



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO**  
**MATEMÁTICAS**



**APLICACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DE**  
**SUPERFICIES REGULARES EN LA ECUACIÓN DE SINE-**  
**GORDON**

**TESIS**

**PRESENTADA POR:**

**KEVIN ARNOL GOMEZ CAPAQUIRA**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**PUNO – PERÚ**

**2022**



## DEDICATORIA

A mi familia, por permitirme con su apoyo vivir los mejores momentos  
de mi vida profesional.



## AGRADECIMIENTOS

Agradezco primero a dios por guiarme siempre en todo momento. También quiero agradecer a mis padres por su apoyo incondicional.

Quiero agradecer a toda mi familia, a mis compañeros de estudios y amigos por el apoyo moral y humano en todo momento de mi formación profesional.

Agradezco por la orientación y asesoramiento de esta tesis al profesor Lic. Mario Felix Atamari Quispe y también quiero agradecer por sus comentarios y sugerencias a los miembros de jurado: Dr. Ruben Ticona Huayhua, Lic. Ruperto Zapana Yerba y Lic. Victor Manuel Yanarico Coaquira. Finalmente, a todos docentes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas que contribuyeron en mi formación profesional.



# ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA	
AGRADECIMIENTOS	
ÍNDICE GENERAL	
ÍNDICE DE FIGURAS	
ÍNDICE DE ACRÓNIMOS	
RESUMEN .....	9
ABSTRACT.....	10

## CAPITULO I

### INTRODUCCIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	12
1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	14
1.3. HIPOTESIS DE LA INVESTIGACIÓN.....	14
1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO.....	14
1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.....	15
1.5.1. Objetivo General.....	15
1.5.2. Objetivos Específicos .....	15

## CAPITULO II

### REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. MARCO TEORICO.....	16
2.1.1. SUPERFICIE REGULAR .....	16
2.1.2. Criterios prácticos para la determinación de superficie regular .....	20
2.1.3. Propiedades de las superficies regulares.....	22
2.1.4. Cambio de Coordenadas. ....	23
2.1.5. Funciones diferenciables definidas en superficies.....	24
2.1.6. ORIENTACION PARA UNA SUPERFICIE REGULAR .....	26
2.1.7. PLANO TANGENTE.....	28
2.1.8. FORMAS FUNDAMENTALES DE SUPERFICIES REGULARES .....	30



2.1.9.	La Primera Forma Fundamental .....	30
2.1.10.	La Aplicación de Gauss .....	33
2.1.11.	La Segunda Forma Fundamental .....	34
2.1.12.	CURVATURAS .....	35
2.1.13.	Curvatura Normal .....	36
2.1.14.	Curvatura Gaussiana y Curvatura Media.....	40
2.1.15.	CURVAS ESPECIALES SOBRE SUPERFICIES .....	42
2.1.16.	Líneas de Curvatura .....	42
2.1.17.	Líneas Asintóticas.....	45
2.1.18.	ECUACIONES FUNDAMENTALES .....	46
2.1.19.	Las Fórmulas De Gauss – Weingarten .....	46
2.1.20.	Ecuaciones De Compatibilidad. Teorema De Gauss .....	50
2.1.21.	TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS SUPERFICIES REGULARES... .....	54
2.1.22.	Ecuación de Sine-Gordon .....	62
2.1.23.	Representación Lax.....	63
2.1.24.	Teorema de la Aplicación de las Superficies Regulares en la Ecuación Sine-Gordon.....	64
2.1.25.	Transformación De Backlund.....	67
2.1.26.	Solitones.....	67
2.2.	MARCO CONCEPTUAL.....	68

### **CAPITULO III**

#### **MATERIALES Y MÉTODOS**

3.1.	Ubicación Geográfica del Estudio .....	71
3.2.	Periodo de Duración del Estudio.....	71
3.3.	Procedencia del Material Utilizado .....	71
3.3.1.	Materiales.....	71
3.4.	Tipo y Diseño Investigación .....	72



3.4.1. Tipo de investigación .....	72
3.4.2. Diseño de investigación .....	72
3.5. Método y Técnica de Investigación .....	72
3.5.1. Métodos .....	72
3.5.2. Técnicas .....	72
3.6. Variables .....	72
3.6.1. Variable Independiente .....	72
3.6.2. Variable Dependiente .....	72

#### **CAPITULO IV**

#### **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

4.1. Construcción de Superficies de Soliton .....	73
4.2. Transformación de Backlund y Superficie de Soliton .....	75
4.3. Sine-Gordon y superficie Pseudoesferica .....	77
<b>V. CONCLUSIONES.....</b>	<b>81</b>
<b>VI. RECOMENDACIONES .....</b>	<b>82</b>
<b>VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÀFICAS.....</b>	<b>83</b>

**TEMA: Superficies Regulares**

**ÁREA: Geometría Diferencial**

**LINEA DE INVESTIGACION: Matemática Pura**

**FECHA DE SUSTENTACIÓN: 04 de febrero de 2022.**



## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b>	Definición de Superficie Regular .....	17
<b>Figura 2.</b>	Vectores de una base. ....	18
<b>Figura 3.</b>	Paraboloide elíptico y el plano .....	21
<b>Figura 4.</b>	La aplicación de cambio de coordenadas. ....	24
<b>Figura 5.</b>	Para estudiar diferenciabilidad (suficiente considerar una parametrización) .....	25
<b>Figura 6.</b>	Curvas Paramétricas .....	26
<b>Figura 7.</b>	Vector normal. ....	27
<b>Figura 8.</b>	Plano Tangente a una Superficie .....	29
<b>Figura 9.</b>	Paraboloide Hiperbólico. ....	38
<b>Figura 10.</b>	Cilindro Circular.....	40
<b>Figura 11.</b>	Toro. ....	41
<b>Figura 12.</b>	Paraboloide Circular .....	45
<b>Figura 13.</b>	Solución estática. ....	76
<b>Figura 14.</b>	Pseudoesfera de Beltrami. ....	80



## ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

$T_p S$	:	Plano Tangente
$K$	:	Curvatura Gaussiana (Curvatura total)
EDP	:	Ecuación Diferencial Parcial
$dX_q$	:	La diferencial de $X$ en $q$
$k_n(\mathbf{v})$	:	Curvatura Normal
$H$	:	Curvatura Media





## RESUMEN

En la presente investigación titulado “Aplicación del Teorema Fundamental de Superficies Regulares en la Ecuación de Sine-Gordon” ,se mencionan conceptos de la teoría local de superficies regulares la cual se analiza propiedades geométricas así, como por ejemplo , superficie, subconjunto que está inmerso en  $\mathbb{R}^3$ , plano tangente, conjunto de todo los vectores tangente, la primera forma fundamental la cual tiene la cualidad de efectuar geometría sobre la superficie, orientabilidad, la aplicación de gauss, la segunda forma fundamental que permite estudiar la relación entre la superficie y el espacio en el que está contenida, líneas de curvatura ,líneas asintóticas como también ,las fórmulas de Gauss y de Weingarten, formulas importantes que ayudan a obtener las ecuaciones de Gauss Codazzi –Mainardi , llamados ecuaciones de compatibilidad y el teorema Egregium de Gauss herramientas fundamentales , con el objetivo de aplicar el teorema fundamental de superficies regulares en la ecuación de Sine-Gordon , dicha ecuación garantiza la existencia de una superficie con curvatura gaussiana negativa constante, llamado superficie de soliton, para ello se utiliza el método deductivo, se realizó revisión bibliográfica y el diseño descriptivo la cual responde los objetivos. Como resultado se tiene la construcción de superficies de solitón, así también con las transformaciones de Backlund se obtiene soluciones de dicha ecuación, la solución está relacionada específicamente con la superficie Pseudoesfera.

**Palabras Claves:** Aplicación, Teorema Fundamental de Superficies Regulares, Ecuación de Sine – Gordon.



## ABSTRACT

In the present investigation entitled "Application of the Fundamental Theorem of Regular Surfaces in the Sine-Gordon Equation", concepts of the local theory of regular surfaces are mentioned, which analyzes geometric properties such as, for example, surface, subset that is immersed in  $\mathbb{R}^3$ , tangent plane, set of all tangent vectors, the first fundamental form which has the quality of effecting geometry on the surface, orientability, the application of Gauss, the second fundamental form that allows studying the relationship between the surface and the space in which it is contained, lines of curvature, asymptotic lines as well as the Gauss and Weingarten formulas, important formulas that help to obtain the Gauss Codazzi –Mainardi equations, called compatibility equations and the Egregium theorem Gaussian fundamental tools, with the aim of applying the fundamental theorem of regular surfaces in the equation of Sine-Gordon, this equation guarantees the existence of a surface with constant negative Gaussian curvature, called the soliton surface, for this the deductive method is used, a bibliographic review and the descriptive design was carried out which answers the objectives. As a result, we have the construction of soliton surfaces, so also with the Backlund transformations solutions of this equation are obtained, the solution is specifically related to the Pseudosphere surface.

**Key Words:** Application, Fundamental Theorem of Regular Surfaces, Sine - Gordon Equation.



# CAPITULO I

## INTRODUCCIÓN

La ecuación de Sine-Gordon es una ecuación diferencial parcial que aparece en la geometría diferencial, fue introducido originalmente por Edmond Bour ( 1862 ) en el curso del estudio de superficies de curvatura negativa constante como la ecuación de Gauss-Codazzi para superficies de curvatura  $K = -1$  en el espacio. La ecuación tiene grandes aplicaciones en la física del estado sólido, óptica no lineal, entre otras. Su importancia radica en que tiene soluciones denominadas solitones. Los solitones fueron observados por primera vez en el mes de agosto del año de 1834, cuando Scott Russell paseaba por el canal de Edimburgo (Inglaterra) y observo que al detenerse de golpe la barcaza, se desprendió una gran onda de agua en la proa de la nave que avanzo varios kilómetros sin cambiar su forma. A este fenómeno lo llamó gran onda de traslación.

Este trabajo de investigación presenta los siguientes capítulos:

En el capítulo I, presenta el planteamiento de la investigación, el problema de investigación, los objetivo general y específicos.

En el capítulo II, el marco teórico de la investigación referido a la teoría de local de superficies regulares entre los que se tiene: definiciones, proposiciones, teoremas, lemas y algunos ejemplos. Y también se aborda el marco conceptual, los antecedentes de la investigación

En el capítulo III, presenta la metodología de investigación que es de tipo básico teórico fundamental y diseño descriptivo.



En el capítulo IV, presenta el resultado de investigación que consta Construcción de superficies de solitón, Transformación de Backlund y Superficie de Solitón, Sine-Gordon y superficie Pseudoesferica.

Finalmente se presenta las conclusiones y recomendaciones de investigación siempre

teniendo en cuenta los objetivos de la investigación.

### **1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

En Geometría diferencial clásica, uno de los resultados fundamentales es el teorema fundamental de superficies regulares, nos dice que dos formas fundamentales que satisfacen las ecuaciones de Gauss y Codazzi-Mainardi llamados ecuaciones clásicas de compatibilidad determinan una superficie en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , hasta un movimiento rígido

; en la presente investigación se analiza propiedades geométricas del teorema fundamental de superficies regulares la cual consiste en la Primera Forma Fundamental que es la métrica inducida en planos tangentes de  $S$ , es decir, que tiene la cualidad de que con ella podemos efectuar geometría sobre la superficie y podemos hacer medidas de los objetos que están contenidos en la misma (medir longitudes, ángulos y áreas).

La Segunda Forma Fundamental, es el objeto que permite estudiar la relación que existe entre una superficie y el espacio en el que está contenida dicha superficie. Así también las ecuaciones de Gauss y Codazzi-Mainardi, es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden que involucra seis funciones, llamados ecuaciones de compatibilidad y el teorema Egregium gauss que indica que la curvatura gaussiana de Gauss solo dependen de los coeficientes de la primera forma fundamental, herramientas indispensables para obtener la ecuación Sine-Gordon (Teorema 2.1.21.1).

La ecuación de Sine-Gordon es una Ecuación Diferencial Parcial no lineal de segundo orden , modela un fenómeno de la naturaleza donde  $\Phi = \Phi(x, t)$  representa un campo .En coordenadas del espacio-tiempo ( $\mathbb{R}$ ) denotadas por  $(x, t)$ , la ecuación dada por

$$\Phi_{xx} - \Phi_{tt} = \text{sen } \Phi$$

Donde  $\Phi_{xx}$  y  $\Phi_{tt}$  indican derivadas parciales con respecto a los parámetros de  $x$  y  $t$ . Esta ecuación puede ser transformado bajo el siguiente cambio de coordenadas:

$$u = \frac{x-t}{2} \quad ; \quad v = \frac{x+t}{2}$$

en la ecuación toma la forma

$$\Phi_{uv} = \text{sen } \Phi$$

Esta es la forma original de la ecuación Sine-Gordon. Se elige un sistema de coordenadas para dicha superficie en el que la malla de coordenadas  $u = \text{constante}$ ,  $v = \text{constante}$  viene dada por las líneas asintóticas parametrizadas con respecto a la longitud de arco. La primera forma fundamental de la superficie en estas coordenadas tiene una forma especial (2.50) donde  $\omega$  expresa el ángulo entre las líneas asintóticas, y para la segunda forma fundamental ,  $e = g = 0$  (2.51). Entonces, la ecuación de Codazzi-Mainardi que expresa una condición de compatibilidad entre la primera y la segunda forma fundamental , la ecuación del teorema Egregium (2.49) da como resultado la ecuación de Sine-Gordon. (2.52)

$$\omega_{uv} = -K \text{sen } \omega$$

donde  $K$  indica la curvatura gaussiana negativa constante. La ecuación de Sine-Gordon es una condición que garantiza la existencia de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  llamado superficie de soliton.



Por ultimo con las herramientas de las ecuaciones de las transformaciones de Bäcklund genera solución de soliton de la ecuación Sine-Gordon resolviendo un par de ecuaciones diferenciales ordinarias, debemos recalcar que dichas transformaciones relacionan las soluciones de la ecuación Sine – Gordon, particularmente, dicha solución está relacionada con la superficie con curvatura constante negativa, llamada superficie Pseudoesferica.

De manera general un solitón está caracterizado de la siguiente forma. Desde el punto de vista matemático los solitones son soluciones a ecuaciones diferenciales parciales no lineales que tienen las características de ser localizadas y robustamente estables. Por otro lado, físicamente son ondas que se propagan en medios no lineales que preservan su forma y que cuando interaccionan con otros solitones son transparentes entre sí

## **1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

En la presente investigación se plantea, responder la siguiente interrogante:

¿Cómo es la aplicación del teorema fundamental de superficies regulares en la ecuación de Sine-Gordon?

## **1.3. HIPOTESIS DE LA INVESTIGACIÓN.**

Teorema Fundamental de Superficies Regulares en la Ecuación de Sine-Gordon.

## **1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO**

El teorema fundamental de las superficies regulares, uno de los resultados más importantes de la geometría diferencial se basa en una condición de compatibilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias iniciales en dos variables independientes ,utilizando las herramientas de geometría diferencial en las ecuaciones diferenciales parciales no



lineales se pueden encontrar soluciones analíticas ,en particular las soluciones ecuación Sine-Gordon .Así, el informe final de trabajo de investigación servirá como material de consulta a quienes se interesen y planteen problemas con el objeto de aplicación del Teorema Fundamental de la Teoría Local de Superficies , ya sea por motivos de obtención de mayor conocimiento o aplicación a otras áreas del conocimiento.

## **1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.5.1. Objetivo General**

- Aplicar el teorema fundamental de superficies regulares en la ecuación de Sine-Gordon.

### **1.5.2. Objetivos Específicos**

- Analizar y describir los conceptos de la teoría local de superficies regulares.
- Construir superficies de solitón.
- Utilizar las transformaciones de Backlund para obtener una solución solitón de Sine-Gordon.
- Encontrar la relación existente entre la solución de la ecuación Sine-Gordon y la superficie Pseudoesferica.



## CAPITULO II

### REVISIÓN DE LITERATURA

En este capítulo presentaremos un resumen de los resultados básicos necesarios para el desarrollo de los capítulos siguientes, abordaremos algunos conceptos a cerca de superficies regulares , superficie parametrizada regular , plano tangente ,formas fundamentales, curvatura normal, curvatura Gaussiana, curvatura Media, líneas de curvatura, líneas asintóticas ,ecuaciones de compatibilidad, símbolos de Christoffel, teorema de Gauss, Teorema Fundamental de Superficies, ecuación de Sine-Gordon transformación de Backlund, superficies Pseudoesfericas .

#### 2.1. MARCO TEORICO

##### 2.1.1. SUPERFICIE REGULAR

**Definición 2.1.1.1** Un subconjunto no vacío  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una *superficie regular* si, para todo  $p \in S$  , existen un abierto  $U$  en  $\mathbb{R}^2$  , un entorno  $V$  de  $p$  en  $S$  y una aplicación  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tales que:

**S1)**  $X(U) = V$  y  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es diferenciable en el sentido ordinario,

**S2)**  $X: U \rightarrow V$  es un homeomorfismo, (es decir, la inversa  $X^{-1}: V \rightarrow U$  también es continua)

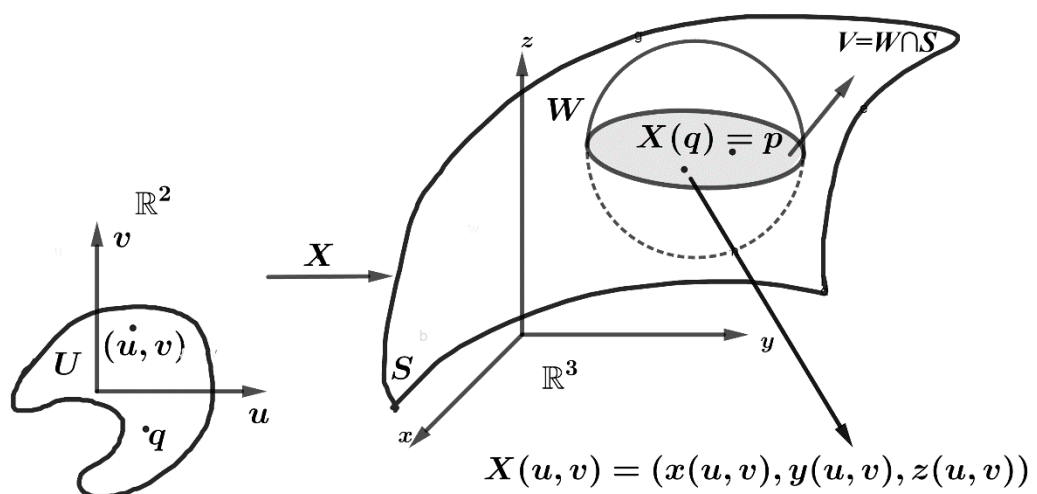
**S3)** para todo  $q \in U$  . la diferencial  $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva.

La aplicación  $X$  se llama parametrización, carta o sistema de coordenadas. El entorno  $V$  se llama entorno coordenado. (Do carmo, 1995, pág. 64) .

**Observación 2.1.1.1.1** ¿Qué significan las condiciones anteriores? (Véase figura 1)



- i*º) La aplicación  $X:U \rightarrow V$  es diferenciable. Esto significa que si escribimos  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , las funciones  $x, y, z: U \rightarrow \mathbb{R}$  son derivables con derivadas continuas de todos los órdenes.
- ii*º) Al decir que  $V$  es un entorno de  $p$  en el subconjunto  $S$  con la topología relativa, queremos decir que existe un abierto  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $V = W \cap S$ .
- iii*º) A diferencia de las curvas, (como una aplicación), una superficie es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  con unas propiedades muy especiales.
- iv*º) La condición **S1**) nos permite asegurar que la superficie  $S$  es suave en el sentido de que no tiene aristas ni vértices.
- v*º) Con la condición **S2**) se evita que la superficie  $S$  tenga autointersecciones. esto es muy importante con vistas a conseguir unicidad a la hora de definir un plano tangente a la superficie en un punto.
- vi*º) La condición **S3**) es esencial para asegurar la existencia del plano tangente en todos los puntos de  $S$ . Es una hipótesis similar a que  $\alpha'(t) \neq 0$  en el caso de una curva regular.



**Figura 1.** Definición de Superficie Regular

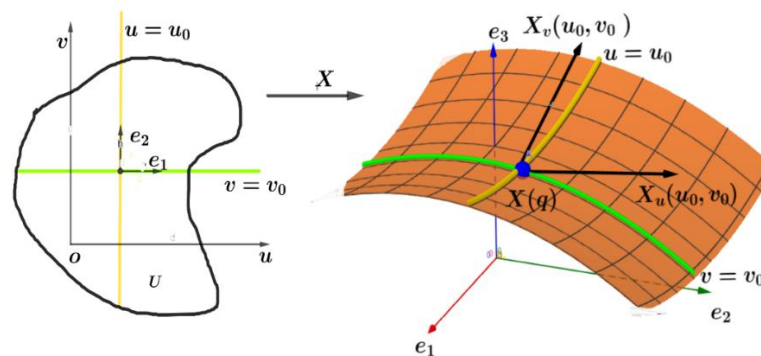
Indaguemos un poco más de **S3**). ¿cómo podemos interpretarla? Dada una parametrización  $X: U \rightarrow V$ , su diferencial en un punto  $q$  de  $U$  es la aplicación  $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$dX_q(\mathbf{v}) = JX_{(q)} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Para cada vector  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ . al ser  $dX_q$  una aplicación lineal, esta queda completamente determinada si sabemos cómo actúa sobre los vectores de una base. Así, vamos a escribir

$$X_u(q) = \frac{\partial X}{\partial u}(q) = dX_q(e_1) = (x_u(q), y_u(q), z_u(q)).$$

$$X_v(q) = \frac{\partial X}{\partial v}(q) = dX_q(e_2) = (x_v(q), y_v(q), z_v(q)).$$

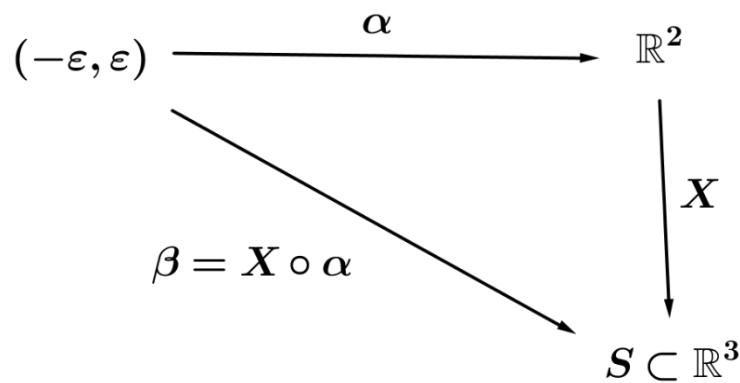


**Figura 2.** Vectores de una base.

Por tanto, la condición de que  $dX_q$  sea inyectiva es equivalente que el rango de la matriz jacobiana  $JX_{(q)}$  sea máximo, es decir, que  $\text{rg}(JX_{(q)}) = 2$ . Esto es lo mismo que exigir que los vectores  $\{X_u(q), X_v(q)\}$  son linealmente independientes, hecho que nos va a asegurar la existencia de un plano tangente.

La diferencial de  $X$  puede verse de modo alternativo. Dada una curva parametrizada  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(\mathbf{0}) = \mathbf{q}$  y  $\alpha'(\mathbf{0}) = \mathbf{v}$ , podemos tomar la curva en la superficie  $\beta = X \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ , para la cual  $\beta(\mathbf{0}) = X(\alpha(\mathbf{0})) = X(\mathbf{q})$ . Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\beta'(\mathbf{0}) = (X \circ \alpha)'(\mathbf{0}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (X \circ \alpha)(t) = dX_{\alpha(\mathbf{0})}(\alpha'(\mathbf{0})) = dX_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}).$$



**Ejemplo 2.1.1.1.1 (El plano)** Sea  $\mathbb{III}$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$\mathbb{III} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$$

Donde  $a, b, c$  no se anulan simultáneamente, sin pérdida de generalidad, suponemos que  $c \neq 0$ ; entonces, podemos despejar la coordenada  $z$  como

$$z = \frac{(d - ax - by)}{c}.$$

Tomamos ahora  $U = \mathbb{R}^2$ ,  $V = \mathbb{III}$ , y sea  $X: U \rightarrow V$  la aplicación dada por

$$X(u, v) = \left\{ u, v, \frac{d - au - bv}{c} \right\}.$$

Entonces se tiene claramente que:

- i.-  $X$  es diferenciable pues es lineal.



- ii.-  $X^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow U$  es la proyección ortogonal sobre el plano  $z = 0$ , que es claramente continua, y por tanto,  $X$  es un homeomorfismo.
- iii.- Los vectores  $X_u = (1, 0, -a/c)$  y  $X_v = (0, 1, -b/c)$  son linealmente independientes, y en consecuencia  $dX_q$  es inyectiva para todo  $q$ .

### 2.1.2. Criterios prácticos para la determinación de superficie regular

**Proposición 2.1.2.1 (Criterio1: Grafos)**  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable con  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto. Entonces el conjunto formado por

$$G(f) = \{(u, v, f(u, v)): (u, v) \text{ en } U\}$$

Es una superficie regular de  $\mathbb{R}^3$ . En otras palabras, cualquier grafo de una función diferenciable es una superficie regular.

**Proposición 2.1.2.2 (Criterio2: Valores regulares)** Sean  $f: V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable y  $a$  un valor regular de  $f$  (es decir,  $df_p$  es sobreyectiva para todo  $p \in f^{-1}(a)$ ). Entonces  $S = f^{-1}(a)$ . Es una superficie regular de  $\mathbb{R}^3$ , denominada superficie de nivel.

**Ejemplo 2.1.2.2.1 (El elipsoide)** consideremos el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

Para probar que se trata de una superficie regular, definimos  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

buscamos los puntos críticos. Para ello observemos que

$$f_x = \frac{2x}{a^2}, \quad f_y = \frac{2y}{b^2}, \quad f_z = \frac{2z}{c^2}$$

Por lo que  $(x, y, z)$  es el punto crítico de  $f$  si y solo si,  $(x, y, z) = (0,0,0)$ . Calculamos ahora los valores críticos correspondientes a dicho punto crítico, obteniendo  $f(0,0,0) = 0$  en consecuencia,  $a = 0$  es el único valor crítico de  $f$ . Para todo  $a \neq 0$  tendremos que  $f^{-1}(a)$  es una superficie regular; en particular,  $a = 1$ , obtenemos que el elipsoide  $E = f^{-1}(1)$  es una superficie regular.

**Ejemplo 2.1.2.2.2 (Paraboloide elíptico y el plano)** La ecuación

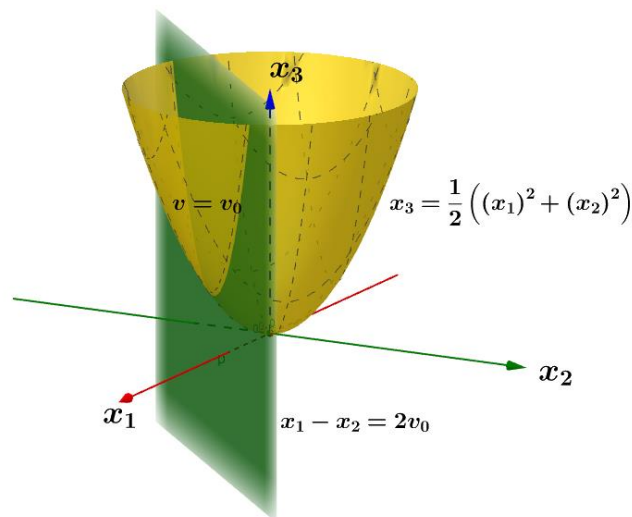
$$X = (u + v)e_1 + (u - v)e_2 + (u^2 + v^2)e_3$$

es una superficie regular.

En efecto,  $X$  define una aplicación del plano  $uv$  sobre el paraboloide elíptico  $x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ . Es evidente que  $X$  tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes. además, para todo  $(u, v)$  es

$$X_u = 1e_1 + 1e_2 + 2ue_3, \quad X_v = 1e_1 - 1e_2 + 2ve_3$$

$$|X_u \times X_v| = \left| \det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 1 \\ e_2 & 1 & -1 \\ e_3 & 2u & 2v \end{pmatrix} \right| = [4 + 8(u^2 + v^2)]^{\frac{1}{2}} \neq 0$$



**Figura 3.** Paraboloide elíptico y el plano.

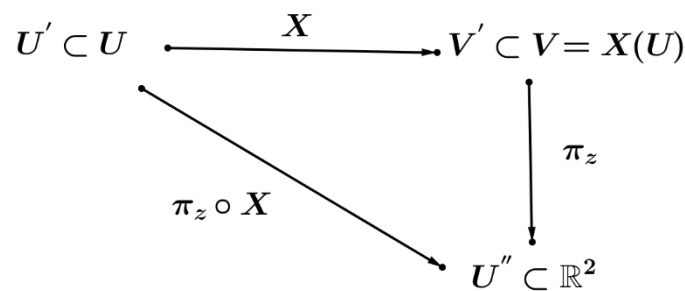
Así, . Al eliminar  $X$  es diferenciable de clase  $u$  en las componentes  $x_1 = u + v_0$  ,  $x_2 = u - v_0$  , encontramos que la curva  $v = v_0$ , de parámetro  $u$ , es la intersección del paraboloides con el plano vertical  $x_1 - x_2 = 2v_0$ . Análogamente, la curva  $u = u_0$ , de parámetro  $v$ , es la intersección del paraboloides con el plano vertical  $x_1 + x_2 = 2u_0$ .

### 2.1.3. Propiedades de las superficies regulares

El lema a continuación afirma un hecho bastante intuitivo: cualquier superficie regular puede proyectarse mediante un homeomorfismo, al menos localmente, sobre un abierto de alguno de los planos coordenados.

**Lema 2.1.3.1** Sean  $S$  una superficie regular ,  $p_0 \in S$  y  $(U, X)$  una parametrización de  $S$  con  $q_0 \in U$  , Siendo  $X(q_0) = p_0$ . Entonces, existen un entorno  $U'(q_0) \subset U$  y una proyección  $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sobre uno de los plano coordenados , de modo que  $(\pi \circ X)(U') = U''$  Es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y la aplicación  $(\pi \circ X): U' \rightarrow U''$  es un difeomorfismo entre abiertos  $\mathbb{R}^2$  . (Tenenblat, 2008, pág. 122)

**Proposición 2.1.3.2** Sean  $S$  una superficie regular ,  $p_0 \in S$  .Entomces existe un entorno Sean  $S$  una superficie regular ,  $V(p_0) \subset S$  que es el grafo de una función diferenciable de alguno de los tipos  $z = f(x, y)$ ,  $x = g(y, z)$ , o  $y = h(x, z)$  ( es decir , una función definida sobre un abierto contenido en alguno de los planos coordenados).

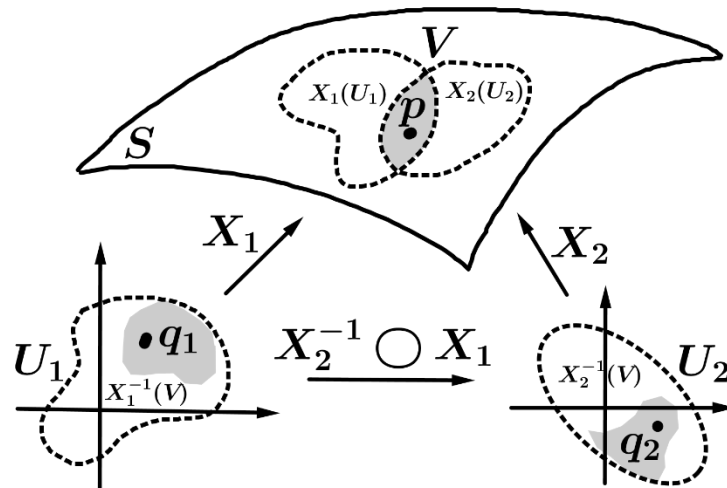


#### 2.1.4. Cambio de Coordenadas.

Dada una superficie regular y un punto de dicha superficie sabemos que, en general, existen varias (en realidad, infinitas) parametrizaciones para cubrir dicho punto y un entorno suyo. Una pregunta razonable es que ocurre cuando expresamos los puntos de este entorno en unas a otras coordenadas, así como la relación que existe entre ambas relaciones. Unas coordenadas se expresan como función de otras, siendo esta dependencia, naturalmente, diferenciable.

Consideramos entonces  $S$  una superficie regular y sea  $p \in S$  .dados dos parametrizaciones  $(U_1, X_1)$  y  $(U_2, X_2)$  con  $p \in X_1(U_1) \cap X_2(U_2) = V$  , podemos tomar  $q_1 \in U_1$  y  $q_2 \in U_2$  de modo que  $X_1(q_1) = X_2(q_2) = p$ (véase la figura 4)

Además,  $X_1^{-1}(V) \subset U_1$  y  $X_2^{-1}(V) \subset U_2$  son dos abiertos en el plano  $\mathbb{R}^2$  , por lo que tiene sentido considerar la aplicación  $X_2^{-1} \circ X_1: X_1^{-1}(V) \rightarrow X_2^{-1}(V)$  .Esta aplicación se denomina *cambio de coordenadas*. Claramente, el cambio de coordenadas es un homeomorfismo entre abiertos de  $\mathbb{R}^2$  , pues  $X_1: X_1^{-1}(V) \rightarrow V$  es un homeomorfismo al ser la restricción de un homeomorfismo a un abierto; también  $X_2^{-1}: V \rightarrow X_2^{-1}(V)$  lo es. Además .se tiene el siguiente resultado



**Figura 4.** La aplicación de cambio de coordenadas.

**Teorema 2.1.4.1** La aplicación cambio de coordenadas dada por  $X_2^{-1} \circ X_1$  es un difeomorfismo entre abiertos de  $\mathbb{R}^2$  (Do Carmo, 1995, pág. 81).

### 2.1.5. Funciones diferenciables definidas en superficies

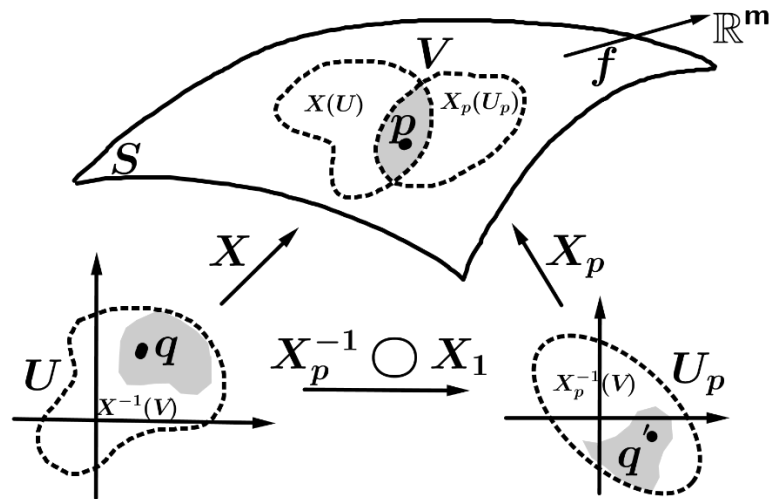
Con vistas a efectuar calculo en superficies necesitamos definir lo que se entiende como función diferenciable en una superficie. Para ellos la táctica adopta consiste en llevar los objetos al plano de coordenadas mediante una parametrización cualquiera.

Sean  $S$  una superficie regular y  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $m \geq 1$ . Sea  $(U, X)$  una parametrización de  $S$ . Entonces, la composición es la expresión en coordenadas de  $f$  respecto a la parametrización  $(U, X)$ . (Do carmo, 1995, pág. 80)

**Definición 2.1.5.1.** Una función  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable (sobre  $S$ ) si, para toda parametrización  $(U, X)$ , la función  $f \circ X$  es diferenciable sobre abierto  $U$ .

**Lema 2.1.5.2** Una función  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en  $S$  si, y solo si, para todo  $p \in S$ , existe  $(U_p, X_p)$  parametrización de  $S$ , con  $p \in X_p(U_p)$ , tal que  $f \circ X_p$  es diferenciable en  $U_p$ .





**Figura 5.** Para estudiar diferenciabilidad (suficiente considerar una parametrización)

**Ejemplo 2.1.5.1.1 (la función altura).** La función  $h: S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(p) = \langle p, v \rangle$ , donde  $p = (x, y, z) \in S$  y  $v = (v_1, v_2, v_3)$  es un vector unitario de  $\mathbb{R}^3$ , se denomina función altura, y representa la distancia de  $p$  al plano ortogonal al vector  $v$ , que pasa por el origen

Es claro  $h(p) = h(x, y, z) = xv_1 + yv_2 + zv_3$  es la restricción a  $S$  de una función diferenciable sobre todo  $\mathbb{R}^3$ , por lo que  $h$  es diferenciable.

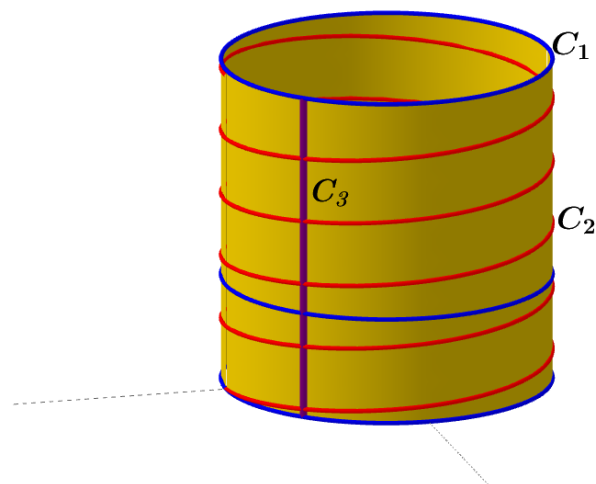
**Ejemplo 2.1.5.1.2** Si  $a, b, c$  y  $d$  son números reales tales que  $ac \neq 0$ .

las hélices circulares parametrizadas por:

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (\cos(at + b), \sin(at + b), ct + d). \end{aligned}$$

Son curvas del cilindro  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

Si  $a = 0$  y  $c = 0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son las curvas de  $S$ .



**Figura 6.** Curvas Paramétricas

### 2.1.6. ORIENTACION PARA UNA SUPERFICIE REGULAR

Sea  $p \in S$  y sea  $(U, X)$  una parametrización con  $p \in V = X(U)$ . Consideremos ahora otra parametrización  $(\bar{U}, \bar{X})$  de  $S$  con  $p \in V = X(U)$ . Cual es la relación entre las bases de  $T_p S$  que determinan ambas parametrizaciones ¿

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_{\bar{u}} \\ \bar{X}_{\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

La matriz del cambio de base es el *Jacobiano* del cambio de coordenadas. Por lo que ambas parametrizaciones inducen en el plano tangente  $T_p S$  una orientación que será la misma si, y solo si, el determinante del jacobiano es positivo.

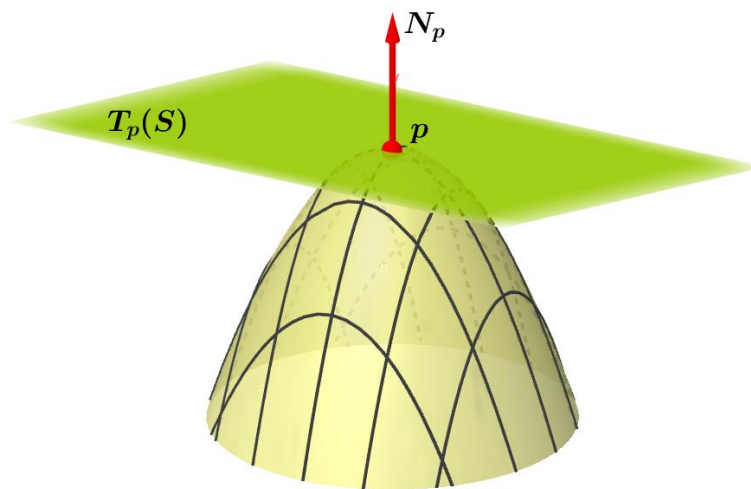
**Definición 2.1.6.1** Una superficie regular  $S$  es orientable si existe una familia de parametrizaciones cubriendo  $S$  se modo que, siempre que dos de ellas se corten, el Jacobiano del cambio de coordenadas tenga determinante positivo. Además, estas parametrizaciones determinan una orientación sobre  $S$  : para cada  $p \in S$  y una base  $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$

de  $T_p S$ , se dice que dicha base es positiva si tiene la misma orientación que la base  $\{X_u(q), X_v(q)\}$ , siendo  $(U, X)$  una parametrización de  $S$  con  $X(q) = p$ .

(Do carmo, 1995)

**Ejemplo 2.1.6.1.1(El plano es orientable).** Sea  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}^3$  un plano afín y sea  $\mathbf{a}$  un vector normal al plano y unitario. Entonces  $N(p) = \mathbf{a}$ , para todo  $p \in \mathbb{I}$ , es un campo normal, global y unitario, por lo que el plano es orientable.

**Definición 2.1.6.2 (vector normal).** Sea un  $p$  un punto de la superficie  $S$ . Se denomina vector normal a  $S$  en  $p$  y se designa por  $N_p$  a cualquiera de los dos vectores unitarios que son ortogonales al plano  $T_p S$ .



**Figura 7.** Vector normal.

Dada una parametrización  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una superficie regular  $S$  en un punto  $p \in S$ , se puede elegir un vector normal unitario en cada punto  $p \in X(U)$ , mediante la expresión

$$N_{(p)} = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(p), \quad (2.1)$$

de esta manera se obtienen una aplicación  $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que asocia a cada  $p \in X(U)$  un vector normal unitario  $N_{(p)}$ .

**Observación 2.1.6.1.2** De una forma más general, si  $V \subset S$  es un conjunto abierto en  $S$  y  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una aplicación diferenciable que asocia a cada  $p \in V$  un vector unitario en  $p$ , decimos que  $N$  es un campo diferenciable de vectores unitarios normales en  $V$ .

**Definición 2.1.6.3** Diremos que una superficie regular es orientable si admite un campo diferenciable de vectores unitarios normales definido en la totalidad de la superficie; la elección de un campo  $N$  de ese tipo se denomina una orientación de  $S$ .

Si  $S$  es una superficie regular orientable, una orientación  $N$  en  $S$  induce una orientación sobre cada espacio tangente  $T_p S$ ,  $p \in S$ .

### 2.1.7. PLANO TANGENTE

Una superficie, por el hecho de estar en el espacio, admite en cada uno de sus puntos un plano tangente en el sentido más intuitivo del término.

La manera de definir el plano tangente a una superficie en un punto concreto consiste en considerar todas las curvas que pasan por dicho punto. Estas curvas al pasar por el punto, tienen una velocidad que es un vector tangente a la curva. Dado que la curva está dentro de la superficie, tal vector velocidad también será tangente a la superficie.

**Definición 2.1.7.1** Una curva diferenciable es una superficie regular  $S$  es una aplicación diferenciable  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo abierto.

**Definición 2.1.7.2** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular y sea  $p \in S$ . Diremos que  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  es un vector tangente a  $S$  en  $p$ , si existe una curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  diferenciable con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ . (*Tenenblat, 2008, pág. 134*)

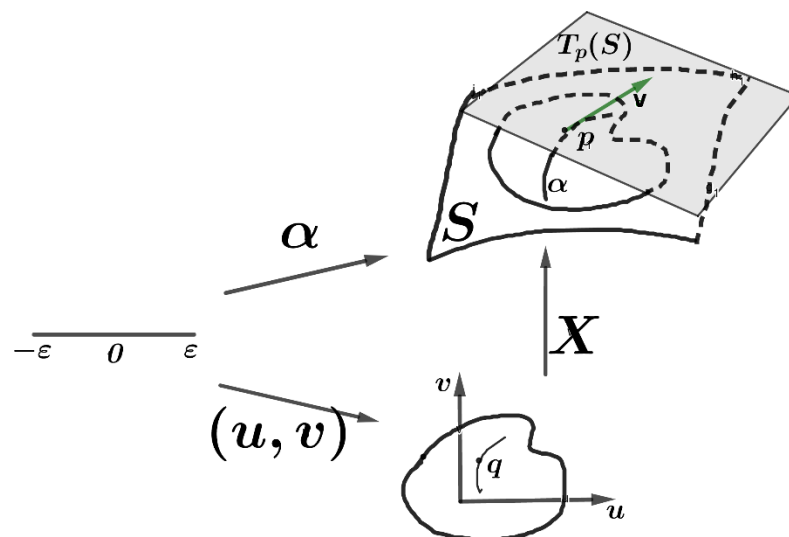
**Observación 2.1.7.2.1** El hecho de tomar  $t = 0$  no es restrictivo; se hace así por comodidad. Observemos que,  $\alpha : I \rightarrow S$  es diferenciable con  $\mathbf{v} = \alpha'(t_0)$  tangente a  $S$  en  $p = \alpha(t_0)$ , basta tomar  $\beta(s) = \alpha(t_0 + s)$  y entonces  $\beta'(s) = \alpha'(t_0 + s)$ . de esta forma, se tiene que  $\beta(0) = \alpha(t_0) = p$  y  $\beta'(0) = \alpha'(t_0) = \mathbf{v}$ . Así, siempre podemos tomar una curva tal y como se precisa en la definición.

Vamos a representar por  $T_p S$  el conjunto de todos los vectores tangentes a la superficie  $S$  en el punto  $p$ . Así

$$T_p S = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ diferenciable con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = \mathbf{v} \}$$

**Lema 2.1.7.2.2** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular y sea  $p \in S$ . Sea  $(U, X)$  una parametrización  $X(q) = p$  y  $q \in U$ . Entonces se tiene que

$$T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2) \tag{2.2}$$



**Figura 8.** Plano Tangente a una Superficie

## 2.1.8. FORMAS FUNDAMENTALES DE SUPERFICIES REGULARES

### 2.1.9. La Primera Forma Fundamental

Hasta ahora nos hemos ocupado de las superficies regulares y de cuestiones que únicamente atañen al ámbito de lo diferenciable. En esta sección vamos a introducirnos en el mundo de la geometría de superficies.

Así pues, consideremos una superficie regular  $S$  y un punto  $p \in S$ . Sabemos que es un plano vectorial contenido en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ , luego, dados dos vectores  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S$ , vamos a representar por  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p$  el producto escalar usual de  $\mathbb{R}^3$  actuando sobre los vectores pertenecientes a  $T_p S$ . De esta forma, si  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S$ , se tiene que  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ . Observemos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  es una forma bilineal, simétrica y definida positiva. vamos a presentar por  $I_p$  la *forma primera cuadrática* asociada a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ , es decir, la aplicación  $I_p(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_p = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{v}|^2$ . (Do Carmo, 1995)

**Definición 2.1.9.1** la aplicación  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $I_p(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_p$  se denomina *la primera forma fundamental* de  $S$ . (Do Carmo, 1995, pág. 102)

Sean  $\mathbf{v} \in T_p S$  y  $\alpha : I \rightarrow S$  con condiciones iniciales  $p$  y  $\mathbf{v}$ . Tomamos una parametrización  $(U, X)$  de  $S$  y consideramos  $\tilde{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$  la expresión en coordenadas de  $\alpha$ . Entonces  $\mathbf{v} = \alpha'(0) = X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0) = X_u u' + X_v v'$  si ahora calculamos  $I_p(\mathbf{v})$  obtenemos

$$I_p(\mathbf{v}) = |X_u u' + X_v v'|^2 = \langle X_u, X_u \rangle (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle u' v' + \langle X_v, X_v \rangle (v')^2$$

Donde  $E = \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $F = \langle X_u, X_v \rangle$ ,  $G = \langle X_v, X_v \rangle$ . Estas tres funciones (toman sus valores en  $U$ ) son claramente diferenciables y se denominan *coeficientes de la primera forma fundamental*.

**Observación 2.1.9.1.1** Dada una superficie  $S$ , según la parametrización que estamos utilizando, los coeficientes de la primera forma fundamental serán de una forma u otra. Por ejemplo ilustramos esta afirmación, basta considerar el plano afín  $Z = 0$ . dicho plano admite como parametrización  $X(u, v) = (ucosv, usenv, 0)$ ; sus coeficientes serian  $E = 1$ ,  $F = 0$  y  $G = u^2$ . Otra parametrización para este plano es  $X(u, v) = (u, v, 0)$  cuyos coeficientes son ahora  $E = 1$ ,  $F = 0$  y  $G = 1$ .

**Ejemplo 2.1.9.1.2 (Superficie de Enneper)** Una parametrización para esta superficie seria

$$X(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

entonces  $X_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u)$  y  $X_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)$ . Luego  $E = G = (1 + u^2 + v^2)^2$ ,  $F = 0$  son los coeficientes de su primera forma fundamental respecto a  $X$ .

**Proposición 2.1.9.2** Sea  $S$  una superficie,  $(U, X)$  una parametrización de  $S$  y  $E, F, G$  los coeficientes de su primera forma fundamental respecto a  $(U, X)$ . Entonces,

*i*º)  $E, G > 0$  y

*ii*º)  $EG - F^2 > 0$ .

**Demostración.** La primera propiedad es evidente, ya que  $\{X_u, X_v\}$  forman una base del plano tangente y, en particular, son vectores no nulos, por lo que sus módulos son siempre positivos. Con respecto a la segunda, observemos que

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 \text{sen}^2 \theta + |X_u|^2 |X_v|^2 \text{cos}^2 \theta = |X_u|^2 |X_v|^2,$$

Donde  $\theta = \text{ang}(X_u, X_v)$ . Por tanto,

$$EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0,$$

Siendo el ultimo termino positivo por ser  $X_u$  y  $X_v$  linealmente independientes.

## Aplicaciones de la Primera Forma Fundamental

La primera forma fundamental tiene la cualidad de que con ella podemos efectuar geometría sobre la superficie, es decir, podemos hacer medidas de los objetos que están contenidos en la misma (medir longitudes, ángulos y áreas).

- **Midiendo longitudes:** La longitud de arco  $s$  de una curva parametrizada diferenciable  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  viene dada por

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t |\alpha'(t)| dt \\ &= \int_0^t \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{1/2} dt \\ s(t) &= \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

- **Midiendo ángulos:** Dadas  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ ,  $\delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  dos curvas parametrizadas diferenciables que se intersecan en  $t = t_0$ . El ángulo  $\theta$  que forman los vectores tangentes a dichas curvas en  $t = t_0$  esta dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}. \quad (2.4)$$

En particular, el ángulo  $\varphi$  entre las curvas coordenadas de una parametrización  $X(u, v)$  que interceptan en  $q$ , es

$$\cos \varphi = \frac{\langle X_u, X_v \rangle_q}{|X_u|_q |X_v|_q} = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (2.5)$$



### 2.1.10. La Aplicación de Gauss

**Definición 2.1.10.1** Sea  $S$  una superficie regular orientada por la aplicación de Gauss  $N: S \rightarrow \mathbb{S}^2$ . se llama *operador forma o endomorfismo de Weingarten* en  $p \in S$  a la aplicación lineal  $A_p = -dN_p: T_p S \rightarrow T_p S$ , esto es,  $A_p \mathbf{v} = -dN_p(\mathbf{v})$ .

(Do carmo, 1995, pág. 147)

**Proposición 2.1.10.2** el operador forma  $A_p$  es autoadjunto, es decir, para cualquiera  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S$  se tiene que  $\langle A_p \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A_p \mathbf{w} \rangle$ .

**Demostración.** Por linealidad, es suficiente demostrarlo para los vectores de una base del plano tangente. Si  $(U, X)$  es una parametrización y  $p = X(q) = X(u_0, v_0)$ , tomamos la base  $\{X_u(q), X_v(q)\}$  de  $T_p S$ , y vamos a calcular  $dN_p(X_u(q))$ . Para ello, si consideramos la curva coordenada  $\alpha(u) = X(u + u_0, v_0)$ , claramente se tiene que  $\alpha$  es una curva en  $S$  con condiciones iniciales  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = X_u(q)$ . Entonces,

$$dN_p(X_u(q)) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} (NoX)(u + u_0, v_0) = (NoX)_u(u_0, v_0) = (N)_u(u_0, v_0),$$

donde, estamos identificando  $(NoX) \equiv N$ . análogamente,  $dN_p(X_v(q)) = (N)_v(u_0, v_0)$ .

Si probamos que  $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$ , entonces se tendrá el resultado. Para ello, sabemos que  $\langle N, X_u \rangle = 0 = \langle N, X_v \rangle$ ; derivando la primera identidad respecto a  $v$  y la segunda respecto a  $u$ , se tiene que

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0.$$

De la igualdad  $X_{uv} = X_{vu}$  se llega finalmente a que  $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$ .

**Ejemplo 2.1.10.2.1** Si  $C$  es el cilindro dado por la ecuación  $x^2 + y^2 = r^2$ , su parametrización dada por  $X(u, v) = (rcos u, rsenu, v)$ ; entonces, calculando el vector normal a  $C$  es  $N(u, v) \equiv (NoX)(u, v) = (cos u, senu, 0)$ . Vamos a calcular la aplicación

lineal  $dN_p$ , viendo simplemente como actúa sobre los vectores de la base  $\{X_u, X_v\}$ . para ello, observemos que

$$N_u = (-\operatorname{senu}, \operatorname{cosu}, 0) = aX_u + bX_v = a(-r\operatorname{seu}, r\operatorname{cosu}, 0) + b(0,0,1),$$

De donde  $a = 1/r$  y  $b = 0$ . Análogamente,  $N_v = (0,0,0) = cX_u + dX_v$ , por lo que  $c = d = 0$ . Así, la matriz de  $A_p = -dN_p$  respecto a la base  $\{X_u, X_v\}$  es

$$A_p \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.1.11. La Segunda Forma Fundamental

La segunda forma fundamental es el objeto que nos va permitir estudiar la relación que existe entre una superficie y el espacio en el que está contenida.

**Definición 2.1.11.1** La aplicación  $\Pi_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\Pi_p(\mathbf{v}) = \langle -dN(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle$  se denomina *la segunda forma fundamental* de  $S$  en  $p$ . (Do carmo, 1995, pág. 148)

Se admite que todas las parametrizaciones  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  son compatibles en la orientación  $N$  de  $S$ ; es decir, en  $X(U)$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}. \quad (2.6)$$

Sea  $X(u, v)$  una parametrización en un punto  $p \in S$  de una superficie regular  $S$  y sea  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  una curva parametrizada en  $S$ ,  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ .

El vector tangente a  $\alpha(t)$  en  $p$  es

$$\alpha'(0) = \mathbf{v} = X_u u' + X_v v' \quad (2.7)$$

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'$$

$$\text{donde } N_u = dN(X_u) \quad \text{y} \quad N_v = dN(X_v)$$

como  $N_u$  y  $N_v$  pertenecen al plano tangente  $T_pS$ , entonces se puede escribir



$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v \quad (2.8)$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v \quad (2.9)$$

Por otro lado, la expresión de la segunda forma fundamental en la base  $\{X_u, X_v\}$  se puede escribir como

$$\Pi_p(\mathbf{v}) = -\langle dN(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle$$

$$\Pi_p(\mathbf{v}) = -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - \langle N_u, X_v \rangle u' v' - \langle N_v, X_u \rangle v' u' - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2$$

Así

$$\Pi_p(\mathbf{v}) = e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2 \quad (2.10)$$

$$\text{donde } \langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0. \quad (2.11)$$

Luego los coeficientes de *la segunda forma fundamental* están dados por

$$e = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle X_{uu}, N \rangle,$$

$$f = -\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_{uv}, N \rangle = \langle X_{vu}, N \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle$$

$$g = -\langle N_v, X_v \rangle = \langle X_{vv}, N \rangle$$

### 2.1.12. CURVATURAS

El propósito de la presente sección es medir el comportamiento del plano tangente en el punto  $p \in S$ , cuando este varía sobre un conjunto abierto de la superficie  $S$ . Esto equivale a medir como cambia el vector normal unitario  $N$  en un punto  $p$ , al variar éste sobre una vecindad que lo contenga.

### 2.1.13. Curvatura Normal

**Definición 2.1.13.1.** Sea  $C$  una curva regular en  $S$  que pasa por  $p \in S$ ,  $k$  la curvatura de  $C$  en  $p$ , y  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ , donde  $n$  es el vector normal a  $C$  y  $N$  es el vector normal unitario a  $S$  en  $q$ . El número  $k_n = k \cos \theta$  se denomina curvatura normal de  $C \subset S$  en  $p$ . (Tenenblat, 2008, pág. 157)

**Observación 2.1.13.1.1** La curvatura normal de  $C$  no depende de la orientación  $C$  sino cambia de signo con un cambio de orientación de la superficie.

Dado un punto  $p$  de la superficie y  $\alpha = X(u(t), v(t))$  una curva regular  $C$  que pasa por  $p$ , la componente de  $k_n$  en la dirección de  $N$  se denomina curvatura normal de  $C$  en  $p$ , y tenemos

$$k_n = \langle k, N \rangle = k \langle n, N \rangle = k \cos \theta$$

donde  $k$  es el vector curvatura de  $C$  en  $q$ .

En efecto

Recordemos que la tangente unitaria a  $C$  en  $p$  es el vector  $\mathbf{t} = \frac{dX}{ds} = \frac{dX}{dt} / \left\| \frac{dX}{dt} \right\|$ , y el vector curvatura es  $k = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} / \left\| \frac{dX}{dt} \right\|$ . De esta manera, utilizando el hecho de que  $\mathbf{t}$  es perpendicular a  $N$  a todo lo largo de la curva, de tal modo que

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{t}, N \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{t}}{dt}, N \right\rangle + \left\langle \mathbf{t}, \frac{dN}{dt} \right\rangle,$$

tendremos

$$\begin{aligned} k_n &= \langle k, N \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{t}}{dt}, N / \left\| \frac{dX}{dt} \right\| \right\rangle = \left\langle -\mathbf{t}, \frac{dN}{dt} / \left\| \frac{dX}{dt} \right\| \right\rangle \\ &= -\frac{dX}{dt} \cdot \frac{dN}{dt} / \left\| \frac{dX}{dt} \right\|^2 = -\frac{dX}{dt} \cdot \frac{dN}{dt} / \frac{dX}{dt} \cdot \frac{dX}{dt} \\ &= -\left( \left( X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left( N_u \frac{du}{dt} + N_v \frac{dv}{dt} \right) \right) / \left( X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left( X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt} \right) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$k_n = \frac{e(du/dt)^2 + 2f(du/dt)(dv/dt) + g(dv/dt)^2}{E(du/dt)^2 + 2F(du/dt)(dv/dt) + G(dv/dt)^2}$$
$$k_n = \frac{II}{I} = k \cdot N \quad (2.16)$$

(Lipschutz, 1969, pág. 191)

**Ejemplo 2.1.13.1.2 (La Esfera)** Consideremos la parametrización de la esfera de radio  $a$  descrita por

$$X = (a \cos \beta \sin \gamma, a \sin \beta \sin \gamma, a \cos \gamma) \quad 0 < \beta < 2\pi, 0 < \gamma < 2\pi$$

Calculemos la curvatura normal.

En este caso

$$X_\beta = (-a \sin \beta \sin \gamma, a \cos \beta \sin \gamma, 0) \quad , \quad X_{\beta\beta} = (-a \cos \beta \sin \gamma, -a \sin \beta \sin \gamma, 0)$$

$$X_\gamma = (a \cos \beta \cos \gamma, a \sin \beta \cos \gamma, -a \sin \gamma) \quad , \quad X_{\beta\gamma} = (-a \sin \beta \sin \gamma, -a \cos \beta \sin \gamma, 0)$$

$$N = (-a \cos \beta \sin \gamma, -a \sin \beta \sin \gamma, -\cos \gamma) \quad , \quad X_{\gamma\gamma} = (-a \cos \beta \sin \gamma, -a \sin \beta \sin \gamma, -a \cos \gamma)$$

y los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental son

$$E = \langle X_\beta, X_\beta \rangle = a^2 \sin^2 \gamma \quad , \quad F = \langle X_\beta, X_\gamma \rangle = 0 \quad , \quad G = \langle X_\gamma, X_\gamma \rangle = a^2$$

$$e = \langle X_{\beta\beta}, N \rangle = a \sin^2 \gamma \quad , \quad f = \langle X_{\beta\gamma}, N \rangle = 0 \quad , \quad g = \langle X_{\gamma\gamma}, N \rangle = a$$

Por lo que

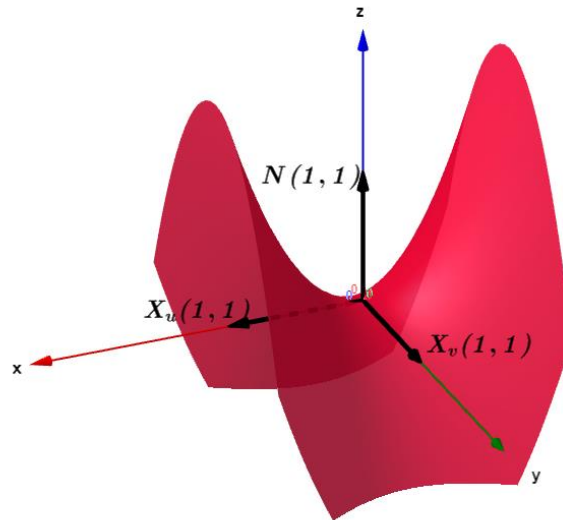
$$k_n = \frac{e(d\beta)^2 + 2f(d\beta)(d\gamma) + g(d\gamma)^2}{E(d\beta)^2 + 2F(d\beta)(d\gamma) + G(d\gamma)^2} = \frac{a \sin^2 \gamma (d\beta)^2 + a(d\gamma)^2}{a^2 \sin^2 \gamma (d\beta)^2 + a^2(d\gamma)^2} = \frac{1}{a}$$

en este caso  $k_n$  es constante e igual a  $1/a$  en todos los puntos y en todas las direcciones.

**Ejemplo 2.1.13.1.3(Paraboloide Hiperbólico)** Hallar el vector curvatura normal ,  $k_n$

de la curva  $u = t^2$  ,  $v = t$  , de la superficie  $X = (u, v, v^2 - u^2)$  en el punto  $t = 1$

En  $t = 1$ , tenemos que  $u = 1$  y  $v = 1$ , así que al calcular los coeficientes de la primer y segunda forma fundamental y evaluar en  $(u, v) = (1,1)$  tenemos:



**Figura 9.** Paraboloide Hiperbólico.

Encontremos

$$X_u = (1, 0, -2u) \quad , \quad X_{uu} = (0, 0, -2)$$

$$X_v = (0, 1, 2v) \quad , \quad X_{vv} = (0, 0, 2)$$

$$N = (2u, -2v, 1)/(4u^2 + 4v^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad X_{uv} = (0, 0, 2)$$

Por lo que los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental son:

$$E(1,1) = 1 + 4u^2|_{(1,1)} = 5 \quad , \quad F(1,1) = 4uv|_{(1,1)} = 4 \quad , \quad G(1,1) = 1 + 4v^2|_{(1,1)} = 5$$

$$e(1,1) = -2 \left( (4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right) \Big|_{(1,1)} = -\frac{2}{3}$$

$$f(1,1) = 0|_{(1,1)} = 0$$

$$g(1,1) = 2 \left( (4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right) \Big|_{(1,1)} = \frac{2}{3}$$

$$N(1,1) = \left( \frac{(2u, -2v, 1)}{(4u^2 + 4v^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right) \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$$

Además

$$u = t^2 \rightarrow \frac{du}{dt}(1) = 2t|_{(1,1)} = 2 \quad , \quad v = t \rightarrow \frac{dv}{dt}(1) = 1|_{(1,1)} = 1$$

y en consecuencia



$$k_n = \frac{e(du/dt)^2 + 2f(du/dt)(dv/dt) + g(dv/dt)^2}{E(du/dt)^2 + 2F(du/dt)(dv/dt) + G(dv/dt)^2} = \frac{-2}{123}$$

$$k_n = k_n \cdot N = \frac{-2}{369} (2, -2, 1)$$

■

**Ejemplo 2.1.13.1.4(Cilindro Circular.)** Sea  $X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$   $r > 0$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  la superficie que describe el cilindro circular. Vamos calcular los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales de  $X$  y verificar que existen direcciones tangentes donde la función curvatura normal admite un máximo y un mínimo como

$$\begin{aligned} X_u &= (-r \sin u, r \cos u, 0), & X_{uu} &= (-r \cos u, -r \sin u, 0) \\ X_v &= (0, 0, 1) & X_{uv} &= (0, 0, 0), \\ N &= (\cos u, \sin u, 0) & X_{vv} &= (0, 0, 0), \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E(u, v) &= r^2, & F(u, v) &= 0, & G(u, v) &= 1, \\ e(u, v) &= -r, & f(u, v) &= 0, & g(u, v) &= 0. \end{aligned}$$

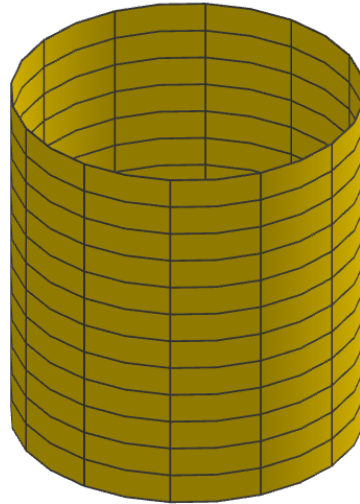
Por lo que

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{-a^2 r}{a^2 r^2 + b^2}$$

Para un vector  $w \neq 0$ . Observamos que  $k_n \leq 0$  y  $k_n = 0$ , si y solo si,  $a = 0$  y  $b \neq 0$ . Si  $a \neq 0$ , entonces

$$\frac{a^2 r}{a^2 r^2 + b^2} \leq \frac{1}{r}$$

Por tanto,  $k_n \geq -\frac{1}{r}$  y esta última igualdad ocurre cuando  $b = 0$ . Concluimos que la función  $k_n$  admite un máximo y un mínimo de las direcciones de  $X_v$  y  $X_u$  respectivamente. (Tenenblat, 1987, pág. 161)



**Figura 10.** Cilindro Circular.

#### 2.1.14. Curvatura Gaussiana y Curvatura Media

Vamos expresar la curvatura de Gauss y la curvatura media en función de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de una superficie  $S$ .

**Proposición 2.1.14.1** Sea  $X(u, v)$  una parametrización de la superficie  $S$ . Si  $q = (u, v)$ , entonces

$$H(p) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}, \quad (2.12)$$

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (2.13)$$

(Tenenblat, 2008, pág. 171)

**Ejemplo 2.1.14.1.1 (Toro de Revolución)** Consideremos la parametrización del toro  $T'$

Calculemos la curvatura Gaussiana de los puntos que lo recubre.

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$



Entonces,

$$X_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

$$X_v = (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0)$$

$$X_{uu} = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u)$$

$$X_{uv} = (-r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0)$$

$$X_{vv} = (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0)$$

Por lo que los coeficientes de las formas fundamentales son:

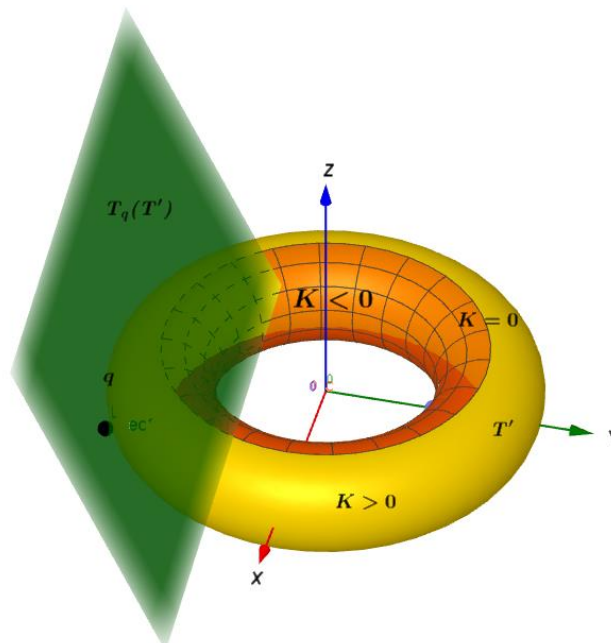
$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2 \quad , F = \langle X_u, X_v \rangle = 0 \quad , G = \langle X_v, X_v \rangle = (a + r \cos u)^2$$

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = r \quad , f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \quad , g = \langle X_{vv}, N \rangle = \cos u (a + r \cos u)$$

Por tanto

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}$$

De esta expresión se deduce que  $K = 0$  a lo largo de los paralelos  $u = \pi/2$  y  $u = 3\pi/2$ . En la región del toro definida por  $\frac{\pi}{2} < u < 3\pi/2$ ,  $K$  es negativa. y en la región dada por  $0 < u < \pi/2$  o  $\frac{3\pi}{2} < u < 2\pi$  la curvatura es positiva.



**Figura 11.** Toro.

**Ejemplo 2.1.14.1.2 (Paraboloide hiperbólico)** Consideremos la siguiente parametrización descrita por y calculemos la curvatura Gaussiana y Curvatura media

$$X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

un simple cálculo prueba que

$$\begin{aligned} E(0,0) &= 1, & F(0,0) &= 0, & G(0,0) &= 1, \\ e(0,0) &= -2, & f(0,0) &= 0, & g(0,0) &= 2. \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} H(0,0) &= 0 \\ K(0,0) &= -4. \end{aligned}$$

## 2.1.15. CURVAS ESPECIALES SOBRE SUPERFICIES

### 2.1.16. Líneas de Curvatura

Llamamos líneas de curvatura a toda curva  $\alpha(t)$  contenida en la superficie  $S$  si la dirección del vector tangente en cada uno de sus puntos coincide con la dirección principal en ese punto.

**Definición 2.1.16.1** Sea  $S$  una superficie regular orientada y sea  $\alpha: I \rightarrow S$  una curva de forma que  $\alpha'(t)$  es una dirección principal en  $\alpha(t)$ , para todo  $t \in I$ . Se dice entonces que  $\alpha$  es una *línea de curvatura* de  $S$ . (Tenenblat, 2008, pág. 195)

#### Ejemplo 2.1.16.1.1

- i. Toda curva regular de un plano es una línea de curvatura.
- ii. Toda curva regular de una esfera es una línea de curvatura.

**Proposición 2.1.16.2 (Olinde Rodrigues)** Condición necesaria y suficiente para que una curva regular conexa  $C$  en  $S$  sea una línea de curvatura de  $S$  es que

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t) \tag{2.15}$$

Para cualquier parametrización  $\alpha(t)$  de  $C$ , donde  $N(t) = N_o\alpha(t)$  y  $\lambda(t)$  es una función diferenciable de  $t$ . En este caso,  $-\lambda(t)$  es la curvatura (principal) a lo largo de  $\alpha'(t)$ .

(Do carmo,1995, pág. 166)

**Prueba.** Basta con observar que si  $\alpha'(t)$  está contenida en una dirección principal, entonces  $\alpha'(t)$  es un autovector de  $dN$  y

$$dN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

el reciproco se obtiene a partir de la igualdad :  $N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$ , de la cual se desprende que

$$\begin{aligned}(N'(t) - \lambda(t)\alpha'(t)) \cdot X_u &= 0 \\ (N'(t) - \lambda(t)\alpha'(t)) \cdot X_v &= 0\end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned}[(N_u du + N_v dv) - \lambda(X_u du + X_v dv)] \cdot X_u &= 0 \\ [(N_u du + N_v dv) - \lambda(X_u du + X_v dv)] \cdot X_v &= 0\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}(-N_u \cdot X_u + \lambda X_u \cdot X_u) du - (-N_v \cdot X_u + \lambda X_v \cdot X_u) dv &= 0 \\ (-N_u \cdot X_v + \lambda X_u \cdot X_v) du - (-N_v \cdot X_v + \lambda X_v \cdot X_v) dv &= 0\end{aligned}$$

que es equivalente,

$$\begin{aligned}(X_{uu} \cdot N + \lambda X_u \cdot X_u) du + (X_{vu} \cdot N + \lambda X_v \cdot X_u) dv &= 0 \\ (X_{uv} \cdot N + \lambda X_u \cdot X_v) du + (X_{vv} \cdot N + \lambda X_v \cdot X_v) dv &= 0\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}(e + \lambda E) du + (f + \lambda F) dv &= 0 \\ (f + \lambda F) du + (g + \lambda G) dv &= 0\end{aligned}$$

Por lo anterior, se desprende que  $-\lambda$  es una curvatura principal y por ello se verifica que  $C$  es línea de curvatura.

Ahora, consideramos las direcciones principales. Una curva regular conexa  $C$  parametrizada por  $X$  es una línea de curvatura si y solamente si para cualquier parametrización de  $C$ ,  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , tenemos

$$dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

Se deduce entonces que las funciones  $u'(t)$  y  $v'(t)$  satisfacen el sistema de ecuaciones:



$$\frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{gF - fG}{EG - F^2}v' = \lambda u'$$

$$\frac{eF - fE}{EG - F^2}u' + \frac{fF - gE}{EG - F^2}v' = \lambda v'$$

Eliminando  $\lambda$  en el sistema anterior obtenemos la ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0 \quad (2.16)$$

Que puede escribirse de la forma

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0, \quad (2.17)$$

Por lo que una curva es una línea de curvatura si y solo si satisface la ecuación anterior. ■

**Ejemplo 2.1.16.2.1 (Paraboloide Circular)** Consideremos la siguiente parametrización

$$X = (u, v, u^2 + v^2)$$

Encontrar las *líneas de curvatura*.

Calculando los coeficientes de las formas fundamentales, tenemos:

$$\begin{aligned} E = 1 + 4u^2 & , & e = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \\ F = 4uv & , & f = 0 \\ G = 1 + 4v^2 & , & g = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.16)

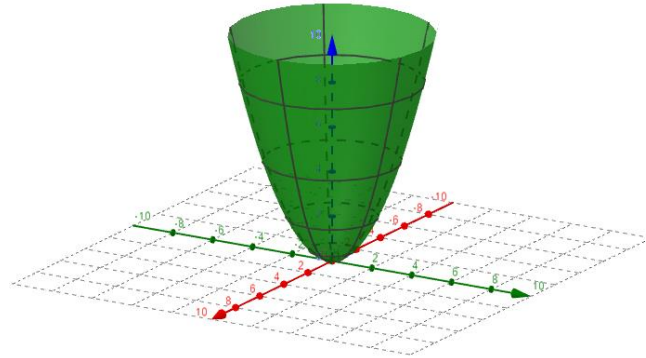
$$\begin{aligned} (fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0 \\ -8uv(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}du^2 \\ + \left( 2(1 + 4u^2)(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right. \\ \left. - 2(1 + 4v^2)(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right) dudv \\ + 8uv(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}dv^2 = 0 \end{aligned}$$

Dividir por  $-(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ , tendremos:

$$(udu + vdv)(vdu - udv) = 0$$

$$udu + vdv = 0 \quad , \quad vdu - udv = 0$$

La solución de la primera ecuación es la familia de circunferencias  $u^2 + v^2 = r^2$  y la solución de la segunda es a familia de rectas,  $u = bv$  que pasan por el origen.



**Figura 12.** Paraboloide Circular

### 2.1.17. Líneas Asintóticas

**Definición 2.1.17.1** Sea  $X$  una parametrización de la superficie  $S$ . Una curva regular  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , es una línea asintótica de  $X$  en  $S$ , si para todo  $t \in I$ ,  $\alpha'(t)$  es una dirección asintótica de  $X$  en  $(u(t), v(t))$ .

(Tenenblat, 2008, pág. 201)

**Proposición 2.1.17.2** Sea  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , una curva regular de una parametrización  $X(u, v)$  de la superficie. Entonces,  $\alpha$  es una línea asintótica de  $X$ , si y solo si, las funciones  $u(t)$ ,  $v(t)$  satisfacen la ecuación

$$e(u')^2 + 2f(u'v') + g(v')^2 = 0 \quad , t \in I \quad (2.18)$$

donde  $e, f, g$  son coeficientes de la segunda forma fundamental de  $X$  en  $(u(t), v(t))$ .

**Prueba.** Se deduce de la definición anterior que  $\alpha$  es una línea asintótica de  $X$  cuando  $k_n(\alpha'(t))=0$ , para todo  $t$ , esto es, las funciones  $u(t)$  y  $v(t)$  satisfacen la ecuación (2.18).



**Ejemplo 2.1.17.2.1** (el Helicoide) Consideremos la parametrización descrita por

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Calcular las *líneas asintóticas*.

Tenemos

$$\begin{aligned} X_u &= (\cos v, \sin v, 0) & , & & X_{uu} &= (0, 0, 0) \\ X_v &= (-u \sin v, u \cos v, 1) & , & & X_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0) \\ N &= \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1+u^2}} & , & & X_{vv} &= (-u \cos v, -u \sin v, 0) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$e(u, v) = 0, \quad f(u, v) = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad g(u, v) = 0$$

la ecuación diferencial de las líneas asintóticas es:

$$(0)(u')^2 + 2f(u'v') + (0)(v')^2 = 0$$

Se reduce a

$$-\frac{2}{\sqrt{1+u^2}} u'v' = 0.$$

Por lo tanto, tenemos las ecuaciones  $u' = 0$  ,  $v' = 0$ . Concluimos que las curvas coordenadas son líneas asintóticas.

## 2.1.18. ECUACIONES FUNDAMENTALES

### 2.1.19. Las Fórmulas De Gauss – Weingarten

**Definición 2.1.19.1** Sea  $S$  una superficie regular orientada por  $\nu$  y sea  $X: U \rightarrow V$  una parametrización de  $S$  positivamente orientada, es decir, tal que  $\{X_u, X_v, N\}$  es un base de  $\mathbb{R}^3$  positivamente orientada . (Lipschutz, 1969, pág. 214)

Queremos expresar las derivadas de estos vectores en función de la propia base  $\{X_u, X_v, N\}$ .

$$\begin{cases} N_u = b_{11}X_u + b_{21}X_v \\ N_v = b_{12}X_u + b_{22}X_v \end{cases} \quad (2.19)$$



$$b_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, b_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, b_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, b_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}, \quad (2.20)$$

Las ecuaciones se conocen con el nombre de *fórmulas de Weingarten*.

**Prueba:** En las dos igualdades usamos el hecho de que  $N_u$  y  $N_v$  son vectores tangentes a la superficie como también son ortogonales a  $N$ . Por tanto,

$$0 = \langle N_u, N \rangle = b_{11}\langle X_u, N \rangle + b_{21}\langle X_v, N \rangle + \gamma_1\langle N, N \rangle, \quad (2.21)$$

$$0 = \langle N_v, N \rangle = b_{12}\langle X_u, N \rangle + b_{22}\langle X_v, N \rangle + \gamma_2\langle N, N \rangle, \quad (2.22)$$

Pero,  $\langle X_u, N \rangle = \langle X_v, N \rangle = 0$  y  $\langle N, N \rangle = 1$ . En esta forma,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  Por otra parte,

de lo anterior se desprende que

$$b_{11}E + b_{12}F = b_{11}\langle X_u, X_u \rangle + b_{21}\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_u \rangle = -e$$

$$b_{11}F + b_{12}G = b_{11}\langle X_v, X_u \rangle + b_{21}\langle X_v, X_v \rangle = \langle X_v, N_u \rangle = -f$$

$$b_{21}E + b_{22}F = b_{12}\langle X_u, X_u \rangle + b_{22}\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle = -f$$

$$b_{21}F + b_{22}G = b_{12}\langle X_u, X_u \rangle + b_{22}\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_v, N_v \rangle = -g$$

Si se resuelven las dos primeras ecuaciones para  $b_{11}$  y  $b_{21}$  y las otras dos para  $b_{12}$  y  $b_{22}$ , se tiene de manera matricial los coeficientes  $b_{ij}$  están dados por

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} fF - eG & eF - fE \\ gF - fG & fF - gE \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Donde

$$EG - F^2 = |X_u \times X_v|^2 = H^2$$

■

Estudiemos a continuación los vectores  $X_{uu}, X_{uv}, X_{vu}, X_{vv}$ . Como son vectores en  $\mathbb{R}^3$ , los podemos expresar como combinación lineal de la base  $\{X_u, X_v, N\}$ . Entonces,

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N,$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \quad (2.24)$$

$$X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + L_3 N,$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_4 N,$$

Para ciertos coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $L_m$ , con  $i, j, k \in \{1, 2\}$  y  $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Ahora bien, es evidente que el coeficiente  $L_1 = L_1 \langle N, N \rangle = \langle X_{uu}, N \rangle = e$  y, análogamente, que  $L_2 = \langle X_{uv}, N \rangle = f$ ,  $L_3 = \langle X_{vu}, N \rangle = f$ ,  $L_4 = \langle X_{vv}, N \rangle = g$ .

**Teorema 2.1.19.2** Sea  $S$  una superficie regular  $X(u, v)$  una parametrización de  $S$ ,  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , los vectores  $\{X_u, X_v, N\}$ . y sus derivadas cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN, \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN, \end{aligned} \quad (2.25)$$

reciben el nombre de *Fórmulas de Gauss*, y los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ , los símbolos de *Christoffel*.

(Tenenblat, 2008, pág. 205)

Los símbolos de Christoffel dependen de la parametrización respecto a la cual se calculen, y son simétricos respecto a los subíndices ( $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  y  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ ), ya que  $X_{uv} = X_{vu}$ .

Pero existe una propiedad mucho más importante de estos coeficientes, y es que, a pesar de aparecer en las relaciones donde intervienen tanto el propio vector normal como los coeficientes de la segunda forma fundamental, van a depender exclusivamente de la primera forma fundamental de la superficie.

Si multiplicamos escalarmente las ecuaciones de (2.25) por  $X_u$  y  $X_v$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F & \langle X_{uu}, X_v \rangle &= \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G, \\ \langle X_{uv}, X_u \rangle &= \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F & \langle X_{uv}, X_v \rangle &= \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G, \\ \langle X_{vv}, X_u \rangle &= \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F & \langle X_{vv}, X_v \rangle &= \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G, \end{aligned}$$



Por otro lado, derivando  $E = \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $F = \langle X_u, X_v \rangle$ ,  $G = \langle X_v, X_v \rangle$  respecto a  $u$  y  $v$  de forma adecuada, obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_u \rangle &= \frac{1}{2} E_u & y & \quad \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \langle X_u, X_{vu} \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \langle X_{uv}, X_u \rangle &= \frac{1}{2} E_v & y & \quad \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \\ \langle X_{vv}, X_u \rangle &= F_v - \langle X_{uv}, X_v \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u & y & \quad \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v, \end{aligned}$$

Lo que finalmente permite escribir los *Símbolos de Christoffel* como solución a un sistema lineal de seis ecuaciones con seis incógnitas, en el que los coeficientes y términos independientes dependen exclusivamente de la Primera Forma Fundamental:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{array} \right.$$

En efecto, los símbolos de Christoffel solo dependen de la primera forma fundamental de la superficie. Escribiendo la solución a este sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F_u - \frac{G_v}{2} & \frac{G_u}{2} & \frac{G_v}{2} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

(Tenenblat, 2008, pág. 206)

**Ejemplo 2.1.19.2.1** Consideramos la superficie

$$X(u, \theta) = (u \cos \theta, u \operatorname{sen} \theta, g(u)) \quad u > 0$$

En este caso,

$$X_u = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, g') , \quad X_{u\theta} = (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0)$$

$$X_\theta = (-u \operatorname{sen} \theta, u \operatorname{cos} \theta, 0), \quad X_{\theta\theta} = (-u \operatorname{cos} \theta, -u \operatorname{sen} \theta, 0)$$

$$N = -(1 + (g')^2)^{-1/2}(g' \operatorname{cos} \theta, g' \operatorname{sen} \theta, -1), \quad X_{uu} = (0, 0, g'')$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (g')^2 \quad F = \langle X_u, X_\theta \rangle = 0 \quad G = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = u^2$$

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = g''(1 + (g')^2)^{-1/2}, \quad f = \langle X_{u\theta}, N \rangle = 0, \quad g = \langle X_{\theta\theta}, N \rangle = ug'(1 + (g')^2)^{-1/2}$$

Seguidamente calculamos,

$$b_{11} = -g'' \left( (1 + (g')^2)^{-3/2} \right), \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{22} = -u^{-1}g' \left( (1 + (g')^2)^{-1/2} \right)$$

$$\Gamma_{11}^1 = g'g''/(1 + (g')^2)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = u^{-1}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -u/(1 + (g')^2)$$

De lo cual se desprende

$$\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_\theta + eN = g'g''/(1 + (g')^2)X_u + g''(1 + (g')^2)^{-1/2}N,$$

$$\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_\theta + fN = u^{-1}X_\theta,$$

$$\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_\theta + gN = -u/(1 + (g')^2)X_u + ug'(1 + (g')^2)^{-1/2}N,$$

$$b_{11}X_u + b_{21}X_\theta = -g'' \left( (1 + (g')^2)^{-3/2} \right) X_u,$$

$$b_{12}X_u + b_{22}X_\theta = -u^{-1}g' \left( (1 + (g')^2)^{-1/2} \right) X_\theta.$$

### 2.1.20. Ecuaciones De Compatibilidad. Teorema De Gauss

Las fórmulas de Gauss y Weingarten se han deducido estudiando las derivadas parciales primeras de los vectores base  $\{X_u, X_v, N\}$ . Las ecuaciones de compatibilidad se obtienen a partir de las segundas derivadas; más concretamente, estudiando las identidades  $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$ ,  $(X_{vv})_u = (X_{vu})_v$  y  $N_{uv} = N_{vu}$ . Así, para la primera de ellas, si sustituimos  $X_{uu}$  y  $X_{uv}$  por las *fórmulas de Gauss* correspondientes y operamos, obtenemos

$$0 = (X_{uu})_v - (X_{uv})_u = (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e_v N + e N_v -$$

$$(\Gamma_{12}^1)_v X_u - \Gamma_{12}^1 X_{uu} - (\Gamma_{12}^2)_u X_v - \Gamma_{12}^2 X_{vu} - f_u N - f N_u$$

Sustituyendo de nuevo y utilizando las *fórmulas de Weingarten*, llegamos a una expresión en la que únicamente aparecen los vectores de la base  $\{X_u, X_v, N\}$ , lo que nos permite

reagrupar los coeficientes conveniente y obtener una combinación lineal de tales vectores igualada a cero:

$$\begin{aligned}
 0 &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN) \\
 &\quad - (\Gamma_{12}^1)_u X_u - \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) - (\Gamma_{12}^2)_u X_v \\
 &\quad - \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + e_v N + e(b_{12} X_u + b_{22} X_v) - f_u N \\
 &\quad - f(b_{11} X_u + b_{21} X_v) \\
 &= A_1 X_u + B_1 X_v + C_1 N.
 \end{aligned}$$

Dado que  $\{X_u, X_v, N\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ , podemos concluir que los tres coeficientes  $A_1 = B_1 = C_1 = 0$ . Detengámonos primero en la identidad  $B_1 = 0$ , esto es,

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + e b_{22} - f b_{21} = 0.$$

Un cálculo inmediato permite deducir la llamada *ecuación de Gauss* de una superficie:

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 = f \frac{eF - fE}{EG - F^2} - e \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

es decir,

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 = EK. \quad (2.27)$$

**Observación 2.1.20.1** La curvatura de Gauss solo depende de los *Símbolos de Christoffel*  $\Gamma$  y  $K$ , por lo tanto, exclusivamente de la *Primera Forma Fundamental*.

Si escribimos  $A_1 = 0$ , se tiene la relación

$$(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 = -FK. \quad (2.28)$$

Que es una variante de la ecuación de Gauss. Sin embargo, esta nueva relación proporciona mucha menos información que la ecuación de Gauss, pues ya sabemos que  $F$  puede anularse, mientras que  $E$  no. por tanto, no forma parte de las ecuaciones de compatibilidad. finalmente, si escribimos  $C_1 = 0$  obtenemos una nueva relación de importancia:

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \quad (2.29)$$

Razonando de manera análoga con la identidad  $(X_{vv})_u - (X_{vu})_v = 0$ , se llega a una expresión de la forma  $A_2X_u + B_2X_v + C_2N = 0$ , de donde se deduce de nuevo que  $A_2 = B_2 = C_2 = 0$ . las igualdades  $A_2 = 0$  y  $B_2 = 0$  no proporcionan información relevante;  $C_2 = 0$  si permite escribir una nueva ecuación:

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \quad (2.30)$$

Las ecuaciones (2.29) y (2.30) Se denominan *Ecuaciones de Mainardi-Codazzi* que, junto con la *Ecuación de Gauss* (2.27) reciben el nombre de *Ecuaciones de Compatibilidad*. La identidad  $N_{uv} = N_{vu}$  no proporciona información adicional.

■

**Observación 2.1.20.2** El sistema *Lineal de Gauss-Weingarten* asociado a la superficie  $S$  se puede reescribir de la forma:

$$(X_u \ X_v \ N)_u = (X_u \ X_v \ N)P \quad , \quad (X_u \ X_v \ N)_v = (X_u \ X_v \ N)Q \quad (2.31)$$

Donde  $P$  y  $Q$  son matrices definidas por

$$P = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^1 & e \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^1 & f \\ b_{11} & b_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Q = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^1 & f \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^1 & g \\ b_{12} & b_{22} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

y las identidades de compatibilidad  $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$ ,  $(X_{vv})_u = (X_{vu})_v$  y  $N_{uv} = N_{vu}$  aplicados al *sistema lineal de Gauss* dan como resultado la expresión

$$P_v - Q_u = (P, Q) \quad (2.33)$$

Por tanto, las ecuaciones *no lineales de Mainardi-Codazzi* (2.29) y (2.30) para una superficie  $S$  de la forma:

$$\left(\frac{e}{H}\right)_v - \left(\frac{f}{H}\right)_u + \frac{e}{H}\Gamma_{22}^2 - 2\frac{f}{H}\Gamma_{12}^2 + \frac{g}{H}\Gamma_{11}^2 = 0 \quad (2.34)$$

$$\left(\frac{g}{H}\right)_u - \left(\frac{f}{H}\right)_v + \frac{e}{H}\Gamma_{22}^1 - 2\frac{f}{H}\Gamma_{12}^1 + \frac{g}{H}\Gamma_{11}^1 = 0 \quad (2.35)$$

donde *Curvatura total* es expresada por:

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left[ \left( \frac{\sqrt{EG-F^2}}{E} \Gamma_{11}^2 \right)_v - \left( \frac{\sqrt{EG-F^2}}{E} \Gamma_{12}^2 \right)_u \right] \quad (2.36)$$

(Rogers & Schief, 2002, pág. 19)

**Observación 2.1.20.3** Las curvas coordenadas son las líneas de curvatura, esto es, cuando  $F = f = 0$  (en 2.26). (Do Carmo, 1995, pág. 240)

Por ser  $F = 0$ , los símbolos de christoffel tienen una expresión de la siguiente manera,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \frac{E_u}{E}, \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}, \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E}, \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E}, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_v}{G},$$

**Teorema 2.1.20.3 (Teorema Egregium de Gauss).** La Curvatura Gaussiana está determinada sólo por la primera forma fundamental. Es decir,  $K$  se puede calcular sólo a partir de  $E, F, G$  de su primera y segunda derivadas parciales.

(Shifrin, 2016, pág. 60)

**Prueba.** De cualquiera de las ecuaciones de Gauss, vemos que  $K$  se calcular conociendo cualquiera de  $E, F, G$ , junto con los símbolos de Christoffel y sus derivadas, pero las ecuaciones (2.26) muestran que los símbolos de Christoffel (y por lo tanto cualquiera de sus derivadas) se pueden calcular en términos de  $E, F, G$  y sus derivadas parciales.

**Observación 2.1.20.4** Una pregunta natural es si existen más relaciones de compatibilidad entre la primera y segunda formas fundamentales que aporten una información relevante (es decir alguna característica que determine a la superficie frente a otras). Lo que se demuestra en este resultado es que, con las relaciones de compatibilidad

que hemos presentado, una superficie queda determinado por completo, por lo que el resto de posibles relaciones no aportan información alguna: son redundantes). La respuesta es negativa tal y como se demuestra el siguiente teorema.

### 2.1.21. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS SUPERFICIES REGULARES

Las ecuaciones anteriores son conocidas como las *Ecuaciones Clásicas de Compatibilidad* de la teoría de superficies. El siguiente resultado, de los más importantes en Geometría Diferencial clásica.

#### **Teorema 2.1.21.1 (Fundamental De Las Superficies Regulares).**

Sean  $E, F, G, e, f, g: V \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables definidas sobre un abierto  $V \subset \mathbb{R}^2$ , verificando las ecuaciones de compatibilidad (2.27), (2.29), (2.30) y las relaciones  $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$ . Entonces, existen un abierto  $U \subset V$  y un difeomorfismo  $X: U \rightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^3$ , de forma que  $X(U)$  es una superficie regular, parametrizada por  $X$ , tal que los coeficientes de su primera y segunda formas fundamentales asociadas son  $E, F, G, e, f, g$ , respectivamente.

Además, si  $U$  es conexo y  $\bar{X}: U \rightarrow \bar{X}(U)$  es otro difeomorfismo que satisface también las condiciones anteriores, entonces existe una transformación ortogonal  $A$  y una traslación  $T$  de forma que  $\bar{X} = T \circ A \circ X$  (en otras palabras, existe un movimiento rígido que lleva una superficie a otra).

(Do Carmo, 1995, pág. 239)

**Prueba (unicidad).** Supongamos que existen dos superficies parametrizadas regulares,  $X = X(u, v)$  y  $\bar{X} = \bar{X}(u, v)$  definidas en un conjunto  $U$  abierto y conexo que contiene a  $(u_0, v_0)$ , y tales que, para cualquier  $(u, v)$ , ocurra que los coeficientes sean:  $E = \bar{E}, F = \bar{F}, G = \bar{G}, e = \bar{e}, f = \bar{f}$  y  $g = \bar{g}$ .

Supongamos que a la superficie que representamos por  $\bar{X} = \bar{X}(u, v)$  se le aplica primero la traslación y luego un giro, de modo que el punto que corresponde a  $\bar{X}(u_0, v_0)$  llegue a coincidir  $X(u_0, v_0)$  y los vectores tangentes  $\bar{X}_u(u_0, v_0)$  y  $\bar{X}_v(u_0, v_0)$  coincidan con  $X_u(u_0, v_0)$  y  $X_v(u_0, v_0)$ , respectivamente. Ello es posible, pues las longitudes de los vectores  $\bar{X}_u$  y  $\bar{X}_v$  y el ángulo que forman, están determinadas por  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$  que concuerdan con  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , en  $(u_0, v_0)$ .

Supongamos, ahora, que  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  es un arco que une a  $(u_0, v_0)$  con cualquier otro punto  $(u, v)$  de  $U$ , y consideramos las funciones

$$X(t) = X(u(t), v(t)), \quad X_u(t) = X_u(u(t), v(t)), \quad X_v(t) = X_v(u(t), v(t)),$$

Por derivación se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt}, \\ \frac{dX_u}{dt} &= X_{uu} \frac{du}{dt} + X_{uv} \frac{dv}{dt}, \\ \frac{dX_v}{dt} &= X_{vu} \frac{du}{dt} + X_{vv} \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

Utilizando las tres primeras ecuaciones del *Teorema 2.1.19.2.* y el hecho de que

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}},$$

obtendremos

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt}, \\ \frac{dX_u}{dt} &= \left( \Gamma_{11}^1 \frac{du}{dt} + \Gamma_{12}^1 \frac{dv}{dt} \right) X_u + \left( \Gamma_{11}^2 \frac{du}{dt} + \Gamma_{12}^2 \frac{dv}{dt} \right) X_v + \left( e \frac{du}{dt} + f \frac{dv}{dt} \right) \frac{(X_u \times X_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \frac{dX_v}{dt} &= \left( \Gamma_{12}^1 \frac{du}{dt} + \Gamma_{22}^1 \frac{dv}{dt} \right) X_u + \left( \Gamma_{12}^2 \frac{du}{dt} + \Gamma_{22}^2 \frac{dv}{dt} \right) X_v + \left( f \frac{du}{dt} + g \frac{dv}{dt} \right) \frac{(X_u \times X_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \end{aligned}$$

o, también,

$$\frac{dX}{dt} = a(t)X_u + b(t)X_v,$$



$$\frac{dX_u}{dt} = c(t)X_u + d(t)X_v + e(t)(X_u \times X_v) ,$$

$$\frac{dX_v}{dt} = f(t)X_u + g(t)X_v + h(t)(X_u \times X_v) ,$$

en donde,

$$a(t) = \frac{du}{dt} , \quad b(t) = \frac{dv}{dt} , \quad c(t) = \Gamma_{11}^1 \frac{du}{dt} + \Gamma_{12}^1 \frac{dv}{dt} , \dots$$

Consideramos, ahora, las anteriores ecuaciones como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para las funciones  $X(t)$ ,  $X_u(t)$  y  $X_v(t)$ . Observamos, además, que los coeficientes  $a(t)$ ,  $b(t)$ , etc. Sólo dependen de la curva  $u(t)$ ,  $v(t)$ , de los primeros y segundos coeficientes fundamentales  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$ , y de las derivadas de  $E$ ,  $F$  y  $G$  a lo largo de  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ . Como

$$E = \bar{E} , F = \bar{F} , G = \bar{G} , e = \bar{e} , f = \bar{f} , g = \bar{g}$$

para todo  $(u, v)$ , las correspondientes funciones

$$\bar{X}(t) = \bar{X}(u(t), v(t)) ,$$

$$\bar{X}_u(t) = \bar{X}_u(u(t), v(t)) ,$$

$$\bar{X}_v(t) = \bar{X}_v(u(t), v(t)) ,$$

Satisfacen el mismo sistema de ecuaciones, en toda la extensión de la superficie parametrizada regular  $\bar{X} = \bar{X}(u, v)$ . Además, inicialmente,

$$X(t_0) = X(u_0, v_0) = \bar{X}(u_0, v_0) = \bar{X}(t_0) ,$$

$$X_u(t_0) = X_u(u_0, v_0) = \bar{X}_u(u_0, v_0) = \bar{X}_u(t_0) ,$$

$$X_v(t_0) = X_v(u_0, v_0) = \bar{X}_v(u_0, v_0) = \bar{X}_v(t_0) .$$

Del teorema de la unicidad, relativo a las ecuaciones diferenciales ordinarias, se desprende que  $X(t) = \bar{X}(t)$  en cualquier punto de la curva  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ . Por tanto, la superficies parametrizadas regulares  $X(u, v) = \bar{X}(u, v)$  coinciden.

■



**Prueba. (existencia)** Consideremos el siguiente sistema escalar de ecuaciones

diferenciales parciales

$$\begin{aligned}(\xi_i)_u &= \Gamma_{11}^1 \xi_i + \Gamma_{11}^2 \eta_i + e \zeta_i, \\(\xi_i)_v &= \Gamma_{12}^1 \xi_i + \Gamma_{12}^2 \eta_i + f \zeta_i, \\(\eta_i)_u &= \Gamma_{12}^1 \xi_i + \Gamma_{12}^2 \eta_i + f \zeta_i, \\(\eta_i)_v &= \Gamma_{22}^1 \xi_i + \Gamma_{22}^2 \eta_i + g \zeta_i, \\(\zeta_i)_u &= b_{11} \xi_i + b_{12} \eta_i, \\(\zeta_i)_v &= b_{21} \xi_i + b_{22} \eta_i,\end{aligned}$$

donde  $(i = 1,2,3)$

a las que se imponen condiciones iniciales siguientes

$$\begin{aligned}\xi_1(u_0, v_0) &= \sqrt{E_0} & \eta_1(u_0, v_0) &= \frac{F_0}{\sqrt{E_0}} & \zeta_1(u_0, v_0) &= 0, \\ \xi_2(u_0, v_0) &= 0 & \eta_2(u_0, v_0) &= \frac{\sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}}{\sqrt{E_0}} & \zeta_2(u_0, v_0) &= 0, \\ \xi_3(u_0, v_0) &= 0 & \eta_3(u_0, v_0) &= 0 & \zeta_3(u_0, v_0) &= 1, \\ (E_0 = E(u_0, v_0), & F_0 = F(u_0, v_0), & G_0 = G(u_0, v_0), & ) .\end{aligned}$$

Este es un sistema de dieciocho ecuaciones diferenciales parciales linealmente homogéneas de primer orden, para las nueve funciones  $\xi_i(u, v), \eta_i(u, v), \zeta_i(u, v), i = 1,2,3$ . como, por añadidura, se cumplen las condiciones de compatibilidad para estas ecuaciones, entonces, del teorema de existencia y unicidad para un sistema de este tipo, se deduce que, en un entorno de  $(u_0, v_0)$ , existe una solución única,  $\xi_i(u, v), \eta_i(u, v), \zeta_i(u, v), i = 1,2,3$ . que cumple las condiciones iniciales.

Supongamos, ahora, que

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3, \\ \eta &= \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3, \\ \zeta &= \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \zeta_3 e_3.\end{aligned}$$

a partir de las condiciones iniciales calculamos que en  $(u_0, v_0)$  se tiene que

$$\xi \cdot \xi = E, \xi \cdot \eta = F, \eta \cdot \eta = G, \xi \cdot \zeta = 0, \eta \cdot \zeta = 0, \zeta \cdot \zeta = 1.$$

Es necesario demostrar que esto es lo que ocurre para todo  $(u, v)$  que pertenezca a un entorno de  $(u_0, v_0)$  al igual que en el caso del teorema de existencia relativo a las curvas, consideramos aquí un sistema de ecuaciones diferenciales para las magnitudes

$$\xi \cdot \xi, \xi \cdot \eta, \eta \cdot \eta, \xi \cdot \zeta, \eta \cdot \zeta \text{ y } \zeta \cdot \zeta.$$

a partir del primer sistema de ecuaciones diferenciales mencionados, es factible verificar por el cálculo que estas funciones satisfacen las ecuaciones diferenciales parciales siguientes

$$(\xi \cdot \xi)_u = 2\Gamma_{11}^1(\xi \cdot \xi) + 2\Gamma_{11}^2(\xi \cdot \eta) + 2e(\xi \cdot \zeta)$$

$$(\xi \cdot \xi)_v = 2\Gamma_{12}^1(\xi \cdot \xi) + 2\Gamma_{12}^2(\xi \cdot \eta) + 2f(\xi \cdot \zeta)$$

$$(\xi \cdot \eta)_u = \Gamma_{12}^1(\xi \cdot \xi) + (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2)(\xi \cdot \eta) + \Gamma_{11}^2(\eta \cdot \eta) + f(\xi \cdot \zeta) + e(\eta \cdot \zeta)$$

$$(\xi \cdot \eta)_v = \Gamma_{22}^1(\xi \cdot \xi) + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2)(\xi \cdot \eta) + \Gamma_{12}^2(\eta \cdot \eta) + g(\xi \cdot \zeta) + f(\eta \cdot \zeta)$$

$$(\eta \cdot \eta)_u = 2\Gamma_{12}^1(\xi \cdot \eta) + 2\Gamma_{12}^2(\eta \cdot \eta) + 2f(\eta \cdot \zeta)$$

$$(\eta \cdot \eta)_v = 2\Gamma_{22}^1(\xi \cdot \eta) + 2\Gamma_{22}^2(\eta \cdot \eta) + 2g(\eta \cdot \zeta)$$

$$(\eta \cdot \zeta)_u = b_{11}(\xi \cdot \eta) + b_{12}(\eta \cdot \eta) + \Gamma_{12}^1(\xi \cdot \zeta) + \Gamma_{12}^2(\eta \cdot \zeta) + f(\zeta \cdot \zeta)$$

$$(\eta \cdot \zeta)_v = b_{21}(\xi \cdot \eta) + b_{22}(\eta \cdot \eta) + \Gamma_{22}^1(\xi \cdot \zeta) + \Gamma_{22}^2(\eta \cdot \zeta) + g(\zeta \cdot \zeta)$$

$$(\xi \cdot \zeta)_u = b_{11}(\xi \cdot \xi) + b_{12}(\xi \cdot \eta) + \Gamma_{11}^1(\xi \cdot \zeta) + \Gamma_{11}^2(\eta \cdot \zeta) + e(\zeta \cdot \zeta)$$

$$(\xi \cdot \zeta)_v = b_{21}(\xi \cdot \xi) + b_{12}(\xi \cdot \eta) + \Gamma_{12}^1(\xi \cdot \zeta) + \Gamma_{12}^2(\eta \cdot \zeta) + f(\zeta \cdot \zeta)$$

$$(\zeta \cdot \zeta)_u = 2b_{11}(\xi \cdot \zeta) + 2b_{12}(\eta \cdot \zeta)$$

$$(\zeta \cdot \zeta)_v = 2b_{21}(\xi \cdot \zeta) + 2b_{22}(\eta \cdot \zeta)$$

a las que se imponen las condiciones iniciales siguientes

$$(\xi \cdot \xi)(u_0, v_0) = E_0 \quad (\xi \cdot \eta)(u_0, v_0) = F_0 \quad (\eta \cdot \eta)(u_0, v_0) = G_0$$

$$(\bar{\xi} \cdot \bar{\zeta})(u_0, v_0) = 0 \quad (\eta \cdot \zeta)(u_0, v_0) = 0 \quad (\zeta \cdot \bar{\zeta})(u_0, v_0) = 1$$

Este es, nuevamente, un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales homogéneas de primer orden . como sabemos que estas ecuaciones poseen soluciones de clase  $C^2$ , entonces deducimos que también se cumple las condiciones de compatibilidad del sistema.

De acuerdo con el teorema de existencia y unicidad relativo a problemas de valores iniciales, de este tipo , sabemos que una solución que cumpla las condiciones iniciales es única . Por sustitución , es simple verificar que si una solución de las ecuaciones cumple las condiciones iniciales , entonces viene dada , en algún entorno de  $(u_0, v_0)$  , por las funciones

$$(\bar{\xi} \cdot \bar{\xi}) = E, (\bar{\xi} \cdot \bar{\eta}) = F, (\bar{\eta} \cdot \bar{\eta}) = G, (\bar{\xi} \cdot \bar{\zeta}) = 0, (\bar{\eta} \cdot \bar{\zeta}) = 0, (\bar{\zeta} \cdot \bar{\zeta}) = 1.$$

De donde

$$(\xi \cdot \xi) = E, (\xi \cdot \eta) = F, (\eta \cdot \eta) = G, (\xi \cdot \zeta) = 0, (\eta \cdot \zeta) = 0, (\zeta \cdot \zeta) = 1.$$

para todo  $(u, v)$  en un entorno de  $(u_0, v_0)$ .

Ahora, bien, la función, candidata a ser superficie, se define en función de una solución de ecuaciones diferenciales parciales  $X_u = \xi$  y  $X_v = \eta$  . Como  $\xi_v = \eta_u$ , existe una solución  $X = X(u, v)$  y, ciertamente, puede expresarse por

$$X = X(u, v) = \int_{u_0}^u \xi(\tau, v_0) d\tau + \int_{v_0}^v \eta(u_0, \varsigma) d\varsigma$$

Solo falta demostrar que  $X = X(u, v)$  es regular, es decir, que  $X_u \times X_v \neq 0$ , y que los primeros y segundos coeficientes fundamentales son  $E, F, G, e, f$  y  $g$  . de modo que  $X_u \times X_v = \xi \times \eta$  es continua e inicialmente, es

$$(X_u \times X_v)(u_0, v_0) = (\xi \times \eta)(u_0, v_0) = \sqrt{E_0 G_0 - F_0^2} \neq 0,$$

Entonces se deduce que  $X_u \times X_v \neq 0$  en algún entorno de  $(u_0, v_0)$ . Por otro lado, es evidente que



$$X_u \cdot X_u = \xi \cdot \xi = E$$

$$X_u \cdot X_v = \xi \cdot \eta = F$$

$$X_v \cdot X_v = \eta \cdot \eta = G$$

. por último, del primer sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y de hecho de que

$$(\xi \cdot \zeta) = 0 \quad , \quad (\eta \cdot \zeta) = 0 \quad \text{y} \quad (\zeta \cdot \zeta) = 1 \quad ,$$

se colige directamente que

$$X_{uu} \cdot \zeta = \xi_u \cdot \zeta = e \quad ,$$

$$X_{uv} \cdot \zeta = \xi_v \cdot \zeta = f \quad ,$$

$$X_{vv} \cdot \zeta = \eta_v \cdot \zeta = g \quad .$$

en consecuencia, los segundos coeficientes fundamentales de  $X = X(u, v)$  son  $e, f, g$ .  
(Lipschutz, 1969)

■

**Ejemplo 2.1.21.1.1** Dadas las formas diferenciales

$$I = du^2 + \operatorname{sen}^2 u \, dv^2 \quad ,$$

$$II = du^2 + \operatorname{sen}^2 u \, dv^2 \quad ,$$

determinése la superficie para la cual I y II son , respectivamente, la primera y segunda formas fundamentales.

$$E = 1, F = 0, G = \operatorname{sen}^2 u \quad ; \quad e = 0, f = 0, g = \operatorname{sen}^2 u \quad , \quad 0 < u < \pi$$

Obtenemos para los símbolos de Christoffel'

$$b_{11} = -1 \quad , \quad b_{12} = b_{21} = 0 \quad , \quad b_{22} = -1,$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0 \quad , \quad \Gamma_{12}^2 = \cot u \quad , \quad \Gamma_{22}^1 = -\operatorname{sen} u \cos u,$$

que satisfacen a las ecuaciones de Gauss – Codazzi, como se comprueba por sustitución directa. Las ecuaciones de Gauss – Weingarten son en este caso:



- a)  $X_{uu} = N$  ,  
 b)  $X_{uv} = (\cot u)X_v$  ,  
 c)  $X_{vv} = -(\sen u \cos u)X_u + (\sen^2 u)N$  ,  
 d)  $N_u = -X_u$  ,  
 e)  $N_v = -X_v$  ,

De las ecuaciones a) y d) dan por eliminación de  $N$  , se obtiene que

$$X_{uuu} + X_u = 0 .$$

Al integrar, resulta

$$X = a(v) \sen u + b(v) \cos u + c(v)$$

de la ecuación b) se deduce que

$$\begin{aligned} X_{uv} &= a' \cos u - b' \sen u = (\cot u)X_v \\ &= a' \cos u + b' \cos u \cot u + c' \cot u \end{aligned}$$

De manera que  $b'(\sen u + \cos u \cot u) = -c' \cot u$  ; es decir  $b' = -c' \cos u$  de manera que  $b'$  y  $c'$  son funciones de la única variable  $v$ , se desprende que  $b' = c' = 0$   $b = cte$  y  $c = cte$

$$X = a(v) \sen u + b \cos u + c$$

De esta última ecuación y las ecuaciones b) , c) y e) obtenemos :

$$\begin{aligned} X_{vvv} &= a''' \sen u = -(\sen u \cos u)X_{uv} + (\sen^2 u)N_v = -a' \sen u , \\ a''' + a' &= 0 \end{aligned}$$

$$a(v) = d \cos v + e \sen v$$

La solución es, por tanto,

$$X = d \cos v \sen u + e \sen v \sen u + b \cos u + c$$

Para demostrar que los vectores  $d$  ,  $e$  y  $b$  forman un conjunto ortonormal.

En efecto, en ese caso es

$$\begin{aligned} |X - c|^2 &= (d \cdot d) \cos^2 v \sen^2 u + (e \cdot e) \sen^2 v \sen^2 u + (b \cdot b) \cos^2 u \\ &\quad + 2(d \cdot e) \cos v \sen v \sen^2 u + 2(d \cdot b) \cos v \sen u \cos u \\ &\quad + 2(e \cdot b) \sen v \sen u \cos u \\ &= \cos^2 v \sen^2 u + \sen^2 v \sen^2 u + \cos^2 u = 1 \end{aligned}$$

Es decir ,  $X$  pertenece a una esfera de centro  $c$  y radio igual a 1. Luego observamos que



$$\begin{aligned}
 G &= \langle X_v, X_v \rangle = \text{sen}^2 u \\
 &= (d.d) \text{sen}^2 v \text{sen}^2 u - 2(d.e) \text{sen} v \cos v \text{sen}^2 u \\
 &\quad + (e.e) \cos^2 v \text{sen}^2 u \\
 1 &= (d.d) \text{sen}^2 v - 2(d.e) \cos v \text{sen} v + (e.e) \cos^2 v
 \end{aligned}$$

Por tanto,  $e.e = 1$ ,  $d.e = 0$ ,  $d.d = 1$ .

$$\begin{aligned}
 F &= \langle X_v, X_u \rangle = 0 = (b.d) \text{sen} v \text{sen}^2 u - (e.b) \cos v \text{sen}^2 u \\
 &\quad \text{donde, } b.d = 0, e.b = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 = \cos^2 v \cos^2 u + \text{sen}^2 v \cos^2 u + (b.b) \text{sen}^2 u \\
 &\quad \text{De modo que } b.b = 1
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la superficie que tenga los coeficientes fundamentales dados es una esfera de radio uno.

(Struik, 1961 pág.142)

■

### 2.1.22. Ecuación de Sine-Gordon

**Definición 2.1.22.1** La ecuación *Sine-Gordon* es una Ecuación Diferencial Parcial no lineal de segundo orden

$$\Phi_{xx} - \Phi_{tt} = \text{sen } \Phi \tag{2.37}$$

Donde  $\Phi_{xx}$  y  $\Phi_{tt}$  indican derivadas parciales con respecto a los parámetros espacio tiempo  $x$  y  $t$  respectivamente. (Lório, 2001, pág. 4)

Ésta ecuación puede ser transformada bajo el siguiente cambio de coordenadas:

$$u = \frac{x-t}{2} \quad ; \quad v = \frac{x+t}{2}$$

en la ecuación

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = \text{sen } \Phi \quad \text{o' } \quad \Phi_{uv} = \text{sen } \Phi \tag{2.38}$$

Esta es la forma original de la ecuación Sine-Gordon.

Una familia de soluciones de la ecuación de Sine-Gordon tiene la forma

$$\Phi(x, t) = 4 \arctan \left[ C \exp \left( \frac{x - \lambda t}{(1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right], \quad (2.39)$$

donde  $C$  y  $|\lambda| < 1$  son constantes arbitrarias.

### 2.1.23. Representación Lax

**Definición 2.1.23.1** Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  un abierto  $A, B: U \rightarrow GL(n)$  funciones matriciales suaves. Se define La Ecuación de Curvatura Cero para  $A, B$  por

$$\alpha \frac{\partial A}{\partial x} + \beta \frac{\partial B}{\partial t} = [A, B] := AB - BA, \quad (2.40)$$

donde  $\alpha, \beta$  son constantes reales. La pareja  $A, B$  es un *Par de Lax*, si satisface la ecuación (2.38).

(*Terng & Uhlenbeck, 2000, pág. 18*)

**Observación 2.1.23.1.1** Al tomar  $\alpha = -\beta = 1$  y las funciones  $A, B: U \rightarrow GL(3)$ , dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_t & -\text{sen}\Phi \\ \Phi_t & 0 & 0 \\ \text{sen}\Phi & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -\Phi_x & 0 \\ \Phi_x & 0 & \text{cos}\Phi \\ 0 & -\text{cos}\Phi & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Donde  $u: \Phi \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una solución de la ecuación Sine-Gordon (2.37), resulta entonces que  $A; B$  forman un par de Lax.

**Observación 2.1.23.1.2** En el contexto de Ecuaciones Diferenciales Parciales, al sustituir  $\alpha = -\beta = 1$  en la ecuación (2.40), ésta resulta ser la condición de compatibilidad del sistema (EDP)

$$\frac{\partial G}{\partial x} = GB \quad \frac{\partial G}{\partial t} = GA;$$

(*Terng & Uhlenbeck, 2000, pág. 18*)

### 2.1.24. Teorema de la Aplicación de las Superficies Regulares en la Ecuación Sine-Gordon

**Teorema 2.1.24.1** Dada una superficie  $S$  con curvatura gaussiana negativa constante, entonces existe la ecuación de Sine-Gordon.

**Prueba:** las líneas asintóticas (curvas en las que  $\text{II}$  se anula) de  $S$  pueden ser tomadas como curvas paramétricas. Entonces  $e = g = 0$  y las ecuaciones de *Mainardi - Codazzi* (2.34) y (2.35) respectivamente, se reducen a

$$\left(\frac{f}{H}\right)_u + 2\Gamma_{12}^2 \left(\frac{f}{H}\right) = 0, \quad \left(\frac{f}{H}\right)_v + 2\Gamma_{12}^1 \left(\frac{f}{H}\right) = 0, \quad (2.42)$$

mientras

$$K = -\frac{f^2}{H^2} = -\frac{1}{\rho^2} \quad (2.43)$$
$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} = \frac{GE_v - FG_u}{2H^2},$$
$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} = \frac{EG_u - FE_v}{2H^2}.$$

El ángulo  $\omega$  entre las curvas paramétricas es tal que satisface

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin\omega = \frac{H}{\sqrt{EG}} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} \quad (2.44)$$

podemos tomar, sin pérdida de generalidad, si

$$E = \rho^2 a^2 \quad G = \rho^2 b^2 \quad F = \rho^2 ab \cos \omega,$$

como

$$e = 0 \quad g = 0 \quad f = \rho ab \sin \omega$$

con lo cual *la primera y segunda formas fundamentales*, nos quedan de la forma

$$I = \rho^2 (a^2 du^2 + 2ab \cos \omega dudv + b^2 dv^2) \quad (2.45)$$

$$II = 2\rho ab \sin \omega dudv \quad (2.46)$$



Las ecuaciones de *Mainardi – Codazzi* (2.29), (2.30), en este caso son

$$a_v + \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} a - \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} b \cos \omega = 0, \quad (2.47)$$

$$b_u + \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} b - \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} a \cos \omega = 0. \quad (2.48)$$

mientras que la *curvatura total* (2.36) queda expresada por

$$\omega_{uv} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_u}{\rho} \frac{b}{a} \operatorname{sen} \omega \right)_u + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_v}{\rho} \frac{a}{b} \operatorname{sen} \omega \right)_v - ab \operatorname{sen} \omega = 0 \quad (2.49)$$

En el caso particular cuando  $K = -1/\rho^2 < 0$ , es constante, la superficie  $S$  es conocida como superficie Pseudoesferica. De las ecuaciones de *Mainardi-Codazzi* (2.47) y (2.48) se obtiene que  $a = a(u)$  y  $b = b(v)$ .

(*Rogers & Schief, 2002, pág. 21*)

**Proposición 2.1.24.1.1** Si la superficie  $S$  es parametrizada por la longitud de arco a lo largo de las coordenadas de líneas asintóticas, entonces la primera y segunda forma fundamental toman la forma

$$I = du^2 + 2 \cos \omega du dv + dv^2 \quad (2.50)$$

$$II = \frac{2}{\rho} \operatorname{sen} \omega du dv \quad (2.51)$$

Mientras que la ecuación de Gauss para la curvatura total (2.49) se reduce a la *ecuación de Sine-Gordon*.

$$\omega_{uv} = \frac{1}{\rho^2} \operatorname{sen} \omega \quad (2.52)$$

recordemos que la ecuación de Gauss es una de las ecuaciones de compatibilidad que se requieren para la existencia local de una superficie.

Las ecuaciones de Gauss asociadas por

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \omega_u \cot \omega X_u - \omega_u \csc \omega X_v, \\ X_{uv} &= \frac{1}{\rho} \sin \omega N, \\ X_{vv} &= -\omega_u \csc \omega X_u + \omega_u \cot \omega X_v, \end{aligned} \quad (2.53)$$

mientras que las ecuaciones de Weingarten desprende

$$\begin{aligned} N_u &= \frac{1}{\rho} \cot \omega X_u - \frac{1}{\rho} \csc \omega X_v, \\ N_v &= -\frac{1}{\rho} \csc \omega X_u + \frac{1}{\rho} \cot \omega X_v, \end{aligned} \quad (2.54)$$

Introduciendo vectores ortonormales para una superficie S parametrizada por la longitud de arco a lo largo de las líneas asintóticas, con curvatura total  $K = -\frac{1}{\rho^2}$ , se tiene

$$A = X_u, \quad B = -X_u \times N = -X_u \times \frac{X_u \times X_v}{\sin \omega} = \csc \omega X_v - \cot \omega X_u, \quad C = N.$$

Utilizando las ecuaciones de Gauss y Weingarten (2.53), (2.54) se obtienen expresiones para las derivadas de A, B y C con respecto a u y v,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_u & 0 \\ \omega_u & 0 & 1/\rho \\ 0 & -1/\rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1/\rho) \sin \omega \\ 0 & 0 & -(1/\rho) \cos \omega \\ -(1/\rho) \sin \omega & (1/\rho) \cos \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

(Rogers & Schief, 2002, pág. 23)

### 2.1.25. Transformación De Backlund

Las Transformaciones de Bäcklund nos da un algoritmo para generar familias de soluciones de la Sine-Gordon resolviendo un par de ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Proposición 2.1.25.1** Las ecuaciones de la *Transformación de Backlund* que relacionan las soluciones de la ecuación Sine – Gordon son

$$\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_u = \frac{\beta}{\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right), \quad (2.57)$$

$$\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)_v = \frac{1}{\beta\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right). \quad (2.58)$$

(Rogers & Schief, 2002, pág. 26)

### 2.1.26. Solitones

**Definición 2.1.26.1** Un solitón es una onda solitaria que preserva asintóticamente su forma y su velocidad bajo interacciones no lineales con otras ondas solitarias, o de manera más general, con otra perturbación localizada arbitraria.

(González, 2001, pág.16)

Se puede decir que el término “solitón” se asocia con la solución de una ecuación diferencial parcial no lineal o un sistema de ellas que tiene 3 características:

- Representa una onda cuya forma no varía con el tiempo.
- Está localizada, de manera que decae o se aproxima a un valor constante en el infinito.
- Puede interactuar fuertemente con otros solitones y mantener su forma y su velocidad, salvo una traslación espacial. (Cuenda, 2007, pág. 14)



**Definición 2.1.26.2 (Pseudoesfera)** Las pseudoesferas son superficies de revolución generadas por la rotación de una curva *tractriz* alrededor de su asíntota. Una curva *tractriz* se genera cuando un objeto arrastra a otro, de manera que su distancia de separación se mantiene constante. El nombre de "*pseudoesfera*" se puso por determinadas analogías con la esfera. Una de ellas tiene que ver con el concepto de *curvatura de Gauss*.

**Observación 2.1.26.2.1** La esfera y la pseudoesfera tienen curvatura constante e igual en valor absoluto, aunque de signos opuestos, positiva para la esfera y negativa para la pseudoesfera. Un cilindro, por ejemplo, tiene curvatura gaussiana nula. Así mismo, aunque la pseudoesfera en realidad es una figura no acotada, su área es finita e igual al área de una esfera con su mismo radio y el volumen encerrado por esa superficie también es finito e igual al de la semiesfera del mismo radio (el radio de la pseudoesfera es la distancia desde el punto "vértice" de la curva *tractriz* que la genera, hasta la asíntota de dicha generatriz. Quien le puso el citado nombre fue Eugenio Beltrami (1835-1900), matemático italiano que desarrolló notables trabajos, tanto en geometría diferencial como en física matemática.

**Definición 2.1.26.3** Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es un sistema incompatible si no tiene solución, por el contrario, se dice que un sistema es compatible si tiene alguna solución. En este último caso solo caben dos posibilidades: es un sistema compatible determinado si tiene única solución, o bien es sistema compatible indeterminado si tiene infinitas soluciones.

## 2.2. MARCO CONCEPTUAL

- Sasaki (1979), en su artículo titulado, "Soliton equations and pseudospherical surfaces", estudia la relación de las ecuaciones de solitones en dimensiones  $1 + 1$



que se puede resolver con la dispersión inversa AKNS 2x2 método (por ejemplo, el seno-Gordon) se muestran para describir superficies pseudoesfericas, es decir, superficies de constante negativo gaussiana curvatura. Este resultado proporciona una imagen unificada de todas estas ecuaciones de solitones. Interpretaciones geométricas de propiedades características como números infinitos. de las leyes de conservación y las transformaciones de Backlund y de las propias soluciones de solitones.

- Terng. & Uhlenbeck (2000), en su artículo titulado, “ Geometry of Solitons ” , menciona algunos antecedentes históricos sobre cómo las ecuaciones en solitones surgió en la geometría diferencial clásica, reinterpretamos las transformaciones clásicas de Backlund en términos de acciones de grupos de bucles, o transformaciones de revestimiento, delineamos cómo las diferentes categorías de soluciones a las ecuaciones surgen debido a las diferentes opciones de dispersión de datos.
- González (2001), En su trabajo de investigación titulada, “Kinks, Sistemas Integrables y Geodesicas: Solitones en el Modelo Sigma  $O(3)$  Lineal”, el estudio que se ha realizado en este trabajo tiene, la importancia tanto desde el punto de vista físico como desde el matemático. El objeto del trabajo, es el desarrollo de técnicas matemáticas que permiten calcular explícitamente todas las soluciones de tipo onda solitaria, o kinks, de la deformación natural del conocido Modelo Sigma  $O(N)$  Lineal, así como analizar el espacio funcional que dichas soluciones constituyen y su estabilidad.
- Cuenda (2007), En su trabajo de investigación titulada, “Secuencia genética y dinámica de excitaciones no lineales de ADN”, menciona el modelo de sine-Gordon continuo; la segunda, relativa al modelo de sine-Gordon discreto; y la



última, que trata el modelo de Peyrard-Bishop aplicado al ADN , explica determinados comportamientos dinámicos del ADN mediante un modelo no lineal, determinista, como resultado dichos comportamientos se refieren principalmente a los procesos de transcripción de proteínas por parte de la ARN polimerasa, aunque también engloban fenómenos de replicación del ADN, o procesos de desnaturalización mecánica del ADN. El modelo en cuestión es el modelo de sine-Gordon, un ejemplo típico de modelo no lineal muy estudiado en el pasado.

- Rogers & Schief, (2002), en su libro, “Backlund and Darboux transformations”, describe las notables conexiones que existen entre la geometría diferencial clásica de superficies y la teoría moderna del solitón. Entre ellas destacan las transformaciones de Backlund-Darboux con sus notables principios de superposición no lineal asociados y su importancia en la teoría del solitón. Es con estas transformaciones y los vínculos que proporcionan entre la geometría diferencial clásica de superficies y las ecuaciones no lineales de la teoría del solitón. En este contexto geométrico, las ecuaciones solitónicas surgen de las ecuaciones de Gauss-Mainard-Codazzi para varios tipos de superficies que admiten invariancia bajo transformaciones de Backlund-Darboux.



## CAPITULO III

### MATERIALES Y MÉTODOS

#### 3.1. Ubicación Geográfica del Estudio

El presente estudio de investigación, se realizó Domicilio del investigador en el ámbito de Geometría Diferencial Clásica y Ecuaciones Diferenciales Parciales.

#### 3.2. Periodo de Duración del Estudio

La presente investigación tuvo una duración 12 meses.

#### 3.3. Procedencia del Material Utilizado

##### 3.3.1. Materiales

Los recursos materiales que se utilizaron son:

- Libros
- Uso de internet
- Papel Bond
- Memoria USB
- Fotocopias e impresiones
- Lapiceros
- Plumones



### **3.4. Tipo y Diseño Investigación**

#### **3.4.1. Tipo de investigación**

El tipo de investigación es básicamente teórico, el cual toda investigación se basa en profundizar los resultados, así también incrementar los conocimientos del tema de investigación.

#### **3.4.2. Diseño de investigación**

El diseño de la investigación es descriptivo. la cual lleva a responder los objetivos, que comprende la descripción, análisis e interpretación.

### **3.5. Método y Técnica de Investigación**

#### **3.5.1. Métodos**

Los métodos que se utilizó son deductivo, analítico, ya que la ejecución del trabajo de investigación consistió en la comprensión, interpretación y análisis.

#### **3.5.2. Técnicas**

Lectura y análisis de definiciones, propiedades, teoremas, proposiciones de la teoría local de superficies de la Geometría Diferencial, además se hizo lecturas de investigación analizando el contenido de la información tales como: libros especializados, artículos del tema en cuestión y papers electrónicos.

### **3.6. Variables**

#### **3.6.1. Variable Independiente**

Teorema Fundamental de Superficies Regulares

#### **3.6.2. Variable Dependiente**

Ecuación de Sine – Gordon



## CAPITULO IV

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### 4.1. Construcción de Superficies de Soliton

**Proposición 4.1.1** Para construir superficies correspondientes a soluciones solitón de la ecuación de Sine-Gordon, resulta más conveniente parametrizar las superficies pseudoesfericas en términos de líneas de curvatura.

$$x = u + v \quad , \quad t = u - v$$

Si tomamos  $\omega = 2\phi$  , entonces la primera y segunda forma fundamental (2.50) , (2.51) se convierten en

$$I = \cos^2 \phi dx^2 + \text{sen}^2 \phi dt^2, \quad (4.1)$$

$$II = \frac{1}{\rho} \text{sen} \phi \cos \phi (dx^2 - dt^2), \quad (4.2)$$

Por tanto, una triada ortogonal se puede introducir de acuerdo con

$$\bar{A} = \frac{X_x}{\cos \phi} \quad , \quad \bar{B} = \frac{X_t}{\text{sen} \phi} \quad , \quad \bar{C} = N$$

las ecuaciones de Gauss – Weingarten (2.53) , (2.54) ahora toman la forma

$$\begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & \phi_t & 1/\rho \text{sen} \phi \\ -\phi_t & 0 & 0 \\ -1/\rho \text{sen} \phi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & \phi_x & 0 \\ -\phi_x & 0 & -1/\rho \cos \phi \\ 0 & 1/\rho \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

(Rogers & Schief, 2002, pág. 32)

**Proposición 4.1.2** los sistemas (4.3) y (4.4) en  $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$  son compatibles si y solo si se cumple la ecuación de Sine-Gordon dada por

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \frac{1}{\rho^2} \text{sen}\phi \text{cos}\phi \quad (4.5)$$

**Prueba.** En efecto, tomando la segunda ecuación del sistema (4.3)

$$\bar{B}_x = -\phi_t \bar{A}$$

y luego derivando respecto a  $t$

$$\bar{B}_{xt} = -\phi_{tt} \bar{A} - \phi_t \bar{A}_t$$

de igual manera, tomamos la segunda ecuación del sistema (4.19)

$$\bar{B}_t = -\phi_x \bar{A} - \frac{1}{\rho} \text{cos}\phi \bar{C}$$

derivando respecto a  $x$

$$\bar{B}_{tx} = -\phi_{xx} \bar{A} - \phi_x \bar{A}_x + \frac{1}{\rho} \text{sen}\phi \phi_x \bar{C} - \frac{1}{\rho} \text{cos}\phi \bar{C}_x$$

Igualando  $\bar{B}_{xt} = \bar{B}_{tx}$  tenemos

$$-\phi_{tt} \bar{A} - \phi_t \bar{A}_t = -\phi_{xx} \bar{A} - \phi_x \bar{A}_x + \frac{1}{\rho} \text{sen}\phi \phi_x \bar{C} - \frac{1}{\rho} \text{cos}\phi \bar{C}_x$$

donde,

$$\bar{A}_t = \phi_x \bar{B} \quad , \quad \bar{A}_x = \phi_t \bar{B} + \frac{1}{\rho} \text{sen}\phi \bar{C} \quad , \quad \bar{C}_x = -\frac{1}{\rho} \text{sen}\phi \bar{A}$$

sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene

$$-\phi_{tt} \bar{A} - \phi_t (\phi_x \bar{B}) = -\phi_{xx} \bar{A} - \phi_x \left( \phi_t \bar{B} + \frac{1}{\rho} \text{sen}\phi \bar{C} \right) + \frac{1}{\rho} \text{sen}\phi \phi_x \bar{C} - \frac{1}{\rho} \text{cos}\phi \left( -\frac{1}{\rho} \text{sen}\phi \bar{A} \right)$$

multiplicando por  $\bar{A}$  y  $\bar{A} \cdot \bar{A} = 1$  ,  $\bar{A} \cdot \bar{B} = 0$  ,  $\bar{A} \cdot \bar{C} = 0$  se obtiene,

$$-\phi_{tt} = -\phi_{xx} + \frac{1}{\rho^2} \text{sen}\phi \text{cos}\phi$$

Debemos hacer notar que para cada solución  $\phi$  existe una superficie intrínseca, que depende de, la cual llamaremos superficie de solitón.

## 4.2. Transformación de Backlund y Superficie de Soliton

**Proposición 4.2.1** Si  $\omega = 0$  es la solución nula de la ecuación diferencial parcial de Sine – Gordon ,entonces se puede construir una segunda solución no nula  $\omega'$  utilizando la Transformación de Backlund.

**Prueba.** Sustituyendo la solución nula  $\omega = 0$  de la ecuación en la transformación de backlund (2.57) y (2.58) respectivamente, se tiene el par de ecuaciones diferenciales

$$(\omega')_u = \frac{2\beta}{\rho} \operatorname{sen} \left( \frac{\omega'}{2} \right), \quad (4.6)$$

$$(\omega')_v = \frac{2}{\beta\rho} \operatorname{sen} \left( \frac{\omega'}{2} \right), \quad (4.7)$$

Dividiendo por  $\operatorname{sen} \left( \frac{\omega'}{2} \right)$  la ecuación (4.7) ,se tiene

$$\frac{(\omega')_v}{\operatorname{sen} \left( \frac{\omega'}{2} \right)} = \frac{2}{\beta\rho}$$

Integrando con respecto a  $v$  la ecuación anterior, se tiene

$$2 \ln \left( \tan \left( \frac{\omega'}{4} \right) \right) = \frac{2}{\beta\rho} v + f(u) \quad (4.8)$$

Derivando la ecuación (4.8) con respecto a  $u$ , se tiene la ecuación

$$\frac{(\omega')_u}{\operatorname{sen} \left( \frac{\omega'}{2} \right)} = [f(u)]_u \quad (4.9)$$

Sustituyendo la ecuación (4.6) en (4.9) , resulta

$$\frac{2\beta}{\rho} = [f(u)]_u \quad (4.10)$$

Nuevamente integrando con respecto a  $u$  la ecuación (4.10)

$$f(u) = \frac{2\beta}{\rho}u + C_1 \quad (4.11)$$

Sustituyendo la ecuación (4.11) en (4.8), se tiene

$$2\ln\left(\tan\left(\frac{\omega'}{4}\right)\right) = \frac{2}{\beta\rho}v + \frac{2\beta}{\rho}u + C_1 \quad (4.12)$$

Obteniendo así;

$$\tan\left(\frac{\omega'}{4}\right) = \exp\left(\frac{\beta}{\rho}u + \frac{1}{\beta\rho}v + \frac{C_1}{2}\right) \quad (4.13)$$

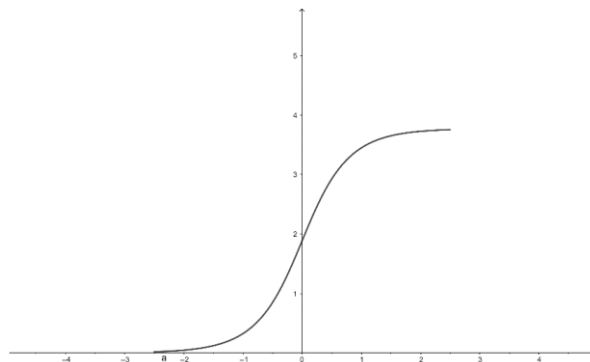
Conduce a una nueva solución  $\omega'$ ,

$$\omega'(u, v) = 4 \tan^{-1}\left[\exp\left(\frac{\beta}{\rho}u + \frac{1}{\beta\rho}v + C\right)\right] \quad (4.14)$$

■

Para los valores  $C = 0$ ,  $\rho = 1$ ,  $\omega' = 2\omega$ ,  $u = v = x/2$ ,  $\beta = 1$  en (4.14) se obtiene una solución estática

$$\omega = \varphi_k(x, t) = 2\tan^{-1}[\exp(x)] \quad (4.15)$$



**Figura 13.** Solución estática.

### 4.3. Sine-Gordon y superficie Pseudoesferica

**Proposición 4.3.1** Existe una relación entre la solución de la ecuación de Sine-Gordon dada por (4.15) y la superficie pseudoesferica dada por

$$X(u, v) = (\operatorname{sech}(u) \cos(v), \operatorname{sech}(u) \sin(v), u - \tanh(u)).$$

**Prueba.** Aquí, se muestra que la solución estacionaria de un soliton (4.5), es decir

$$\phi = 2 \tan^{-1} \left[ \exp \left( \frac{x}{\rho} + C \right) \right], \quad (4.16)$$

se obtiene estableciendo  $u = v = x/2$ ,  $\beta = 1$ , en (4.14), corresponde a una superficie pseudoesferica de revolución conocida como pseudoesfera de Beltrami.

**En efecto.** Para establecer la conexión entre la solución de un solo solitón estacionario (4.16) y la pseudoesfera, se recuerda que el vector de posición  $r$  de la superficie de revolución generada por la rotación de una curva plana  $z = \theta(r)$  alrededor del eje  $z$  esta dada por

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \eta \\ r \operatorname{sen} \eta \\ \theta(r) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

los círculos  $r = \text{const}$  son los paralelos y las curvas  $\eta = \text{const}$  son conocidos como meridianos. Las formas fundamentales asociadas con la superficie (4.17) están dadas por

$$\begin{aligned} \text{I} &= [1 + \theta'(r)^2] dr^2 + r^2 d\eta^2, \\ \text{II} &= \frac{\theta''(r) dr^2}{\sqrt{1 + \theta'(r)^2}} + \frac{r \theta'(r) d\eta^2}{\sqrt{1 + \theta'(r)^2}}. \end{aligned}$$

Así,  $F = f = 0$  de modo que las rectas de coordenadas  $r = cte$ ,  $\eta = cte$ , es decir, los paralelos y meridianos, respectivamente, son líneas de curvatura en la superficie de revolución si escribimos

$$I = d\xi^2 + r^2 d\eta^2$$

donde

$$d\xi = \sqrt{1 + \theta'(r)^2} dr, \quad r = r(\xi)$$

Entonces el *teorema de gauss* (2.36) muestra que la curvatura total está dada por

$$K = -\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{d\xi^2},$$

de donde la superficie pseudoesférica general de revolución con  $K = \frac{-1}{\rho^2}$  adopta la forma

$$r = c_1 \cosh\left(\frac{\xi}{\rho}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\xi}{\rho}\right),$$

donde  $\rho$  es constante. En particular, en el caso  $c_1 = c_2 = c$  correspondiente a las llamadas superficies pseudoesféricas de revolución, se dan los meridianos por

$$r = C e^{\frac{\xi}{\rho}},$$

mientras

$$z = \theta(r) = \int \sqrt{1 - (c^2/\rho^2)e^{2\xi/\rho}} d\xi. \quad (4.18)$$

La sustitución

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{c}{\rho} e^{\xi/\rho}$$

en (4.18) produce

$$z = \rho \left( \cos \psi + \ln \left| \tan \frac{\psi}{2} \right| \right),$$

de donde,

$$dz = \cot \psi dr$$

de modo que  $\psi$  es el ángulo que forma la tangente al meridiano con el eje  $z$ . la distancia  $d = r \operatorname{cosec} \psi$  desde un punto genérico es el meridiano al eje  $z$  medida a lo largo de la tangente se ve  $\rho$  y, por tanto, es una constante. Una curva con esta propiedad se llama tractriz, por lo que la superficie pseudoesférica de revolución se genera por la rotación alrededor del eje  $z$  de una tractriz.

Para determinar la solución de la ecuación (4.5) correspondiente a la pseudoesfera, esta última debe parametrizarse de acuerdo con (4.1) y (4.2). En términos  $\psi$  y  $\eta$ , el vector posición de la pseudoesfera es dada por

$$r = \begin{pmatrix} \rho \sin \psi \cos \eta \\ \rho \sin \psi \sin \eta \\ \rho \left( \cos \psi + \ln \left| \tan \frac{\psi}{2} \right| \right) \end{pmatrix},$$

de donde,

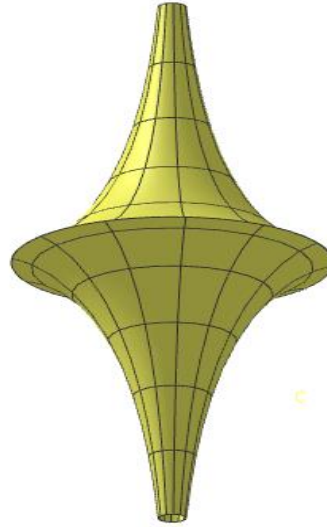
$$I = \rho^2 \cot^2 \psi d\psi^2 + \rho^2 \sin^2 \eta d\eta^2, \quad (4.19)$$

$$II = \rho \cot \psi d\psi^2 - \sin \psi \cos \psi d\eta^2 \quad (4.20)$$

ahora introducimos  $x$  y  $y$  según

$$dx = \rho \operatorname{csc} \psi d\psi, \quad y = \rho \eta \quad (4.21)$$

entonces  $I$  y  $II$  en (4.19), (4.20) adoptan las formas (4.1) y (4.2), respectivamente, con  $\phi = \psi$ . la integración (4.21) produce la solución de un solitón (4.16).



**Figura 14.** Pseudoesfera de Beltrami.

En términos de las líneas de los parámetros de curvatura  $x$  y  $y$ , el vector de posición de la Pseudoesfera es

$$r(x, y) = \begin{pmatrix} \rho \operatorname{sech}\left(\frac{x}{\rho} + \alpha\right) \cos\left(\frac{y}{\rho}\right) \\ \rho \operatorname{sech}\left(\frac{x}{\rho} + \alpha\right) \sin\left(\frac{y}{\rho}\right) \\ \rho\left(\frac{x}{\rho} + \alpha - \tanh\left(\frac{x}{\rho} + \alpha\right)\right) \end{pmatrix},$$

*(Rogers & Schief, 2002)*

■





## V. CONCLUSIONES

- Se aplicó el teorema fundamental de superficies regulares en la ecuación de Sine-Gordon, dicha ecuación es una condición que garantiza la existencia de una superficie en el espacio a la que llamaremos superficie de soliton (Teorema 2.1.24.1).
- Se ha presentado en forma detallada los teoremas, proposiciones, conceptos, definiciones de teoría local de superficies regulares del área de geometría diferencial, que es una herramienta indispensable que ayudará obtener la ecuación de Sine-Gordon.
- Se la logrado la Construcción de superficies de soliton (Proposicion 4.1.1).
- Con la ayuda de la transformación de backlund se determinó una solución de la ecuación Sine-Gordon. (Proposición 4.2.1).
- Se encontró la relación existente entre la solución de la ecuación de Sine-Gordon y la superficie pseudoesferica (Proposición 4.3.1).



## VI. RECOMENDACIONES

- Antes de iniciar el estudio del teorema fundamental de superficies en la ecuación de Sine-Gordon, se sugiere tener conocimientos básicos de la teoría local de curvas y superficies, ecuaciones diferenciales parciales, álgebra lineal. De esta manera se puede entender sin ninguna dificultad presente investigación.
- Se recomienda utilizar las herramientas de geometría diferencial local para el estudio y obtención de soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales así como por ejemplo, ecuación Korteweg –De Vries , ecuación de Schrodinger.



## VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Chern, S.S. Chen, & Lam, K.S. (1999). *Lectures on Differential Geometry*. USA. World Scientific.
- Cuenda C. Sara (2007). *Secuencia genética y dinámica de excitaciones no lineales de ADN*. PhD thesis, Universidad Carlos III de Madrid.
- Gonzalez, M. (2001). *Kinks, Sistemas Integrables y Geodésicas: Solitones en el Modelo Sigma  $O(3)$  Lineal*. PhD thesis, Universidad de Salamanca.
- Lipschutz M. (1969). *Teoría y Problemas de Geometría Diferencial*. México. McGRAW-HILL.
- Perdigo Do Carmo, M. (1995). *Geometría Diferencial de las Curvas y superficies*. Rio de Janeiro, Brasil, Alianza Editorial.
- Rogers, C. & Schief, W. K. (2002). *Backlund and Darboux transformations*. Cambridge, University Press
- Romandia C. & Shingareva I. (2016). *Generación de soluciones vía transformaciones para ecuaciones del tipo Klein- Gordon que contienen parámetros arbitrarios*. México, Universidad de Sonora.
- Struik Dirk, J. (1961). *Lectures on Classical Differential*. New York, U.S.A, Addison Wesley.
- Shifrin, T. (2016). *Differential Geometry: A first Course in Curves and Surfaces*. URSS, Mir Moscú.
- Sasaki R. (1979). *Soliton equations and pseudospherical surfaces*. Denmark, University of Copenhagen.



Tenenblat, K. (2008), *Introdução ã Geometría Diferencial*. 2º são paulo, Brasil, Blucher.

Terng, C.L. & Uhlenbeck, K. (2000). *Geometry of Solitons* . Avisos de AMS.

Valéria, Lório. (2001). EDP, Um Curso de Graduação (2ºed.).Rio de Janeiro, Brasil.