UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

## FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

### ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONALES LINEALES EN EL ESPACIO DE FUNCIONES CONTINUAS**

**TESIS**

**PRESENTADA POR:**

**Bach. BENEDICTO AMANQUI APAZA**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**PUNO - PERÚ**

**2022**

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# DEDICATORIA

*El presente trabajo dedico principalmente a Dios, por ser el inspirador y darme fuerza para continuar en este proceso de obtener uno de los anhelos más deseados.*

*A mis padres, por su amor, trabajo y sacrificio en todos estos años, gracias a ustedes he logrado llegar hasta aquí y convertirme en profesional.*

*A mi esposa Abigail y a mi hijo Danielito.*

**Benedicto Amanqui**

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional del Altiplano Puno, Alma Mater que me acogió durante los años de mi formación profesional.

A los docentes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas, por sus conocimientos que me han otorgado.

Al M.Sc. Ruperto Zapana Yerba, por su asesoría en el marco del desarrollo de esta tesis.

**Benedicto Amanqui**

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# ÍNDICE GENERAL

**DEDICATORIA**

**AGRADECIMIENTOS**

**ÍNDICE GENERAL**

**ÍNDICE DE ACRÓNIMOS**

**RESUMEN** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **9**

**ABSTRACT** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **10**

**CAPÍTULO I**

**INTRODUCCIÓN**

1.1 Descripción del problema . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

1.2 Antecedentes de la investigación . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

1.3 Hipótesis de la investigación . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

1.4 Objetivos de la investigación . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

  1.4.1 Objetivo general . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

  1.4.2 Objetivos específicos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

**CAPÍTULO II**

**REVISIÓN DE LITERATURA** **13**

2.1 Espacios vectoriales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

2.2 Transformaciones lineales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

2.3 Espacios métricos . . . . . 25
2.4 Espacios métricos completos . . . . . 26
2.4.1 Sucesiones . . . . . 27
2.4.2 Límite de sucesiones . . . . . 28
2.4.3 Sucesiones monótonas . . . . . 29
2.4.4 Sucesión limitada . . . . . 29
2.4.5 Sucesión monótona y limitada . . . . . 30
2.4.6 Sucesiones de Cauchy . . . . . 30
2.4.7 Espacios métricos completos . . . . . 30
2.4.8 Completitud de espacios métricos . . . . . 30
2.5 Espacios vectoriales normados . . . . . 31
2.5.1 Propiedades de los espacios normados . . . . . 35
2.5.2 Operadores lineales . . . . . 37
2.6 Espacios de Hilbert . . . . . 43

**CAPÍTULO III**

**MATERIALES Y MÉTODOS**

3.1 Materiales . . . . . 50
3.2 Metodología de la investigación . . . . . 50

**CAPÍTULO IV**

**RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

4.1 Representación de funcionales acotados . . . . . 51
4.2 Aplicaciones del teorema de la representación de Riesz . . . . . 55
4.2.1 Aplicación 1 . . . . . 56
4.2.2 Aplicación 2 . . . . . 57

**V. CONCLUSIONES . . . . . 59**

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

**VI. RECOMENDACIONES** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **60**

**VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **61**

**TEMA**: Análisis Funcional

**ÁREA**: Matemática

**LÍNEA DE INVESTIGACIÓN**: Matemática Pura

**FECHA DE SUSTENTACIÓN**: 04 de febrero 2022.

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | : Conjunto de los números naturales |
| $\mathbb{R}$ | : Conjunto de los números reales |
| $\mathbb{C}$ | : Conjunto de los números complejos |
| $\mathbb{K}$ | : Campo escalar $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ |
| $\ell^p$ | : El espacio de sucesiones $\ell^p$ |
| $d(x,y)$ | : Distancia de $x$ a $y$ |
| $\mathcal{M}_{n\times m}$ | : Conjunto de matrices de dimensión $n \times m$ |
| $\dim V$ | : Dimensión del espacio vectorial $V$ |
| $\Vert\ \Vert$ | : Norma de un espacio vectorial |
| $\mathscr{R}(T)$ | : Rango de la transformación lineal $T$ |
| $\mathscr{D}(T)$ | : Dominio de la transformación lineal $T$ |

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# RESUMEN

Un funcional lineal es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial $X$ y la imagen en un campo escalar $\mathbb{K}$. El objetivo central de esta investigación es representar funcionales lineales en el espacio de funciones continuas, asimismo demostrar el teorema de representación de Riesz y mostrar aplicaciones concretas de este teorema en el análisis funcional, para lo cual iniciamos con el estudio de espacios vectoriales, transformaciones lineales, espacios métricos, espacios de normados y espacios de Hilbert.

**Palabras clave:** Análisis funcional, espacios de Hilbert, teorema de la representación de Riesz.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# ABSTRACT

A linear functional is a linear operator with domain in a vector space $X$ and the image in a scalar field $\mathbb{K}$. The central objective of this research is to represent linear functionals in the space of continuous functions, as well as to prove the representation theorem of Riesz and show specific applications of this theorem in functional analysis, for which we start with the study of vector spaces, linear transformations, metric spaces, normed spaces and Hilbert spaces.

**Keywords:** Functional analysis, Hilbert spaces, Riesz representation theorem.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Descripción del problema

En el análisis funcional, el teorema de la representación de Riesz ampliamente estudiada para la representación de los funcionales lineales continuos. La presente investigación desarrolla este resultado, expuesto por Frigys Riesz, afirma que cualquier funcional lineal continuo positivo sobre el espacio de funciones continuas definido en cierto espacio topológico, puede representarse de forma única por un espacio con producto interno, este resultado es conocido como el teorema de representación de Riesz. En cada caso se enuncia, la teoría necesaria para conseguir la demostración del teorema de Riesz. Finalmente, se muestran dos aplicaciones concretas.

Por lo que enunciamos la siguiente interrogante:

¿ Cómo se representa funcionales lineales en el espacio de funciones continuas?

### 1.2. Antecedentes de la investigación

A continuación, se presenta la revisión de literatura a nivel internacional y nacional, referente al tema objeto de investigación:

- Los estudios de Yuh-jia (1997) generaliza el teorema de representación de Riesz a dimensiones infinitas, así mismo concluye que el teorema en mención se ha generalizado por varias clases de funciones continuas sobre varios espacios topológicos.
- Del Río (2017) da una demostración directa del teorema de representación de F. Riesz que caracteriza los funcionales lineales actuando en el espacio vectorial de



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

funciones continuas definidas en un conjunto $\mathbb{K}$, toma como punto de partida la formulación original de Riesz, donde $\mathbb{K}$ es un intervalo cerrado, usando la teoría elemental, da una demostración para el caso en que J es un conjunto arbitrario compacto de números reales.

- Por su parte Horvath (s.f.) afirma que algunos de los resultados de Riesz son válidos en el caso de un espacio de producto interno abstracto, y conduce a sistemas ortonormales máximos que no son totales, concluye con una demostración debida a Ákos Császár que muestra que una variante de la condición de Riesz implica la forma de Fischer (es decir, integridad).

## 1.3. Hipótesis de la investigación

Las funcionales lineales en el espacio de funciones continuas se representan a través del teorema de la representación de Riesz.

## 1.4. Objetivos de la investigación

### 1.4.1. Objetivo general

Representar funcionales lineales en el espacio de funciones continuas

### 1.4.2. Objetivos específicos

- Demostrar el teorema de la representación de Riesz
- Mostrar aplicaciones concretas del teorema de la representación de Riesz



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# CAPÍTULO II

## REVISIÓN DE LITERATURA

En este capítulo presentamos algunos resultados y definiciones, entre estos podemos citar: espacios vectoriales, espacios métricos, espacios métricos completos, espacios de Banach y espacios de Hilbert. Para este capítulo tomaremos de referencia los siguientes libros de texto: [1], [2], [3], [4], [5],[6] y [7], este capítulo se inicia presentando diferentes conceptos del álgebra lineal.

### 2.1. Espacios vectoriales

**Definición 2.1** ([2])**.** Un espacio vectorial $V$ (sobre un campo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es un conjunto de objetos llamados vectores en el que se definen dos operaciones:

1. Suma

$$+ : V \times V \to V$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

verificando las siguientes propiedades

*a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ conmutativa

*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ asociativa

*c*) Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in V$ elemento neutro

*d*) $\forall \mathbf{u} \in V$, $\exists (-\mathbf{u}) \in V$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ elemento opuesto

2. Producto por un escalar

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

$$(\lambda, \mathbf{u}) \to \lambda \cdot \mathbf{u}$$

verificando las siguientes propiedades



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

*a)* $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in V$

*b)* $\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{u}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u} \in V$

*c)* $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{u}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u} \in V$

*d)* $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

Los elementos de un espacio vectorial se llaman vectores.

**Ejemplo 2.1.** A continuación presentamos ejemplos sobre espacios vectoriales con las operaciones que se indican.

1. El conjunto de $n$-uplas de números reales

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) = (x_i)_{1 \leq i \leq n} / x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

con las operaciones

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

2. El conjunto de matrices de dimensión $n \times m$

$$\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) = \left\{ A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} / a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \right\}$$

con las operaciones suma de matrices y producto por números reales.

3. El conjunto de todos los polinomio con coeficientes reales en la variable $x$

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k / n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

con las clásicas operaciones de suma y producto por números reales.

4. El conjunto de todas las funciones reales

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

con las operaciones suma de funciones y producto por números reales.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

5. El conjunto de todas las sucesiones de números reales

$$\mathcal{S} = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} / x_n \in \mathbb{R}, n \geq 1\}$$

   con las operaciones suma de sucesiones y producto por números reales.

6. Sea $C(-\infty, \infty)$ el conjunto de todas las funciones continuas de valores reales definida sobre toda la recta real. Este conjunto consta de todas las funciones polinómicas y de todas las demás funciones que son continuas sobre toda la recta real.

7. Consideramos que $V$ es el conjunto de todas las funciones continuas de valor real definidas sobre el intervalo $[0, 1]$. La adición para $V$ es la adición ordinaria de funciones $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. El campo escalar $\mathbb{R}$ es de los números reales. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in V$ la multiplicación escalar queda definida por $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$.

**Definición 2.2** (Subespacio)([2])**.** Si $V$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $W$ un subconjunto de $V$ que asu vez tambien espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ considerando la adición y la multiplicación escalar de $V$, entonces decimos que $W$ es un subespacio de $V$.

**Teorema 2.1** (Condición suficiente)([8])**.** Si $V$ es un espacio vectorial y $W \subset V$, $W \neq \emptyset$, entonces $W$ es subespacio vectorial de $V$ sí y sólo si cumple las siguientes condiciones de cerradura

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$

2. $\lambda \mathbf{u} \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ y $\forall \mathbf{u} \in W$

*Demostración.* $\Rightarrow]$ Evidente, pues $W$ es espacio vectorial.

$\Leftarrow]$ $(1)$ y $(2)$ garantizan que las operaciones están bien definidas sobre $W$, al ser éste un conjunto cerrado respecto de ellas. Además, por ser $W$ un subconjunto de $V$, se verifican todas las propiedades de la suma y el producto siempre que sea cierto que $\mathbf{0} \in W$ y que el opuesto de cualquier elemento de $W$ está en $W$. Esto es, para cualquier $\mathbf{u} \in W$,

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{u} \in W \text{ y } -\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u} \in W$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

luego $W$ es un subespacio vectorial de $V$.

$\square$

Ahora presentamos una de las características mas importantes de un espacio vectorial, que es una obtención de nuevos vectores a partir de vectores dados.

**Definición 2.3** (Dependencia lineal)([2])**.** Si $V$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $v_1, v_2, ..., v_n$ y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son, respectivamente $n$ vectores en $V$ y $n$ escalares en $\mathbb{R}$, entonces el vector

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

se llama combinación lineal de $v_1, ..., v_n$ con coeficientes $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Si todo vector en un espacio vectorial dado puede expresarse como una combinación lineal de vectores en un conjunto $W$ dado, entonces se dice que $W$ es un conjunto generador del espacio vectorial.

**Definición 2.4** (Conjunto generador)([9])**.** Sea $W = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ un subconjunto del espacio vectorial $V$. El conjunto $W$ se denomina conjunto generador de $V$, si todo vector en $V$ puede expresarse como una combinación lineal de vectores en $W$. En estos casos se dice que $W$ genera a $V$.

Ahora definimos la dependencia e independencia lineal.

**Definición 2.5** ([9])**.** Sea $V$ un espacio vectorial y $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Decimos que el conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ es linealmente independiente (LI), o que los vectores $v_1, .., v_n$ son LI, si la ecuación

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. En caso en que exista algún $\alpha_i \neq 0$ decimos que $\{v_1, ..., v_n\}$ es linealmente dependiente (LD), o que los vectores $v_1, ..., v_n$ son LD.

Ahora, estamos interesados en encontrar, dentro de un espacio vectorial $V$, un conjunto finito de vectores, tales que cualquier otro vector de $V$ sea una combinación lineal de ellos.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

En otras palabras, queremos determinar un conjunto de vectores que genere $V$ y tal que todos los elementos sean realmente necesarios para generar $V$. Este tipo de conjuntos forma una base del espacio vectorial.

**Definición 2.6** ([8])**.** Un conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ de vectores de $V$ será una base de $V$ si:

1. $\{v_1, ..., v_n\}$ es LI
2. $\{v_1, ..., v_n\}$ es un conjunto generador de $V$

**Definición 2.7** (Dimensión de un espacio vectorial)([9])**.** Si un espacio vectorial $V$ tiene una base que consta de $n$ vectores, entonces el número $n$ se denomina dimensión de $V$ y se denota por $\dim(V) = n$. Si $V$ consta solamente del vector cero, entonces la dimensión de $V$ se define como cero.

**Teorema 2.2** ([2])**.** Si $V$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y $\dim V = n$, entonces cualesquiera $n + 1$ vectores en $V$ son linealmente dependientes.

La estructura de subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita se describe en el teorema siguiente.

**Teorema 2.3** ([2])**.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y sea $W$ un subespacio de $V$. Entonces, $W$ es de dimensión finita y

$$\dim W \leq \dim V \tag{2.1}$$

la ecuación (2.1) se convierte en una igualdad si y sólo si $W = V$.

### 2.2. Transformaciones lineales

Pasamos ahora, al estudio de las transformaciones lineales, que se caracteriza por ciertas funciones que llevan elementos de un espacio vectorial en otro, de gran importancia en todas las áreas de las ciencias exactas.

**Definición 2.8** (Transforamción lineal)([10])**.** Sean $U$ y $V$ espacios vectoriales sobre el



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

campo $\mathbb{R}$. Una transformación lineal $T : U \to V$ es una función de $U$ en $V$ que satisface las propiedades:

1. $\forall u_1, u_2 \in U, T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in U; T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Además estas propiedades pueden ser expresadas como una sola de la siguiente forma:

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2)$$

para todo $u_1$, $u_2$ en $U$ y $\alpha_1$, $\alpha_2$ en $\mathbb{R}$.

**Ejemplo 2.2.** La transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (2x - y, 3x + 5y)$$

es lineal.

1. Sea $u_1 = (x_1, y_1)$ y $u_2 = (x_2, y_2)$ vectores de $\mathbb{R}^2$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
T(u_1 + u_2) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\
&= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), 3(x_1 + x_2) + 5(y_1 + y_2)) \\
&= (2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2, 3x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 5y_2) \\
&= (2x_1 - y_1, 3x_1 + 5y_1) + (2x_2 - y_2, 3x_2 + 5y_2) \\
&= T(u_1) + T(u_2).
\end{aligned}$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

2. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}^2$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
T(\alpha u_1) &= T(\alpha(x_1, y_1)) \\
&= T(\alpha x_1, \alpha y_1) \\
&= (2\alpha x_1 - \alpha y_1, 3\alpha x_1 + 5\alpha y_1) \\
&= (\alpha(2x_1 - y_1), \alpha(3x_1 + 5y_1)) \\
&= \alpha(2x_1 - y_1, 3x_1 + 5y_1) \\
&= \alpha T(u_1)
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, $T$ es una transformación lineal.

**Ejemplo 2.3.** La transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x, y) = (x^2, y^2)$$

es no lineal.

1. Sea $u_1 = (x_1, y_1)$ y $u_2 = (x_2, y_2)$ vectores de $\mathbb{R}^2$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
T(u_1 + u_2) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\
&= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= ((x_1 + x_2)^2, (y_1 + y_2)^2)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, $T(u_1)+T(u_2) = (x_1^2+x_2^2, y_1^2+y_2^2)$. Luego, como $(x_1+x_2)^2 \neq x_1^2+x_2^2$ y $(y_1 + y_2)^2 \neq y_1^2 + y_2^2$, tenemos que $T(u_1 + u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$.

**Ejemplo 2.4.** Sea $V = C([a, b], \mathbb{R})$ el espacio de funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas. Sea $T : V \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(f) = \int_a^b f(x)dx$$

$T$ es una transformación lineal de $V$ en $\mathbb{R}$.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

1. Dado $f, g \in C([a,b])$ se sigue

$$\begin{aligned} T(f+g) &= \int_a^b (f+g)(x)dx \\ &= \int_a^b (f(x)+g(x))dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ &= T(f)+T(g) \end{aligned}$$

2. Considerando $\alpha \in \mathbb{R}$ se sigue

$$\begin{aligned} T(\alpha f) &= \int_a^b (\alpha f)(x)dx \\ &= \int_a^b \alpha f(x)dx \\ &= \alpha \int_a^b f(x)dx \\ &= \alpha T(f). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T$ es una transformación lineal.

A continuación, presentamos algunos resultados básicos, pero importantes de transformaciones lineales.

**Corolario 2.1** ([10]). Sean $U$ y $V$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $T : U \to V$ una transformación lineal. Entonces,

a) $T(0_U) = 0_V$, donde $0_U$ y $0_V$ denotan los vectores nulos de $U$ y $V$, respectivamente.

b) $T(-u) = -T(u)$, para cada $u \in U$.

c) $T\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T(u_i)$, donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ y $u_i \in U$ para $i \in \{1, ..., m\}$.

*Demostración.* a) Sea $u \in U$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Por el hecho de $T$ ser transformación lineal, entonces $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Tomando $\alpha = 0$ tenemos $T(0 \cdot u) = 0T(u) = 0_v$.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

b) Sea $u \in U$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Como $T$ es una transformación lineal entonces $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Tomando $\alpha = -1$ tenemos $T(-1 \cdot u) = -1T(u) = -T(u)$.

c) La demostración de este ítem se hará por inducción sobre $m \in \mathbb{N}$.

Para el caso de $m = 1$, $T(\alpha_1 u_1) = \alpha_1 T(u_1)$ es válido, pues $T$ es lineal.

Supongamos que la propiedad es válida para $m = k$, esto es, $T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(u_i)$.

Vamos a mostrar que la propiedad es válida tambien para $m = k + 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i u_i\right) &= T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + (\alpha_{k+1} u_{k+1})\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right) + T(\alpha_{k+1} u_{k+1}). \end{aligned}$$

Usando la hipótesis de inducción y la linealidad de $T$ nuevamente,

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i u_i\right) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(u_i) + T(\alpha_{k+1} u_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(u_i) + \alpha_{k+1} T(u_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i T(u_i). \end{aligned}$$

Luego, la propiedad es válida para $m = k + 1$.

Por lo tanto, la propiedad vale para todo $m \in \mathbb{N}$.

$\square$

Una propiedad importante de una transformación lineal es que ella queda totalmente determinada si conocemos sus valores en los vectores de una base de su dominio. Comencemos con un ejemplo.

**Ejemplo 2.5.** Hallar, si es posible, una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que verifique $f(1, 1) = (0, 1)$ y $f(1, 0) = (2, 3)$.

Dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $(x_1, x_2) = x_2(1, 1) + (x_1 - x_2)(1, 0)$.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Entonces, si $f$ verifica lo pedido, entonces

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_2 \cdot f(1,1) + (x_1 - x_2) \cdot f(1,0) \\ &= x_2(0,1) + (x_1 - x_2)(2,3) \\ &= (2x_1 - 2x_2, 3x_1 - 2x_2) \end{aligned}$$

Además, esta función es una transformación lineal y que vale

$$f(1,1) = (0,1) \quad \text{y} \quad f(1,0) = (2,3)$$

.

Luego,

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 - 2x_2, 3x_1 - 2x_2)$$

es la única transformación lineal que satisface lo pedido.

**Ejemplo 2.6.** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to W$ una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en un espacio vectorial $W$.

Tenemos que $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ es una base canónica de $\mathbb{R}^3$. Dado cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$, tenemos

$$\begin{aligned} v = (x,y,z) &= x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\ &= xe_1 + ye_2 + ze_3 \text{ con } x, y, z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ahora, tenemos

$$\begin{aligned} T(v) &= T(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) \end{aligned}$$

osea, cualquier transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ queda completamente determinada por su actuación en los vectores de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Por ejemplo: $T(-3,5,0) = -3T(e_1) + 5T(e_2) + 0T(e_3)$.

Ahora, en el siguiente teorema generalizamos este resultado.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

**Teorema 2.4** ([11])**.** Consideramos espacios vectoriales $V$ y $W$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $V$ (dim$V$=n). Entonces, dados $n$ elementos arbitrarios (no necesariamente distintos) $w_1, w_2, ..., w_n \in W$, existe una única trasformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ ; $\forall i = 1, ..., n$.

*Demostración.* Primeramente demostraremos que existe una transformación $T$ con $T(v_i) = w_i$. Dado un elemento $u \in V$, sabemos que $u$ se puede escribir como una combinación lineal

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

Para este elemento $u$, vamos a definir una aplicación $T : V \to W$ de la forma

$$T(u) = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i \tag{2.2}$$

tenemos que $T$ es una transformación bien definida. Por la definición, queda evidente que $T(v_i) = w_i$.

Para mostrar que $T$ es una transformación lineal, sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y un elemento $v \in V$ escrito como

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$

Asi, tenemos que

$$\begin{aligned} T(u + \lambda v) &= \sum_{i=1}^{n} (c_i + \lambda b_i) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i w_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i w_i \\ &= T(u) + \lambda T(v) \end{aligned}$$

por tanto $T$ es una transformación lineal.

Ahora vamos a mostrar la unicidad de la transformación lineal $T$. Para eso, suponemos que existe otra transformación lineal $P : V \to W$ tal que

$$P(v_i) = w_i \text{ para } i = 1, ..., n$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

así, tenemos que

$$\begin{aligned} P(u) &= p\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i P(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i w_i \end{aligned}$$

Luego, $P$ es exactamente la regla de la transformación lineal $T$ definida en (2.2). Por tanto, probamos la unicidad de la transformación lineal $T$, lo que completa la demostración. $\square$

El núcleo y la imagen de una transformación lineal son dos subespacios de su dominio y de su contradominio, respectivamente, que nos brindan informaciones valiosas sobre la transformación. Existe una relación importante entre las dimensiones del dominio, del núcleo y de la imagen de una transformación lineal, que presentamos en las siguientes definiciones.

**Definición 2.9** (Núcleo)([11])**.** Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $T$ una transformación lineal de $V$ en $W$. El conjunto

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V / T(v) = 0_W\}$$

es denominado núcleo de la transformación $T$.

**Teorema 2.5** ([11])**.** El conjunto $\text{Ker}(T) \subset V$ es un subespacio vectorial de $V$.

*Demostración.* Sabemos que $T(0_V) = 0_W$, ello implica que $0_V \in \text{Ker}(T)$.

Ahora, tomando $u, v \in \text{Ker}(T)$, tenemos que

$$T(u) + T(v) = T(u + v) = 0_W$$

Luego, $u + v \in \text{Ker}(T)$.

Finalmente, considerando $u \in \text{Ker}(T)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$T(\lambda u) = \lambda T(u) = 0_W$$

Luego, $\lambda u \in \text{Ker}(T)$, lo que completa la demostración. $\square$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

**Definición 2.10** (Imagen)([11])**.** Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $T$ una transformación lineal de $V$ en $W$. El conjunto

$$\text{Im}(T) = \{w \in W / w = T(v) \text{ para algún } v \in V\}$$

es denominado imagen de la transformación $T$.

**Teorema 2.6** ([12])**.** El conjunto $\text{Im}(T) \subset W$ es un subespacio vectorial de $W$.

*Demostración.* Sabemos que $T(0_V) = 0_W$, implica que $0_W \in \text{Im}(T)$.

Ahora, considerando $T(u), T(v) \in \text{Im}(T)$, se tiene que

$$T(u) + T(v) = T(u + v)$$

como $u + v \in V$ y $T(u + v) \in W$, tenemos que $T(u) + T(v) \in \text{Im}(T)$.

Finalmente, tomando $T(u) \in \text{Im}(T)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$\lambda T(u) = T(\lambda u)$$

como $\lambda u \in V$ y $T(\lambda u) \in W$, obtenemos que $\lambda T(u) \in \text{Im}(T)$. $\square$

## 2.3. Espacios métricos

**Definición 2.11** ([13])**.** Una métrica en un conjunto $M$ es una función $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que asocia a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ un número real $d(x, y)$, llamado distancia de $x$ a $y$, de modo que, para cualquier $x, y, z \in M$, la aplicación $d$ cumple las siguientes propiedades:

1. $d(x, x) = 0$ si y solo si $x = y$
2. Si $x \neq y$ entonces $d(x, y) > 0$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría)
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular)

En esas condiciones cada imagen $d(x, y)$ recibe el nombre de distancia de $x$ a $y$ y el par $(M, d)$, donde $d$ es una métrica sobre $M$, es denominado espacio métrico.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

**Ejemplo 2.7.** Sea $X$ un conjunto no vacío y definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ como

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ ; si } x = y \\ 1 \text{ ; si } x \neq y \end{cases} \tag{2.3}$$

Entonces $d$ es una métrica en $X$, llamada métrica discreta y $(X, d)$ es un espacio métrico; $(X, d)$ se llama espacio métrico discreto.

**Ejemplo 2.8.** Sea el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por $d(x, y) = |x - y|$ (distancia entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$). Esta es denominada la métrica usual de la recta.

**Ejemplo 2.9.** Sea $X = \mathbb{R}^n$ y sea $x, y \in \mathbb{R}^n$, donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ son elementos de $X$, definimos la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^n$ de tres maneras

$$i)\ d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\right]^{1/2}$$

$$ii)\ d'(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$iii)\ d''(x,y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

Las funciones $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son métricas.

**Ejemplo 2.10.** Sea $X$ un conjunto $C([a, b])$ de todas las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a, b]$, con la distancia (distancia máxima entre sus gráficos)

$$d(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |g(t) - f(t)| \tag{2.4}$$

también es un espacio métrico.

## 2.4. Espacios métricos completos

En esta sección, estudiaremos sucesiones en espacios métricos, mostrando la demostración de algunos resultados como: sucesiones, límite de sucesiones, sucesiones de funciones, destacando las sucesiones de Cauchy, teniendo como objetivo la definición de espacios métricos completos el cual depende de sucesión de Cauchy.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

### 2.4.1. Sucesiones

Una sucesión en un conjunto $M$ es una aplicación $x : \mathbb{N} \to M$, definida en un conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$. El valor que la sucesión $x$ asume para el número $n \in \mathbb{N}$ será indicado por $x_n$, en vez de $x(n)$, y se denominára el $n$-ésimo término de la sucesión. En notación de función:

$$x : \mathbb{N} \to M$$

$$n \to x(n) = x_n$$

Usaremos las notaciones $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o $(x_n)$ para representar una sucesión. Por otro lado, escribiremos $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ o $x(\mathbb{N})$ para indicar el conjunto de valores, o el conjunto de términos de la sucesión. Este conjunto no debe ser confundido como una sucesión.

**Ejemplo 2.11.** Si definimos $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ como $x_n = (-1)^n$, entonces obtenemos la sucesión $(-1, 1, -1, 1, ...)$ cuyo conjunto de valores es $\{-1, 1\}$. Vemos así que entre los términos $x_n$ de la sucesión pueden ocurrir repeticiones, esto es, se puede tener $x_m = x_n$ con $m \neq n$. Cuando la aplicación $x : \mathbb{N} \to M$ fuese inyectiva, o sea, cuando $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$, decimos que $(x_n)$ es una sucesión de términos distintos o sin repeticiones.

Una subsucesión de $x_n$ es una restricción de la aplicación $n \to x_n$ a un conjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. La subsucesión está indicada por las notaciones $(x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nk}, ...)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, $(x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ o simplemente, $(x_{nk})$.

**Ejemplo 2.12.** La sucesión $(4, 16, 64, ..., 4^k, ...)$ es una subsucesión de $(2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ...)$, en el cual $\mathbb{N}'$ es el conjunto de los números pares.

**Definición 2.12** (Sucesiones limitadas)([14])**.** Una sucesión $(x_n)$ en un espacio métrico $M$ se llama limitada cuando el conjunto de sus términos es limitado, esto es, cuando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c$ para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$.

Como una sucesión es una función, es claro que el concepto de sucesión limitada



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

coincide con el de función limitada. Además de eso, toda subsucesión de una sucesión limitada también es limitada.

**Ejemplo 2.13.** Sea $M = \mathbb{R}$, la sucesión $(x_n)$ definida por $x_n = \dfrac{1}{n}$. Entonces $(x_n)$ es limitada.

*En efecto;*

$$d\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| \leq 1; \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

**Ejemplo 2.14.** Sea $M = \mathbb{R}$, la sucesión $(x_n)$ definida por $x_n = (-1)^n$. Entonces $(x_n)$ es limitada, pues $d(x_n, x_m) = 0$, o $d(x_n, x_m) = 2; \forall m, n \in \mathbb{N}$.

### 2.4.2. Límite de sucesiones

**Definición 2.13** ([13])**.** Sea $(x_n)$ una sucesión en un espacio métrico $M$. Se dice que el punto $a \in M$ es el límite de la sucesión $(x_n)$ cuando, para todo número $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, se puede obtener $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$. Se escribe $\lim x_n = a$; se dice también que $x_n$ tiende para $a$ y se escribe cuando $x_n \to a$.

$$\lim x_n = a \iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon.$$

Más precisamente, considerando un margen de error $\epsilon > 0$, existe un índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos los términos $x_n$ de la sucesión con índice $n > n_0$ son valores aproximados de $a$ con error menor que $\epsilon$.

Esta importante definición significa que, para valores muy grandes de $n$, los términos $x_n$ se toman y se mantienen tan próximos de $a$ cuando se desea.

Cuando existe $\lim x_n = a \in M$, se dice que la sucesión de puntos $x_n \in M$ es convergente en $M$, y converge para $a$. Si no existe $\lim x_n \in M$, decimos que la sucesión es divergente en $M$.

Afirmar que $\lim x_n = a$ en un espacio métrico $M$ equivale a decir que toda bola $B$ de centro $a$ (todo abierto $A$ conteniendo $a$ o toda vecindad $V$ de $a$) contiene $x_n$ para todo valor de $n$, con excepción de un número finito de ellos (que son un máximo de los puntos $x_1, x_2, ..., x_{n_0}$).



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

**Ejemplo 2.15.** Toda sucesión constante, $x_n = a$, es convergente y converge para $a$.

*En efecto,*

Para todo $\epsilon > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, a) = d(a, a) = 0 < \epsilon$. Por tanto $\lim x_n = a$.

### 2.4.3. Sucesiones monótonas

**Definición 2.14** ([13])**.** Una sucesión $(x_n)$ es denominada no decreciente si, para todo número natural $n$, $x_n \leq x_{n+1}$, esto es, $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$

**Definición 2.15** ([13])**.** Una sucesión $(x_n)$ es denominada creciente si, para todo número natural $n$, $x_n < x_{n+1}$, esto es, $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots$

**Definición 2.16** ([13])**.** Una sucesión $(x_n)$ es denominada no creciente si, para todo número natural $n$, $x_n \geq x_{n+1}$, esto es, $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$

**Definición 2.17** ([13])**.** Una sucesión $(x_n)$ es denominada decreciente si, para todo número natural $n$, $x_n > x_{n+1}$, esto es, $x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > \cdots$

**Definición 2.18** ([13])**.** Una sucesión $(x_n)$ es denominado monótona si es no creciente y no decreciente.

### 2.4.4. Sucesión limitada

**Definición 2.19** ([13])**.** Una sucesión $(x_n)$ es limitada si existe un número real positivo $M$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. El número $M$ es llamado cota superior de la sucesión $(a_n)$.

**Teorema 2.7** ([14])**.** Si $(x_n)$ es una sucesión convergente, entonces $(x_n)$ es limitada.

*Demostración.* Sea $(x_n)$ una sucesión convergente con límite $L$. Por la definición de límite, sea $\epsilon = 1$, entonces existe un valor $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual se tiene que $|x_n - L| < 1$. Aplicando la desigualdad triangular, se tiene

$$|x_n| = |x_n - L + L| \leq |x_n - L| + |L| < 1 + |L|, \forall n \geq n_0. \tag{2.5}$$

Los únicos términos de la sucesión $(x_n)$, que posiblemente, no atiendan a la condición representada en la ecuación (2.5) son: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n_0}$. Considerando el número real



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

$C$ como un mayor entre todos los números $1 + |L|, |x_1|, |x_2|, |x_3|, ..., |x_{n_0-1}|$, se tiene $|x_n| < C; \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

### 2.4.5. Sucesión monótona y limitada

**Teorema 2.8** ([14]). Toda sucesión $(x_n)$ monótona y limitada es convergente.

### 2.4.6. Sucesiones de Cauchy

**Definición 2.20** ([14]). Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_n$ de puntos de $X$ se dice que es una sucesión de Cauchy en $(X, d)$ si tiene la propiedad de que, dado $\epsilon > 0$ existe un entero $N$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \text{ para todo } n, m \geq N$$

### 2.4.7. Espacios métricos completos

**Definición 2.21** ([14]). Un espacio métrico $(X, d)$ se dice que es completo si toda sucesión de Cauchy en $X$ es convergente.

### 2.4.8. Completitud de espacios métricos

Sea $X$ un espacio métrico no completo, agregando algunos puntos a $X$ es posible obtener un espacio métrico $\hat{X}$ completo, el espacio $\hat{X}$ es llamado el completamiento de $X$.

**Definición 2.22** ([3]). Sean $X = (X, d)$ y $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$ espacios métricos. Entonces

1. La aplicación $T$ de $X$ en $\tilde{X}$ es llamado una isometría si $T$ preserva distancias, es decir, si para todo $x, y \in X$

$$\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y)$$

donde $Tx$ y $Ty$ son la imágenes de $x$ e $y$ respectivamente.

2. El espacio $X$ es llamado isométrico con el espacio $\tilde{X}$ si existe una isometría biyectiva de $X$ sobre $\tilde{X}$. Los espacios $X$ y $\tilde{X}$ son llamados espacios isométricos.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

**Definición 2.23** ([15])**.** Un completamiento de un espacio métrico $X$ es un par $(\hat{X}, f)$, donde $f : X \to \hat{X}$ es una inmersión isométrica, $\hat{X}$ es completo y $f(X)$ es denso en $\hat{X}$.

El siguiente teorema es llamado el teorema de completitud.

**Teorema 2.9** ([3])**.** Para un espacio métrico $X = (X, d)$ existe un espacio métrico $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$ que tiene un subespacio $W$ que es isométrico con $X$ y es denso en $\hat{X}$. Este espacio $\hat{X}$ es único excepto para isometrías, es decir, si $\tilde{X}$ es cualquier espacio métrico completo teniendo un subespacio denso $\tilde{W}$ isométrico con $X$, entonces $\tilde{X}$ y $\hat{X}$ son isométricos.

### 2.5. Espacios vectoriales normados

En esta sección definimos a los espacios normados sobre espacios vectoriales y si estos espacios son completos se llamarán espacios de Banach, también haremos el estudio de las propiedades de los espacios normados y los operadores lineales. El campo $\mathbb{K}$ considerado puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

**Definición 2.24** ([4])**.** Una norma en un espacio vectorial $E$ es una aplicación

$$\| \ \| : E \to \mathbb{R}$$

satisfaciendo las siguientes condiciones

1. $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

La función definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ resulta de forma directa de las propiedades de norma.

Un espacio vectorial visto como espacio métrico, con la métrica inducida por esta norma, se llama un espacio vectorial normado. Si en la definición de norma la condición $\|x\| = 0$, entonces $x = 0$ fuera retirada, se dice que $\| \ \|$ es una seminorma.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

**Definición 2.25** ([16])**.** Un espacio normado que es completo con la métrica inducida por la norma es llamado espacio de Banach.

La siguiente proposición muestra la importancia de los subespacios cerrados de un espacio de Banach.

**Proposición 2.1** ([6])**.** Sean $E$ un espacio de Banach y $F$ un subespacio vectorial de $E$. Entonces $F$ es un espacio de Banach, con la norma inducida de $E$, si, y sólo si, $F$ es cerrado en $E$.

*Demostración.*

$\Rightarrow$] Por hipótesis, $F$ es un espacio de Banach y sea $(x_n)$ una sucesión en $F$ tal que

$$x_n \to x \in E$$

Entonces $(x_n)$ es de Cauchy en $F$, y por lo tanto es convergente, esto debido a que $F$ es completo. Luego existe $y \in F$ tal que $x_n \to y$. De la unicidad de límite se tiene que $x = y \in F$, esto prueba que $F$ es cerrado en $E$.

$\Leftarrow$] Por hipótesis $F$ es cerrado en $E$ y sea $(x_n)$ un sucesión de Cauchy en $F$, entonces $(x_n)$ es una sucesión de Cauchy en $E$, es decir, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$ y como $F$ es cerrado entonces $x \in F$, esto prueba que $F$ es completo. $\square$

**Ejemplo 2.16.** Sea $X$ un conjunto no vacío. Una función $f : X \to K$ es acotada si su imagen es un subconjunto acotado de $K$, o sea, si existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$. El conjunto $B(X)$ de todas las funciones acotadas $f : X \to K$, que es un espacio vectorial con las operaciones usuales de funciones, es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$\|f\|_\infty$ es una norma.

*En efecto:*

1. $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| \geq 0$ y $\|f\|_\infty = 0$ si, y sólo si, $\sup_{x\in X} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, para todo $x \in X$.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

2. $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in X} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in X} |\lambda||f(x)| = |\lambda|\|f\|_\infty$.

3. También

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)| \\
&\leq \sup_{x\in X} (|f(x)|+|g(x)|) \\
&\leq \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| \\
&= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|f\|_\infty$ es una norma en $B(X)$. Para mostrar la completitud sea $(f_n)$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$, es decir, que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n \geq n_0$, se tiene $\|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon$. Como $m, n \geq n_0$ entonces $\sup_{x\in X} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ y por lo tanto $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$, esto quiere decir que $(f_n(x))$ será una sucesión de Cauchy en $K$ para todo $x \in X$. Puesto que $K$ es completo, entonces $(f_n(x))$ es convergente y $f$ tiene la forma

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Por otro lado, $(f_n)$ es una sucesión de Cauchy, entonces existe $M$ tal que $\|f\|_\infty \leq M$, esto implica que $|f_n(x)| \leq M$ y por lo tanto $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y así se tiene que $f \in B(X)$. Por lo tanto $B(X)$ es completo lo que muestra que es un espacio de Banach.

**Ejemplo 2.17.** Como $[a, b]$ es compacto en $\mathbb{R}$, el conjunto $C[a, b]$ de todas las funciones continuas de $[a, b]$ en $K$ es un subespacio vectorial del espacio de Banach $B[a, b]$, y por tanto es un espacio vectorial normado con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|/\, x \in [a, b]\} = \text{máx}\{|f(x)|/\, x \in [a, b]\}$$

Más aún, $C[a, b]$ es un espacio de Banach.

Por la proposición 2.1 basta probar que $C[a, b]$ es un subespacio cerrado de $B[a, b]$.

*En efecto*



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Sea $(f_n) \subset C[a,b]$ tal que $f_n \to f \in B[a,b]$. Para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\| < \epsilon \Rightarrow \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

es decir, $(f_n)$ converge uniformemente para $f$ y se sigue que $f$ es continua. Por lo tanto $C[a,b]$ es cerrado.

**Lema 2.1** ([6])**.** Sea $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio normado $E$. Entonces existe una constante $c > 0$, que depende del conjunto $B$, tal que

$$\|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + \cdots + |a_n|)$$

para cualesquiera escalares $a_1, \dots, a_n$.

La constante $c$ del lema anterior será utilizado en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 2.10** ([6])**.** Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach. Consecuentemente, todo subespacio de dimensión finita es un espacio normado $E$ es cerrado en $E$.

*Demostración.* Sean $E$ un espacio normado de dimensión $n$ y $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ una base normalizada de $E$. Dada una sucesión de Cauchy $(x_k)$ en $E$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existen $a_1^k, \dots, a_n^k$ escalares únicos tales que $x_k = a_1^k\beta_1 + \cdots + a_n^k\beta_n$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_m\| < c\epsilon$ siempre que $k, m \geq n_0$ donde $c$ es una constante del lema anterior para el conjunto linealmente independiente $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j^k - a_j^m| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^{n} (a_j^k - a_j^m)\beta_j \right\| = \frac{1}{c}\|x_k + x_m\| < \epsilon$$

siempre que $k, m \geq n_0$. Se sigue, que para cada $j$, la sucesión de escalares $(a_j^k)$ es de Cauchy y por lo tanto convergente. Y podemos escribir en la forma

$$b_j = \lim_k a_j^k,$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

En ese caso, tenemos

$$\lim_k \sum_{j=1}^{n} |a_j^k - b_j| = 0$$

Definiendo $x = b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n$, se tiene que $x \in E$ y

$$\lim_k \|x_k - x\| = \lim_k \left\| \sum_{j=1}^{n} (a_j^k - b_j)\beta_j \right\| \leq \lim_k \sum_{j=1} n|a_j^k - b_j| = 0$$

Por lo tanto, $x_n$ converge para $x$, y así, $E$ es un espacio de Banach. $\square$

### 2.5.1. Propiedades de los espacios normados

Un subespacio $Y$ de un espacio de normado $X$ es un subespacio de $X$ considerado como espacio vectorial. Sea $Y$ un subconjunto de $X$, donde $X$ es un espacio de Banach, $Y$ es subespacio de $X$, si $Y$ es subespacio de $X$ como espacio normado.

**Definición 2.26** (Convergencia)([3])**.** Una sucesión $(x_n)$ en un espacio normado $X$ es convergente si $X$ contiene un $x$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

$x_n \to x$, y decimos que $x$ es el límite de $(x_n)$.

**Observaciones.**

1. Una sucesión $(x_n)$ en un espacio normado $X$ es de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$, existe un $N$ tal que

   $$\|x_m - x_n\| < \epsilon$$

   para todo $m, n > N$

2. Si $(x_k)$ es una sucesión en un espacio normado $X$, podemos asociar $(x_k)$ la sucesión $(s_n)$ de sumas parciales

   $$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

   donde $n = 1, 2, \ldots$. Si $(s_n)$ es convergente, entonces $s_n \to s$ que es

   $$\|s_n - s\| \to 0$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

3. Si $\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ converge, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots$ es absolutamente convergente.

**Definición 2.27** ([3]). Sea $X$ un espacio normado, decimos que la sucesión $e_n \in X$ es una base de Shauder para $X$ si, y sólo si, para todo $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\alpha_n$ tal que

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \to 0$$

o

$$\lim_{n\to\infty} \|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| = 0$$

Luego,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

**Ejemplo 2.18.** El espacio $\ell^p$ tiene una base de Shauder, donde

$$\ell^p = \{x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)/\xi_i \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty\}$$

Sea la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p}$$

Entonces $\ell^p$ es un espacio normado. Luego $e_1, e_2, \ldots$; es una base de Shauder para $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \ell^p$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| &= \lim_{n\to\infty} \|x - (\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(\xi_1, \xi_2, \ldots) - (\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(0, 0, \ldots, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)\|
\end{aligned}$$

Luego, se $t_n = \|(0, 0, \ldots, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)\|$, entonces $t_n$ es una sucesión decreciente de números $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots$ Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| = 0$ y por lo tanto $e_1, e_2, \ldots$ es una base de Shauder. Si un espacio normado $X$ tiene una base de Shauder, entonces $X$ es separable, es decir, que existe un subconjunto $M$ denso y numerable en $X$. No todo espacio de Banach separable tiene una base de Shauder.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

**Teorema 2.11** ([3]). Sea $X = (X, \| \ \|)$ un espacio normado, entonces existe un espacio de Banach $\hat{X}$ y una isometría $A$ de $X$ sobre un subespacio $W$ de $\hat{X}$ que es denso en $\hat{X}$. El espacio $\hat{X}$ es único excepto para isometrías.

*Demostración.* Por el teorema 2.9, se tiene la existencia de una espacio métrico $\hat{X}$ y una isometría $A : X \to W = A(x)$ donde $W$ es denso en $\hat{X}$ y $\hat{X}$ es único, excepto para isometrías.

Se define en $X$ las operaciones de un espacio vectorial, consideremos $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$ y $(x_n) \in \hat{X}$ y $(y_n) \in \hat{Y}$, donde $\hat{x}$ y $\hat{y}$ son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en $X$.

Sea $z_n = x_n + y_n$, esta elección no depende de los representantes, entonces $(z_n)$ es de Cauchy en $X$, puesto que

$$\begin{aligned} \|z_n - z_m\| &= \|x_n + y_n - x_m - y_m\| \\ &= \|(x_n - x_m) + (y_n - y_m)\| \\ &\leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| \end{aligned}$$

Definiendo la suma

$$\hat{z} = \hat{x} + \hat{y}$$

Si $(x_n) \sim (x_n^1)$ y $(y_n) \sim (y_n^1)$ entonces $(x_n + y_n) \sim (x_n^1 + y_n^1)$, puesto que

$$\|x_n + y_n - (x_n^1 + y_n^1)\| \leq \|x_n - x_n^1\| + \|y_n - y_n^1\|$$

Similarmente se define el producto $\alpha\hat{x} \in \hat{X}$ de un escalar $\alpha$ y $\hat{x}$, nuevamente esta definición no depende de los representantes. Además, $A$ induce sobre $W$ una norma $\| \ \|_1$, cuyo valor a cada $\hat{y} = Ax \in W$ es $\|\hat{y}\| = \|x\|$. La correspondiente métrica sobre $W$ es la restricción de $\hat{d}$ a $W$, desde que $A$ es isometría. Podemos extender la norma $\| \ \|_1$ a $\hat{x}$ estableciendo $\|x\| = \hat{d}(\hat{0}, \hat{x})$, para cada $\hat{x} \in \hat{X}$. $\square$

### 2.5.2. Operadores lineales

Vamos a definir el operador lineal y algunos resultados que son de gran importancia.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

**Definición 2.28** ([16]). Un operador lineal entre los espacios vectoriales $X$ e $Y$ es una aplicación $T : X \to Y$ en que su dominio Dom $T$ es un subespacio vectorial y $T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y)$, para todo $x, y \in$ Dom $T$ y todo escalar $\alpha$.

Note que $T(0) = 0$ para todo operador lineal $T$, es también conveniente observar que la notación de los operadores puede variar, es decir, $T(x)$ también será denotado por $Tx$.

**Teorema 2.12** ([3]). Sea $T$ un operador lineal, entonces

1. El rango $\mathscr{R}(T)$ es un espacio vectorial
2. Si $\dim \mathscr{D}(T) = n < \infty$, entonces $\dim \mathscr{R}(T) \leq n$
3. El espacio nulo $(T)$ es un espacio vectorial.

**Definición 2.29** ([6]). Un operador lineal continuo del espacio normado $E$ en el espacio normado $F$, ambos sobre el mismo campo $K$, es una aplicación $T : E \to F$ tal que

1. $T$ es lineal, es decir, $T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y)$
2. $T$ es continua, es decir, para todo $x_0 \in E$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$ siempre que $x \in E$ y $\|x - x_0\| < \delta$.

El conjunto de todos los operadores lineales continuos de $E$ en $F$ será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$, en donde con las operaciones usuales de funciones $\mathcal{L}(E, F)$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si $F$ es el campo de los escalares, escribimos $E'$ en lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ y llamaremos a ese espacio dual de $E$ y diremos que sus elementos son funcionales lineales continuos.

Se dice que una función es lipschitziana $f : M \to N$ entre dos espacios métricos si existe una constante $L$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ para todo $x, y \in M$; y se dice que $f$ es uniformemente continua si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ siempre que $x, y \in M$ y $d(x, y) < \delta$.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

**Definición 2.30** ([3]). Sea $X$ e $Y$ espacios normados y $T : \mathscr{D} \to Y$ un operador lineal, donde $\mathscr{D} \subset X$. El operador $T$ es llamado acotado si existe un número real $C$ tal que para todo $x \in \mathscr{D}(T)$,

$$\|T\| \leq C\|x\|$$

Y se tiene las siguientes implicaciones, para funciones entre espacios métricos

$$\text{Lipschitziana } \Rightarrow \text{ uniformemente continua } \Rightarrow \text{ continua } \Rightarrow \text{ continua en un punto}$$

El siguiente teorema muestra que todas esas definiciones son equivalentes para operadores lineales entre espacios normados y las implicaciones entre ellos.

**Teorema 2.13** ([6]). Sean $E$ y $F$ espacios normados sobre $K$ y $T : E \to F$ lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $T$ es lipschitziano
2. $T$ es uniformemente continuo
3. $T$ es continuo
4. $T$ es continuo en algún punto de $E$
5. $T$ es continuo en el origen
6. $\sup\{\|T(x)\|/\, x \in E \text{ y } \|x\| \leq 1\} < \infty$
7. Existe una constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.

*Demostración.* Las implicaciones 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. son verdaderas en espacios métricos y que no dependen de la linealidad de $T$.

4. $\Rightarrow$ 5. Por hipótesis $T$ es continuo en algún punto $x_0 \in E$, es decir, para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$ siempre que $\|x - x_0\| < \delta$. Tomando $x \in E$ tal que $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$, entonces $\|(x + x_0) - x_0\| = \|x\| < \delta$, se tiene

$$\|T(x) - T(0)\| = \|T(x) - 0\| = \|T(x)\| = \|T(x) + T(x_0) + T(x_0)\| = \|T(x + x_0) - T(x_0)\| < \epsilon$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Esto demuestra que $T$ es continuo en el origen.

5. $\Rightarrow$ 6. Como $T$ es continuo en el origen, es decir, dado $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| < 1$ siempre que $\|x\| < \delta$. Si $\|x\| \leq 1$ entonces $\|\frac{\delta}{2}x\| < \delta$ y $\frac{\delta}{2}\|T(x)\| = \|T(\frac{\delta}{2}x)\| < 1$, es decir

$$\sup\{\|T(x)/\, x \in E \text{ y } \|x\| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$$

6. $\Rightarrow$ 7. Para $x \in E$, $x \neq 0$, se tiene

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup\{\|T(y)/\, \|y\| \leq 1\}$$

y por lo tanto $\|T(x)\| \leq (\sup\{\|T(y)/\, \|y\| \leq 1\}) \leq \|x\|$ para todo $x \neq 0$.

7. $\Rightarrow$ 1. Sean $x_1, x_2 \in E$,

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|$$

por lo tanto $T$ es lipschitziano con constante $C$. □

**Corolario 2.2** ([6])**.** Sea $T : E \to F$ un operador lineal biyectivo entre espacios normados. Entonces $T$ es un isomorfismo si, y sólo si, existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$$

para todo $x \in E$.

*Demostración.*

$\Rightarrow$] Del teorema 2.13, como $T$ es continuo, existe $C_2 \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ para todo $x \in E$, además $T$ es isomorfismo, es decir, $T^{-1}$ es continuo, entonces existe $C \geq 0$ tal que $\|T^{-1}(y)\| \leq C\|y\|$ para todo $y \in F$. Para $x \in E$, se tiene $\|x\| = \|T^{-1}T(x)\| \leq C\|T(x)\|$, entonces $\dfrac{1}{C}\|x\| \leq \|T(x)\|$. Poniendo $C_1 = \frac{1}{C}$, tenemos que

$$C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$$

para todo $x \in E$.

$\Leftarrow$] Por el teorema 2.13 $T$ es continuo. Por otro lado $C_1\|x\| \leq \|T(x)\|$ implica que



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

$C_1\|T^{-1}(y)\| \leq \|T(T^{-1}(y))\| = \|y\|$ para todo $y \in F$, entonces $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{C_1}\|y\|$, y por el teorema anterior $T^{-1}$ es continuo y por lo tanto $T$ es isomorfismo. $\square$

La condición 6. del teorema 2.13 indica como normar el espacio $\mathcal{L}(E, F)$ de los operadores lineales continuos de $E$ en $F$.

**Proposición 2.2** ([6])**.** Sean $E$ y $F$ espacios normados

1. La expresión
$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|/\, x \in E \text{ y } \|x\| \leq 1\}$$
define una norma en el espacio $\mathcal{L}(E, F)$

2. $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$

3. Si $F$ es de Banach, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ también es de Banach.

*Demostración.* 1. $\|T\|$ es una norma.

*a*) $\|T\| \geq 0$ y $\|T\| = 0 \Leftrightarrow \sup\{\|T\|/\, x \in E \text{ y } \|x\| \leq 1\} = 0 \Leftrightarrow \|T(x)\| = 0 \Leftrightarrow$ $T(x) = 0$ para todo $x \in E \Leftrightarrow T = 0$

*b*)

$$\begin{aligned}
\|\alpha T\| &= \sup\{\|\alpha T(x)\|/\, x \in E \text{ y } \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{|\alpha|\|T(x)\|/\, x \in E \text{ y } \|x\| \leq 1\} \\
&= |\alpha| \sup\{\|T(x)\|/\, x \in E \text{ y } \|x\| \leq 1\} \\
&= |\alpha|\|T\|
\end{aligned}$$

*c*)

$$\begin{aligned}
\|T + U\| &= \sup\{\|T(x) + U(x)\|/\, x \in E \text{ y } \|x\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|T(x)\| + \|U(x)\|/\, x \in E \text{ y } \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|T(x)\|/\, x \in E \text{ y } \|x\| \leq 1\} + \sup\{\|U(x)\|/\, x \in E \text{ y } \|x\| \leq 1\} \\
&= \|T\| + \|U\|
\end{aligned}$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Por lo tanto $\|T\|$ es una norma para $\mathcal{L}(E,F)$.

2. Si $x \neq 0$

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup\{\|T(y)\| / \, y \in E \text{ y } \|y\| \leq 1\}$$

esto implica que

$$\|T(x)\| \leq \sup\{\|T(y)\| / \, y \in E \text{ y } \|y\| \leq 1\}\|x\| \Rightarrow \|T\|\|x\|$$

3. Sea $(T_n)$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E,F)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$ siempre que $n, m \geq n_0$

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \epsilon\|x\|$$

entonces la sucesión $(T_n)$ es de Cauchy en $F$ y es convergente puesto que $F$ es de Banach, y se puede escribir

$$T : E \to F, \; T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Para $x, y \in X$ y $\alpha$ escalar,

$$\begin{aligned} T(x + \alpha y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(x + \alpha y) \\ &= \lim_{n\to\infty} (T_n(x) + \alpha T_n(y)) \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(y) \\ &= T(x) + \alpha T(y) \end{aligned}$$

Haciendo $m \to \infty$ tenemos

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_n(x) - T(x)\| \leq \epsilon\|x\|$$

En particular

$$\|(T_{n_0} - T)(x)\| = \|T_{n_0}(x) - T(x)\| \leq \epsilon\|x\|$$

para todo $x \in E$, lo que garantiza que $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E,F)$.

Por lo tanto $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E,F)$, además $\|T_n - T\| \leq \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, y así resulta que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(E,F)$. Por lo tanto $\mathcal{L}(E,F)$ es de Banach. $\square$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

**Teorema 2.14** ([3])**.** Sea $T$ un operador lineal acotado, entonces

1. $x_n \to x$ implica $Tx_n \to Tx$

2. El espacio nulo $\mathscr{N}(T)$ es cerrado

*Demostración.* 1. De la parte 2. de la proposición 2.2

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\|\|x_n - x\| \to 0$$

2. Para cada $x \in \overline{\mathscr{N}(T)}$ existe una sucesión $(x_n)$ tal que $x_n \to x$. Por la parte 1. $Tx_n \to Tx$, además $Tx = 0$ ya que $Tx_n = 0$, así $x \in \mathscr{N}(T)$. Puesto que $x$ es arbitrario, entonces $\mathscr{N}(T)$ es cerrado.

□

## 2.6. Espacios de Hilbert

Un producto interno $\langle x, y\rangle$ en un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ es una aplicación bilineal, simétrica, definida positiva, y la norma está definida por $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$, en donde se dice que la norma está generada por el producto interno. Esta noción de producto interno se define para el campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

**Definición 2.31** ([7])**.** Un producto interno en un espacio vectorial $V$ es una aplicación $V \times V \mapsto \mathbb{C}$ que satisface las siguientes condiciones, para todo $x, y, z \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

1. (Definida positiva) $\langle x, x\rangle \geq 0$ y $\langle x, x\rangle = 0 \leftrightarrow x = 0$

2. (Simetría Hermitiana) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

3. (Linealidad en la primera variable) $\langle \alpha x + \beta z, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle z, y\rangle$

Un espacio vectorial dotado de un producto interno es llamado espacio con producto interno.

**Observación 2.1.** De la definición de producto interno, se sigue que

1. $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle + \bar{\beta}\langle x, z\rangle$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

2. $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$

**Definición 2.32** ([6])**.** Sean dos vectores $x$ e $y$ de un espacio con producto interno son ortogonales si

$$\langle x, y\rangle = 0$$

y se denota por $x \perp y$.

**Definición 2.33** ([6])**.** Sean $E$ un espacio con producto interno y $A$ un subconjunto de $E$. Denominamos el subconjunto

$$A^{\perp} = \{y \in E / \ \langle x, y\rangle = 0, \ \text{ para todo } x \in A\}$$

de complemento ortogonal de $A$.

La notación del complemento ortogonal también se puede escribir como

$$A^{\perp} = \{y \in E / \ y \perp A\}$$

**Observaciones.**

Se cumplen las siguientes propiedades del complemento ortogonal

1. $A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}$
2. $E^{\perp} = \{0\}$
3. $\{0\}^{\perp} = E$
4. $A^{\perp}$ es un subsepacio cerrado de $E$.
5. $A \cap A^{\perp} = \begin{cases} \{0\}, & \text{si } 0 \in A \\ \emptyset, & \text{si } 0 \notin A \end{cases}$

**Definición 2.34** ([5])**.** Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial dotado de un producto interno $\langle x, y\rangle$ y que es completo para la norma $\langle x, y\rangle^{1/2}$.

**Ejemplo 2.19.** El espacio $\mathbb{R}^n$ es un espacio con producto interno, si dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ el producto interno está definido por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

**Ejemplo 2.20.** El espacio $\mathbb{C}^n$ es un espacio con producto interno, si dados $z = (z_1, \ldots, z_n)$ y $w = (w_1, \ldots, w_n)$, el producto interno se define por

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i$$

**Ejemplo 2.21.** Sea el espacio vectorial de las funciones continuas en $C[0, 1]$, el producto interno está definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_{[0,1]} f(x)\overline{g(x)}dx$$

La norma, $\|x\|$, del vector $x$ está definido por

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right]^{1/2}$$

De las propiedades de producto interno, se tiene la siguiente desigualdad en $\mathbb{C}^n$

**Teorema 2.15** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)([17])**.** Si $x$ e $y$ están en $\mathbb{C}^n$, entonces

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

donde $y \neq 0$, la igualdad se tiene si, y sólo si, $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

*Demostración.* Para cada escalar $\lambda$ se tiene

$$\begin{aligned}
0 \leq \|x - \lambda y\|^2 &= \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \\
&= \langle x, x - \lambda y\rangle - \langle \lambda y, x - \lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda[\langle y, x\rangle - \bar{\lambda}\langle y, y\rangle] \\
&= \|x\|^2 - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\left[\langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, y\rangle\right]
\end{aligned}$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

donde, $\bar{\lambda} = \dfrac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$, en la desigualdad

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x\|^2 - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle \\
0 &\leq \|x\|^2 - \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle \\
0 &\leq \|x\|^2 - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} \\
0 &\leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\
|\langle x, y\rangle| &\leq \|x\| \, \|y\|
\end{aligned}$$

La igualdad se tiene si $0 = \|x - \lambda y\|^2$, es decir, si $x - \lambda y = 0$, por lo tanto $x = \lambda y$. $\square$

Una consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz es la desigualdad triangular, esta desigualdad dice que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo no excede a la longitud del tercer lado.

**Teorema 2.16** (Desigualdad triangular)([17]). Para $x$ e $y$ en $\mathbb{C}^n$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 \\
\|x + y\|^2 &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\
\|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

$\square$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

En la demostración la primera desigualdad es cierta desde que la parte real de un número complejo es menor o igual a su norma, y la segunda desigualdad está garantizada por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

La igualdad se tiene si $2\text{Re}\langle x, y\rangle = 2\|x\| \, \|y\|$, en particular $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\|$, entonces $x = \lambda y$. Además si $\text{Im}\langle x, y\rangle = 0$ y $\text{Re}\langle x, y\rangle \geq 0$, entonces $0 \leq \langle x, y\rangle = \langle \lambda y, y\rangle = \lambda \|y\|^2$, por lo tanto $\lambda \geq 0$.

Otra consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz está dada en el siguiente lema.

**Lema 2.2** ([4])**.** El producto interno en un espacio con producto interno es una función continua.

*Demostración.* Sean $x_n \to x$ e $y_n \to y$, entonces para demostrar la continuidad del producto interno, se debe tener que $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

*En efecto*, usando la desigualdad triangular y de Cauchy-Schwarz

$$
\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\
&\leq |\langle x_n . y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\
&= |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\
&\leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

□

Los espacios con producto interno pueden tener la propiedad de ser espacios completos para tener espacios de Hilbert, esta completación se debe al uso de isomorfismos y del lema anterior.

**Definición 2.35** ([3])**.** Un isomorfismo $T$ en un espacio con producto interno $X$ sobre un espacio con producto interno $\tilde{X}$ sobre el mismo campo es un operador lineal biyectivo



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

$T: X \to \tilde{X}$ que preserva el producto interno, es decir, para todo $x, y \in X$

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$$

El isomorfismo $T$ es también una isometría entre $X$ y $\tilde{X}$ puesto que están determinados por la norma definida por el producto interno. El siguiente teorema afirma que el espacio con producto interno puede ser un espacio completo.

**Teorema 2.17** ([3])**.** Para cualquier espacio con producto interno $X$ existe un espacio de Hilbert $H$ y un isomorfismo $A$ de $X$ en un subespacio denso $W \subset H$. El espacio $H$ es único excepto para isomorfismos.

*Demostración.* Por la teoría de espacios de Banach, teorema 2.11, existe un espacio $H$ de Banach y una isometría $A: X \to W$ con $W$ denso en $H$. Por la continuidad de $A$, $A$ es también isomorfismo de $X$ sobre $W$, estos como espacios normados, además se puede definir en $H$ un producto interno, tal que

$$\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle$$

donde $(x_n) \in X$ y $(y_n) \in X$, el teorema 2.11 garantiza la unicidad de $H$ excepto para isomorfismos.

La norma asociada a este producto interno es

$$\begin{aligned}
\|x\|_N^2 &= \langle x, x\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^2 \\
&= \|x_n\|^2
\end{aligned}$$

y ambas normas coinciden. Por lo tanto $H$ es un espacio de Hilbert. □

**Definición 2.36** ([3])**.** Un espacio vectorial $X$ es llamado de suma directa de dos subespacios $Y$ y $Z$ de $X$, escrito por

$$X = Y \oplus Z$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

si cada $x \in X$ tiene una única representación

$$x = y + z$$

$x \in X$, $y \in Y$. Entonces $Z$ es llamado un complemento algebraico de $Y$ en $X$ y viceversa, y $Y, Z$ son llamados pares complementarios de subespacios en $X$.

Similarmente que en espacios con producto imterno definición 2.33, definimos en un espacio de Hilbert $H$ el complemento ortogonal

$$Y^{\perp} = \{z \in H / \ z \perp Y\}$$

**Teorema 2.18** ([3])**.** Sea $Y$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $H$. Entonces

$$H = Y \oplus Z$$

donde $Z = Y^{\perp}$.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# CAPÍTULO III

## MATERIALES Y MÉTODOS

### 3.1. Materiales

Nuestros recursos base son los libros de texto de álgebra lineal, análisis funcional, topología, teoría de la medida, artículos científicos, revistas indexadas; que se utilizaron en el estudio y discusión teórica del tema investigado.

### 3.2. Metodología de la investigación

Primeramente, presentaremos un estudio sobre espacios vectoriales y espacios métricos; enfocándonos al estudio de los espacios métricos completos, como en los espacios de Banach y espacios de Hilbert y además se estudia la teoría de los funcionales lineales, estos conceptos son punto clave para esta investigación, así mismo, para comprender el teorema de representación de Riesz y su demostración, presentamos algunas definiciones y resultados que involucran operadores lineales limitados, producto interno, espacios de Hilbert y su espacio dual. Y finalmente, presentamos la demostración del teorema de representación de Riesz y mostramos sus aplicaciones. Durante la investigación se utilizó el método deductivo propio de las ciencias matemáticas [18], asimismo referente a la población y muestra, el universo equivale al tema de estudio. Nuestra unidad de análisis son las funcionales lineales limitado en el espacio de funciones continuas.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# CAPÍTULO IV

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo demostramos el resultado principal, afirmando que todo funcional lineal acotado en un espacio de Hilbert puede ser representado de una única forma como producto interno. Para la demostración se usará la descomposición en suma directa del espacio de Hilbert, esta descomposición será de un espacio vectorial y su complemento ortogonal; para la norma de este funcional se utilizará la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el campo en que se estudia es el espacio de los números complejos $\mathbb{C}$.

### 4.1. Representación de funcionales acotados

**Teorema 4.1** (Teorema de la representación de Riesz)**.** Todo funcional lineal acotado $f$ en un espacio de Hilbert $H$ puede ser representado en términos de producto interno

$$f(x) = \langle x, z \rangle \tag{4.1}$$

donde $z$ depende de $f$, es determinado únicamente por $f$ y tiene norma

$$\|z\| = \|f\| \tag{4.2}$$

*Demostración.* La demostración se hará en tres partes: La representación del funcional $f$ como producto interno, la unicidad de esta representación y la norma de este funcional ($\|f\| = \|z\|$).

1. $f$ tiene representación en términos de producto interno, es decir, tiene representación (4.1).

   *En efecto.*

   Si $f = 0$, entonces tomando $z = 0$, es decir,

$$0 = \langle x, 0 \rangle = \langle x, z \rangle$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

por lo tanto, tenemos la representación de $f$ como producto interno

$$f(x) = \langle x, z\rangle$$

Sea $f \neq 0$, entonces existe una representación

$$f(x) = \langle x, z\rangle$$

tal que $z \neq 0$, caso contrario $f = 0$ y $\langle x, z\rangle = 0$ para todo $x$ para el cual $f(x) = 0$, es decir, $x \in \mathcal{N}(f)$. Puesto que para todo $x \in \mathcal{N}(f)$, $\langle x, z\rangle = 0$, es decir, $x \perp z$, se deduce que $z$ es ortogonal a $\mathcal{N}(f)$, $z \perp \mathcal{N}(f)$. Con esto usamos el complemento ortogonal de $\mathcal{N}(f)$ el cual está definido por

$$\mathcal{N}(f)^{\perp} = \{z \in H |\, z \perp \mathcal{N}(f)\}$$

por el teorema 2.12 el espacio nulo $\mathcal{N}(f)$ es un espacio vectorial y por el teorema 2.14 $\mathcal{N}(f)$ es cerrado.

Para $f \neq 0$, es decir, existe $x \in H$ tal que $f(x) \neq 0$ y $x \in \mathcal{N}(f)$, entonces $\mathcal{N}(f) \neq H$, como $\mathcal{N}(f)$ es cerrado, por el teorema 2.18, $H$ tiene descomposición en suma directa

$$H = \mathcal{N}(f) \oplus \mathcal{N}(f)^{\perp}$$

de donde $\mathcal{N}(f) \neq \{0\}$ por lo tanto existe en $\mathcal{N}(f)^{\perp}$ un $z_0 \neq 0$. Para un elemento arbitrario $x \in H$, definimos

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x$$

Aplicando $f$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(v) &= f[f(x)z_0 - f(z_0)x] \\ &= f[f(x)z_0] - f[f(z_0)x] \\ &= f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

se ha utilizado el hecho de que $f$ es funcional lineal en donde $f(x)$ es escalar. Así $v \in \mathcal{N}(f)$.

Puesto que $z_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$, el producto interno de $z_0$ con $v \in \mathcal{N}(f)$ es cero

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, z_0 \rangle \\ &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= \langle f(x)z_0, z_0 \rangle - \langle f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle \end{aligned}$$

obtenemos

$$f(x)\langle z_0, z_0 \rangle = f(z_0)\langle x, z_0 \rangle$$

puesto que $\langle z_0, z_0 \rangle = \|z_0\|^2 \neq 0$, tenemos

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0 \rangle}\langle x, z_0 \rangle$$

introduciendo $\frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0 \rangle}$ en el producto interno

$$f(x) = \left\langle x, \overline{\frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0 \rangle}} z_0 \right\rangle$$

tomando

$$z = \overline{\frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0 \rangle}} z_0$$

obtenemos la representación de $f$, para todo $x \in H$.

$$f(x) = \langle x, z \rangle$$

con esto queda demostrada la representación de $f$ en términos de producto interno.

2. Unicidad.

Supongamos que para todo $x \in H$ se tienen dos representaciones de $f$ como pro-



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

ducto interno

$$
\begin{aligned}
f(x) = \langle x, z_1 \rangle &= \langle x, z_2 \rangle \\
\langle x, z_1 \rangle - \langle x, z_2 \rangle &= 0 \\
\langle x, z_1 - z_2 \rangle &= 0 \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

Eligiendo un caso particular para $x = z_1 - z_2$ tenemos

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle x, z_1 - z_2 \rangle \\
&= \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle \\
&= \|z_1 - z_2\|^2
\end{aligned}
$$

tomando extremos

$$0 = \|z_1 - z_2\|^2 = 0$$

es decir, $z_1 - z_2 = 0$, por lo tanto $z_1 = z_2$.

Esto prueba la unicidad de la representación de $f$ como producto interno.

3. Mostraremos que $\|z\| = \|f\|$.

   Si $f = 0$ entonces $z = 0$, puesto que para todo $x \in H$

   $$0 = f(x) = \langle x, 0 \rangle$$

   por lo tanto

   $$0 = \|z\| = \|f\|$$

   y queda demostrado, resta probar para $f \neq 0$.

   *En efecto.*

   Si $f \neq 0$, entonces $z \neq 0$ y de la representación del funcional

   $$f(x) = \langle x, z \rangle$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

para $x = z$, tenemos

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &= \langle z, z\rangle \\ &= f(z) \\ &\leq |f(z)| \\ &\leq \|f\|\|z\|\end{aligned}$$

dividiendo por $\|z\| \neq 0$

$$\|z\| \leq \|f\| \tag{4.4}$$

Para demostrar la igualdad, debemos probar que $\|f\| \leq \|z\|$.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |\langle x, z\rangle| \\ &\leq \|x\|\|z\|\end{aligned}$$

Usando la definición de norma

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \\ &= \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z\rangle| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|x\|\|z\| \\ &= \|z\|\end{aligned}$$

tomando extremos $\|f\| \leq \|z\|$.

De esta última desigualdad junto con la desigualdad (4.4), concluimos que

$$\|z\| = \|f\|$$

$\square$

## 4.2. Aplicaciones del teorema de la representación de Riesz



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

### 4.2.1. Aplicación 1

Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de $V$. Consideremos el producto interno

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Por el teorema 2.10 todo espacio vectorial de dimensión finita es completo, tenemos que $V$ es un espacio de Hilbert, y como en un espacio vectorial normado todos los funcionales lineales son acotados, entonces para cualquier funcional lineal $f$ sobre $V$, existe $z \in V$ tal que está determinado únicamente a partir de $f$, es decir,

$$f(x) = \langle x, z\rangle$$

Puesto que $f$ es lineal, se tiene

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

donde $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, de este modo, tomando

$$z = f(e_1)e_1 + \cdots + f(e_n)e_n$$

y por la definición de producto interno

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \langle x, z\rangle$$

Luego, por la desigualdad de Schwarz

$$|f(x)| = |\langle x, z\rangle| \leq \|x\|\|z\|$$

Ahora, por la norma del funcional

$$\|f\| = \sup_{x\in V-\{0\}} \frac{f(x)}{\|x\|} \leq \|z\|$$

Para demostrar la igualdad, demostraremos la otra desigualdad, es decir, $\|z\| \leq \|f\|$.

*En efecto*,

$$\|z\| = \frac{\langle z, z\rangle}{\|z\|} \leq \sup_{x\in V-\{0\}} \frac{|\langle x, z\rangle|}{\|x\|} = \|f\|$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Por lo tanto, $\|z\| = \|f\|$.

#### 4.2.2. Aplicación 2

El teorema de la representación de Riesz, garantiza la existencia y unicidad del operador adjunto $T^*$.

**Definición 4.1** (Operador de Hilber adjunto $T^*$)**.** Sea $T : H_1 \to H_2$ un operador lineal acotado, donde $H_1$ y $H_2$ son espacios de Hilbert. Entonces el operador Hilbert adjunto $T^*$ es el operador

$$T^* : H_2 \to H_1$$

tal que para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$, se tiene

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

**Teorema 4.2** (Existencia)**.** El operador Hilbert adjunto $T^*$ de $T$ existe, es único y es un operador lineal acotado con norma

$$\|T^*\| = \|T\|$$

*Demostración.* Sea $h(y, x) = \langle y, Tx\rangle$ que define

$$h : H_2 \times H_1 \to K$$

una forma sesquilineal.

*En efecto:*

Sean $x_1, x_2 \in H_1$, $y \in H_2$ y $\alpha, \beta$ escalares

$$\begin{aligned} h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) &= \langle y, T(\alpha x_1 + \beta x_2)\rangle \\ &= \langle y, \alpha T x_1 + \beta T x_2\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle y, T_1\rangle + \bar{\beta}\langle y, T x_2\rangle \\ &= \bar{\alpha} h(y, x_1) + \bar{\beta} h(y, x_2) \end{aligned}$$



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

$h$ es acotado,

*En efecto:*

$$|h(y,x)| = |\langle y, Tx\rangle| \leq \|y\|\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|\|y\|$$

por lo tanto $h$ es acotado y

$$\|h\| \leq \|T\|$$

Ahora probaremos que $\|h\| \geq \|T\|$.

*En efecto:*

$$\|h\| = \sup \frac{\langle y, Tx\rangle}{\|y\|\|x\|} \geq \sup \frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{\|Tx\|\|x\|} = \|T\|$$

Por lo tanto, $\|T\| = \|h\|$.

Por el teorema de la representación de Riesz, $h : H_2 \times H_1 \to K$ tiene representación

$$h(y,x) = \langle T^* y, x\rangle$$

donde $T^* : H_2 \to H_1$ es un operador lineal acotado. Además, $T^*$ es único determinado por $h$ y su norma es

$$\|T^*\| = \|h\| = \|T\|$$

Por lo tanto, $\|T^*\| = \|T\|$. $\square$

Un caso particular es cuando $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sea $A$ la matriz representante del operador $T$,

$$\langle Tx, y\rangle = (Ax)^T y = x^t A^t y$$

Ahora, si $B$ es la matriz representante del operador adjunto $T^*$, entonces

$$x^T B y = \langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle = x^T A^T y$$

Por lo tanto, $B = A^T$.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# V. CONCLUSIONES

- Se pudo comprobar que el teorema de la representación de Riesz caracteriza al funcional lineal como representación en otro espacio de funciones.

- El teorema de representación de Riesz ha sido demostrado mediante el método deductivo; iniciando con la representación del funcional en términos de producto interno, utilizando la desigualdad Cauchy-Schwarz conseguimos la norma del funcional.

- Las aplicaciones del teorema de representación de Riesz, que mostramos son la representación del espacio con producto interno en $\mathbb{R}$ y la existencia y unicidad del operador adjunto.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# VI. RECOMENDACIONES

- En futuras investigaciones se recomienda ampliar este teorema a espacios más generalizados.
- También se puede estudiar otras aplicaciones en donde el teorema de representación de Riesz juega un papel fundamental en el teorema de Krein-Smulian.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

# VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Elon Lages Lima. *Álgebra linear*. 2006.

[2] Marvin Marcus, Henryk Minc, et al. *Elementos de álgebra lineal*. Limusa, 1978.

[3] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978.

[4] P. Nowosad. *Introdução à Análise Funcional*. Poços de Caldas, 1967.

[5] H. Brézis. *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, 1983.

[6] Pellegrino D. Texeira E. Botelho, G. *Fundamentos de Análise Funcional*. Uberlandia, 2011.

[7] V.S. Sunder. *Operators on Hilbert Space*. Springer, 2015.

[8] Hugh G Campbell. *Linear algebra with applications*. Prentice Hall, 1980.

[9] Roland E Larson, Villagómez Velázquez, et al. *Introducción al algebra lineal*. 2004.

[10] JP da Carvalho. Álgebra linear–introdução. *Rio de Janeiro: LTC*, 1979.

[11] Abramo Hefez and Cecília de Souza Fernandez. Introdução à álgebra linear. *Rio de Janeiro: SBM*, 2012.

[12] Hamilton Prado Bueno. *Álgebra linear*, volume 1. SBM, 2006.

[13] Elon Lages Lima. Espaços métricos, projeto euclides. *São Paulo, SP, Brasil*, 954, 1977.

[14] Pedro Herrero. *Topología*. Universidad de Murcia-Departamento de Matemáticas, 2002.

[15] Elon Lages Lima. *Elementos de topologia geral*. Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

[16] C. De Oliveira. *Introdução à Análise Funcional*. IMPA, 2012.

[17] I. Gohberg and S. Goldberg. *Basic Operator Theory*. Birkhäuser Boston, 1981.

[18] Francisco Miró Quesada and Augusto Salazar Bondy. *Lógica*. I. Prado Pastor, 1980.

[19] Yuh-Jia Lee. A generalization of the riesz representation theorem to infinite dimensions. *journal of functional analysis*, 151(1):121–137, 1997.

[20] Rafael del Rio, Asaf Franco, and Jose Lara. A direct proof of f. riesz representation theorem. *arXiv preprint arXiv:1606.05026*, 2016.

[21] Janos Horvath. On the riesz-fischer theorem. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 41(4):467–478, 2004.



repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis