es de hecho de excluir para las curvas constantes en la definición de geodésica parametrizada.

2.12. LA APLICACIÓN EXPONENCIAL.

La aplicación exponencial, que denotaremos por \exp_p , transforma una vecindad de $0 \in T_p(S)$ en una vecindad de p en S . Intuitivamente, el valor de \exp_p en un vector w se obtiene tendiendo al vector sobre S . Para esto, se considera una geodésica que parte de p en la dirección de v y se mide sobre esta un argumento de longitud igual a $\|v\|$ (fig. 2.12-1).

Como ya mencionamos en la sección (2.11), proposición (2.11.1), dado un punto p de una superficie regular S y un vector no nulo $v \in T_p(S)$ existe una única geodésica parametrizada $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$. Para indicar la dependencia de esta geodésica con respecto al vector v , es conveniente representar por $\gamma(t, v) = \gamma$.

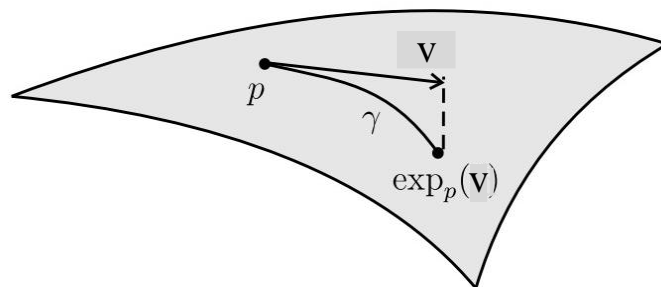


Figura 2.12-1 La aplicación exponencial.

Lema 2.12.1. Si la geodésica $\gamma(t, v)$ está definida para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces la geodésica $\gamma(t, \lambda v)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, está definida para $t \in (-\varepsilon / \lambda, \varepsilon / \lambda)$ y $\gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v)$.

Demostración.

Sea $\alpha: (-\varepsilon / \lambda, \varepsilon / \lambda) \rightarrow S$ la curva parametrizada definida por $\alpha(t) = \gamma(\lambda t, v)$.

Entonces

$$\alpha(t) = \gamma(\lambda t, v)$$

$$\alpha'(t) = \lambda \gamma'(\lambda t, v)$$

$$\alpha''(t) = \lambda^2 \gamma''(\lambda t, v)$$

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t) = \lambda^2 \frac{D\gamma'}{dt}(\lambda t) = \lambda^2 \cdot 0 = 0$$

$\alpha(0) = \gamma(0, v) = p$, $\alpha'(0) = \lambda \gamma'(0, v) = \lambda v$ Entonces, α es una geodésica con datos iniciales $\gamma(0)$, $\lambda \gamma'(0)$, luego, por unicidad,

$$\alpha(t) = \gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v) \quad \blacksquare$$

Definición 2.12.1 (Aplicación Exponencial). Si $v \in T_p(S)$, $v \neq 0$, es tal que $\gamma(|v|, v/|v|) = \gamma(1, v)$ está definido para tiempo $t=1$, La aplicación exponencial \exp_p es definida por:

$$\exp_p(v) = \gamma(1, v) \quad \text{y} \quad \exp_p(0) = p$$

Geoméricamente, la construcción corresponde a trazar (si ello es posible) sobre la geodésica que pasa por p y en la dirección de v una longitud igual a $|v|$; el punto de S obtenido por este procedimiento se denota por $\exp_p(v)$. (fig. 2.12-2).

Ejemplo 2.12.1. en la esfera unidad S^2 , $\exp_p(v)$ está definida para $v \in T_p(S^2)$. Los puntos de los círculos de radios $\pi, 3\pi, \dots, (2n+1)\pi$ son aplicados en el punto q , el punto antipodal de p . Los puntos de los círculos de radios $2\pi, 3\pi, \dots, 2n\pi$ son aplicados de regreso a p .

Por otra parte, sobre la superficie regular C constituida por el cono de una hoja menos el vértice, $\exp_p(v)$ no está definida para un vector $v \in T_p(C)$ que apunte en la dirección del meridiano que conecta a p con el vértice, cuando $|v| \geq d$ y d es la distancia de p al vértice (fig. 2.12-3).

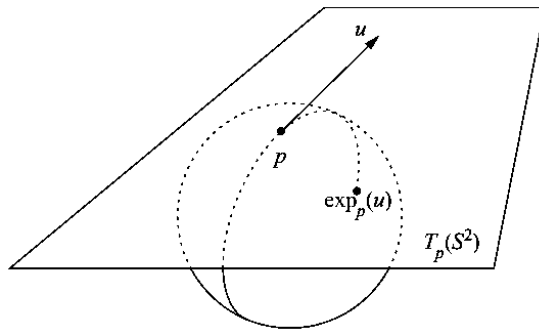


Figura 2.12–2 Esfera unidad S^2 .

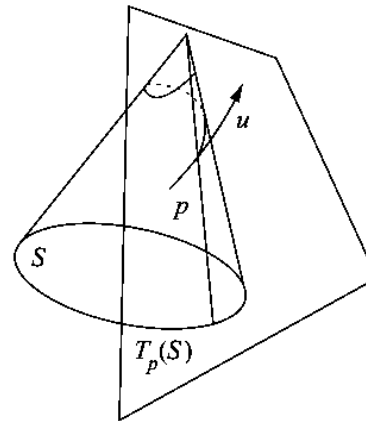


Figura 2.12–3 Cono menos el vértice.

Proposición 2.12.1. Dado $p \in S$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que \exp_p está definida y es diferenciable en el interior B_ε de un disco de radio ε y centro el origen contenido en $T_p(S)$. (Do Carmo, 1995, Pág. 286)

Demostración.

Tomamos v lo suficientemente pequeño de forma que el intervalo de definición de $\gamma(t, v)$ contenga a 1, y así $\gamma(1, v) = \exp_p(v)$ está definida.

Dado $p \in S$ existen números $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ y una aplicación diferenciable

$$\gamma : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times B_{\varepsilon_1} \rightarrow S$$

Tal que, para $v \in B_{\varepsilon_1}$, $v \neq 0$, $t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$, la curva $\gamma(t, v)$ es la geodésica de S con $\gamma(0, v) = p$, $\gamma'(0, v) = v$, y para $v = 0$, $\gamma(t, 0) = p$.

Nuestra afirmación se deduce de este enunciado y del lema (2.13.1) en efecto, como $\gamma(t, v)$ está definida para $|t| < \varepsilon_2$, $|v| < \varepsilon_1$, al poner $\lambda = \varepsilon_2 / 2$ en el lema (2.12.1), obtenemos que $\gamma(t, (\varepsilon_2 / 2)v)$ está definida para $|t| < 2$, $|v| < \varepsilon_1$. En consecuencia, al tomar el disco $B_\varepsilon \subset T_p(S)$, con centro en el origen y radio $\varepsilon < \varepsilon_1 \varepsilon_2 / 2$, tenemos que $\gamma(1, w) = \exp_p w$, $w \in B_\varepsilon$, está definida. La diferenciabilidad de \exp_p en B_ε se deduce de la diferenciabilidad de γ . ■

Proposición 2.12.2. La aplicación $\exp_p : B_\varepsilon \subset T_p(S) \rightarrow S$ es un difeomorfismo en un entorno $U \subset B_\varepsilon$ del origen 0 de $T_p(S)$.

Demostración. (Do Carmo, 1995, Pág. 286)

Demostraremos que la diferencial $d(\exp_p)$ es no singular en $0 \in T_p(S)$.

En efecto, identificamos el espacio de los vectores tangentes a $T_p(S)$ en 0 con el propio $T_p(S)$. Consideremos la curva $\alpha(t) = tv, v \in T_p(S)$. Es obvio que $\alpha(0) = 0$ y $\alpha'(0) = v$. La curva $(\exp_p \circ \alpha)(t) = \exp_p(tv)$ admite en $t=0$ el vector tangente

$$\left. \frac{d}{dt} (\exp_p(tv)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (\gamma(t, v)) \right|_{t=0} = v$$

así pues

$$(d \exp_p)_0(v) = v,$$

lo que prueba que $d \exp_p$ es no singular en 0 . ■

Como la aplicación exponencial en $p \in S$ es un difeomorfismo en U , puede utilizarse para introducir coordenadas en V . Entre los sistemas de coordenadas construidos por este procedimiento, los más habituales son:

- (1) Las coordenadas normales, que corresponden a un sistema de coordenadas rectangulares en el plano tangente $T_p(S)$.
- (2) Las coordenadas polares geodésicas, que corresponden a las coordenadas polares en el plano tangente $T_p(S)$ (fig. 2.12-4).

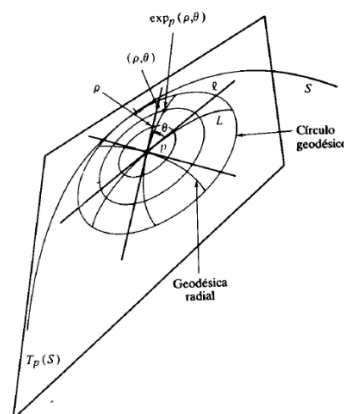


Figura 2.12-4 Coordenadas Polares.

Primero vamos a estudiar las coordenadas normales, que se obtienen al elegir en el plano $T_p(S)$, $p \in S$ dos vectores ortogonales unitarios e_1 y e_2 . Como $\exp_p : U \rightarrow V \subset S$ es un difeomorfismo, satisface las condiciones de parametrización en p , si $q \in V$, entonces $q = \exp_p(w)$, donde $w = ue_1 + ve_2 \in U$ y decimos que q tiene coordenadas en (u, v) . Es claro que las coordenadas normales obtenidas por este procedimiento dependen de la elección de e_1 y e_2 .

En un sistema de **coordenadas normales** centradas en p , las geodésicas que pasan por p son las imágenes mediante \exp_p de las rectas $u = at$, $v = bt$ que pasan por el origen de $T_p(S)$. También se nota que en p los coeficientes de la primera forma fundamental con respecto a dicho sistema vienen dados por $E(p) = G(p) = 1$, $F(p) = 0$.

Analicemos **coordenadas polares geodésica**. Elegimos un sistema de coordenadas polares (ρ, θ) en el plano $T_p(S)$, $p \in S$, donde ρ es el radio polar y θ coordenadas polares del plano no están definidas en la semirrecta cerrada l correspondiente a $\theta = 0$. pongamos $\exp_p(l) = L$. Como $\exp_p : U - l \rightarrow V - L$ todavía es un difeomorfismo, podemos parametrizar los puntos de $V - L$ mediante las coordenadas (ρ, θ) , las cuales se denominan coordenadas polares geodésicas.

Proposición 2.13.3. *Sea $X : U - l \rightarrow V - L$ un sistema de coordenadas polares geodésicas (ρ, θ) . Entonces los coeficientes $E = E(\rho, \theta)$, $F = F(\rho, \theta)$ y $G = G(\rho, \theta)$ de la primera forma fundamental satisfacen las condiciones:*

$$E = 1, \quad F = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} G = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1.$$

Demostración.

Por la definición de aplicación exponencial, ρ mide la longitud de arco a lo largo de la curva $\theta = \text{constante}$ se deduce inmediatamente que $E = 1$.

Al introducir el hecho de que $\theta = \text{constante}$ es una geodésica es la ecuación diferencial de las geodésicas (ecuación (23)) se concluye que $\Gamma_{11}^2 = 0$. Utilizando la primera relaciones de ecuaciones (11), que definen los símbolos de Christoffel, obtenemos

$$0 = \frac{1}{2} E_\rho = \Gamma_{11}^1 E = \Gamma_{11}^1.$$

Al introducir la relación en la segunda de la ecuación (11), concluimos que $F_\rho = 0$, por tanto, $F(\rho, \theta)$ no depende de ρ .

Para cada $q \in V$, denotaremos por $\alpha(\sigma)$ el círculo geodésico que pasa por q , donde $\sigma \in [0, 2\pi]$ (si $q = p$, $\alpha(\sigma)$ es la curva constante $\alpha(\sigma) = p$). Denotaremos por $\gamma(s)$, donde s es la longitud de arco de γ , la geodésica radial que pasa por q .

$$F(\rho, \theta) = \left\langle \frac{d\alpha}{d\sigma}, \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle,$$

El coeficiente $F(\rho, \theta)$ no está definido en p . Sin embargo, si fijamos la geodésica radial $\theta = \text{constante}$, el segundo miembro de la ecuación precedente está definido en cada punto de esta geodésica, como en p , $\alpha(\sigma) = p$, es decir, $d\alpha/d\sigma = 0$, obtenemos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho, \theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\langle \frac{d\alpha}{d\sigma}, \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle = 0$$

Esto implica, conjuntamente con el hecho de que F no depende de ρ , que $F = 0$.

Para demostrar la última afirmación; elegimos un sistema de coordenadas normales (\bar{u}, \bar{v}) en p de forma que el cambio de coordenadas viene dado por

$$\bar{u} = \rho \cos \theta, \quad \bar{v} = \rho \sin \theta, \quad \rho \neq 0, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

Recordar que

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(\rho, \theta)},$$

Donde $\partial(\bar{u}, \bar{v})/\partial(\rho, \theta)$ es el Jacobiano del cambio de coordenadas y $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$, son los coeficientes de la primera forma fundamental en las coordenadas normales (\bar{u}, \bar{v}) ,

$$\left(\sqrt{\bar{G}} \right)_{\rho\rho} + K\sqrt{\bar{G}} = 0 \quad (24)$$

Como en p , $\bar{E} = \bar{G} = 1$, $\bar{F} = 0$ (las coordenadas normales están definidas en p), concluimos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\bar{G}} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\sqrt{\bar{G}} \right)_\rho = 1$$

Con lo que concluye la demostración de la proposición. ■

Proposición 2.12.4. Sea p un punto de una superficie S . Entonces, existe un entorno $W \subset S$ de p tal que si $\gamma: I \rightarrow W$ es una geodésica parametrizada con $\gamma(0) = p$, $\gamma(t_1) = q$, $t_1 \in I$ y $\alpha: [0, t_1] \rightarrow S$ es una curva parametrizada regular que une a p con q , tenemos que

$$l_\gamma \leq l_\alpha$$

donde l_α denota la longitud de la curva α . Además, si $l_\gamma = l_\alpha$, entonces, la traza de γ coincide con la traza de α entre p y q .

Demostración.

Sea V un entorno normal de p y sea \bar{W} la región cerrada delimitada por un círculo geodésico de radio r contenido en V . Sean (ρ, θ) las coordenadas polares geodésicas en $\bar{W} - L$ con centro en p tal que $q \in L$.

Supongamos que $\alpha((0, t_1)) \subset \bar{W} - L$ y definamos $\alpha(t) = (\rho(t), \theta(t))$. Inicialmente, obsérvese que

$$\sqrt{(\rho')^2 + G(\theta')^2} \geq \sqrt{(\rho')^2},$$

dándose la igualdad si y solamente si $\theta' = 0$; es decir, $\theta = \text{constante}$. Por lo tanto, la longitud $l_\alpha(\varepsilon)$ de α entre ε y $t_1 - \varepsilon$ satisface

$$\begin{aligned} l_\alpha(\varepsilon) &= \int_\varepsilon^{t_1 - \varepsilon} \sqrt{(\rho')^2 + G(\theta')^2} dt \geq \int_\varepsilon^{t_1 - \varepsilon} \sqrt{(\rho')^2} dt \\ &= \int_\varepsilon^{t_1 - \varepsilon} \rho' dt = \rho(t_1 - \varepsilon) - \rho(0 + \varepsilon) \\ &= \rho(t_1) - \rho(\varepsilon) - \rho(0) - \rho(\varepsilon) \\ &= \rho(t_1) - \rho(0) - 2\rho(\varepsilon) = l_\gamma - 2\varepsilon \end{aligned}$$

Obteniéndose la igualdad si y solo si $\theta = \text{constante}$ y $\rho' > 0$. Al hacer $\varepsilon \rightarrow 0$ en la expresión de arriba, deducimos que $l_\alpha \geq l_\gamma$, teniendo lugar la identidad si y solo si α es la geodésica radial $\theta = \text{constante}$ con una parametrización $\rho = \rho(t)$, donde $\rho'(t) > 0$. Se deduce que si $l_\alpha = l_\gamma$, entonces coinciden las trazas de α y γ entre p y q .

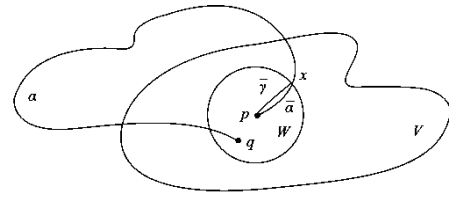
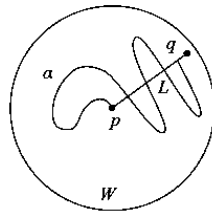


Figura 2.12-5 La traza entre dos puntos. **Figura 2.12-6 La traza fuera del contorno.**

Supongamos ahora que $\alpha([0, t_1])$ interseca a L y admitimos que el primer punto en que esto ocurre es, por ejemplo, $\alpha(t_2)$. Entonces, por el argumento previo, $l_\alpha \geq l_\gamma$ entre t_0 y t_2 , implicando $l_\alpha = l_\gamma$ que las trazas de α y γ coinciden. Como $\alpha([0, t_1])$ y L son compactos, existe un valor $\bar{t} \geq t_2$ tal que o bien es $\alpha(\bar{t})$ el último punto donde $\alpha([0, t_1])$ interseca a L o bien $\alpha([\bar{t}, t_1]) \subset L$ (fig. 2.12-5). En cualquier caso, al aplicar la situación precedente, deducimos las afirmaciones de la proposición.

Finalmente, supongamos que $\alpha([0, t_1])$ no está totalmente contenido en \bar{W} , sea $t_0 \in [0, t_1]$ el primer valor para el que $\alpha(t_0) = x$ pertenece a la frontera de \bar{W} . Sea $\bar{\gamma}$ la geodésica radial px y sea $\bar{\alpha}$ la restricción de la curva α al intervalo $[0, t_0]$. Resulta claro que $l_\alpha \geq l_\gamma$ (fig. 2.12-6)

Por el argumento previo, $l_\alpha \geq l_\gamma$. Como q es un punto del interior de \bar{W} , $l_\gamma \geq l_\gamma$. Concluimos entonces que $l_\alpha > l_\gamma$ y la demostración queda finalizada. ■

Proposición 2.12.5. *Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizada regular cuyo parámetro es proporcional a la longitud de arco. Admitamos que la longitud de arco entre cualquier pareja de puntos $t, \tau \in I$, es menor o igual que la longitud de arco de cualquier curva parametrizada que una $\alpha(t)$ con $\alpha(\tau)$. Entonces α es una geodésica.*

Demostración.

Sea $t_0 \in I$ un punto arbitrario de I y sea W el entorno de $\alpha(t_0) = p$ dado por la proposición (2.12.4). Sea $q = \alpha(t_1) \in W$. Partiendo del caso en el que se da la igualdad en la proposición (2.12.4), se deduce que α es una geodésica en (t_0, t_1) . En caso contrario, α tendría, entre t_0 y t_1 , una longitud mayor que la geodésica radial que una a $\alpha(t_0)$

con $\alpha(t_1)$, en contradicción con las hipótesis. Como α es regular, en virtud a la continuidad tenemos que α es una geodésica en t_0 . ■

2.13. PROPIEDADES DE LAS GEODÉSICAS y ENTORNOS CONVEXOS

Se demostrará como se deducen ciertos hechos relativos a las geodésicas (en particular, la proposición (2.11.1)) a partir del teorema general de existencia, unicidad y dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales para campos vectoriales.

Las geodésicas en una parametrización $x(u, v)$ vienen dadas a partir del sistema

$$u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0, \quad (25)$$

$$v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0,$$

Donde los Γ_{ij}^k son funciones de las coordenadas locales u y v . Poniendo $u' = \xi$ y $v' = \eta$, el sistema precedente puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \xi' &= F_1(u, v, \xi, \eta) \\ \eta' &= F_2(u, v, \xi, \eta) \\ u' &= F_3(u, v, \xi, \eta) \\ v' &= F_4(u, v, \xi, \eta) \end{aligned} \quad (26)$$

Donde $F_3(u, v, \xi, \eta) = \xi$, $F_4(u, v, \xi, \eta) = \eta$.

Es conveniente utilizar la siguiente notación: (u, v, ξ, η) para designar un punto de \mathbb{R}^4 , el cual lo representaremos como el producto cartesiano $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$; (u, v) va a denotar un punto del primer factor y (ξ, η) un punto del segundo factor.

Dado un punto $p = (u_0, v_0, \xi_0, \eta_0) \in U$, existe un entorno $V = V_1 \times V_2$ de p (donde V_1 es un entorno de (u_0, v_0) y V_2 es un entorno de (ξ_0, η_0)), existe un intervalo abierto I y una aplicación diferenciable $\alpha: I \times V_1 \times V_2 \rightarrow U$ tal que, fijado $(u, v, \xi, \eta) = (q, v) \in V$, se tiene entonces que $\alpha(t, q, v)$, $t \in I$, es la trayectoria de (26) que pasa por (q, v) .

Teorema 2.13.1. *Dado $p \in S$ existen números $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ y una aplicación diferenciable*

$$\gamma(-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times B_{\varepsilon_1} \rightarrow S, \quad B_{\varepsilon_1} \subset T_p(S)$$

tal que para $v \in B_{\varepsilon_1}$, $v \neq 0$, $t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ la curva $t \rightarrow \gamma(t, v)$ es la geodésica de S con $\gamma(0, v) = p$, $\gamma'(0, v) = v$ y, para $v = 0$, $\gamma(t, 0) = p$.

Se utilizó este resultado en la demostración de la proposición (2.12.1).

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{B}_\varepsilon(p) \subset V_1$. Sea $B_{\delta(q)}(0) \subset \bar{V}_q(0)$ el mayor disco abierto contenido en el conjunto $\bar{V}_q(0)$, constituido por la unión de $V_q(0)$ con sus puntos límite, y sea $\varepsilon_1 = \inf \delta(q)$, $q \in \bar{B}_\varepsilon(p)$. Claramente, $\varepsilon_1 > 0$. Por tanto, el conjunto

$$\mu = \{(q, v); q \in B_\varepsilon(p), v \in B_{\varepsilon_1}(0) \subset T_q(S)\}$$

está contenido en $V_1 \times V_2$, obteniendo el siguiente teorema

Teorema 2.13.1a. Dado $p \in S$, existen números positivos $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ y una aplicación diferenciable

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mu \rightarrow S$$

Donde

$$\mu = \{(q, v); q \in B_\varepsilon(p), v \in B_{\varepsilon_1}(0) \subset T_q(S)\},$$

Tal que $\gamma(t, q, 0) = q$, y, para $v \neq 0$, la curva

$$t \rightarrow \gamma(t, q, v), \quad t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$$

Es la geodésica de S que satisface $\gamma(0, q, v) = q$, $\alpha'(0, q, v) = v$.

Proposición 2.13.1. Dado $p \in S$, existe un entorno W de p en S y un número $\delta > 0$ tal que, para cada $q \in W$, \exp_q es un difeomorfismo en $B_\delta(0) \subset T_q(S)$ y $W \subset \exp_1(B_\delta(0))$; es decir, W es un entorno normal de todos sus puntos. (Do Carmo, 1995, Pág. 302)

Observación. Se deduce de la proposición previa que, dados dos puntos $q_1, q_2 \in W$, existe una única geodésica γ de longitud menor que δ que une a q_1 con q_2 .

Una cuestión natural relacionada con la proposición (2.13.1) consiste en saber si la geodésica de longitud menor que δ , que une dos puntos $q_1, q_2 \in W$, está contenida en W . Si es este el caso para cualquier par de puntos de W , decimos que W es convexo.

Decimos que una geodésica parametrizada que une dos puntos es mínima si su longitud es menor o igual que la de cualquier curva parametrizada, regular a trozos, que una estos puntos.

Proposición 2.13.2. Para cada $p \in S$ existe un número positivo ϵ con la propiedad siguiente: si una geodésica $\gamma(t)$ es tangente al círculo geodésico $S_r(p)$, $r < \epsilon$, en $\gamma(0)$, entonces, para $t \neq 0$ y pequeño, $\gamma(t)$ se halla fuera de $B_r(p)$ (fig. 2.13-1).

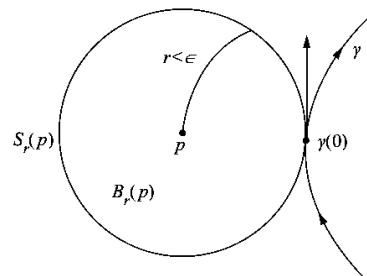


Figura 2.13–1 Tangente Circulo Geodésico.

Demostración.

Sea W el entorno de p que proporciona la proposición (2.13.1). Consideremos, para cada par (q, v) , $q \in W$, $v \in T_p(S)$, $|v| = 1$, la geodésica $\gamma(t, q, v)$ y pongamos, para cada par (q, v) fijo (fig. 2.13-2),

$$\exp_p^{-1} \gamma(t, q, v) = u(t), \quad F(t, q, v) = |u(t)|^2 = F(t).$$

Así, para cada (q, v) fijo, $F(t)$ es el cuadrado de la distancia del punto $\gamma(t, q, v)$ a p . Claramente, $F(t, q, v)$ es diferenciable. obsérvese que $F(t, p, v) = |vt|^2$.

Denotemos ahora mediante v^\perp el conjunto

$$v^\perp = \{(q, v), q \in W, v \in T_q(S), |v| = 1\}$$

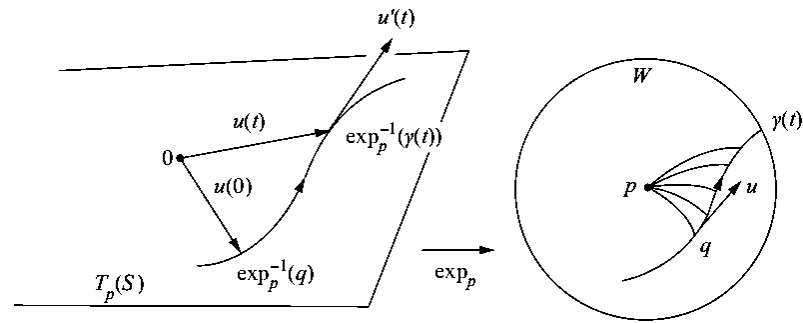


Figura 2.13–2 Geodésica Tangente al Circulo.

y definamos la función $Q: \nu^1 \rightarrow R$ por

$$Q(q, \nu) = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right|_{t=0}$$

Como F es diferenciable, Q es continua. Además, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= 2 \langle u(t), u'(t) \rangle, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= 2 \langle u(t), u''(t) \rangle + 2 \langle u'(t), u'(t) \rangle \end{aligned}$$

y en (p, ν)

$$u'(t) = \nu, \quad u''(t) = 0,$$

obtenemos para todo $\nu \in T_p(S)$, $|\nu|=1$.

Por continuidad, se deduce la existencia de un entorno $V \subset W$ tal que $Q(q, \nu) > 0$ para todo $q \in V$ y $\nu \in T_q(S)$ con $|\nu|=1$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset V$. Afirmamos entonces que ε satisface el enunciado de la proposición.

En efecto, sea $r < \varepsilon$ y sea $\gamma(t, q, \nu)$ una geodésica tangente a $S_r(p)$ en $\gamma(0) = q$. Introduciendo coordenadas polares geodésicas en torno a p , vemos que $\langle u(0), u'(0) \rangle = 0$ (fig. 2.13-3). Luego, $\partial F / \partial t(0) = 0$. cómo $F(0, q, \nu) = r^2$ y $(\partial^2 F / \partial t^2)(0) > 0$, tenemos que $F(t) > r^2$ para $t \neq 0$ y pequeño; por tanto, $\gamma(t)$ se halla fuera de $B_r(p)$. ■

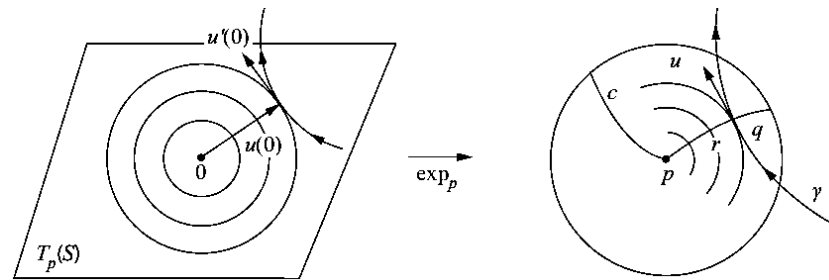


Figura 2.13–3 Geodésica polares tangente.

Proposición 2.13.3 (Existencia de entornos convexos). Para cada punto $p \in S$ existe un número $c > 0$ tal que $B_c(p)$ es convexo; es decir, dos puntos cualesquiera de $B_c(p)$ pueden unirse mediante una única geodésica mínima dentro de $B_c(p)$.

Demostración.

Sea ε como en la proposición (2.13.2). Elijamos δ y W como en la proposición (2.13.1) de forma que $\delta < \varepsilon/2$. tomemos $c < \delta$ tal que. demostremos que $B_c(p)$ es convexo.

Sean $q_1, q_2 \in B_c(p)$ y sea $\gamma: I \rightarrow S$ la geodésica con longitud menor que $2\delta < \varepsilon$ que une q_1 con q_2 . Resulta claro que $\gamma(I)$ está contenido en $B_c(p)$ y queremos demostrar que $\gamma(I)$ está contenido en $B_c(p)$. Supongamos lo contrario. Entonces existe un punto $m \in B_c(p)$, donde se alcanza la distancia máxima r de $\gamma(I)$ a p (fig. 2.13-4) en un entorno de m , los puntos de $\gamma(I)$ estarán en $B_c(p)$. Sin embargo, esto contradice la proposición (2.13.2). ■

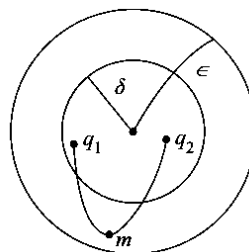


Figura 2.13–4 Distancia Máxima



CAPITULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. UBICACIÓN

El presente estudio de investigación, se realizó en el área de geometría diferencial, ecuaciones diferenciales ordinarias.

3.2. MATERIALES

Los resultados necesarios de acuerdo al tiempo se tienen resumido en la siguiente tabla:

Actividad	Trimestres 2017-2018											
	2017						2018					
	JUL	AG	SE	OC	NO	DI	EN	AG	SE	OC	NO	DI
Revisión de artículos y paper	X	X	X									
Revisión de la bibliografía		X	X	X				X	X		X	
Redacción del proyecto			X	X	X							
Revisión del proyecto					X	X						
Presentación del proyecto						X						
Revisión y aprobación de los jurados							X					
Obtención del borrador de tesis					X	X	X	X	X	X	X	
Sustentación de tesis												X

3.3. PRESUPUESTO

Los recursos utilizados para el desarrollo de este proyecto de investigación se han estimado aproximadamente en forma voluntaria.

3.4. MÉTODO

La investigación está basada en el resultado obtenidos en el libro de geometría diferencial global, el trabajo será ampliar y profundizar el libro.

Método de investigación:

El método que se utilizara en la presente investigación es lectura, análisis, síntesis, justificación, análisis e interpretación de los resultados de la investigación.



Diseño de investigación:

El diseño de investigación que se ha utilizado es de tipo descriptivo que consiste en la exploración.

Técnicas:

Desarrollo de lectura comprensiva, análisis, comparación y consulta, de libros, artículos, vía web y libros virtuales y en entre otros.

Estrategias:

La investigación presente se ha utilizado las siguientes estrategias como:

Analizar el problema de investigación, tomar apuntes, y subrayar la información necesaria para la investigación propuesto.



CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo, se expone el resultado fundamental de la investigación, se presenta superficies completas, superficies conexas y superficies no prolongables, en el cual demuestra el resultado importante de la existencia de una geodésica mínima, a partir de una distancia intrínseca.

El resultado de la investigación es demostrar con más detalles y una comprensión mejorada, por tanto, dados dos puntos cualesquiera $p, q \in S$ de una superficie completa S , existe una geodésica que une los puntos p y q , que es además mínima (es decir, su longitud es menor o igual que cualquier otra curva que una los puntos p y q). La demostración de este resultado fundamental se realizó por los matemáticos Hopf y Rinow. Este resultado constituye la razón principal por la que las superficies completas son más adecuadas que las no prolongables para la geometría diferencial.

4.1. SUPERFICIES COMPLETAS.

De aquí en adelante, todas las superficies a considerar serán regulares y conexas. En la siguiente definición se presenta una formulación más precisa del hecho de que una superficie no pueda prolongarse, con los ejemplos de cada definición y proposiciones se mencionan en los resultados de la investigación. Por ejemplo, el Plano, Cono, Cilindro y Esfera.

Definición 4.1.1 (Conexa). Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es conexo cuando no es posible escribir $C = U_1 \cup U_2$ donde U_1, U_2 son subconjuntos abiertos no vacíos de S y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Proposición 4.1.1. Sea un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ conexo y sea $A \subset C$ al mismo tiempo abierto y cerrado en C . Entonces $A = \emptyset$ o $A = C$.

Prueba.

Supongamos que $A = \emptyset$ o $A = C$ y se escribe como $C = A \cup (C - A)$. Como A es cerrado en C , $C - A$ es abierto en C . Así, C es la unión de conjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos, a saber, C y $C - A$. Esto contradice la conexidad de C . ■

Definición 4.1.2 (Superficies prolongable). Se dice que una superficie regular (conexa) S es prolongable si existe una superficie regular (conexa) \bar{S} tal que $S \subset \bar{S}$ como subconjunto propio. Si no existe tal \bar{S} , se dice que S es no prolongable.

La definición (4.1.2), menciona acerca de superficies prolongables, para superficies no prolongables es demasiado amplio para esperar resultados importantes e interesantes, la más adecuada sería la siguiente definición (4.1.3).

Definición 4.1.3 (Superficie completa). Se dice que una superficie regular S es completa si para cada punto $p \in S$, cualquier geodésica parametrizada $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow S$ de S , que comience en $p = \gamma(0)$, puede prolongarse a una geodésica parametrizada $\bar{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow S$, definida en toda la recta real \mathbb{R} .

En otras palabras, S es completa cuando la aplicación $\exp_p: T_p(S) \rightarrow S$ (sección. 2.10) está definida para cada $v \in T_p(S)$, y esto sucede en todos los puntos $p \in S$.

Observación. La definición (4.1.3) indica que una superficie S es geodésicamente completa en p sí y solo si toda geodésica que pase por p se puede extender indefinidamente; es decir, tiene por dominio a todo \mathbb{R} .

Ejemplo 4.1.1.

Consideremos el cono de la figura (4.1-1). En este caso, las generatrices del cono son geodésicas que no pueden extenderse más allá del vértice, lo cual indica que para cada p la aplicación exponencial no está definida en todo $T_p S$.

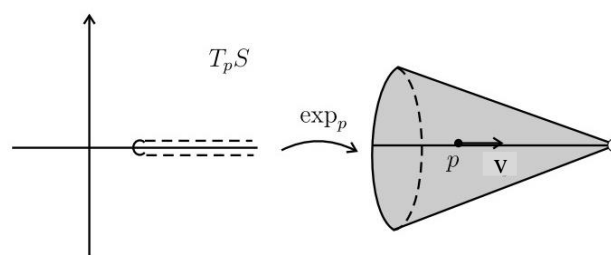


Figura 4.1–1 El cono y su aplicación exponencial.

Ejemplo 4.1.2

Una esfera es una superficie completa, pues sus geodésicas parametrizadas (cuyas trazas son los círculo máximos de la esfera) están definidas para cada valor real.

Ejemplo 4.1.3.

En el plano la curvatura gaussiana es $K=0$ y los símbolos de Christoffel se anulan, lo que implica que las curvas geodésicas del plano son las rectas. Así, el plano resulta ser una superficie completa.

Ejemplo 4.1.4.

El cono menos el vértice no es una superficie completa, pues prolongando suficientemente una generatriz (que es una geodésica) alcanzamos el vértice, que no pertenece a la superficie.

Ejemplo 4.1.5

El cilindro también es una superficie completa en virtud que sus geodésicas, los círculos, rectas y hélices, están definidas en cada valor real.

Ejemplo 4.1.6.

Una superficie menos un punto $S - \{p\}$, una geodésica γ de S . al tomar un punto q , próximo a p sobre γ (fig. 4.1-2), existe en $S - \{p\}$ una geodésica parametrizada que comienza en q y no puede prolongarse hasta p . Por tanto, la esfera menos un punto y el cilindro menos un punto no son superficies completas.

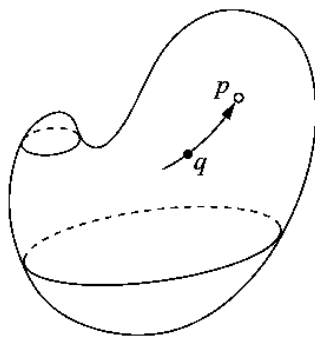


Figura 4.1-2 Geodésica entre dos puntos.

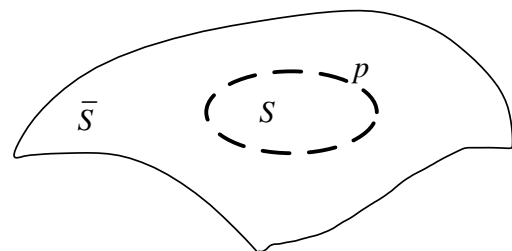


Figura 4.1-3 Superficie $S \subset \bar{S}$.

Proposición 4.1.2. Una superficie completa S es no prolongable.

Demostración.

Por la definición (4.1.2), Si se asume que S es prolongable para obtener a una contradicción. Decir que S es prolongable significa que existe una superficie regular (conexa) \bar{S} con $S \subset \bar{S}$. al ser S una superficie regular, S es abierta en \bar{S} .

La frontera $\text{Bd } S = \partial S$ (*Bd es la abreviatura de Boundary, frontera en inglés*) (anexo, def. A-3) de S en \bar{S} es no vacía; en caso contrario $\bar{S} = S \cup (\bar{S} - S)$ sería la unión de los los abiertos disjuntos S y $\bar{S} - S$, lo que contradice la conexidad de \bar{S} (anexo, def. B-3). Por tanto, existe $p \in \partial S$ y, como S es abierta en \bar{S} , $p \notin S$ (fig. 4.1-3).

Sea $\bar{V} \subset \bar{S}$ un entorno de p en \bar{S} tal que cada $q \in \bar{V}$ puede conectarse con p por una única geodésica en \bar{S} (proposición 2.10.2). Como $p \in \partial S$, algún $q_0 \in \bar{V}$ pertenece a S . Sea $\bar{\gamma}: [0,1] \rightarrow \bar{S}$ una geodésica de \bar{S} , con $\bar{\gamma}(0) = p$ y $\bar{\gamma}(1) = q$. Sea $\alpha: [0, \varepsilon] \rightarrow \bar{S}$ definida por $\alpha(t) = \bar{\gamma}(1-t)$, es claro que α es una geodésica de S , con $\alpha(0) = q_0$, cuya extensión a toda la recta real \square debería pasar por p para $t=1$ (fig. 4.1-2). Como $p \notin S$, esta geodésica no puede prolongarse, lo que contradice la hipótesis de completitud. ■

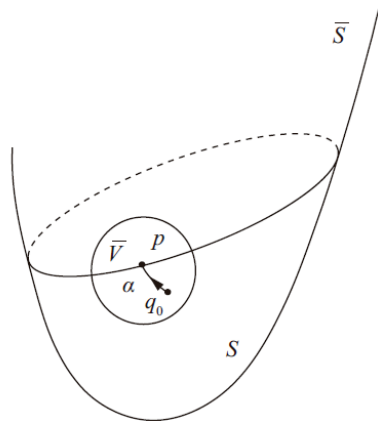


Figura 4.1-4 Única Geodésica.

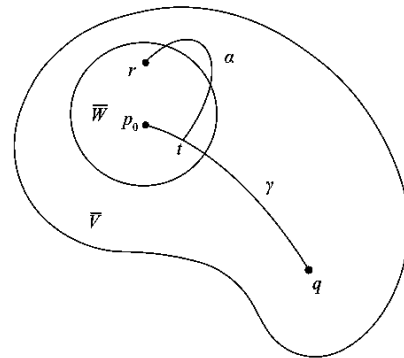


Figura 4.1-5 Geodésica α .

Ejemplo 4.1.7. Sea \bar{W} un entorno de p_0 en \bar{S} tal que dos puntos cualesquiera de \bar{W} pueden unirse mediante una geodésica de \bar{S} . Probaremos que $\bar{W} - \{p_0\} \subset S$. En efecto, los puntos de γ pertenecen a S . Por otro lado, un punto $r \in \bar{W}$ que no pertenece a γ o a su prolongación puede unirse a un punto t de γ , $t \neq p_0$, $t \in \bar{W}$, mediante una geodésica α , diferente de γ (véase Figura 4.1-3). Finalmente, los puntos de la prolongación de γ ,

exceptuando a p_0 , pertenecen también a S ; en caso contrario, deberían pertenecer a la frontera de S .

Proposición 4.1.3. *Dados dos punto p y $q \in S$ de una superficie regular (conexa) S , existe una curva parametrizada diferenciable a trozos que une a p con q .*

Demostración.

Al ser S conexa, existe una curva continua $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$. Sea $t \in [a, b]$ y sea I_t un intervalo abierto en $[a, b]$ que contiene a t , tal que $\alpha(I_t)$ está contenido en una curva de $\alpha(t)$. Podemos entonces tomar la unión $\bigcup I_t$, $t_i \in [a, b]$, tal que $\alpha(t_i) \in U_i \cap U_{i+1}$, así recubre $[a, b]$ para todo punto t , por compacidad, $[a, b]$ todavía puede recubrirse con un número finito I_1, \dots, I_n de tales intervalos.

Podemos descomponer $I = [a, b]$ por puntos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$ de tal forma que $[t_i, t_{i+1}]$ está contenido en algún I_j , $j = 1, \dots, n$. por tanto, $\alpha(t_i, t_{i+1})$ este contenido en algún entorno coordenado (Fig. 4.1-6).

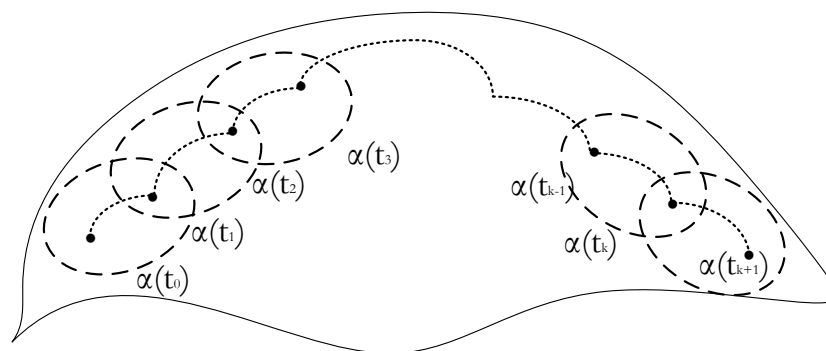


Figura 4.1-6 Curva Diferenciable a Trozos.

Como $p = \alpha(t_0)$ y $\alpha(t_1)$ se hallan en un mismo entorno coordenado, es posible unirlos mediante una curva diferenciable, a saber, la imagen a través de X de una curva diferenciable en $U \subset \mathbb{R}^2$ que una $X^{-1}(\alpha(t_0))$ con $X^{-1}(\alpha(t_1))$.

Mediante este proceso, unimos $\alpha(t_i)$ con $\alpha(t_{i+1})$, $i = 0, \dots, k$, mediante una curva diferenciable. Se obtiene así una curva parametrizada, diferenciable a trozos, que une $p = \alpha(t_0)$ con $q = \alpha(t_{k+1})$, concluyendo la demostración de la proposición. ■



Observación. Aquí se denota por $\alpha_{p,q}$, diferenciable a trozos que une p y q dos puntos de una superficie regular S ; siendo $l(\alpha_{p,q})$ su longitud de cada una de estas curvas.

Definición 4.1.3. La distancia (intrínseca) $d(p, q)$ del punto $p \in S$ al punto $q \in S$ es el número

$$d(p, q) = \inf l(\alpha_{p,q}),$$

donde se toma el ínfimo sobre todas las curvas parametrizadas y diferenciables a trozos que unen p y q

Ahora probaremos algunas propiedades que son importante para llegar el objetivo de la demostración.

Proposición 4.1.4. La distancia d así definido cumple las propiedades siguientes,

- (1). $d(p, q) = d(q, p)$, (Simetría)
- (2). $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$, (Desigualdad Triangular)
- (3). $d(p, q) \geq 0$, (Definida Positiva)
- (4). $d(p, q) = 0$ sí y solo sí $p = q$. (No degeneración)

donde p, q, r son puntos arbitrarios de S .

Demostración.

Para la propiedad (1), Observe que cada curva parametrizada

$$\alpha : [a, b] \rightarrow S$$

Con $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$, nos proporciona una curva parametrizada $\bar{\alpha} : [a, b] \rightarrow S$, definida por $\bar{\alpha}(t) = \alpha(a - t + b)$. Entonces tenemos que $\bar{\alpha}(a) = \alpha(a - a + b) = \alpha(b) = q$ y $\bar{\alpha}(b) = \alpha(a - b + b) = \alpha(a) = p$, por tanto $l(\alpha_{p,q}) = l(\bar{\alpha}_{p,q})$.

Para la propiedad (2), Sean $A = \{l(\alpha_{p,r})\}$, $B = \{l(\alpha_{p,q})\}$ y $C = \{l(\alpha_{q,r})\}$, de esta manera, $\{l(\alpha_{p,q}) + l(\alpha_{q,r})\} = B + C \subset A$, y con las propiedades de los números reales, se tiene que dados dos conjuntos $B + C$ y A , donde $B + C \subset A$, entonces $\inf(B + C) \geq \inf(A)$ también se escribe como

$$\inf(A) \leq \inf(B + C) = \inf(B) + \inf(C)$$

$$\inf_{\alpha} \{l(\alpha_{p,r})\} \leq \inf_{\alpha} \{l(\alpha_{p,q})\} + \inf_{\alpha} \{l(\alpha_{q,r})\}$$

y por la definición (4.1.3) de la distancia intrínseca, $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$.

Para la propiedad (3), $l(\alpha_{p,q})$ denota la longitud de $\alpha_{p,q}$, y por eso, $l(\alpha_{p,r}) \geq 0$. se deduce que el ínfimo de un conjunto de números positivos es un número positivo o cero. Luego, $l(\alpha_{p,q}) = d(p, q) \geq 0$.

Para la propiedad (4), (\Rightarrow) Sea $p = q$. Entonces, tomando la curva constante $\alpha: [a, b] \rightarrow S$, definida por $\alpha(t) = p$, $t \in [a, b]$, obtenemos $l(\alpha) = 0$, por el ítem anterior se sigue que $d(p, q) = 0$.

Para probar que $d(p, q) = 0$ implica que $p = q$, entonces procedemos de la siguiente manera.

(\Leftarrow) Supongamos que $d(p, q) = \inf l(\alpha_{p,q}) = 0$ y $p \neq q$. sea V un entorno de p en S , con $q \notin V$ y tal que cada punto de V puede unirse a p mediante una única geodésica dentro de V . Sea $B_r(p) \subset V$ la región delimitada por un círculo geodésico de radio r , centrado en p y contenido en V . Por la definición de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < r$, existe una curva parametrizada regular a trozos $\alpha: [a, b] \rightarrow S$ que une p y q con $l(\alpha) < \varepsilon$. Como $\alpha([a, b])$ es conexo y $q \notin B_r(p)$ existe un punto $t_0 \in [a, b]$ tal que $\alpha(t_0)$ pertenece a la frontera de $B_r(p)$. Se deduce que $l(\alpha) \geq r > \varepsilon$, lo que constituye una contradicción. Por tanto, $p = q$ ■

Observando las propiedades anteriores, tenemos que:

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r) \quad \text{y} \quad d(r, q) \leq d(r, p) + d(p, q);$$

Luego,

$$d(p, r) - d(p, q) \leq d(q, r) \quad \text{y} \quad d(r, q) - d(r, p) \leq d(p, q);$$

$$-d(p, q) \leq d(q, r) - d(p, r) \quad \text{y} \quad d(q, r) - d(p, r) \leq d(p, q);$$

Entonces se deduce que:

$$-d(p, q) \leq d(p, r) - d(r, q) \leq d(p, q)$$

donde sigue que:

Corolario 4.1.1. $|d(p, r) - d(r, q)| \leq d(p, q)$.

Proposición 4.1.5. Si fijamos un punto $p_0 \in S$, entonces la función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(p) = d(p_0, p)$, $p \in S$, es continua en S .

Demostración.

Tenemos que demostrar que para cada $p \in S$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $q \in B_\delta(p) \cap S$, entonces $|f(p) - f(q)| = |d(p_0, p) - d(p_0, q)| < \varepsilon$, la siguiente notación $B_\delta(p) \subset \mathbb{R}^3$ define una bola abierta de \mathbb{R}^3 centrado en p y radio δ , tomemos $\varepsilon' < \varepsilon$ tal que la aplicación exponencial $\exp_p : T_p(S) \rightarrow S$, es un difeomorfismo en el disco $B_{\varepsilon'}(0) \subset T_p(S)$, donde O es el origen de $T_p(S)$, y pongamos $V = \exp_p(B_{\varepsilon'}(O))$, como $B_\delta(p) \subset \mathbb{R}^3$ tal que $B_\delta(p) \cap S \subset V$ para $q \in B_\delta(p) \cap S$, tenemos por el corolario (4.1.1) de la proposición anterior que

$$|d(p_0, p) - d(p_0, q)| \leq d(p, q) ,$$

además p es el centro de $B_\delta(p)$ y $B_\delta(p) \cap S$. Así, $d(p, q) < \varepsilon'$, y, por tanto,

$$|d(p_0, p) - d(p_0, q)| \leq d(p, q) < \varepsilon' < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Definición 4.1.4 (Superficie Cerrada). Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es cerrada si todo punto de acumulación de S pertenece a S .

Intuitivamente, S es cerrada si contiene los límites de todas las sucesiones convergentes.

Proposición 4.1.6. Una superficie cerrada $S \subset \mathbb{R}^3$ es completa.

Demostración.

Sea $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow S$ una geodésica parametrizada por longitud de arco de S , tal que $\gamma(0) = p \in S$. Para demostrar que S es completa, debemos demostrar que es posible prolongar γ a una geodésica $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$.

Por la existencia y unicidad de geodésicas (proposición 2.10.5), es posible prolongar $\bar{\gamma}$ a un entorno de S_0 en \square . Sí podemos demostrar que este conjunto es cerrado en \square (que es conexo), será posible entonces definir $\bar{\gamma}$ en todo \square , supongamos que $\bar{\gamma}$ está definida en $[0, s_0)$ y demostraremos que $\bar{\gamma}$ está definida en $s = s_0$.

Consideremos una sucesión $\{s_n\} \rightarrow s_0$, con $s_n < s_0$, $n = 1, 2, \dots$ como s_n converge a s_0 entonces $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que sí $n, m > n_0$, entonces $|s_n - s_m| < \varepsilon$. Denotemos por \bar{d} la distancia en \square^3 y observamos que sí $p, q \in S$, entonces $d(p, q)$. Esta denotado de la siguiente forma

$$\bar{d}(\bar{\gamma}(s_n), \bar{\gamma}(s_m)) \leq d(\bar{\gamma}(s_n), \bar{\gamma}(s_m)) = l(\bar{\gamma}_{s_n, s_m}) = |s_n - s_m| < \varepsilon$$

se sigue que, $\{\bar{\gamma}(s_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en \square^3 ; y por tanto converge a un punto $q \in \square^3$ (anexo, prop. A-2).

Como q es un valor límite de $\{\bar{\gamma}(s_n)\}$ y S es cerrada, concluimos $q \in S$, de hecho $\{\bar{\gamma}(s_n)\}$ converge en S . lo que prueba nuestra afirmación.

Sean ahora W y \mathcal{D} el entorno de q y el número positivos dados por la proposición (2.12.1). Sean $\bar{\gamma}(s_n), \bar{\gamma}(s_m) \in W$ para n y m suficientemente grandes tales que $|s_n - s_m| < \delta$, y sea γ la única geodésica con $l(\gamma) < \delta$ que une $\bar{\gamma}(s_n)$ y $\bar{\gamma}(s_m)$. Esto implica que la traza de $\bar{\gamma}$ coincide con γ .

Como $\exp_{\{\bar{\gamma}(s_m)\}}$ es un difeomorfismo en $B_\delta(O)$ y $W \subset \exp_{\bar{\gamma}(s_m)}(B_\delta(O))$, γ extiende a $\bar{\gamma}$ hasta q , en consecuencia, $\bar{\gamma}$ está definida en $s = s_0$. ■

Ahora de la proposición (4.1.5) se sigue que:

Corolario 4.1.2. *Una superficie compacta es completa.*

Prueba.

Sea $\{p_i\}$ una sucesión de Cauchy en S . Entonces $\overline{\{p_i\}}$ es un conjunto cerrado y acotado, por tanto, es compacto. Esto implica que la sucesión debe tener una subsucesión

convergente a un punto $p \in S$. Como la sucesión es de Cauchy, es fácil ver que toda la sucesión converge a p .

Ejemplo 4.1.8. El recíproco de la proposición (4.1.5) es falso. Por ejemplo, se ve fácilmente que un cilindro recto (infinito), apoyando sobre una curva plana asintótica a un círculo, es una superficie completa, toda geodésica puede ser prolongable para todo \mathbb{R} , además no es cerrada, entonces podemos tomar una sucesión de puntos sobre el cilindro que converge para un punto sobre el círculo. (fig. 4.1-7).

Observación. Una geodésica γ uniendo los puntos $p, q \in S$ es mínima si su longitud $l(\gamma)$ es menor o igual que la longitud de cualquier curva regular a trozos que una p y q (sección (2.12)). Esto equivale a decir que $l(\gamma) = d(p, q) = \inf(\alpha_{p,q})$, pues dada una curva diferenciable a trozos α que une p y q , podemos encontrar una curva regular a trozos que une p y q la cual es más corta (o al menos no más larga) que α .

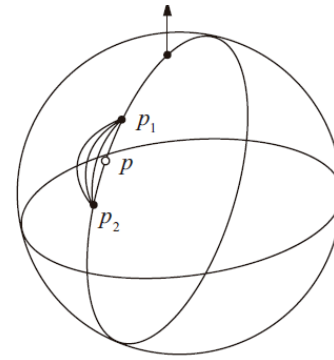
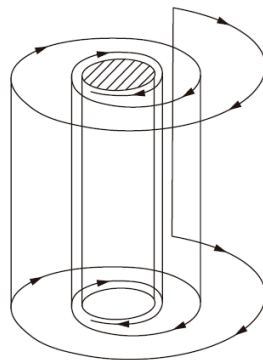


Figura 4.1-7 S completa no compacta. **Figura 4.1-8** Geodésicas que una p_1 y p_2

Ejemplo 4.1.9. Sea $S^2 - \{p\}$ la superficie constituida por la esfera S^2 menos el punto $p \in S^2$. Al tomar, sobre el meridiano que pasa por p , dos puntos p_1 y p_2 , simétricos con respecto a p y suficientemente próximos a p , comprobamos que no existe una geodésica mínima que una p_1 y p_2 en la superficie $S^2 - \{p\}$ (fig. 4.1-8).

El principal resultado de esta investigación es que tal geodésica siempre existe si la superficie es completa.

Teorema 4.1.1. Sea S una superficie completa. Dados dos puntos $p, q \in S$, existe una geodésica mínima que une p y q .

Demostración.

Sea $B_\delta(0) \subset T_p(S)$ un disco de radio δ , centrado en el origen O del plano tangente $T_p(S)$ y contenido en un entorno $U \subset T_p(S)$ del punto O , donde la \exp_p es un difeomorfismo. Denotemos $B_\delta(p) = \exp_p(B_\delta(0))$. Como la frontera $\partial B_\delta(p)$ es un conjunto compacto su imagen por la aplicación exponencial es continua del conjunto compacto $\partial B_\delta(p) = \Sigma$.

Como la función distancia es continua (proposición (4.1.4) entonces $d(x, q)$ y $x \in \Sigma$ alcanza el mínimo, esto es, existe un punto $x_0 \in \Sigma$ del conjunto compacto Σ . El punto x_0 se puede escribir en la forma

$$d(x_0, q) \leq d(x, q) \quad \forall x \in \Sigma,$$

Así, el punto x_0 puede ser escrito como

$$x_0 = \exp_p(\delta v), \quad |v| = 1, \quad v \in T_p(S).$$

Sea γ la geodésica parametrizada por la longitud de arco, definida por (fig. 4.1-9)

$$\gamma(s) = \exp_p(sv)$$

De hecho, γ está definida para cada $s \in \mathbb{R}$, como S es completa. En particular, sea $r = d(p, q)$ la distancia entre los puntos p y q , γ está definida en el intervalo $[0, r]$.

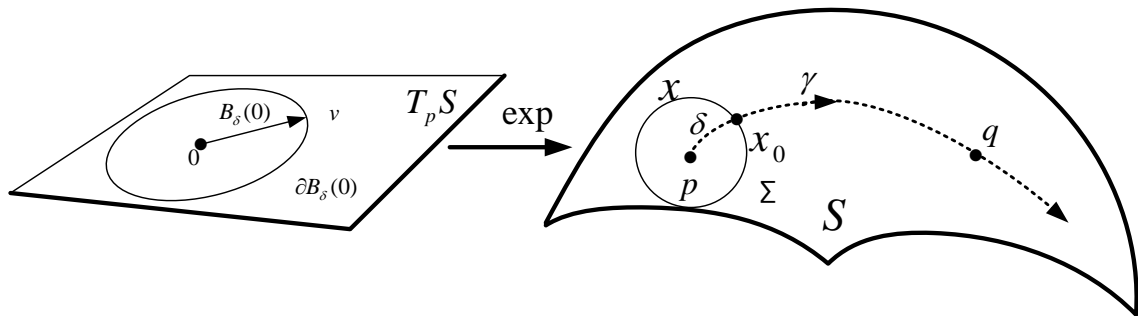


Figura 4.1-9 Geodésica parametrizada por longitud de arco.

vamos a probar que $\gamma(r) = q$, entonces γ debe ser una geodésica que une p y q , la cual es mínima, pues $l(\gamma) = r = d(p, q)$. Notamos que es suficiente probar que sí $s \in [\delta, r]$, entonces

$$d(\gamma(s), q) = r - s \quad \forall s \in [\delta, r] \quad (27)$$

La ecuación (26) implica, para $s = r$, que $d(\gamma(r), q) = r - r = 0$ y por tanto $\gamma(r) = q$, que es lo que queríamos demostrar.

Para probar la ecuación (26), primero mostraremos que satisface para $s = \delta$. Con efecto, toda curva que une p a q interseca Σ . Denotando por x un punto cualquiera de Σ , tenemos:

$$\begin{aligned} r = d(p, q) &= \inf l(\alpha_{p,q}) = \inf \left\{ \inf l(\alpha_{p,x}) + \inf l(\alpha_{x,q}); x \in \Sigma \right\} \\ &= \inf \{ d(p, x) + d(x, q); x \in \Sigma \} \\ &= \inf \{ \delta + d(x, q); x \in \Sigma \} \\ &= \delta + \inf \{ d(x, q); x \in \Sigma \} \\ &= \delta + d(x_0, q) \end{aligned}$$

Luego, $r = \delta + d(x_0, q)$. Ósea, $d(x_0, q) = d(\gamma(\delta), q) = r - \delta$, así la ecuación (26) vale para $s = \delta$.

Para mostrar que la ecuación (26) vale para $\delta < s < r$ definimos el conjunto

$$A = \{s \in [\delta, r]; \text{donde la ecuación (26) se satisface}\}$$

Basta probar que $A \subset [0, r]$ es un conjunto cerrado y abierto, pues como $[\delta, r]$ es conexo, dado por la proposición (4.1.1) tenemos que $A = \emptyset$ o $A = [\delta, r]$, sabemos que $\delta \in A$, por tanto nos restara apenas qué $A = [\delta, r]$.

De hecho, A es cerrado. Si $s_k \in A$ con $s_k \rightarrow s_0$ entonces $d(\gamma(s_k), q) = r - s_k$ y por la continuidad de la función distancia tenemos que $d(\gamma(s_0), q) = r - s_0$ y por tanto $s_0 \in A$.

Veamos ahora que A es abierto. Sea $s_0 \in A$ mostraremos que vale la ecuación (26) se da para $s_0 + \delta'$ y $s_0 \in [\delta, r]$, con $\delta' > 0$ y suficientemente pequeño.

Sea $B_{\delta'}(O)$ un disco del plano tangente $T_{\gamma(s_0)}(S)$, con centro en el origen de este plano y contenido en un entorno U' , en donde $\exp_{\gamma(s_0)}$ es un difeomorfismo.

Sea

$$B_{\delta'}(\gamma(s_0)) = \exp_{\gamma(s_0)}(B_{\delta'}(O)) \quad \text{y} \quad \Sigma' = \partial(B_{\delta'}(\gamma(s_0))).$$

Para $x' \in \Sigma'$, la función continua $d(x', q)$ alcanza su mínimo en $x_0 \in \Sigma'$ (fig. 4.1-10).

Como en el caso previo se tiene entonces que

$$\begin{aligned} d(\gamma(s_0), q) &= \inf l(\alpha_{\gamma(s_0), q}) = \inf \left\{ \inf l(\alpha_{\gamma(s_0), x'}) + \inf(\alpha_{x', q}); x \in \Sigma \right\} \\ &= \inf \{d(\gamma(s_0), x') + d(x', q); x \in \Sigma\} \\ &= \inf \{\delta' + d(x', q); x \in \Sigma\} \\ &= \delta' + \inf \{d(x', q); x \in \Sigma\} \\ &= \delta' + d(x'_0, q) \end{aligned}$$

Como la ecuación (26) se satisface en s_0 , tenemos que $d(\gamma(s_0)) = r - s_0$. por lo tanto,

$$d(x'_0, q) = r - s_0 - \delta' \quad (28)$$

Además, puesto que

$$d(p, x'_0) \geq d(p, q) - d(q, x'_0)$$

Obtenemos de la ecuación (27)

$$d(p, x'_0) \geq r - (r - s_0) + \delta' = s_0 + \delta'$$

Obsérvese ahora que la curva que va de p a $\gamma(s_0)$ a través de γ y de $\gamma(s_0)$ a x'_0 . a través de un radio geodésico de $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ tiene una longitud igual a $s_0 + \delta'$.

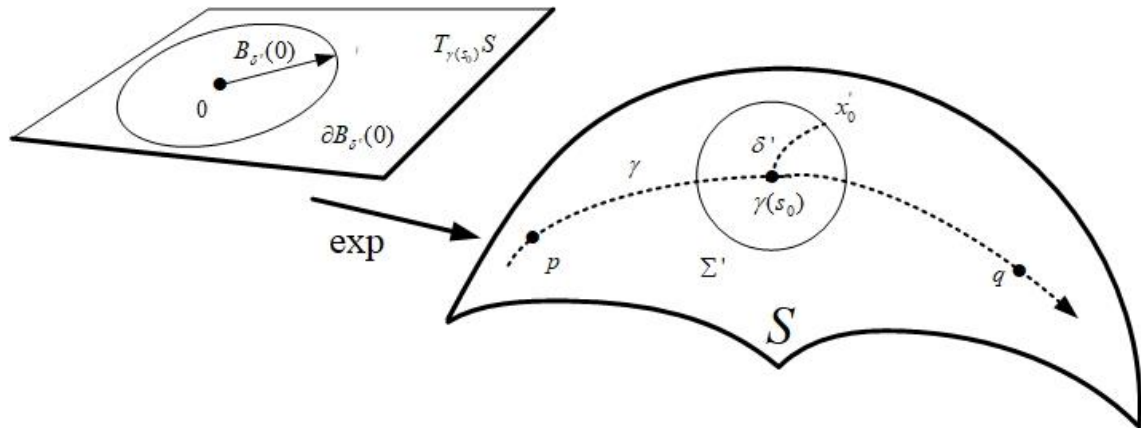


Figura 4.1–10 Geodésica alcanza su mínimo en x_0 .

cómo

$$d(p, x'_0) \geq s_0 + \delta' ,$$

esta curva, que une p y x'_0 , tiene longitud mínima. Se deduce entonces (proposición (2.13.2)) que es una geodésica, luego es regular en todos sus puntos. Por lo tanto, debe coincidir con γ ; luego, $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$. Puede así escribirse la ecuación (27) en el siguiente modo

$$d(\gamma(s_0 + \delta'), q) = r - (s_0 + \delta') ,$$

que es exactamente la ecuación (27) para $s = s_0 + \delta'$.

Esto prueba que nuestra afirmación, concluyendo la demostración. ■



V. CONCLUSIONES

En conclusión, el trabajo de poder construir un conocimiento desde la definición de superficie regular hasta la demostración del teorema de Hopf Rinow, fue interesante y se obtuvieron resultado como:

- ✓ La demostración detallada de la existencia de una geodésica mínima en una superficie completa.
- ✓ El estudio de la existencia de entornos convexos para dos puntos cualesquiera se une mediante una geodésica mínima.
- ✓ El ejemplo de la geodésica se mostró claramente que la esfera menos el punto "p" sobre el meridiano no existe una geodésica mínima.
- ✓ Toda superficie completa constituye que son más adecuadas que las superficies no prolongables, también que toda superficie conexa es completa pero no toda superficie completa es conexa.



VI. RECOMENDACIONES

- ✓ Se recomienda a los estudiantes de ciencias físico matemáticas y en general a los que están investigando a esta rama de investigación de geometría diferencial, que profundicen la investigación para las superficies no prolongables.
- ✓ Este trabajo de investigación se realizó la demostración con superficies completas, la recomendación para los investigadores de esta rama es investigar para superficies no completa y que sucede, será que también existirán geodésicas mínimas.
- ✓ Se deja como trabajo a futuro el estudio de superficies prolongables, de igual forma un estudio más riguroso del Teorema de Hopf Rinow pues se ha desarrollado sólo una pequeña parte de las numerosas propiedades que este puede poseer.



VII. REFERENCIAS

- [1]. Manfredo, P. do Carmo, (1995). Geometría Diferencial de Curvas y Superficies, tercera edición, Alianza Editorial.
- [2]. Marco Abate y Francesca Tovena, (2011). Geometría Differenziale, Springer-Verlag Italia.
- [3]. Marco Abate y Francesca Tovena, (2006). curve e superfici, Springer-Verlag Italia milano.
- [4]. Hopf, Heinz; Rinow, W.: Uber den Begriff der vollstandigen differentialgeometrischen Flache. Comm. Math. Helv. 3(1931), 209-225.
- [5]. D. Bao, S. Chern, Z. Shen (1991): An Introduction to Riemann Finsler Geometry, Springer Verlag New York , Inc.
- [6]. Barret O Neil, (1966). Elementary Differential Geometry, Academic Press, Inc. (London) LTD.
- [7]. Bruno Nunes, (2010). Geoemtria Diferencial de Superficies e o Teorema de Gauss – Bonnet, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [8]. Keti Tenenblant, (2008). Introducao a Geometria Diferencial, segunda edicao, Editora Edgard Blucher Ltda.
- [9]. A.V Pogorelov (1977). Geometría diferencial, Editorial Mir Moscu.
- [10]. Joaquin Perez Munoz, (2016). Curvas y superficies, Universidad granada.
- [11]. Rofrigo Vargas, (2010). Geometría diferencial problemas resueltos, Universidad Católica de Chile.



- [12]. Óscar a. Palmas velasco j. Guadalupe reyes victoria, (2012). Curso de geometría diferencial, Facultad de Ciencias, UNAM.

- [13]. Gabriela Jeronimo, Juan Sabia y Susana Tesauri, (2008). Algebra lineal, Universidad de Buenos Aires , Facultad de Ciencias Matematicas.

- [14]. Climaco Ccolque Taipe, (2013). Geometria Diferencial I con Problemas Resueltos, Universidad Nacional del Altiplano, Editorial Puno S.E.

- [15]. Angel Montesdeoca. Apuntes de Geometria Diferencial de Curvas y Superficies.

- [16]. Antonio F. Costa J.M. Gamboa Ana M. Porto. Notas de Geometria diferencial de Curvas y Superficies. Sanz y Torres, S.L.

ANEXOS

A. PRELIMINARES.

Definición A.1. Una sucesión $p_1, \dots, p_i, \dots \in \mathbb{R}^n$ converge a $p_0 \in \mathbb{R}^n$ si dado un $\varepsilon > 0$, existe un índice i_0 de la sucesión tal que $p_i \in B_\varepsilon(p_0)$ para todo $i > i_0$. En este caso, p_0 es el límite de la sucesión $\{p_i\}$, lo que se denota por $\{p_i\} \rightarrow p_0$.

Proposición A.1. Una aplicación $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en $p_0 \in U$ si y solo si para cada sucesión convergente $\{p_i\} \rightarrow p_0$ en U , la sucesión $\{F(p_i)\}$ converge a $F(p_0)$.

Definición A.2. Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si cada punto límite de F pertenece a F . La clausura de $A \subset \mathbb{R}^n$, que se denota por \bar{A} , es la unión de A con sus puntos límite.

Definición A.3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. La frontera $Bd A = \partial A$ (Bd es la abreviatura de la palabra inglesa boundary) de A es el conjunto de los puntos p en \mathbb{R}^n tales que cada entorno de p contiene puntos de A y puntos de $\mathbb{R}^n \rightarrow A$.

Definición A.4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que $V \subset A$ es un conjunto abierto en A si existe un conjunto abierto U en \mathbb{R}^n tal que $V = U \cap A$. Un entorno de $p \in A$ en A es un conjunto abierto de A que contiene a p .

Definición A.5. Una sucesión $\{p_i\}$, $p_i \in \mathbb{R}^n$, es una sucesión de Cauchy si, dado un $\varepsilon > 0$, existe un índice i_0 tal que la distancia $|p_i - p_j| < \varepsilon$ para todos los $i, j > i_0$.

Proposición A.2. Una sucesión $\{p_i\}$, $p_i \in \mathbb{R}^n$, converge si y solo si es una sucesión de Cauchy.

B. CONJUNTOS CONEXOS.

Definición B.1. Una curva continua $\alpha: [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ se denomina un arco en A que une $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$.

Definición B.2. Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ es conexo por arcos si, cualesquiera que sean los puntos $p, q \in A$, existe un arco en A que une p con q .

Definición B.3. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es conexo cuando no es posible representarlo en la forma $A = U_1 \cup U_2$, donde U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos no vacíos de A y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

C. CONJUNTOS COMPACTOS.

Definición C.1. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado si este contenido en alguna bola de \mathbb{R}^n . un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y es cerrado y acotado.

Teorema C.1 (Teorema de Función Inversa). Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable y supóngase que en $p \in U$ la diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo. Entonces existe un entorno V de p en U y un entorno W de $F(p)$ en \mathbb{R}^n tal que $F : V \rightarrow W$ tiene una inversa diferenciable $F^{-1} : W \rightarrow V$.

Una aplicación diferenciable $F : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$, donde V y W son conjuntos abiertos, se denomina un difeomorfismo de V en W si F tiene una inversa diferenciable. El teorema de la función inversa afirma que si en un punto $p \in U$ la diferencial dF_p es un isomorfismo, entonces F es un difeomorfismo en un entorno de p . En otras palabras, una afirmación sobre la diferencial de F en un punto implica una afirmación similar sobre el comportamiento de F en un entorno del punto.

D. TEOREMAS DE ECUACIONES DIFERENCIABLES ORDINARIAS

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo de vector continuos que a cada $(x, y) \in A$ asocia un vector $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. La ecuación diferencial asociada al campo es:

$$\text{Teorema D1: } \begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases}$$

Una solución de la ecuación (1C) es una curva diferencial $u(t) = (x(t), y(t))$ tal que

$$\begin{cases} x' = P(x(t), y(t)) \\ y' = Q(x(t), y(t)) \end{cases}$$



Luego, $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$ donde $\mathbf{x}'(t)$ es el vector tangente a la curva \mathbf{x} en el punto t . Esta igualdad nos dice que el vector tangente a la curva es exactamente el vector dado por el campo de vectores.

De modo general para un campo de vectores continuo $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido en el abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ $F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in A$, asociamos la ecuación diferencial

$$\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$$

Que corresponde a n -ecuaciones ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) de la forma

$$x_i' = F_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Una solución de estas ecuación diferencial con condiciones inicial $p_0 \in A$ es una curva diferencial $x(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow A$ con $\mathbf{x}(0) = p_0$ y $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}(t))$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

El siguiente teorema es un caso particular del teorema de Picard, que nos garantiza la existencia de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria con condición inicial.

Teorema D.2. (teorema de existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria).

Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de vectores definido sobre el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Para todo $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in U$ existe $\varepsilon > 0$ y curva diferencial $\mathbf{x}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ que es la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$$

Además, si \mathbf{x} y \mathbf{y} son dos soluciones que coincide en un punto, digamos $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$, entonces son iguales para todo t en el dominio común.

El siguiente teorema es un caso particular del teorema de dependencia continua y diferenciable de las soluciones de una EDO con relación inicial y parámetro.

Supongamos que para todo $x \in U$ la solución de la ecuación diferencial ordinaria $x' = F(x)$, $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ está definida en el intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces está bien definida la función

$$\begin{aligned}\alpha &: (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow U \\ (t, x) &\rightarrow \phi(t, x) = u_x(t)\end{aligned}$$

Teorema D.3. Sea F las condiciones de arriba.

Si F es una función continua, entonces α también es continua

Si F es una función de clase C^1 , entonces α es de clase C

E. APLICACIÓN LINEAL AUTOADJUNTA

Definición. Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Se dice que f es autoadjunta si $f^* = f$.

Observación. Una transformación lineal $f : V \rightarrow V$ es autoadjunta si y solo si

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle, \forall x, y \in V$$

F. CAMPOS VECTORIALES.

Un campo vectorial es una aplicación en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ que asigna a cada $q \in U$ un vector $w(q) \in \mathbb{R}^2$. Se dice que el campo vectorial w es diferenciable si escribiendo $q = (x, y)$ y $w(q) = (a(x, y), b(x, y))$ las funciones a y b son funciones diferenciables en U .

En el lenguaje de la teoría de ecuaciones diferenciable ordinarias, se dice que el campo vectorial w determina el sistema de ecuaciones diferenciable,

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y) \quad (\text{F1})$$

Y la trayectoria de w es una solución de la ecuación (F1).

El teorema fundamental de existencia y unicidad para la ecuación (9) es equivalente al resultado sobre trayectorias. Las letras I y J son intervalos abiertos de \mathbb{R} .

Teorema F.1. Sea w un campo vectorial en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Dado $p \in U$, existe una trayectoria $\alpha : I \rightarrow U$, es decir, $\alpha'(t) = w(\alpha(t), t \in I)$ con $\alpha(0) = p$. Esta



trayectoria es única en el sentido siguiente; cualquier otra trayectoria $\beta: J \rightarrow U$ con $\beta(0) = p$ coincide con α en $I \cap J$.

Teorema F.2. Sea w un campo vectorial en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $p \in U$ existe un entorno $V \subset U$ de p , un intervalo I y una aplicación $\alpha: V \times I \rightarrow U$ tal que

(1). Para $q \in V$ fijo, la curva $\alpha(q, t)$, $t \in I$, es la trayectoria de W que pasa por q ; es decir,

$$\alpha(q, 0) = q, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(q, t) = w(\alpha(q, t)).$$

(2). α es diferenciable.

Definición F.1. Un campo vectorial w en un conjunto abierto $U \subset S$ de una superficie regular S es una correspondencia que asigna a cada $p \in U$ un vector $w(p) \in T_p(S)$. El campo vectorial w es diferenciable en $p \in U$ sí, para alguna parametrización $x(u, v)$ en p , las funciones $a(u, v)$ y $b(u, v)$ dadas por $w(p) = a(u, v)x_u + b(u, v)x_v$, son funciones diferenciables en p ; resulta claro que esta definición no depende de la elección de x .