# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

## FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

### ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**“EL TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES LINEALES NORMALES EN UN ESPACIO VECTORIAL COMPLEJO DE DIMENSIÓN FINITA”**

**TESIS**

**PRESENTADA POR:**

**RICARDO SUCSO BALBOA**

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:**

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**PUNO – PERÚ**

**2022**

# DEDICATORIA

Dedico el presente trabajo a mis padres: Lorenzo y Doris, por los valores que me han inculcado, por haberme apoyado con empeño y esfuerzo durante mi infancia, etapa escolar y parte de mi vida universitaria.

A mi esposa Martina y mi hijo Samyel por ser la fuerza motivadora de mis metas en la vida.

**Ricardo Sucso**

# AGRADECIMIENTOS

A mi esposa, por haberme apoyado y motivado durante mis últimos años de estudio en la universidad. También por su labor abnegada, lo cual ha hecho posible la realización y culminación de este trabajo de investigación.

A mi hijo, por su comprensión y cederme con paciencia el tiempo que debo dedicarle.

A mi asesora de tesis, Mg. Fabiola Loayza Torreblanca, por su orientación y tiempo dedicado para la culminación de este trabajo. También por su paciencia al escuchar mis inquietudes y dudas.

**Ricardo Sucso**

# ÍNDICE GENERAL

## CAPITULO III

## MATERIALES Y MÉTODOS



## CAPITULO IV

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN



**TEMA: Operadores lineales sobre espacios con producto interno**
**ÁREA: Álgebra Lineal**
**LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática pura**

**FECHA DE SUSTENTACIÓN: 7 de abril de 2022**

# RESUMEN

La teoría espectral es muy importante en Matemáticas y Física. El conocimiento del espectro y de los espacios asociados a los valores espectrales de un operador da mucha información sobre él. El objetivo de este trabajo de investigación fue analizar, comprender y demostrar el teorema espectral para operadores lineales en un espacio vectorial con producto interno complejo dimensionalmente finito, el cual expresa las condiciones bajo las cuales un operador o una matriz pueden ser diagonalizados, es decir, representados como una matriz diagonal en alguna base, donde además se desarrolló una elegante representación de un operador normal. Para este propósito se estudió previamente algunos temas de Algebra Lineal como por ejemplo, espacios vectoriales, transformaciones lineales, espacios con producto interior; autovalores, autovectores y diagonalización de matrices. También se analizan los operadores lineales en espacios con producto interno, centrando la atención en los operadores autoadjuntos en un espacio vectorial real, para luego estudiar el tipo más general de operadores, los normales, en un espacio vectorial complejo. El tipo de investigación que se realizó fue el científico básico, mediante un estudio bibliográfico, además usando el método hipotético deductivo. Se concluye mostrando que un espacio vectorial bajo ciertas condiciones tiene una base ortonormal formada por vectores propios de un operador lineal sobre un espacio con producto interno de dimensión finita.

**Palabras claves:** Diagonalización, Espacio vectorial, Operador normal, Producto interno, Teorema espectral.

# ABSTRACT

Spectral theory is very important in Mathematics and Physics. Knowing the spectrum and the spaces associated with the spectral values of an operator gives a lot of information about it. The objective of this research work was to analyze, understand and demonstrate the spectral theorem for linear operators in a vector space with a complex internal product of dimensionally finite, which expresses the conditions under which an operator or a matrix can be diagonalized, that is, represented as a diagonal matrix in some base, where in addition an elegant representation of a normal operator was developed. For this purpose, some topics of Linear Algebra will be previously studied, such as, for example, vector spaces, linear transformations, spaces with inner product; eigenvalues, eigenvectors and diagonalization of matrices. Linear operators in spaces with inner product will also be analyzed, focusing on self-adjoint operators in a real vector space, and then studying the most general type of operators, normals, in a complex vector space. The type of research that was carried out was the basic scientific one, through a bibliographic study, also using the hypothetical deductive method. It is concluded that a vector space under certain conditions has an orthonormal basis formed by eigenvectors of a linear operator on a space with an internal product of finite dimension.

**Keywords:** Eigenvalues, Vector space, Normal operator, Internal product, Spectral theorem.

# CAPITULO I

## INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la teoría espectral es uno de los capítulos más informativos en la historia de las matemáticas modernas, proporciona una herramienta muy potente para entender los operadores lineales, descomponiendo el espacio sobre el que actúa en subespacios invariantes sobre los cuales su acción es simple. El hecho central del teorema espectral es que ciertos operadores lineales en dimensión finita pueden diagonalizarse. Este hecho es muy útil porque los cálculos que involucran una matriz diagonalizable a menudo se pueden reducir a cálculos mucho más simples que involucran la matriz diagonal correspondiente. Además, este resultado muestra la importancia de los valores propios y vectores propios para caracterizar un operador lineal de forma única.

La presente investigación está estructurada de la siguiente manera:

- En el capítulo I, se realiza la introducción, el planteamiento y formulación o enunciado del problema. Incluye los antecedentes de la investigación, justificación, objetivos e hipótesis del trabajo de investigación.
- En el capítulo II, está el marco teórico necesario para la parte principal de este trabajo de investigación.
- En el capítulo III, se desarrolla los materiales y métodos que contiene el tipo y diseño, método y técnica de investigación que se aplicó a este trabajo.
- En el capítulo IV, se reporta los resultados de la investigación y la discusión de los resultados.
- En el capítulo V, están las conclusiones.

- En el capítulo VI, están las recomendaciones.
- En el capítulo VII, finalmente están las referencias bibliográficas.

## 1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La representación de un operador en un espacio con producto interno de dimensión finita depende de los vectores propios y valores propios del operador.

Uno de los problemas importantes sobre operadores en un espacio vectorial de dimensión finita es el encontrar una base respecto a la cual la matriz de un operador sea la más simple posible. Es por eso que este trabajo se va a enfocar en estudiar uno de los resultados más relevantes del Álgebra Lineal, a saber, el teorema espectral, además de todas las definiciones y teoremas previos que nos llevará a entender dicho teorema. Por otro lado, este trabajo de investigación será útil para mejorar la comprensión del teorema espectral de operadores autoadjuntos y normales dentro del álgebra lineal, para luego con esta base poder profundizarla y aplicarla en otros campos de estudio de la ciencia.

## 1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Por lo tanto, se formula la siguiente interrogante de investigación:

¿En qué condiciones un espacio vectorial tiene una base ortonormal formada por vectores propios de un operador lineal sobre un espacio con producto interno de dimensión finita?

## 1.3. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

● José Chavez Ramirez (2002) en su tesis “el teorema espectral” desarrollado en México DF, en la Universidad Nacional Autónoma, se introducen conceptos de Álgebra Lineal como función, dependencia e independencia lineal, base, etc, necesarios para entender el teorema espectral, luego se enuncia dicho teorema en dimensión finita con su demostración.

● M.A. García Sánchez y T. Ramírez Alzola, 2009. Introducción al Algebra Lineal. Es un curso que fue publicado en el Proyecto OCW de la UPV (Universidad del País Vasco)/EHU. Aquí se estudia en el tema 6 el teorema espectral para endomorfismos autoadjuntos en espacios euclideos, luego el mismo teorema se enuncia en términos de matrices.

● Emilio LLuis – Puebla, 2008.Algebra Lineal, Multilineal y k – Teoría Algebraica Clásica. Es una publicación electrónica de la Sociedad Matemática Mexicana, que enuncia y prueba en su capítulo III de “Formas y Operadores”, el teorema espectral de un operador normal.

## 1.4. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación sobre el teorema espectral permitirá una mejor comprensión de este teorema y extenderlo a dimensión infinita, para luego con esta base poder profundizarla y estudiarla en otros espacios, dentro del Análisis Funcional. Además, este trabajo servirá como base para hacer estudios de postgrado, ya que su importancia es vital en otras áreas de la matemática superior. También será útil para las aplicaciones en mecánica cuántica.

## 1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

### a. Objetivo general

Examinar y demostrar el teorema espectral de operadores normales en un espacio vectorial complejo de dimensión finita.

### b. Objetivos específicos

- Comprender los operadores lineales y sus adjuntas en espacios con producto interno complejo.
- Analizar la existencia de una base ordenada $\mathfrak{B}$ para un espacio vectorial $\mathbb{V}$ tal que la matriz que represente a la transformación lineal $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ sea diagonal.

## 1.6. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Para un operador normal en un espacio vectorial de dimensión finita provisto de un producto interno complejo, existe una base ortonormal formada por vectores propios de dicho operador.

# CAPITULO II

## REVISIÓN DE LITERATURA

### 2.1 ESPACIOS VECTORIALES

**Definición 2.1.1.** Un *espacio vectorial* $\mathbb{V}$ sobre un campo $\mathbb{K}$ es un conjunto no vacío de objetos denominados "vectores" en el cual están definidas dos operaciones llamadas "adición" (representada como $u+v$) y "multiplicación por un escalar" (representada como $\alpha v$), de manera que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $u, v, w \in \mathbb{V}$ se cumplen los siguientes axiomas:

**A1. Ley de cerradura para la adición:**

$$u+v \in \mathbb{V}$$

Obs: $u+v$ es llamado suma de $u$ y $v$.

**A2. Ley conmutativa de la adición:**

$$u+v=v+u$$

**A3. Ley asociativa de la adición:**

$$(u+v)+w=u+(v+w)$$

**A4. Existencia del neutro aditivo:**

Existe un único vector $0 \in \mathbb{V}$ llamado "vector cero o nulo" tal que

$$u+0=0+u=u, \forall u \in \mathbb{V}$$

**A5. Existencia del inverso aditivo:**

Para cada vector $u \in \mathbb{V}$, existe un único vector $-u \in \mathbb{V}$ llamado "inverso aditivo de $u$" tal que

$$u+(-u)=(-u)+u=0$$

**M1. Ley de cerradura para la multiplicación por un escalar:**

$$\alpha u \in \mathbb{V}$$

Obs: $\alpha u$ es llamado producto de $\alpha$ por $u$.

**M2. Ley asociativa de la multiplicación por escalares:**

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$$

**M3. Multiplicación por uno:**

$$1u = u$$

**M4. Ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de vectores:**

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

**M5. Ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de escalares:**

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$

**Ejemplo 2.1.2 El espacio vectorial, $\mathbb{K}^{n}$**

Para todo número natural $n$, $\mathbb{K}^n$ representa el conjunto de las n-adas ordenadas $u = (x_1, x_2, \dots \dots, x_n)$ de escalares $x_i$ de $\mathbb{K}$. Si $v = (y_1, y_2, \dots \dots, y_n)$ con $y_i$ de $\mathbb{K}$, la suma de $u$ y $v$ se define por

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots \dots, x_n + y_n)$$

El producto de un escalar $\alpha$ y el vector $u$ se define por

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots \dots, \alpha x_n)$$

Resulta $\mathbb{K}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ bajo las operaciones de adición y multiplicación por un escalar.

**Ejemplo 2.1.3 El espacio de matrices $\boldsymbol{m \times n}$, $\mathbb{K}^{\boldsymbol{m \times n}}$**

Sea $\mathbb{K}$ cualquier campo y sean $m, n$ enteros positivos. $\mathbb{K}^{m\times n}$ denota el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con elementos de un campo arbitrario $\mathbb{K}$. La suma de dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [a_{ij}]$ en $\mathbb{K}^{m\times n}$ se define como $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ y el producto de un escalar $\alpha$ y de la matriz A se define como $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$. $\mathbb{K}^{m\times n}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con respecto a las operaciones anteriores de suma matricial y producto por un escalar. Obsérvese que $\mathbb{K}^{1\times n} = \mathbb{K}^n$.

**Ejemplo 2.1.4 El espacio de funciones $F(X;\mathbb{K})$**

Sean $X$ un conjunto no vacío y $\mathbb{K}$ un campo arbitrario. Consideremos el conjunto $F(X;\mathbb{K})$ de todas las funciones de $X$ en $\mathbb{K}$. La suma de dos funciones $f, g \in F(X;\mathbb{K})$ es la función $f + g \in F(X;\mathbb{K})$ definida por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad \forall x \in X$$

Y el producto de un escalar $k \in \mathbb{K}$ por una función $f \in F(X;\mathbb{K})$ es la función $kf \in F(X;\mathbb{K})$ definida por

$$(kf)(x) = kf(x), \qquad \forall x \in X$$

$F(X;\mathbb{K})$ con las operaciones anteriores es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

**Ejemplo 2.1.5 El espacio de polinomios $P_n$**

Sea $P_n$ el conjunto de polinomios con coeficientes en algún campo $\mathbb{K}$ de grado menor o igual a n. Si $p(x) \in P_n$, entonces

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde $a_i$ son escalares fijos de $\mathbb{K}$. $P_n$ es un es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con respecto a las operaciones usuales de suma de polinomios y producto de una constante (escalar) por un polinomio.

**Ejemplo 2.1.6 El espacio de sucesiones $\mathbb{K}^\infty$**

Sea $\mathbb{K}^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} / a_n \in \mathbb{K}\} = \{a_1, a_2, \dots \dots, a_n, \dots\}$ el conjunto de las sucesiones de números en $\mathbb{K}$. Con las operaciones de suma de sucesiones y el producto de un escalar por una sucesión definidas de la siguiente manera

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ \ \lambda \in \mathbb{K}$$

es un espacio vectorial.

En un espacio vectorial, como consecuencia de los axiomas, se desprenden las siguientes propiedades elementales:

**Teorema 2.1.7**

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$.

a) Si $u, v, w \in \mathbb{V}$ tal que $u + w = v + w$, entonces $u = v$

b) Para todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ y $0 \in \mathbb{V}$, $\alpha 0 = 0$

c) Para $0 \in \mathbb{K}$ y todo vector $u \in \mathbb{V}$, $0u = 0$

d) Si $\alpha u = 0$, donde $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in \mathbb{V}$, entonces $\alpha = 0$ o $u = 0$

e) Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo $u \in \mathbb{V}$, $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$

*Demostración*:

Para demostrar estas propiedades, la restricción es aplicar solamente los 10 axiomas que definen un espacio vectorial.

a) $u = u + 0$ (A4)

$= u + \big(w + (-w)\big)$ (A5)

$= (u + w) + (-w)$ (A3)

$= (v + w) + (-w)$ (Hipótesis)

$= v + \big(w + (-w)\big)$ (A3)

$= v + 0$ (A5)

$= v$ (A4)

b) $\alpha 0 + \alpha 0 = \alpha(0 + 0)$ (M4)

$= \alpha 0$ (A4)

$= 0 + \alpha 0$ (A4)

Por tanto, $\alpha 0 = 0$ por la parte a) de este teorema.

c) $0u + 0u = (0 + 0)u$ (M5)

$= 0u$ (Elemento neutro para la adición en $\mathbb{K}$)

$= 0 + 0u$ (A4)

Por tanto, $0u = u$ por la parte "a" de este teorema.

d) Esta propiedad es equivalente a demostrar que:

Si $\alpha \neq 0$ y $u \neq 0$ entonces $\alpha u \neq 0$

En efecto, si fuese $\alpha u = 0$ entonces

$u = 1.u$ (M3)

$= (\alpha^{-1}.\alpha)u$ (Elemento inverso para la multiplicación en $\mathbb{K}$)

$= \alpha^{-1}(\alpha u)$ (M2)

$= \alpha^{-1}.0$ (Hipótesis)

$= 0$ (Por la parte "b" de este teorema)

Lo cual contradice parte de la hipótesis ($u \neq 0$). Por tanto, se concluye que $\alpha u \neq 0$

e) $-(\alpha u) + \alpha u = 0$ (A5)

$= 0u$ (Por la parte "c" de este teorema)

$= (-\alpha + \alpha)u$ (Elemento inverso para la adición en $\mathbb{K}$)

$= (-\alpha)u + \alpha u$ (M5)

De

$$-(\alpha u) + \alpha u = (-\alpha)u + \alpha u$$

Por la propiedad "a" de este teorema

$$-(\alpha u) = (-\alpha)u$$

## 2.2 SUBESPACIOS VECTORIALES

**Definición 2.2.1.** Se dice que $\mathbb{W}$ es un *subespacio vectorial* de $\mathbb{V}$ (sobre un campo $\mathbb{K}$) si $\mathbb{W}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{V}$ y es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, bajo las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas en $\mathbb{V}$.

**Teorema 2.2.2.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\mathbb{W}$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{V}$. Entonces, $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

a) Si $u \in \mathbb{W}$ y $v \in \mathbb{W}$, entonces $u + v \in \mathbb{W}$

b) Si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in \mathbb{W}$, entonces $\alpha u \in \mathbb{W}$

*Demostración:*

($\Rightarrow$) Si $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$, entonces se satisfacen todos los axiomas de los espacios vectoriales; en particular, se cumplen los axiomas A1 y M1. Pero éstas son precisamente las condiciones a) y b).

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supóngase que se cumplen las condiciones a) y b). Como estas condiciones son los axiomas A1 y M1 de los espacios vectoriales, sólo se necesita demostrar que $\mathbb{W}$ satisface los 8 axiomas restantes. Los axiomas A2, A3, M2, M3, M4 y M5 son satisfechos automáticamente por los vectores en $\mathbb{W}$, dado que son satisfechos por todos los vectores en $\mathbb{V}$. Por tanto, para completar la demostración, basta con verificar que los axiomas A4 y A5 son satisfechos por $\mathbb{W}$. Sea $u$ cualquier vector en $\mathbb{W}$. Por la condición b), $\alpha u$ está en $\mathbb{W}$ para todo escalar $\alpha$. Al hacer $\alpha = 0$, se deduce que $0u = 0$ está en $\mathbb{W}$, y al hacer $\alpha = -1$, se concluye que $(-1)u = -u$ está en $\mathbb{W}$.

**Observación 2.2.3**

De la prueba anterior se concluye que todo subespacio de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ contiene al 0.

**Ejemplo 2.2.4**

Todo espacio vectorial $\mathbb{V}$ tiene al menos dos subespacios. El subconjunto $\{0\}$ que sólo consta del vector cero y el propio $\mathbb{V}$, las cuales son ejemplos triviales de subespacios de $\mathbb{V}$.

**Ejemplo 2.2.5**

Sea $u \in \mathbb{V}$ un vector no nulo. El subconjunto $\mathbb{W} = \{\alpha u / \alpha \in \mathbb{R}\}$ de todos los múltiplos de $u$ representado geométricamente por la recta que pasa por el origen y que contiene a $u$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$.

**Ejemplo 2.2.6**

Considérese el subconjunto U de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$U = \{(x, y, z)/ax + by + cz = 0\}$$

en donde $a, b$ y $c$ son tres números reales fijos no todos iguales a cero. Se verifica que U es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Obsérvese que geométricamente U representa un plano en el espacio tridimensional que pasa por el origen.

**Ejemplo 2.2.7**

El subconjunto $U = \{(x, y, z)/x = at, y = bt, z = ct, t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ representado geométricamente por una recta que pasa por el origen también es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

**Ejemplo 2.2.8**

Sea $P_n$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a $n$. Si $0 \leq m \leq n$, entonces $P_m$ es un subespacio de $P_n$.

**Ejemplo 2.2.9**

Sea $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ el espacio de las matrices de orden $n \times n$ con componentes reales. El subconjunto H de las matrices simétricas es un subespacio de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$.

**Ejemplo 2.2.10**

Sea $F(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones reales de una variable real $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, el subconjunto $C^k(\mathbb{R})$ de las funciones $k$ veces continuamente derivables es un subespacio vectorial de $F(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

**Ejemplo 2.2.11**

Considérese un sistema homogéneo de $m$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots\dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots\dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

o bien, en notación matricial, $Ax = 0$. Se dice que un vector

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

en $\mathbb{R}^n$ es un *vector solución* del sistema si $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots \dots, x_n = s_n$ es una solución de tal sistema. Luego, el subconjunto de $\mathbb{R}^n$

$$S = \{(s_1, s_2, \dots \dots, s_n)/(s_1, s_2, \dots \dots, s_n)\ es\ solución\ de\ AX = 0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y es llamado el *espacio de soluciones* del sistema $Ax = 0$.

**Teorema 2.2.12.** La intersección de cualquier número de subespacios de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

*Demostración:*

Sea $\{S_i\}$ con $i \in I$ una familia de subespacios de $\mathbb{V}$. Denotaremos con $S$ la intersección de dicha familia, es decir, $S = \bigcap_{i \in I} S_i$. Como cada uno de los subespacios contiene al vector cero (Observación 2.2.3), $0 \in S$ (Por definición de intersección), así $S$ es no vacío. Además, por ser cada $S_i$ un subespacio de $\mathbb{V}$ y porque la intersección de toda familia de subconjuntos de $\mathbb{V}$ es una parte de éste, se tiene que $S \subset \mathbb{V}$.

a) $u \in S \wedge v \in S \Longrightarrow u \in \bigcap_{i \in I} S_i$ y $v \in \bigcap_{i \in I} S_i$

$$\Longrightarrow u \in S_i \wedge v \in S_i, \forall i \in I$$

$$\Longrightarrow u + v \in S_i, \forall i \in I$$

$$\Longrightarrow u + v \in \bigcap_{i \in I} S_i$$

$$\Longrightarrow u + v \in S$$

con lo cual $S$ es cerrado para la suma

b) Consideremos $\alpha \in \mathbb{K} \wedge u \in S \Longrightarrow \alpha \in \mathbb{K} \wedge u \in \bigcap_{i \in I} S_i$

$$\Longrightarrow \alpha \in \mathbb{K} \wedge u \in S_i, \forall i \in I$$

$$\Longrightarrow \alpha u \in S_i, \forall i \in I$$

$$\Longrightarrow \alpha u \in \bigcap_{i \in I} S_i$$

$$\Longrightarrow \alpha u \in S$$

con lo cual $S$ es cerrado para la multiplicación por un escalar.

Luego, $S$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ de acuerdo con el teorema 2.2.2.

**Observación 2.2.13**

La unión de dos subespacios de $\mathbb{V}$ no es en general un subespacio de $\mathbb{V}$. Al tomar $u \in S_1$ y $v \in S_2$, distintos del vector nulo, se tiene que tanto $u$ como $v$ están en $S_1 \cup S_2$ y, sin embargo, $u + v \notin S_1 \cup S_2$.

**Definición 2.2.14.** Sean $S_1$ y $S_2$ dos subespacios de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. La *suma de los subespacios* $S_1$ y $S_2$, expresado como $S_1 + S_2$, es el conjunto de vectores $x \in \mathbb{V}$ que se pueden escribir como la suma de un vector de $S_1$ y un vector de $S_2$, es decir,

$$S_1 + S_2 = \{x \in \mathbb{V}/x = u + v \ \wedge \ u \in S_1 \ \wedge \ v \in S_2\}$$

**Definición 2.2.15.** La suma de cualquier número finito de subespacios $S_1, S_2, \dots \dots S_n$ de $\mathbb{V}$, se define análogamente como el conjunto

$$S_1 + S_2 + \ \dots \dots + S_n = \{x \in \mathbb{V}/x = v_1 + v_2 + \ \dots \dots + v_n, v_i \in S_i \ para \ i = 1, 2, \dots \dots, n\}$$

**Teorema 2.2.16.** Si $S_1$ y $S_2$ son subespacios de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, entonces $S_1 + S_2$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

*Demostración:*

Sean $S_1$ y $S_2$ subespacios de $\mathbb{V}$. Como $0 \in S_1$ y $0 \in S_2$, $0 + 0 = 0 \in S_1 + S_2$. Entonces $S_1 + S_2$ es no vacío. Además, por la definición 2.2.13, $S_1 + S_2 \subset \mathbb{V}$.

a) $S_1 + S_2$ es cerrado para la adición, ya que si $x, y \in S_1 + S_2$ entonces existen $x_1, y_1 \in S_1$ y $x_2, y_2 \in S_2$ tales que $x = x_1 + x_2$ y $y = y_1 + y_2$. Al hacer la suma de $x$ con $y$ se obtiene el vector

$$x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$$

pero $x_1 + y_1 \in S_1$ y $x_2 + y_2 \in S_2$, pues tanto $S_1$ como $S_2$ son subespacios de $\mathbb{V}$. Esto muestra que $x + y \in S_1 + S_2$

b) $S_1 + S_2$ es cerrado para la multiplicación por un escalar, porque si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in S_1 + S_2$ entonces existen $x_1 \in S_1$ y $x_2 \in S_2$ tales que $x = x_1 + x_2$. Al multiplicar el escalar $\alpha$ por el vector $x$ se obtiene el vector

$$\alpha x = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$$

en donde $\alpha x_1 \in S_1$ y $\alpha x_2 \in S_2$ de modo que $\alpha x \in S_1 + S_2$

Finalmente, por el teorema 2.2.2 se concluye que $S_1 + S_2$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

**Corolario 2.2.17.** La suma de cualquier número finito de subespacios de $\mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

**Definición 2.2.18.** Sean $S_1$ y $S_2$ dos subespacios del espacio vectorial $\mathbb{V}$. La suma $S_1 + S_2$ es llamada *suma directa* de $S_1$ y $S_2$, denotada por $S_1 \oplus S_2$, si cada vector en el subespacio $S_1 + S_2$ tiene una única representación como la suma de un vector en $S_1$ y un vector en $S_2$.

**Teorema 2.2.19.** Sean $S_1$ y $S_2$ dos subespacios del espacio vectorial $\mathbb{V}$. Las dos condiciones siguientes son equivalentes:

a) $S = S_1 \oplus S_2$

b) $S = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$

*Demostración:*

$(a \Rightarrow b)$ Supongamos que $S = S_1 \oplus S_2$. Cualquier vector $v \in S$ puede escribirse de forma única como $v = u + w$, con $u \in S_1$ y $w \in S_2$. Así en particular, $S = S_1 + S_2$.

Supongamos ahora que $v \in S_1 \cap S_2$, entonces

- $v = v + 0$, donde $v \in S_1, 0 \in S_2$
- $v = 0 + v$, donde $0 \in S_1, v \in S_2$

Como tal suma para $v$ debe ser única, $v = 0$. De acuerdo con ello $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

$(b \Leftarrow a)$ Por otra parte, supongamos que $S = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. Sea $v \in S$, como $S = S_1 + S_2$, existen $u \in S_1$ y $w \in S_2$ tales que $v = u + w$. Debemos probar que la suma es única. Para ello, supongamos que también $v = u' + w'$, donde $u' \in S_1$ y $w' \in S_2$. En tal caso, $u + w = u' + w'$ y por tanto $u - u' = w' - w$. Pero $u - u' \in S_1$ y $w' - w \in S_2$; por consiguiente, como $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, tenemos que $u - u' = 0$ y $w' - w = 0$, con lo cual $u = u'$ y $w' = w$. De este modo, tal suma para $v \in S$ es única y $S = S_1 \oplus S_2$.

**Ejemplo 2.2.20**

Consideremos los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$S_1 = \{(a, 0,0)/a \in \mathbb{R}\} \quad , \quad S_2 = \{(0, b, 0)/b \in \mathbb{R}\}$$

El subespacio suma $S = S_1 + S_2$ está formado por todas las ternas del tipo $(a, b, 0)$. Ambos subespacios son los ejes X e Y (rectas) y como su intersección es el vector $(0,0,0)$, la suma es directa y se identifica con el plano horizontal.

## 2.3 COMBINACIONES LINEALES

**Definición 2.3.1.** Sean $v_1, v_2, \dots \dots, v_n$ vectores de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Se dice que el vector $v \in \mathbb{V}$ es una *combinación lineal* de los vectores $v_1, v_2, \dots \dots, v_n$, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$ de $\mathbb{K}$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \dots + \alpha_n v_n$

**Ejemplo 2.3.2**

En $\mathbb{R}^3$, sean $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ $y$ $v_3 = (1, 1, 0)$. El vector $v = (2, 1, 5)$ es una combinación lineal de $v_1$, $v_2$ y $v_3$ si podemos determinar números reales $\alpha_1$, $\alpha_2$ y $\alpha_3$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. Al sustituir los valores de $v, v_1, v_2$ y $v_3$, obtenemos $(2, 1, 5) = \alpha_1(1, 2, 1) + \alpha_2(1, 0, 2) + \alpha_3(1, 1, 0)$

Al efectuar las operaciones de la izquierda e igualar las entradas correspondientes, resulta el sistema lineal

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$$

$$2\alpha_1 + \alpha_3 = 1$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 5$$

Cuya solución es $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ y $\alpha_3 = -1$, lo cual significa que $v$ es una combinación lineal de $v_1$, $v_2$ y $v_3$. Así, $v = v_1 + 2v_2 - v_3$.

**Definición 2.3.3.** Si $S = \{v_1, v_2, \dots \dots, v_n\}$ es un conjunto de vectores de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, entonces el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de $v_1, v_2, \dots \dots, v_n$ se denota como $L(S)$. Esto es,

$$L(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ \dots \dots + \alpha_n v_n / \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots \dots, n\}$$

**Teorema 2.3.4.** Sea $S = \{v_1, v_2, \dots \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Entonces, $L(S)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ y además es el menor de todos los subespacios de $\mathbb{V}$ que contienen que contienen a los vectores $v_1, v_2, \dots \dots, v_n$

*Demostración:*

Se demostrará primeramente que $L(S)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$. Para esto se tendrá que verificar que $L(S)$ satisface las condiciones las condiciones a) y b) del teorema 2.2.2. Sean $x, y \in L(S)$. Entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ \dots \dots + \alpha_n v_n$$

$$y = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ \dots \dots + \beta_n v_n$$

Ahora bien,

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + \ \dots\dots + (\alpha_n + \beta_n)v_n$$

Lo que demuestra que $x + \ y \in L(S)$

De forma similar, si $\alpha \in \mathbb{K}$ se tienen que

$$\lambda x = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ \dots\dots + \alpha_n v_n) = (\lambda\alpha_1)v_1 + (\lambda\alpha_2)v_2 + \ \dots\dots + (\lambda\alpha_n)v_n$$

Lo que prueba que $\lambda x \in L(S)$. Entonces, $L(S)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Por otro lado $L(S)$ contiene a los vectores $v_1, v_2, \dots\dots, v_n$, pues

$$v_i = 0 \,.\, v_1 + 0 \,.\, v_2 + \ \dots\dots 0 \,.\, v_{i-1} + 1 \,.\, v_i + 0 \,.\, v_{i+1} + \ \dots\dots + 0 \,.\, v_n \in L(S)$$

donde $1, 2, \dots\dots, n$

Sea ahora $\mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ que contiene a $v_1, v_2, \dots\dots, v_n$ y sea

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ \dots\dots + \alpha_n v_n \in L(S)$$

Por la condición de ser $\mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$, o sea, aplicando las condiciones a) y b) del teorema 2.2.2 con los vectores $v_1, v_2, \dots\dots, v_n \in \mathbb{W}$ y los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots, \alpha_n$, se ve que $x \in \mathbb{W}$. Es decir, $L(S) \subseteq \mathbb{W}$. Esto demuestra que $L(S)$ es el menor de los subespacios de $\mathbb{V}$ que contiene a los vectores $v_1, v_2, \dots\dots, v_n$.

**Ejemplo 2.3.5**

Sean $v_1 = (1, 3, -1)$ y $v_2 = (2, 1, 3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Según el teorema anterior, el menor subespacio de $\mathbb{R}^3$ que contiene a $v_1$ y $v_2$ es $L(v_1, v_2)$ donde

$$L(v_1, v_2) = \{\alpha_1(1, 3, -1) + \alpha_2(2, 1, 3)/\alpha_1\,, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$L(v_1, v_2) = \{(\alpha_1 + 2\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + 3\alpha_2)/\alpha_1\,, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$L(v_1, v_2) = \{(x, y, z)/x = \alpha_1 + 2\alpha_2, y = 3\alpha_1 + \alpha_2, z = -\alpha_1 + 3\alpha_2;\ \alpha_1\,, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

Se desea describir este subespacio de $\mathbb{R}^3$ en otros términos. Obsérvese que de la última expresión para $L(v_1, v_2)$ se obtiene

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = x$$

$$3\alpha_1 + \alpha_2 = y$$

$$-\alpha_1 + 3\alpha_2 = z$$

Que puede contemplarse como un sistema de 3 ecuaciones con dos incógnitas $\alpha_1$ y $\alpha_2$, el cual se sabe que tiene solución, pues el vector $(x, y, z)$ es una combinación lineal de $v_1$ y $v_2$, lo que significa que existen $\alpha_1$ y $\alpha_2$, tales que $(x, y, z) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Al aplicar el método de eliminación Gaussiana a este sistema se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 1 & y \\ -1 & 3 & z \end{pmatrix} \sim \dots \dots \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -5 & y - 3x \\ 0 & 0 & -2x + y + z \end{pmatrix}$$

Entonces, el hecho de la existencia de soluciones del sistema es equivalente a que $-2x + y + z = 0$. Es decir, el vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de $v_1 = (1, 3, -1)$ y $v_2 = (2, 1, 3)$ si y sólo si $-2x + y + z = 0$. Por lo tanto, el subespacio $L(v_1, v_2)$ puede ser descrito como $L(v_1, v_2) = \{(x, y, z)/-2x + y + z = 0\}$, que es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ que representa geométricamente un plano que pasa por el origen. Geométricamente éste es el plano en el que se encuentran $v_1$ y $v_2$.

**Definición 2.3.6.** Sea $S = \{v_1, v_2, \dots \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Al subespacio $L(S)$ se le llama *subespacio generado por los elementos de* $S$.

**Observación 2.3.7.** En general, el subespacio $L(S)$ es diferente del espacio vectorial $\mathbb{V}$ (es decir, $L(S) \subseteq \mathbb{V}$), tal como se vio en el ejemplo anterior. Sin embargo, puede ocurrir que $L(S) = \mathbb{V}$. En este caso se dirá que el espacio vectorial $\mathbb{V}$ es generado por $S$ y se llamará a éste "*conjunto generador de* $\mathbb{V}$".

**Definición 2.3.8.** Se dice que los vectores $\{v_1, v_2, \dots \dots, v_n\}$ en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ generan a $\mathbb{V}$ si todo vector en $\mathbb{V}$ se puede escribir como combinación lineal de ellos. Es decir, para todo $v \in \mathbb{V}$, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \dots + \alpha_n v_n$$

**Teorema 2.3.9.** Sean $S_1$ y $S_2$ dos subespacios del espacio vectorial $\mathbb{V}$. Entonces

$$S_1 + S_2 = L(S_1 \cup S_2)$$

Es decir, el espacio generado por $S_1 \cup S_2$ es $S_1 + S_2$

*Demostración:*

Es obvio que $S_1 + S_2$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ que contiene a $S_1 \cup S_2$. Entonces $L(S_1 \cup S_2) \subset S_1 + S_2$, pues $L(S_1 \cup S_2)$ es el más pequeño de los subespacios de $\mathbb{V}$ que contiene a $S_1 \cup S_2$. Tómese ahora un vector $x = u + v \in S_1 + S_2$. Se tiene que $u \in S_1 \subset S_1 \cup S_2$ y $v \in S_2 \subset S_1 \cup S_2$. Obsérvese que en $L(S_1 \cup S_2)$ se encuentran todas las combinaciones lineales (finitas) de vectores en $S_1 \cup S_2$. Entonces $x = 1 \,.\, u + 1 \,.\, v \in L(S_1 \cup S_2)$, lo que muestra que $S_1 \cup S_2 \subset L(S_1 \cup S_2)$. Por lo tanto, $S_1 + S_2 = L(S_1 \cup S_2)$.

**Teorema 2.3.10.** Sean $S_1$ y $S_2$ dos subconjuntos cualesquiera de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Entonces $L(S_1 \cup S_2) = L(S_1) + L(S_2)$

## 2.4 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

**Definición 2.4.1.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Se dice que los vectores $v_1, v_2, \dots \dots, v_n \in \mathbb{V}$ son *linealmente dependientes* si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ no todos iguales a cero, tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \dots + \alpha_n v_n = 0$$

**Ejemplo 2.4.2**

Considérese los vectores $v_1 = (2, -1, 4)$, $v_2 = (1, -1, 3)$, $v_3 = (1, 1, -1)$ y $v_4 = (1, -2, -1)$ en $\mathbb{R}^3$. Sea

$$\alpha_1(2, -1, 4) + \alpha_2(1, -1, 3) + \alpha_3(1, 1, -1) + \alpha_4(1, -2, -1) = (0, 0, 0)$$

$$(2\alpha_1, -\alpha_1, 4\alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2, 3\alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, -\alpha_3) + (\alpha_4, -2\alpha_4, -\alpha_4) = (0, 0, 0)$$

$$(2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4, 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) = (0, 0, 0)$$

De donde, igualando las coordenadas correspondientes de estos dos vectores de $\mathbb{R}^3$ se obtiene

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

$$-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 = 0$$

$$4\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

El cual es un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones, las cuales son

$$\alpha_1 = -2k, \alpha_2 = 3k, \alpha_3 = k, \alpha_4 = 0, con\ k \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, los vectores $v_1, v_2, v_3$ y $v_4$ son linealmente dependientes, ya que los escalares no son todos necesariamente nulos. Más aún, existen infinitas combinaciones lineales no triviales cuyos resultados son el vector nulo.

**Definición 2.4.3.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Se dice que los vectores $v_1, v_2, \dots\dots, v_n \in \mathbb{V}$ son *linealmente independientes* si se cumple que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots\dots + \alpha_n v_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots\dots = \alpha_n = 0$$

**Ejemplo 2.4.4**

Sean los vectores $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (-1, 2, 5)$ y $v_3 = (0, 1, 4)$ en $\mathbb{R}^3$. Determinar si los vectores $v_1, v_2$ y $v_3$ son linealmente independientes.

Para determinar si los vectores mencionados son L.I., se tiene que considerar la combinación lineal de ellos igualada al vector cero de $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1(1,3,2) + \alpha_2(-1,2,5) + \alpha_3(0,1,4) = (0,0,0)$$

Y mostrar si implica que los 3 escalares $\alpha_1, \alpha_2$ y $\alpha_3$ son iguales a cero.

La combinación lineal anterior puede reescribirse como

$$(\alpha_1 - \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3) = (0,0,0)$$

De donde, igualando las coordenadas correspondientes de estos dos vectores de $\mathbb{R}^3$ se obtiene

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

$$3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$$

El cual es un sistema homogéneo de 3 ecuaciones lineales para las incógnitas $\alpha_1, \alpha_2$ y $\alpha_3$. El determinante de la matriz de este sistema es:

$$det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = 13 \neq 0$$

Lo que dice, entonces, que la matriz del sistema es inversible y que por lo tanto el sistema homogéneo correspondiente tiene solamente la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Esto muestra que $v_1, v_2$ y $v_3$ son linealmente independientes.

**Observación 2.4.5.** En el espacio $\mathbb{R}^3$, la dependencia lineal de vectores puede escribirse geométricamente en los siguientes términos:

a) Dos vectores cualesquiera $u$ y $v$ son linealmente dependientes si y sólo si yacen en la misma recta que pasa por el origen.

b) Tres vectores cualesquiera $u, v$ y $w$ son linealmente dependientes si y sólo si yacen en el mismo plano que pasa por el origen.

**Definición 2.4.6.** Sea $S = \{v_1, v_2, \dots\dots, v_n\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Se dice que el conjunto $S$ es linealmente dependiente o linealmente independiente según lo sean los vectores $v_1, v_2, \dots\dots, v_n$.

**Teorema 2.4.7.** Si un conjunto $S$ de vectores es linealmente independiente, necesariamente lo es cualquier subconjunto de $S$. Alternativamente, si $S$ contiene un subconjunto linealmente dependiente, $S$ es linealmente dependiente.

**Teorema 2.4.8.** Si un vector es combinación lineal de una familia linealmente independiente, entonces dicha combinación lineal es única.

*Demostración*:

Sea $v \in \mathbb{V}$ combinación lineal de la familia $\{v_1, v_2, \dots\dots, v_n\}$, y ésta linealmente independiente. Entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots\dots + \alpha_n v_n$$

Suponemos que existen escalares $\beta_1, \beta_2, \dots\dots, \beta_n$ tales que

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots\dots + \beta_n v_n$$

Entonces

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots\dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots\dots + \beta_n v_n$$

O sea

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots\dots + \alpha_n v_n - \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \dots\dots - \beta_n v_n = 0$$

Luego

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots\dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0$$

Y como la familia es linealmente independiente, se deduce que

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \dots\dots = \alpha_n - \beta_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots\dots, \alpha_n = \beta_n, \forall i = 1, 2, \dots\dots, n$$

En consecuencia, la combinación lineal es única.

**Corolario 2.4.9.** Todo vector no nulo de un espacio vectorial constituye un conjunto linealmente independiente.

**Corolario 2.4.10.** El vector nulo de cualquier espacio vectorial constituye un conjunto linealmente dependiente.

**Corolario 2.4.11.** Todo conjunto al que pertenezca el vector nulo es linealmente dependiente.

**Corolario 2.4.12.** Dos vectores $v_1$ y $v_2$ son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es múltiplo del otro.

**Corolario 2.4.13.** Si dos de los vectores de $v_1, v_2, \ldots \ldots, v_n$ son iguales o si uno es múltiplo escalar de otro, los vectores son linealmente dependientes.

**Teorema 2.4.14.** Un conjunto finito y no vacío de vectores es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de ellos es combinación lineal de los demás.

*Demostración*:

$(\Rightarrow)$ Sean $v_1, v_2, \ldots \ldots, v_n$ vectores linealmente dependientes, según la definición de dependencia lineal existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_n$ no todos nulos tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ \ldots \ldots + \alpha_n v_n = 0 \ldots \ldots \ldots (*)$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\alpha_1 \neq 0$ (si esto no fuese cierto, se reenumeran los vectores). Entonces la expresión $(*)$ puede reescribirse como:

$$v_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) v_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) v_3 + \ \ldots \ldots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) v_n$$

Lo que muestra que el vector $v_1$ es una combinación lineal de los demás vectores.

(⇐) Recíprocamente, supóngase que al menos uno de los vectores $v_1, v_2, \dots \dots, v_n$ puede escribirse como combinación lineal de los demás vectores. Dígase que $v_1$ es tal vector. Se tiene entonces que existen escalares $\beta_2, \beta_3, \dots \dots, \beta_n$ tales que

$$v_1 = \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \dots \dots + \beta_n v_n$$

Reescribiendo esta expresión como

$$v_1 - \beta_2 v_2 - \beta_3 v_3 - \dots \dots - \beta_n v_n = 0$$

Se ve que se satisface $(*)$ con $\alpha_1 = 1 \neq 0$ y $\alpha_i = -\beta_i$, para $i = 2, 3, \dots \dots, n$. O sea, que los vectores $v_1, v_2, \dots \dots, v_n$ son linealmente dependientes.

**Corolario 2.4.15.** Un conjunto finito y no vacío de vectores es linealmente independiente si y sólo si ningún vector es combinación lineal de los demás.

**Teorema 2.4.16.** Un conjunto finito y ordenado de vectores al que no pertenece el vector nulo es linealmente dependiente si y sólo si algún vector es combinación lineal de los precedentes.

## 2.5 BASES Y DIMENSIÓN

**Definición 2.5.1.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Se dice que el subconjunto $S$ de $\mathbb{V}$ es una *base* de $\mathbb{V}$ si

a) $S$ genera a $\mathbb{V}$

b) $S$ es linealmente independiente

**Ejemplo 2.5.2.**

Sea $\mathbb{K}$ un campo, y en $\mathbb{K}^n$ sea $S$ el subconjunto que consta de los vectores $e_1, e_2, \dots \dots, e_n$ definidos por

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots \dots, 1)$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$ escalares de $\mathbb{K}$ y hágase $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots \dots + \alpha_n e_n$ Entonces $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n)$. Esto muestra que $e_1, e_2, \dots \dots, e_n$ generan $\mathbb{K}^n$. Como $v = 0$ si y sólo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \dots, = \alpha_n = 0$, los vectores $e_1, e_2, \dots \dots, e_n$ son linealmente independientes. El conjunto $S = \{e_1, e_2, \dots \dots, e_n\}$ es, por tanto, una base de $\mathbb{K}^n$. Esta base particular se llamará "base canónica" de $\mathbb{K}^n$.

**Teorema 2.5.3.** El subconjunto $S = \{v_1, v_2, \dots \dots, v_n\}$ del espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una base de $\mathbb{V}$ si y sólo si cada vector $v \in \mathbb{V}$ es expresado de manera única como una combinación lineal de los vectores de $S$.

*Demostración:*

$(\Rightarrow)$ Sea $S = \{v_1, v_2, \dots \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $v \in \mathbb{V}$ un vector arbitrario de $\mathbb{V}$. Como $L(S) = \mathbb{V}$, entonces $v \in L(S)$. Luego, $v$ es una combinación lineal de los elementos de $S$. Supóngase que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots \dots + a_n v_n$ y $v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots \dots + b_n v_n$ son dos posibles representaciones de $v$.

Entonces

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots \dots + b_n v_n$$

Es decir

$$(a_1 - b_1) v_1 + (a_2 - b_2) v_2 + \dots \dots + (a_n - b_n) v_n = 0$$

Como $S$ es linealmente independiente, se tiene que

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots \dots = a_n - b_n = 0$$

Luego. $a_1 = b_1$, $a_2 - b_2$, ……, $a_n = b_n$, de tal modo $v$ sólo puede expresarse como única combinación lineal de los elementos de $S$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supóngase que cada $v \in \mathbb{V}$ es representado de manera única como combinación lineal de $v_1, v_2, \dots \dots, v_n$. En tal caso se tiene obviamente que $L(S) = \mathbb{V}$. Sólo falta verificar que los vectores de $S$ son linealmente independientes. Considérese la combinación lineal $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots \dots + a_n v_n = 0$

Esta expresión se puede ver como la representación del vector $0 \in \mathbb{V}$ como combinación lineal de $v_1, v_2, \dots \dots, v_n$. Pero obviamente el vector cero tiene también la representación

$$0 = 0 \,.\, v_1 + 0 \,.\, v_2 + \dots \dots + 0 \,.\, v_n$$

En vista de la unicidad de la representación supuesta en la hipótesis, se concluye que $a_1 = a_2 = \dots \dots = a_n = 0$, es decir, que $v_1, v_2, \dots \dots, v_n$ son linealmente independientes y que por tanto constituyen una base de $\mathbb{V}$.

**Teorema 2.5.4.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial generado por $n$ vectores $v_1, v_2, \dots \dots, v_n$. Entonces todo conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathbb{V}$ es finito y no contiene más de $n$ vectores.

*Demostración*:

Considérese el conjunto $S = \{u_1, u_2, \dots \dots, u_m\}$ de $m$ vectores en $\mathbb{V}$, en donde $m > n$. Se mostrará entonces que $S$ es linealmente dependiente.

Como $L(v_1, v_2, \dots \dots, v_n) = \mathbb{V}$, para cada $u_j$ existen escalares $a_{ij}$ con $i = 1, 2, \dots \dots, n$ tales que

$$u_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots\dots + a_{nj}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i\,, \quad j = 1, 2, \dots\dots, m \quad (*)$$

Formamos la combinación lineal

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \dots\dots + c_mu_m \quad (**)$$

Al sustituir $(*)$ en $(**)$ se obtiene

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \dots\dots + c_mu_m = \sum_{j=1}^{m} c_ju_j = \sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{i=1}^{n} a_{1j}v_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j\right)v_i$$

Como $m > n$, el teorema

*Si $A$ es una matriz de orden $n \times m$ con $n < m$, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = 0$ tiene una solución no trivial.*

Implica que existen escalares $c_1, c_2, \dots\dots, c_m$, no todos cero, tales que

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j = 0, \quad 1 \le i \le m$$

Luego $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots\dots + c_mu_m = 0$. Ello demuestra que $S$ es un conjunto linealmente dependiente.

**Corolario 2.5.5.**

Dos bases cualesquiera de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ tienen el mismo número de vectores.

*Demostración:*

Sean $S_1 = \{v_1, v_2, \dots\dots, v_n\}$ y $S_2 = \{u_1, u_2, \dots\dots, u_m\}$ dos bases de $\mathbb{V}$. Por una parte se tiene que $L(S_1) = \mathbb{V}$ y $S_2$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathbb{V}$. Por el teorema anterior se tiene entonces que $m \le n$. Por otra parte

$L(S_2) = \mathbb{V}$ y $S_1$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathbb{V}$. Nuevamente el teorema anterior permite concluir que $n \leq m$. Entonces $n = m$.

**Definición 2.5.6.** Se llama *dimensión de un espacio vectorial* $\mathbb{V}$, denotado por dim $\mathbb{V}$, al número de vectores de una base cualquiera de $\mathbb{V}$.

**Definición 2.5.7.** Si el espacio vectorial $\mathbb{V}$ posee una base formada por un número finito de vectores, se dice que $\mathbb{V}$ es un *espacio de dimensión finita*. Caso contrario se dice que $\mathbb{V}$ es un *espacio de dimensión infinita*.

**Teorema 2.5.8.** Sea $S = \{v_1, v_2, \dots \dots, v_n\}$ un conjunto de generadores del espacio vectorial $\mathbb{V}$, supóngase que existe $v_j, 1 \leq j \leq n$ tal que puede escribirse como combinación lineal de los $n-1$ vectores restantes. Entonces $L(S - \{v_j\}) = L(S)$ donde $S - \{v_j\} = \{v \in S / v \neq v_j\}$

*Demostración:*

La contención $L(S - \{v_j\}) \subset L(S)$ es clara. Se verá entonces que $L(S) \subset L(S - \{v_j\})$

Sea $v \in L(S)$, existen $c_1, c_2, \dots \dots, c_n$ tales que $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots \dots + c_n v_n$; según la hipótesis, existen también escalares $d_i$, $i = 1, 2, \dots \dots, n$, $i \neq j$ tales que

$$v_j = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots \dots + d_{j-1} v_{j-1} + d_{j+1} v_{j+1} + \dots \dots + d_n v_n$$

Al sustituir esta expresión en la anterior y agrupando, se obtiene el vector $v$ expresado como combinación lineal de los $n-1$ vectores $v_1, v_2, \dots \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots \dots, v_n$. Entonces $v \in L(S - \{v_j\})$ como se quería demostrar.

**Teorema 2.5.9.** Sea $S$ un subconjunto linealmente independiente del espacio vectorial $\mathbb{V}$. Supóngase que el vector $v \in \mathbb{V}$ no pertenece al espacio generado por $S$ (esto es, $v \notin L(S)$), entonces el conjunto $S' = S \cup \{v\}$ es linealmente independiente.

*Demostración*:

Sean $u_1, u_2, \dots \dots, u_k$ vectores de $S$. Considérese la combinación lineal

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \dots \dots + c_ku_k + c_{k+1}v = 0 \dots \dots (*)$$

Se afirma que $c_{k+1} = 0$. En efecto, si $c_{k+1} \neq 0$ se podría escribir

$$v = \left(-\frac{c_1}{c_{k+1}}\right)u_1 + \left(-\frac{c_2}{c_{k+1}}\right)u_2 + \dots \dots + \left(-\frac{c_k}{c_{k+1}}\right)u_k$$

Lo que contradice la hipótesis de que $v \notin L(S)$. Entonces la expresión $(*)$ queda como

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \dots \dots + c_ku_k = 0$$

Como $S$ es linealmente independiente, se concluye que $c_1 = c_2 = \cdots \dots = c_k = 0$, lo que muestra entonces que $S'$ es linealmente independiente.

**Teorema 2.5.10.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita.

a) Cualquier conjunto de generadores de $\mathbb{V}$ contiene una base para $\mathbb{V}$.

b) Sea $Dim\ \mathbb{V} = n$. Si $\{u_1, u_2, \dots \dots, u_m\}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$, existen vectores $w_1, w_2, \dots \dots, w_{n-m}$ tales que $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \dots \dots, u_m, w_1, w_2, \dots \dots, w_{n-m}\}$ es una base de $\mathbb{V}$.

*Demostración*:

a) Sea $S = \{v_1, v_2, \dots \dots, v_k\}$ un conjunto de generadores de $\mathbb{V}$. Si $S$ es linealmente independiente, entonces $S$ es una base de $\mathbb{V}$. Caso contrario, según el teorema 2.4.14 existe un vector $v_j, 1 \leq j \leq k$ que se puede escribir como combinación lineal de los $k-1$ vectores restantes. Sea $S_1 = S - \{v_j\}$. Por el teorema 2.5.8, $L(S_1) = \mathbb{V}$. Si $S_1$ es linealmente independiente, $S_1$ es entonces la base requerida. Caso contrario repita el proceso anterior. En algún momento se obtendrá un conjunto $S_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ linealmente independiente y ese será la base procurada. (El peor de los casos se presentaría cuando se puede llegar a $S_{n-1}$, que es un conjunto con un solo vector. En ese caso $S_1$ es linealmente independiente, y será la base requerida).

b) Sea $S = \{u_1, u_2, \dots \dots, u_m\}$. Escríbase $V_o = L(S)$. Si $V_o = \mathbb{V}$, entonces $S$ es la base requerida (pues $S$ es linealmente independiente y $L(S) = \mathbb{V}$). Caso contrario (o sea si $L(S)$ es un subespacio propio de $\mathbb{V}$), existe un vector $w_1 \in \mathbb{V}$ tal que $w_1 \notin L(S)$. Según el teorema 2.5.9, el conjunto $S_1 = S \cup \{w_1\}$ es linealmente independiente. Escríbase $V_1 = L(S_1)$. Si $V_1 = \mathbb{V}$, $S_1$ es la base requerida $\mathfrak{B}$. Caso contrario existe $w_2 \in \mathbb{V}, w_2 \notin L(S)$, etc. Al continuar este proceso de adjunción de vectores de $\mathbb{V}$ al conjunto $S$, se llegará a lo más en $n-m$ etapas, a un conjunto linealmente independiente que genere $\mathbb{V}$. Ésta será la base $\mathfrak{B}$ procurada.

**Corolario 2.5.11.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Dígase que $Dim\, \mathbb{V} = n$. Entonces

a) Cualquier conjunto con $n$ vectores linealmente independientes es una base de $\mathbb{V}$.

b) Cualquier conjunto con $n$ vectores que genera a $\mathbb{V}$, es una base de $\mathbb{V}$.

**Teorema 2.5.12.** Sea $W$ un subespacio del espacio vectorial de dimensión finita $\mathbb{V}$. Entonces $W$ es de dimensión finita y $dim\, W \leq dim\, \mathbb{V}$.

**Corolario 2.5.13.** Si $W$ es un subespacio de un espacio $\mathbb{V}$ dimensionalmente finito, entonces $W$ tiene una base finita y cualquier base para $W$ es un subconjunto de una base para $\mathbb{V}$.

**Teorema 2.5.14.** Sea $W_1$ y $W_2$ subespacios del espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita. Entonces $dim(W_1 + W_2) = dim\, W_1 + dim\, W_2 - dim(W_1 \cap W_2)$

**Corolario 2.5.15.** Sea $W_1$ y $W_2$ subespacios del espacio vectorial de dimensión finita $\mathbb{V}$ tales que $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{V}$. Entonces $dim(\mathbb{V}) = dim\, W_1 + dim\, W_2$

## 2.6 TRANSFORMACIONES LINEALES

**Definición 2.6.1** Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Una función $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ se llama *transformación lineal* de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ si para todo $u, v \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos que

a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

b) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

**Ejemplo 2.6.2.** Una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$

Sea $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y, 3y)$ es una transformación lineal, ya que se verifican las condiciones:

a) $T[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 3y_1 + 3y_2)$$

$$= (x_1 + y_1, x_1 - y_1, 3y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2, 3y_2)$$

$$= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$$

b) $T[\alpha(x,y)] = T(\alpha x, \alpha y)$

$$= (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y, 3\alpha y)$$

$$= \alpha(x + y, x - y, 3y)$$

$$= \alpha T(x, y)$$

Así, $T$ es una transformación lineal.

**Observación 2.6.3.** Un equivalente a la definición 2.6.1 es la siguiente:

$$T\ es\ una\ transformación\ lineal\ si\ y\ sólo\ si\ T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v)$$

para todo $u, v \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

**Ejemplo 2.6.4.** Dos ejemplos importantes de transformaciones lineales son la transformación identidad $I: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ mediante $I_V(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{V}$ y la transformación cero $T_0: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ por $T_0(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{V}$.

**Ejemplo 2.6.5.** Defínase $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mediante $T(a_1, a_2) = (a_1, 0)$. $T$ se denomina proyección sobre el eje $X$. Nótese que si hacemos $W_1 = \{(a, 0)/a \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(0, a)/a \in \mathbb{R}\}$ entonces $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

**Definición 2.6.6.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\mathbb{W}_1$ un subespacio de $\mathbb{V}$. Una función $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ se llama proyección sobre $\mathbb{W}_1$ si

a) Existe un subespacio $\mathbb{W}_2$ tal que $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$

b) Para $x = x_1 + x_2$, donde $x_1 \in \mathbb{W}_1$ y $x_2 \in \mathbb{W}_2$, tenemos $T(x) = x_1$

## 2.7 PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

**Teorema 2.7.1.** Sea $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces para todos los vectores $u, v, v_1, v_2, \dots \dots, v_n$ en $\mathbb{V}$ y todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$:

a) $T(0) = 0$

b) $T(u - v) = T(u) - T(v)$

c) $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots \dots + \alpha_n T(v_n)$

**Teorema 2.7.2.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{K}$ con base $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$. Sean $\mathbb{W}$ un espacio vectorial sobre el mismo campo $\mathbb{K}$ y $y_1, y_2, \dots \dots, y_n$ $n$ vectores cualesquiera de $\mathbb{W}$. Entonces existe una única transformación lineal $T$ de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ tal que $T(x_i) = y_i$, para $i = 1, 2, \dots \dots, n$.

*Demostración*:

Sea $x \in \mathbb{V}$. Entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Donde $a_1, a_2, \dots \dots, a_n$ son escalares únicos. Defínase $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ mediante

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

Veremos que $T$ es lineal, pues supóngase que $u, v \in \mathbb{V}$ y $d \in \mathbb{K}$. Entonces podemos escribir

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad y \quad v = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Ahora bien,

$$du + v = \sum_{i=1}^{n} (db_i + c_i) x_i$$

Entonces

$$T(du+v)=\sum_{i=1}^{n}(db_i+c_i)y_i=d\sum_{i=1}^{n}b_iy_i+\sum_{i=1}^{n}c_iy_i=dT(u)+T(v)$$

También es evidente que $T(x_i)=y_i$, para $i=1,2,\ldots\ldots,n$.

Además $T$ es única, porque supóngase que $U:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{W}$ es lineal y $U(x_i)=y_i$ para $i=1,2,\ldots\ldots,n$. Entonces para $x\in\mathbb{V}$ con

$$x=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$$

Tenemos

$$U(x)=\sum_{i=1}^{n}a_iU(x_i)=\sum_{i=1}^{n}a_iy_i=T(x)$$

Por lo tanto $U=T$.

## 2.8 NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

**Definición 2.8.1.** Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$ y sea $T:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{W}$ una transformación lineal. El *núcleo* de $T$, denotado por $N(T)$, es el conjunto de todos los vectores $v$ de $\mathbb{V}$ tales que $T(v)=0$.

**Definición 2.8.2.** Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$ y sea $T:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{W}$ una transformación lineal. La *imagen* de $T$, denotado por $Im(T)$, es el conjunto formado por todos los vectores $w$ de $\mathbb{W}$ tales que $w=T(v)$ para alguna $v\in\mathbb{V}$, es decir, vectores de $\mathbb{W}$ que son imágenes de los elementos de $\mathbb{V}$ por medio de la transformación $T$.

**Teorema 2.8.3.** Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$ y sea $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces $N(T)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ e $Im(T)$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.

*Demostración*:

Como $T(0_V) = 0_W$, tenemos que $0_V \in N(T)$. Sean $x, y \in N(T)$ y $c \in \mathbb{K}$. Entonces

$T(x+y) = T(x) + T(y) = 0_W + 0_W = 0_W \quad y \quad T(cx) = cT(x) = c0_W = 0_W$

Por lo tanto $x + y \in N(T)$ y $cx \in N(T)$, de manera que $N(T)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Como $T(0_V) = 0_W$, tenemos que $0_W \in Im(T)$. Ahora sean $x, y \in Im(T)$ y $c \in \mathbb{K}$. Entonces, existen $v$ y $w$ en $\mathbb{V}$ tales que $T(v) = x$ y $T(w) = y$. Así,

$$T(v+w) = T(v) + T(w) = x + y \quad y \quad T(cv) = cT(v) = cx$$

Por lo tanto, $x + y \in Im(T)$ y $cx \in Im(T)$, de manera que $Im(T)$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.

**Definición 2.8.4.** Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales, $\mathbb{V}$ de dimensión finita y $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Se define la *nulidad* de $T$ como la dimensión de su núcleo, y el *rango* de $T$ como la dimensión de su imagen.

**Teorema 2.8.5.** Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales, $\mathbb{V}$ de dimensión finita y $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces

$$nulidad\ de\ T + rango\ de\ T = dim\ \mathbb{V}$$

*Demostración*:

Supóngase que $dim(\mathbb{V}) = n$, y sea $\{x_1, x_2, \dots \dots, x_k\}$ una base para $N(T)$. Por el corolario 2.5.10. podemos extender $\{x_1, x_2, \dots \dots, x_k\}$ a una base $\mathfrak{B} =$

$\{x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$ para $\mathbb{V}$. Demostraremos que el conjunto $S = \{T(x_{k+1}), T(x_{k+2}), \dots \dots, T(x_n)\}$ es una base para $Im(T)$. Primero demostraremos que $S$ genera a $Im(T)$. Sea $y \in Im(T)$, entonces existe $x \in \mathbb{V}$ tal que $y = T(x)$. Como $\mathfrak{B}$ es una base para $\mathbb{V}$, tenemos que

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \,, para\ algunas\ a_1, a_2, \dots \dots, a_n \in \mathbb{K}$$

Como $T$ es lineal se tiene que

$$y = T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i) = \sum_{i=k+1}^{n} a_i T(x_i) \in L(S)$$

La última igualdad se obtiene de que $x_1, x_2, \dots \dots, x_k \in N(T)$.

Ahora demostraremos que $S$ es linealmente independiente. Supóngase que

$$\sum_{i=k+1}^{n} b_i T(x_i) = 0\ para\ b_{k+1}, b_{k+2}, \dots \dots, b_n \in \mathbb{K}$$

De nuevo, utilizando el hecho de que $T$ es lineal, tenemos que

$$T\left(\sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i\right) = 0$$

Entonces,

$$\sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i \in N(T)$$

Por lo tanto, existen $c_1, c_2, \dots \dots, c_k \in \mathbb{K}$ tales que

$$\sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i \quad o\ bien \quad \sum_{i=1}^{k} (-c_i) x_i + \sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i = 0$$

Como $\mathfrak{B}$ es una base para $\mathbb{V}$, tenemos que $b_i = 0$ para toda $i$. Por lo tanto, $S$ es linealmente independiente.

## 2.9 ÁLGEBRA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

**Teorema 2.9.1.** Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$. Sean $T$ y $U$ transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. La función $T+U$ definida por

$$(T+U)(v)=T(v)+U(v)$$

Es una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Si $\alpha$ es cualquier elemento de $\mathbb{K}$, la función definida por

$$(\alpha T)(v)=\alpha T(v)$$

Es una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. El conjunto de todas las transformaciones de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$, junto con la adición y multiplicación escalar aquí definidas, es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$.

**Teorema 2.9.2.** Sean $\mathbb{V},\mathbb{W}$ y $\mathbb{Z}$ espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$. Sea $T$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ y $U$ una transformación lineal de $\mathbb{W}$ en $\mathbb{Z}$. Entonces la función compuesta UT definida por $UT(v)=U\big(T(v)\big)$ es una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{Z}$.

**Definición 2.9.3.** Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, un *operador lineal* $T$ sobre $\mathbb{V}$ es una transformación lineal de $T:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{V}$.

**Teorema 2.9.4.** Sea $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$; sean $U,T_1$ y $T_2$ operadores lineales sobre $\mathbb{V}$ y sea $\alpha$ un elemento de $\mathbb{K}$.

a) $IU=UI=U$

b) $U(T_1+T_2)=UT_1+UT_2$ y $(T_1+T_2)U=T_1U+T_2U$

c) $\alpha(UT_1)=(\alpha U)T_1=U(\alpha T_1)$

d) $U(T_1T_2)=(UT_1)T_2$

**Definición 2.9.5.** Una transformación lineal $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es *invertible* si existe una única función $T^{-1}: \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}$ tal que $TT^{-1} = I_W$ y $T^{-1}T = I_V$, donde $I_W$ es la transformación identidad en $\mathbb{W}$ e $I_V$ es la transformación identidad en $\mathbb{V}$. La transformación $T^{-1}$ es la inversa de $T$.

**Teorema 2.9.7.** Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Si $T$ es invertible, entonces $T^{-1}: \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}$ es una transformación lineal.

*Demostración*:

Sean $y_1, y_2 \in \mathbb{W}$ y $c \in \mathbb{K}$. Como $T$ es sobreyectiva e inyectiva, existen vectores únicos $x_1$ y $x_2$ tales que $T(x_1) = y_1$ y $T(x_2) = y_2$. Entonces $x_1 = T^{-1}(y_1)$ y $x_2 = T^{-1}(y_2)$, y así

$$T^{-1}(cy_1 + y_2) = T^{-1}[cT(x_1) + T(x_2)] = T^{-1}[T(cx_1 + x_2)] = cx_1 + x_2 = cT^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2)$$

**Observación 2.9.8.** Las siguientes propiedades no exige la linealidad y se cumplen para funciones invertibles $T$ y $U$.

a) $(TU)^{-1} = U^{-1}T^{-1}$

b) $(T^{-1})^{-1} = T$; en particular, $T^{-1}$ es invertible.

## 2.10 REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE UNA TRANSFORMACIÓN

**Definición 2.10.1.** Sea $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$ una base ordenada para un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita. Para $x \in \mathbb{V}$ definimos al vector coordenado de $x$ relativo a $\mathfrak{B}$, denotado por $[x]_{\mathfrak{B}}$, mediante

$$[x]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Donde

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

**Definición 2.10.2.** Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita con bases ordenadas $\mathfrak{B}_1 = \{x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{y_1, y_2, \dots \dots, y_m\}$ respectivamente. Sea $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces existen escalares únicos $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i = 1, 2, \dots \dots, m \;\; y \;\; j = 1, 2, \dots \dots, n)$ tales que

$$T(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \quad para \; 1 \leq j \leq n$$

Además, llamaremos a la matriz $A$ de orden $m \times n$, definida mediante $A_{ij} = a_{ij}$, la matriz que representa a $T$ en las bases ordenadas $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$, la cual la escribiremos como $A = [T]_{\mathfrak{B}_1}^{\mathfrak{B}_2}$. Si $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ y $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$, escribiremos $A = [T]_{\mathfrak{B}_1}$

**Teorema 2.10.3.** Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita que tienen bases ordenadas $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$, respectivamente, y sea $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces, para toda $x \in \mathbb{V}$ tenemos

$$[T(x)]_{\mathfrak{B}_2} = [T]_{\mathfrak{B}_1}^{\mathfrak{B}_2} [x]_{\mathfrak{B}_1}$$

**Definición 2.10.4.** Sea $A$ una matriz de orden $m \times n$ con elementos de un campo $\mathbb{K}$. Denotamos por $L_A$ a la función $L_A: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ definido por $L_A(x) = Ax$ para cada vector columna $x \in \mathbb{K}^n$.

**Teorema 2.10.5.** Sea $A$ una matriz de orden $m \times n$ con elementos de un campo $\mathbb{K}$. Entonces la transformación $L_A: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ es lineal y $[L_A]_{\mathfrak{B}_1}^{\mathfrak{B}_2} = A$, donde $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ son las bases ordenadas estándar para $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$ respectivamente.

**Teorema 2.10.6.** Sean $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ dos bases ordenadas para un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita y sea $Q = [I_V]_{\mathfrak{B}_2}^{\mathfrak{B}_1}$. Entonces

a) $Q$ es invertible.

b) Para toda $v \in \mathbb{V}$, $[x]_{\mathfrak{B}_1} = Q[x]_{\mathfrak{B}_2}$

**Teorema 2.10.7.** Sea $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita a un espacio vectorial $\mathbb{W}$ de dimensión finita y sean $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_1'$ bases ordenadas para $\mathbb{V}$, $\mathfrak{B}_2$ y $\mathfrak{B}_2'$ bases ordenadas para $\mathbb{W}$. Si $Q$ es la matriz que transforma de $\mathfrak{B}_1'$ en coordenadas de $\mathfrak{B}_1$ y $P$ es la matriz que transforma las coordenadas de $\mathfrak{B}_2'$ a $\mathfrak{B}_2$, entonces las matrices de la transformación $T$ respecto de $\mathfrak{B}_1'$ y $\mathfrak{B}_2'$, y respecto de $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ están relacionados por

$$[T]_{\mathfrak{B}_1'}^{\mathfrak{B}_2'} = P^{-1}[T]_{\mathfrak{B}_1}^{\mathfrak{B}_2}Q$$

**Corolario 2.10.8.** Sea $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ un operador lineal en un espacio vectorial dimensionalmente finito $\mathbb{V}$ que tiene bases ordenadas $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$. Si $P$ es la matriz que transforma coordenadas de $\mathfrak{B}'$ en coordenadas de $\mathfrak{B}$, entonces $[T]_{\mathfrak{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathfrak{B}}P$.

**Definición 2.10.9.** Sean $A$ y $B$ matrices de orden $n \times n$ con elementos del campo $\mathbb{K}$. Decimos que $B$ es semejante a $A$ si existe una matriz invertible $P \in \mathbb{K}^{m \times n}$ tal que $B = P^{-1}AP$.

## 2.11 DIAGONALIZACIÓN

**Definición 2.11.1.** Se dice que un operador lineal $T$ sobre un espacio vectorial dimensionalmente finito $\mathbb{V}$ es diagonalizable si existe una base $\mathfrak{B}$ para $\mathbb{V}$ tal que $[T]_{\mathfrak{B}}$ sea una matriz diagonal.

**Definición 2.11.2.** Una matriz cuadrada $A$ es diagonalizable si $A$ es semejante a una matriz diagonal.

**Teorema 2.11.3.** Sea $T$ un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita $\mathbb{V}$. Luego, $T$ es *diagonalizable* si y sólo si existe una base $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$ para $\mathbb{V}$ y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots \dots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos) tales que $T(x_j) = \lambda_j x_j$, para $1 \leq j \leq n$. Bajo estas circunstancias se tiene que:

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Este teorema también puede ser enunciado de la manera siguiente:

**Un operador lineal T en un espacio vectorial de dimensión finita $\mathbb{V}$ es diagonalizable si y sólo si existe una base $\mathfrak{B}$ para $\mathbb{V}$ compuesta por vectores propios de $\mathbb{V}$.**

*Demostración:*

Supóngase que $T$ es diagonalizable. Entonces existe una base $\mathfrak{B}$ para $\mathbb{V}$ tal que $[T]_{\mathfrak{B}} = D$ es una matriz diagonal. Sean $\lambda_j = D_{jj}$ y $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$. Entonces para cada $j$,

$$T(x_j) = \sum_{i=1}^{n} D_{ij} x_i = D_{jj} x_j = \lambda_j x_j$$

Recíprocamente, supóngase que existe una base $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n\}$ y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots, \lambda_n$ tales que $T(x_j) = \lambda_j x_j$. Entonces evidentemente

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Definición 2.11.4.** Sea $T$ un operador lineal en un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Un elemento no nulo $x \in \mathbb{V}$ se llama *vector propio* de $T$ si existe un escalar $\lambda$ tal que $T(x) = \lambda x$. Al escalar $\lambda$ se le llama *valor propio* correspondiente al vector propio $x$.

**Definición 2.11.5.** Si $A$ es una matriz de orden $n \times n$ en un campo $\mathbb{K}$, un elemento no nulo $x \in \mathbb{K}^n$ se denomina *vector propio* de la matriz $A$, si $x$ es un vector propio de $L_A$. El escalar $\lambda$ se denomina *valor propio de A* correspondiente al vector propio $x$.

**Teorema 2.11.6.** Sea $T$ un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita $\mathbb{V}$ sobre un campo $\mathbb{K}$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de $T$ si y sólo si $det(T - \lambda I) = 0$.

*Demostración:*

($\Longrightarrow$) Supóngase que $\lambda$ es un valor propio de $T$. Entonces existe un vector propio $x \in \mathbb{V}$ $(x \neq 0)$ tal que $T(x) = \lambda x$. Luego $0 = T(x) - \lambda x = (T - \lambda I)(x)$. Como $x \neq 0$, $T - \lambda I$ no es invertible. Así, según un teorema, $det(T - \lambda I) = 0$.

($\Longleftarrow$) Recíprocamente, supongamos que $det(T - \lambda I) = 0$. Entonces, de nuevo por el mismo teorema $T - \lambda I$ no es invertible. Luego existe un vector no nulo $x \in$

$\mathbb{V}$ tal que $x \in N(T-\lambda I)$. Entonces $(T-\lambda I)(x)=0$, y lógicamente $T(x)=\lambda x$. Por lo tanto $x$ es un vector propio (con $\lambda$ como valor propio asociado) de $T$.

**Corolario 2.11.7.** Sea $A$ una matriz de orden $n \times n$ en un campo $\mathbb{K}$. Luego, un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de $A$ si y sólo si $det(A-\lambda I)=0$.

**Corolario 2.11.8.** Sea $T$ un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita $\mathbb{V}$, y sea $\mathfrak{B}$ una base para $\mathbb{V}$. Entonces, $\lambda$ es un valor propio de $T$ si y sólo si es un valor propio de $[T]_{\mathfrak{B}}$.

**Definición 2.11.9.** Si $A$ es una matriz de orden $n \times n$ en un campo $\mathbb{K}$, el polinomio $det(A-tI)$ en la incógnita "$t$" se denomina *polinomio característico* de $A$.

**Definición 2.11.10.** Sea $T$ un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita $\mathbb{V}$ con base $\mathfrak{B}$. Definimos al *polinomio característico* $f(t)$ de $T$ como el polinomio característico de $A=[T]_{\mathfrak{B}}$; esto es, $f(t)=det(A-tI)$.

**Teorema 2.11.11.** Sea $T$ un operador lineal en un espacio vectorial $\mathbb{V}$, y sea $\lambda$ un valor propio de $T$. Un vector $x \in \mathbb{V}$ es un vector propio de $T$ que corresponde a $\lambda$ si $x \neq 0$ y $x \in N(T-\lambda I)$.

**Teorema 2.11.12.** Sea $T$ un operador lineal en $\mathbb{V}$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots, \lambda_k$ valores propios de $T$ diferentes. Si $x_1, x_2, \dots\dots, x_k$ son vectores propios de $T$ tales que $\lambda_j$ corresponda a $x_j$ $(1 \leq j \leq k)$, entonces $\{x_1, x_2, \dots\dots, x_k\}$ es linealmente independiente.

**Corolario 2.11.13.** Sea $T$ un operador lineal en $\mathbb{V}$, un espacio vectorial de dimensión "$n$". Si $T$ tiene $n$ valores propios distintos, entonces $T$ es diagonalizable.

**Teorema 2.11.14.** Sea $T$ un operador lineal diagonalizable en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión "$n$", y sea $f(t)$ el polinomio característico de $T$. Entonces $f(t)$ se descompone en un producto de $n$ factores, todos de grado 1; esto es, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos) tales que

$$f(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \ldots \ldots (t - \lambda_n).$$

*Demostración:*

Supóngase que $T$ es diagonalizable. Entonces existe una base $\mathfrak{B}$ para $\mathbb{V}$ tal que $[T]_{\mathfrak{B}} = D$ es una matriz diagonal. Si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Entonces

$$f(t) = det(D - \lambda I) = det\begin{pmatrix} \lambda_1 - t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - t \end{pmatrix}$$

$$f(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \ldots \ldots (\lambda_n - t) = (-1)^n (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \ldots \ldots (t - \lambda_n)$$

**Definición 2.11.15.** Sea $\lambda$ un valor propio de un operador lineal o de una matriz cuyo polinomio característico es $f(t)$. La multiplicidad (algebraica) de $\lambda$ es el mayor entero positivo $k$ para el que $(t - \lambda)^k$ es un factor de $f(t)$.

**Definición 2.11.16.** Sea $T$ un operador lineal en un espacio vectorial $\mathbb{V}$, y sea $\lambda$ un valor propio de $T$. Defínase a $E_\lambda = \{x \in \mathbb{V}/T(x) = \lambda x\} = N(T - \lambda I_V)$. El conjunto $E_\lambda$ se denomina el *espacio propio* de $T$ correspondiente al valor propio $\lambda$.

**Observación 2.11.17.** El espacio propio de una matriz $A$ es el espacio propio correspondiente del operador $L_A$.

**Teorema 2.11.18.** Sea T un operador lineal en un espacio vectorial dimensionalmente finito $\mathbb{V}$. Si $\lambda$ es un valor propio de $T$ de multiplicidad $m$, entonces $1 \leq dim(E_\lambda) \leq m$.

**Definición 2.11.19.** Sean $W_1, W_2, \dots \dots, W_k$ subespacios de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Escribiremos $\mathbb{V} = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \dots \oplus W_k$ y llamaremos a $\mathbb{V}$ la suma directa de $W_1, W_2, \dots \dots, W_k$ si

$$\mathbb{V} = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

Y

$$W_i \cap \left( \sum_{j \neq i} W_j \right) = \{0\}$$

Para cada $i$ $(1 \leq i \leq k)$.

**Teorema 2.11.20.** Sean $W_1, W_2, \dots \dots, W_k$ subespacios de un espacio vectorial dimensionalmente finito $\mathbb{V}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\mathbb{V} = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \dots \oplus W_k$

b) $\mathbb{V} = \sum_{i=1}^{k} W_i$ y, para vectores $x_1, x_2, \ldots \ldots, x_k$ cualesquiera tales que $x_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, k)$, si $x_1 + x_2 + \ldots \ldots + x_k = 0$, entonces $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, k)$.

c) Cada vector $v$ en $\mathbb{V}$ puede escribirse de manera única en la forma $v = x_1 + x_2 + \ldots \ldots + x_k$, donde $x_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, k)$.

d) Si para toda $i = 1, 2, \ldots \ldots, k$, $\gamma_i$ es una base ordenada cualquiera para $W_i$, entonces $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \ldots \cup \gamma_k$ es una base ordenada para $\mathbb{V}$.

e) Para toda $i = 1, 2, \ldots \ldots, k$ existe una base ordenada $\gamma_i$ para $W_i$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, k)$ tal que $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \ldots \cup \gamma_k$ es una base ordenada para $\mathbb{V}$.

*Demostración:*

$(\boldsymbol{a} \Longrightarrow \boldsymbol{b})$ Si (a) es cierta entonces, por definición

$$\mathbb{V} = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

Supóngase que $x_1, x_2, \ldots \ldots, x_k$ son vectores tales que $x_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, k)$ y $x_1 + x_2 + \ldots \ldots + x_k = 0$. Entonces para cualquier $i$

$$-x_i = \sum_{j \neq i} x_j \in \sum_{j \neq i} W_j$$

Pero también $-x_i \in W_i$ y así $-x_i \in W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j\right) = \{0\}$. Por lo tanto $x_i = 0$, lo que demuestra a (b).

$(\boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{c})$ De acuerdo con (b) se tiene que

$$\mathbb{V} = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

Cualquier vector $v \in \mathbb{V}$ puede ser representado en la forma $v = x_1 + x_2 + \ldots \ldots + x_k$ para algunos elementos $x_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, k)$. Debemos demostrar que esta representación es única. Supóngase por tanto que $v = y_1 + y_2 + \ldots \ldots + y_k$, donde $y_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, k)$. Entonces

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \ldots \ldots + (x_k - y_k) = 0$$

Pero como $x_i - y_i \in W_i$, se deduce de (b) que $x_i - y_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, k)$

Luego $x_i = y_i$ para cada $i$, lo que demuestra la unicidad de la representación.

$(\boldsymbol{c} \Longrightarrow \boldsymbol{d})$ Sea $\gamma_i$ una base para $W_i$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, k)$. Como de acuerdo con (c)

$$\mathbb{V} = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

Es evidente que $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \ldots \cup \gamma_k$ genera a $\mathbb{V}$. Supóngase que existen vectores $x_{ij} \in \gamma_i$ $(j = 1, 2, \ldots \ldots, m_i$ $e$ $i = 1, 2, \ldots \ldots, k)$ y escalares $a_{ij}$ tales que

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_{ij} = 0$$

Hágase

$$y_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} x_{ij}$$

Entonces $y_i \in L(\gamma_i) = W_i$ y $y_1 + y_2 + \ldots \ldots + y_k = \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij} = 0$

Puesto que $0 \in W_i$ para toda $i$ y $0 + 0 + \ldots \ldots + 0 = y_1 + y_2 + \ldots \ldots + y_k$, la condición (c) implica que $y_i = 0$ para toda $i$. Luego,

$$0 = y_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} x_{ij}$$

Para toda $i$. Pero como $\gamma_i$ es linealmente independiente, se obtiene que $a_{ij} = 0$ para $j = 1, 2, \dots \dots, m_i$ y toda $i$. Por lo tanto $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \dots \cup \gamma_k$ es linealmente independiente y entonces es una base para $\mathbb{V}$

$(\boldsymbol{d} \Longrightarrow \boldsymbol{e})$ Es inmediato.

$(\boldsymbol{e} \Longrightarrow \boldsymbol{a})$ Si $\gamma_i$ una base para $W_i$ $(i = 1, 2, \dots \dots, k)$ tal que $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \dots \cup \gamma_k$ es una base para $\mathbb{V}$, entonces

$$\mathbb{V} = L(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \dots \cup \gamma_k) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) + \cdots \dots + L(\gamma_k) = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

Mediante sucesivas aplicaciones del teorema 2.3.10.

Fíjese un índice $i$ y supóngase que $0 \neq v \in W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j\right)$. Entonces

$$v \in W_i = L(\gamma_i) \quad y \quad v \in \sum_{j \neq i} W_j = L\left(\bigcup_{j \neq i} \gamma_j\right)$$

Por lo tanto $v$ es una combinación lineal no trivial de $\gamma_i$ y $\bigcup_{j \neq i} \gamma_j$, de manera que $v$ puede expresarse como combinación lineal de $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \dots \cup \gamma_k$ en más de una manera. Pero esas representaciones contradicen al teorema 2.5.3, por lo que se concluye que $W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j\right) = \{0\}$, demostrando (a).

**Teorema 2.11.21.** Sea $T$ un operador lineal en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión "$n$". Supóngase que el polinomio característico de $T$ se puede descomponer en un producto de factores de grado 1 y sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots \dots, \lambda_k$ los distintos valores propios de $T$. Entonces los siguientes incisos son equivalentes:

a) $T$ es diagonalizable

b) $\mathbb{V} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \dots \oplus E_{\lambda_k}$

c) Si $d_j = dim\left(E_{\lambda_j}\right)$ para $1 \leq j \leq k$, entonces $d_1 + d_2 + \ \dots \dots + d_k = n$

d) Si $m_j$ es la multiplicidad de $\lambda_j$ para toda $j$ $(1 \leq j \leq k)$, entonces

$dim\left(E_{\lambda_j}\right) = m_j$ $(j = 1, 2, \dots \dots, k)$

*Demostración:*

$(\boldsymbol{a} \Longrightarrow \boldsymbol{b})$ Si $T$ es diagonalizable, entonces $\mathbb{V}$ tiene una base que consiste de vectores propios de $T$, de donde se deduce fácilmente que

$$\mathbb{V} = \sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$$

Sean $x_i \in E_{\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \dots \dots, k)$ vectores tales que $x_1 + x_2 + \ \dots \dots + x_k = 0$

Ahora bien, cada $x_i$ es o bien el vector nulo o un vector propio de $T$ correspondiente a $\lambda_i$. Como por el teorema 2.11.12 el conjunto de estos vectores no nulos $x_i$ es linealmente independiente, $x_1 + x_2 + \ \dots \dots + x_k = 0$ implica que $x_1 = x_2 = \ \dots \dots = x_k = 0$. Luego, por el teorema 2.11.20 tenemos que

$$\mathbb{V} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \dots \oplus E_{\lambda_k}$$

$(\boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{c})$ Si $\mathbb{V} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \dots \oplus E_{\lambda_k}$ entonces se infiere de la siguiente proposición:

***Sean $\boldsymbol{W_1}, \boldsymbol{W_2}, \dots \dots, \boldsymbol{W_k}$ subespacios de un espacio vectorial dimensionalmente finito $\mathbb{V}$ tal que***

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{W_i} = \mathbb{V}$$

***Se demuestra que $\mathbb{V}$ es la suma directa de $\boldsymbol{W_1}, \boldsymbol{W_2}, \dots \dots, \boldsymbol{W_k}$ si y sólo si***

$$\boldsymbol{dim}(\mathbb{V}) = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{dim}(\boldsymbol{W_i})$$

Que

$$n = dim(\mathbb{V}) = \sum_{i=1}^{k} dim\left(E_{\lambda_i}\right) = d_1 + d_2 + \ \dots\dots + d_k$$

Así (b) implica a (c).

$(\boldsymbol{c} \Longrightarrow \boldsymbol{d})$ Supóngase que

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = n$$

Por el teorema 2.11.18, $d_j \leq m_j$ para toda $j$ y por tanto

$$n = \sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} m_i$$

Pero

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$$

Puesto que el polinomio característico se descompone en un producto de factores de grado 1. Luego, ya que

$$\sum_{i=1}^{k} (m_i - d_i) = 0 \quad y \quad m_i - d_i \geq 0$$

Para cada $i$, podemos concluir que $d_i = m_i$, para cada $i$.

$(\boldsymbol{d} \Longrightarrow \boldsymbol{a})$ Supóngase que

$$d_j = dim\left(E_{\lambda_j}\right) = m_j$$

Para toda $j$ y sea

$$W = \sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$$

Un argumento similar al del primer párrafo de esta demostración muestra que

$$W = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \dots \oplus E_{\lambda_k}$$

Si $\mathfrak{B}_i$ es una base ordenada para $E_{\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \dots \dots, k)$, entonces de acuerdo con el teorema 2.11.20 $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \dots \dots \cup \mathfrak{B}_k$ es una base para $W$. Pero $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \dots \dots \cup \mathfrak{B}_k$ contiene

$$\sum_{i=1}^{k} dim\left(E_{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} m_i = n$$

Vectores y por lo tanto $W = \mathbb{V}$. De modo que $\mathbb{V}$ tiene una base $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \dots \dots \cup \mathfrak{B}_k$ que está formada por vectores propios de $T$. Luego, $T$ es diagonalizable, lo que demuestra (a).

**Definición 2.11.22.** Sea $T$ un operador lineal sobre un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Un subespacio $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ se llama subespacio invariante por $T$ si para todo vector $x$ de $\mathbb{W}$ el vector $T(x)$ está en $\mathbb{W}$, es decir, si $T(\mathbb{W}) \subseteq \mathbb{W}$.

# CAPITULO III

## MATERIALES Y MÉTODOS

### 3.1. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

#### 3.1.1. Tipo de investigación

Esta es una investigación del tipo científico - básico, por que busca el conocimiento de la realidad o de un hecho concreto, para contribuir a la sociedad y que responda mejor a los retos de la humanidad. No busca la aplicación práctica de sus descubrimientos, sino el aumento del conocimiento para responder a preguntas o para que esos conocimientos puedan ser aplicados en otras investigaciones.

#### 3.1.2. Diseño de investigación

Es una investigación bibliográfica.

#### 3.1.3. Método de investigación

La metodología que se aplicará para este trabajo de investigación es el Método Hipotético - Deductivo.

#### 3.1.4. Técnica de investigación

La técnica de investigación es la de lectura, análisis, síntesis e interpretación de resultados.

### 3.2. MATERIALES

Los materiales que se utilizó para este trabajo de tesis son básicamente libros en físico, de internet y una computadora.

# CAPITULO IV

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1 ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

**Definición 4.1.1.** Sean $\mathbb{K}$ el campo de los números reales, o de los complejos, y $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un *producto interno* en $\mathbb{V}$ es una función que asigna a cada par ordenado de vectores $u$ y $v$ en $\mathbb{V}$ un escalar en $\mathbb{K}$ representado como $\langle u|v\rangle$, tal que para todo $u, v, w$ de $\mathbb{V}$ y todo $\alpha$ de $\mathbb{K}$ se tiene que:

a) $\langle u+v|w\rangle = \langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle$

b) $\langle \alpha u|v\rangle = \alpha\langle u|v\rangle$

c) $\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}$ , donde la barra indica conjugación compleja

d) $\langle u|u\rangle > 0, si\ u \neq 0$

**Ejemplo 4.1.2.** En $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$ existe un producto interno que se llama "producto interno canónico". Está definido sobre $u = (x_1, x_2, \dots \dots, x_n)$ y $v = (y_1, y_2, \dots \dots, y_n)$ por

$$\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$$

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, esto también puede escribirse

$$\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

En el caso real, el producto interno canónico es llamado a menudo "producto escalar", y se representa por $u\,.\,v$

**Definición 4.1.3.** Sea $A$ una matriz de orden $m \times n$ con elementos de $\mathbb{K}$. Definimos la *matriz transpuesta conjugada* de $A$, denotada por $A^*$, como la matriz de orden $n \times m$ tal que $(A^*)_{ij} = \overline{A}_{ji}$

**Ejemplo 4.1.4.** Sea $A = \begin{pmatrix} i & 1+2i \\ 2 & 3+4i \end{pmatrix}$, entonces $A^* = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1-2i & 3-4i \end{pmatrix}$

Nótese que si $A$ tuviera elementos reales, entonces $A^*$ es sencillamente la transpuesta de $A$.

**Definición 4.1.5.** Un *espacio con producto interno* es un espacio vectorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{K}$ dotado con un producto interior específico.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, llamamos a $\mathbb{V}$ espacio con producto interno complejo, mientras que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, llamamos a $\mathbb{V}$ espacio con producto interno real. Un espacio con producto interno real de dimensión finita se llama a menudo *espacio euclidiano*.

**Teorema 4.1.6.** Si $\mathbb{V}$ es un espacio con producto interno, entonces para vectores cualesquiera $u, v, w$ de $\mathbb{V}$ y cualquier escalar $\alpha$

a) $\langle u|v+w\rangle = \langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle$

b) $\langle u|\alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u|v\rangle$

c) $\langle u|u\rangle = 0 \; si\; y\; sólo\; si\; u = 0$

d) Si $\langle u|v\rangle = \langle u|w\rangle$, entonces $v = w$

*Demostración*:

a) $\langle u|v+w\rangle = \overline{\langle v+w|u\rangle} = \overline{\langle v|u\rangle + \langle w|u\rangle} = \overline{\langle v|u\rangle} + \overline{\langle w|u\rangle} = \langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle$

b) $\langle u|\alpha v\rangle = \overline{\langle \alpha v|u\rangle} = \overline{\alpha\langle v|u\rangle} = \overline{\alpha}\,.\,\overline{\langle v|u\rangle} = \overline{\alpha}\langle u|v\rangle$

**Definición 4.1.7.** Sea $\mathbb{V}$ es un espacio con producto interno. Para $u \in \mathbb{V}$ definimos la *norma* (o longitud) de $u$ mediante $\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$

**Ejemplo 4.1.8.** Sea $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$. Entonces

$$\|(x_1, x_2, \dots \dots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

es la definición euclidiana de longitud. Nótese que si $n = 1$, tenemos que $\|x\| = |x|$.

**Teorema 4.1.9.** Si $\mathbb{V}$ es un espacio con producto interno, entonces para vectores cualesquiera $u, v$ de $\mathbb{V}$ y cualquier $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos

a) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$

b) $\|u\| > 0$ para $u \neq 0$ y $\|u\| = 0$ si y sólo si $u = 0$

c) $|\langle u|v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$ (Desigualdad de Cauchy – Schwarz)

d) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Desigualdad triangular)

*Demostración*:

a) $\|\alpha u\| = \sqrt{\langle \alpha u|\alpha u\rangle} = \sqrt{\alpha\langle u|\alpha u\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle u|u\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2\langle u|u\rangle}$

$$= \sqrt{|\alpha|^2}\,.\sqrt{\langle u|u\rangle} = |\alpha|\|u\|$$

b) Esta propiedad se sigue inmediatamente de la parte d) de la definición 4.1.1 y la parte c) del teorema 4.1.6.

c) Si $v = 0$, entonces el resultado es inmediato. Así, supóngase que $y \neq 0$.

Entonces, para cualquier $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$0 \leq \|u - \alpha v\|^2 = \langle u - \alpha v | u - \alpha v \rangle = \langle u | u - \alpha v \rangle - \alpha \langle v | u - \alpha v \rangle$$

$$= \langle u | u \rangle - \overline{\alpha} \langle u | v \rangle - \alpha \langle v | u \rangle + \alpha \overline{\alpha} \langle v | v \rangle$$

Haciendo

$$\alpha = \frac{\langle u | v \rangle}{\langle v | v \rangle}$$

La desigualdad anterior será

$$0 \leq \langle u | u \rangle - \frac{|\langle u | v \rangle|^2}{\langle v | v \rangle} = \|u\|^2 - \frac{|\langle u | v \rangle|^2}{\|v\|^2}$$

De donde se obtiene

$$|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

d) $\|u + v\|^2 = \langle u + v | u + v \rangle = \langle u | u \rangle + \langle v | u \rangle + \langle u | v \rangle + \langle v | v \rangle$

$$= \|u\|^2 + 2\, Re \langle u | v \rangle + \|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 + 2 |\langle u | v \rangle| + \|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \,.\, \|v\| + \|v\|^2$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

De donde se obtiene

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

**Definición 4.1.10.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno. Un vector $u$ en $\mathbb{V}$ es un *vector unitario* si $\|u\| = 1$

**Definición 4.1.11.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno. Los *vectores* $u$ y $v$ son *ortogonales* si $\langle u | v \rangle = 0$

**Definición 4.1.12.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno. Un *subconjunto* $S$ de $\mathbb{V}$ es *ortogonal* si cualquier par de elementos distintos de $S$ es ortogonal.

**Definición 4.1.13.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno. Un subconjunto $S$ de $\mathbb{V}$ es *ortonormal* si $S$ es ortogonal y está formado únicamente de vectores unitarios.

**Ejemplo 4.1.14.** El conjunto $S = \{(1,1),(1,-1)\}$ en $\mathbb{R}^2$ es ortogonal pero no ortonormal; sin embargo, conjunto $S = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ es ortonormal.

**Teorema 4.1.15.** Un conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.

*Demostración*:

Sea $S$ un conjunto ortogonal finito o infinito de vectores no nulos en un espacio con producto interno dado. Supóngase que $v_1, v_2, \dots\dots, v_m$ son vectores distintos en $S$ y que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ \dots\dots + \alpha_m v_m$$

Entonces

$$\langle u | v_k \rangle = \left\langle \sum_j \alpha_j v_j \middle| v_k \right\rangle = \sum_j \alpha_j \langle v_j | v_k \rangle = \alpha_k \langle v_k | v_k \rangle$$

Como $\langle v_k | v_k \rangle \neq 0$, se sigue que

$$\alpha_k = \frac{\langle u | v_k \rangle}{\|v_k\|^2} \quad , \quad 1 \leq k \leq m$$

Así, cuando $u = 0$, cada $\alpha_k = 0$, de modo que $S$ es un conjunto linealmente independiente.

**Corolario 4.1.16.** Si un vector $u$ es combinación lineal de una sucesión ortogonal de vectores no nulos $v_1, v_2, \dots \dots, v_m$, entonces $u$ es igual a la combinación lineal particular

$$u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle u|v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k$$

**Teorema 4.1.17.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno y sean $v_1, v_2, \dots \dots, v_n$ vectores independientes cualesquiera de $\mathbb{V}$. Entonces se pueden construir vectores ortogonales $u_1, u_2, \dots \dots, u_n$ en $\mathbb{V}$ tales que para cada $k = 1, 2, \dots \dots, n$ el conjunto $u_1, u_2, \dots \dots, u_k$ sea una base del subespacio generado por $v_1, v_2, \dots \dots, v_k$

**Corolario 4.1.18.** Todo espacio con producto interno de dimensión finita tiene una base ortonormal.

**Teorema 4.1.19.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio dimensionalmente finito con producto interior. Entonces $\mathbb{V}$ tiene una base ortonormal $\mathfrak{B}$. Además, si $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$ y $x \in \mathbb{V}$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|x_i \rangle \, x_i$$

**Definición 4.1.20.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno y $S$ cualquier conjunto de vectores en $\mathbb{V}$. El *complemento ortogonal* de $S$ es el conjunto $S^{\perp}$ de los vectores de $\mathbb{V}$ ortogonales a todo vector de $S$.

**Teorema 4.1.21.** Sea $\mathbb{W}$ un subespacio de dimensión finita de un espacio con producto interno $\mathbb{V}$. Entonces $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$

*Demostración:*

Por el teorema 4.1.19 podemos escoger una base ortonormal $\{x_1, x_2, \dots \dots, x_k\}$ para $\mathbb{W}$. Entonces, para $y \in \mathbb{V}$, defínase

$$y_1 = \sum_{i=1}^{k} \langle y|x_i\rangle\, x_i \quad y \quad y_2 = y - y_1$$

Es evidente que $y = y_1 + y_2$ y $y_1 \in \mathbb{W}$. Con el objeto de demostrar que $\mathbb{V} = \mathbb{W} + \mathbb{W}^{\perp}$, debemos demostrar que $y_2 \in \mathbb{W}^{\perp}$, para lo cual es suficiente demostrar que $\langle y_2|x_j\rangle = 0$ para $j = 1, 2, \dots \dots, k$. Ahora bien,

$$\langle y_2|x_j\rangle = \langle y - y_1|x_j\rangle = \langle y|x_j\rangle - \langle y_1|x_j\rangle$$

pero

$$\langle y_1|x_j\rangle = \langle \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle y|x_i\rangle\, x_i|x_j\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle y|x_i\rangle \langle x_i|x_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle y|x_i\rangle\, \delta_{ij} = \langle y|x_j\rangle$$

Por lo tanto $\langle y_2|x_j\rangle = 0$.

Para completar la demostración debemos demostrar que $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^{\perp} = \{0\}$. Pero si $x \in \mathbb{W} \cap \mathbb{W}^{\perp}$, entonces $\langle x|x\rangle = 0$. Por lo tanto $x = 0$.

**Corolario 4.1.22.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno de dimensión finita y sea $\mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$. Entonces $dim(\mathbb{W}) + dim(\mathbb{W}^{\perp}) = dim(\mathbb{V})$

## 4.2 EL ADJUNTO DE UN OPERADOR LINEAL

**Teorema 4.2.1.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal sobre $\mathbb{V}$. Entonces, existen un único vector $v \in \mathbb{V}$ tal que $f(u) = \langle u|v\rangle$ para todo $u \in \mathbb{V}$.

*Demostración*:

Si se elige una base ortonormal $\{u_1, u_2, \dots \dots, u_n\}$ para $\mathbb{V}$, el producto interno de $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots \dots + \alpha_n u_n$ y $v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots \dots + \beta_n u_n$ será

$$\langle u|v\rangle = \alpha_1 \overline{\beta}_1 + \alpha_2 \overline{\beta}_2 + \dots \dots + \alpha_n \overline{\beta}_n$$

Si $f$ es un funcional lineal cualquiera sobre $\mathbb{V}$, entonces $f$ tiene la forma

$$f(u) = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \cdots \dots + c_n \alpha_n$$

Para escalares fijos $c_1, c_2, \dots \dots, c_n$ determinados por la base. Ciertamente $c_i = f(u_i)$. Como se desea encontrar un vector $v$ en $\mathbb{V}$ tal que $\langle u|v\rangle = f(u)$ para todo $u$, entonces es evidente que las coordenadas $\beta_i$ de $v$ deben satisfacer $\overline{\beta}_i = c_i$ o $\beta_i = \overline{f(u_i)}$. Por consiguiente, $v = \overline{f(u_1)} u_1 + \overline{f(u_2)} u_2 + \dots \dots + \overline{f(u_n)} u_n$

Si definimos el funcional lineal $g\colon \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante $g(u) = \langle u|v\rangle$, para $1 \leq j \leq n$ tenemos

$$g(u_j) = \langle u_j|v\rangle = \left\langle u_j \middle| \overline{f(u_1)} u_1 + \overline{f(u_2)} u_2 + \dots \dots + \overline{f(u_n)} u_n \right\rangle$$

$$g(u_j) = \left\langle u_j \middle| \overline{f(u_1)} u_1 \right\rangle + \left\langle u_j \middle| \overline{f(u_2)} u_2 \right\rangle + \dots \dots + \left\langle u_j \middle| \overline{f(u_n)} u_n \right\rangle$$

$$g(u_j) = f(u_1)\langle u_j|u_1\rangle + f(u_2)\langle u_j|u_2\rangle + \dots \dots + f(u_n)\langle u_j|u_n\rangle$$

$$g(u_j) = f(u_1)\langle u_j|u_1\rangle + f(u_2)\langle u_j|u_2\rangle + \dots \dots + f(u_j)\langle u_j|u_j\rangle + \dots \dots + f(u_n)\langle u_j|u_n\rangle$$

Como $\{u_1, u_2, \dots \dots, u_n\}$ es ortonormal $g(u_j) = f(u_j)\langle u_j|u_j\rangle = f(u_j)\|u_j\|^2 = f(u_j)$. Como esto es cierto para todo $u_j$, se sigue que $f = g$

Para demostrar que $v$ es única, supóngase que $f(u) = \langle u|v'\rangle$ para todo $u$. Entonces $\langle u|v\rangle = \langle u|v'\rangle$ para todo $u$ y luego por el teorema 4.1.6, parte d) tenemos que $v = v'$.

**Teorema 4.2.2.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno de dimensión finita y sea $T$ un operador lineal en $\mathbb{V}$. Entonces existe un único operador lineal $T^*$ en $\mathbb{V}$ tal que $\langle T(x)|y\rangle = \langle x|T^*(y)\rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{V}$.

*Demostración*:

Sea $y \in \mathbb{V}$. Defínase a $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante $f(x) = \langle T(x)|y\rangle$ para todo $x \in \mathbb{V}$. Primero demostraremos que $f$ es lineal. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{V}$ y $c \in \mathbb{K}$. Entonces

$$f(cx_1 + x_2) = \langle T(cx_1 + x_2)|y\rangle = \langle cT(x_1) + T(x_2)|y\rangle = c\langle T(x_1)|y\rangle + \langle T(x_2)|y\rangle = cf(x_1) + f(x_2)$$

Por lo tanto, $f$ es lineal.

Ahora podemos emplear el teorema 4.2.1 para obtener un vector único $y' \in \mathbb{V}$ tal que $f(x) = \langle x|y'\rangle$; esto es $\langle T(x)|y\rangle = \langle x|y'\rangle$, para toda $x \in \mathbb{V}$. Definiendo a $T^*: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ mediante $T^*(y) = y'$, tenemos que $\langle T(x)|y\rangle = \langle x|T^*(y)\rangle$. Para demostrar que $T^*$ es lineal, sean $y_1, y_2 \in \mathbb{V}$ y $c \in \mathbb{K}$. Entonces para cualquier $x \in \mathbb{V}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle x|T^*(cy_1 + y_2)\rangle &= \langle T(x)|cy_1 + y_2\rangle \\
&= \overline{c}\langle T(x)|y_1\rangle + \langle T(x)|y_2\rangle \\
&= \overline{c}\langle x|T^*(y_1)\rangle + \langle x|T^*(y_2)\rangle \\
&= \langle x|cT^*(y_1) + T^*(y_2)\rangle
\end{aligned}$$

Como $x$ es arbitraria, tenemos que $T^*(cy_1 + y_2) = cT^*(y_1) + T^*(y_2)$ de acuerdo con el teorema 4.1.6, parte d). finalmente, sólo nos queda demostrar que $T^*$ es única. Supóngase que $U: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ es lineal y satisface $\langle T(x)|y\rangle = \langle x|U(y)\rangle$ para toda $x, y \in \mathbb{V}$. Entonces $\langle x|T^*(y)\rangle = \langle x|U(y)\rangle$ para toda $x, y \in \mathbb{V}$ y finalmente $T^* = U$.

**Observación 4.2.3.** El operador lineal $T^*$ descrito en el teorema anterior se llama *adjunto del operador $T$.*

**Teorema 4.2.4.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \dots \dots, u_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$. Sea $T$ un operador lineal sobre $\mathbb{V}$ y sea $A = [T]_{\mathfrak{B}}$ la matriz de $T$ en la base ordenada $\mathfrak{B}$. Entonces $A_{ij} = \langle T(u_j) | u_i \rangle$

*Demostración*:

Como $\mathfrak{B}$ es una base ortonormal, se tiene que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u | u_i \rangle u_i$$

La matriz $A$ está definida por

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} u_i$$

Y como

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u_j) | u_i \rangle u_i$$

Se tiene $A_{ij} = \langle T(u_j) | u_i \rangle$

**Corolario 4.2.5.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno de dimensión finita y Sea $T$ un operador lineal sobre $\mathbb{V}$. En cualquier base ortogonal de $\mathbb{V}$ la matriz de $T^*$ es la conjugada de la transpuesta de la matriz de $T$.

*Demostración*:

Sea $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \dots \dots, u_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$, sea $A = [T]_{\mathfrak{B}}$ y $B = [T^*]_{\mathfrak{B}}$

De acuerdo con el teorema 4.1.19, $A_{ij} = \langle T(u_j) | u_i \rangle$ y $B_{ij} = \langle T^*(u_j) | u_i \rangle$

Por definición de $T^*$ se tiene que

$$B_{ij} = \langle T^*(u_j)|u_i\rangle = \overline{\langle u_i|T^*(u_j)\rangle} = \overline{\langle T(u_i)|u_j\rangle} = \overline{A_{ji}}$$

**Teorema 4.2.6.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno de dimensión finita. Si $T$ y $U$ son operadores lineales en $\mathbb{V}$, entonces

a) $(T+U)^* = T^* + U^*$

b) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$, para cualquier $\alpha$ escalar

c) $(TU)^* = U^*T^*$

d) $(T^*)^* = T$

e) $I^* = I$

*Demostración*:

a) Sean $x$ y $y$ vectores en $\mathbb{V}$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle (T+U)(x)|y\rangle &= \langle T(x) + U(x)|y\rangle \\ &= \langle T(x)|y\rangle + \langle U(x)|y\rangle \\ &= \langle x|T^*(y)\rangle + \langle x|U^*(y)\rangle \\ &= \langle x|T^*(y) + U^*(y)\rangle \\ &= \langle x|(T^* + U^*)(y)\rangle\end{aligned}$$

De la unicidad del adjunto se tiene que $(T+U)^* = T^* + U^*$

c) $\langle TU(x)|y\rangle = \langle U(x)|T^*(y)\rangle = \langle x|U^*T^*(y)\rangle$

De la unicidad del adjunto se tiene que $(TU)^* = U^*T^*$

d) $\langle T^*(x)|y\rangle = \overline{\langle y|T^*(x)\rangle} = \overline{\langle T(y)|x\rangle} = \langle x|T(y)\rangle$

De la unicidad del adjunto se tiene que $(T^*)^* = T$

### 4.3 OPERADORES NORMALES

**Definición 4.3.1.** Sean $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno de dimensión finita y $T$ un operador lineal en $\mathbb{V}$. Se dice que $T$ es *normal* si conmuta con su adjunto; es decir, $TT^* = T^*T$

**Teorema 4.3.2.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno, y sea $T$ un operador normal en $\mathbb{V}$. Entonces

a) $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$ para toda $v \in \mathbb{V}$

b) $T - \alpha I$ es normal para toda $\alpha \in \mathbb{K}$

c) Si $\lambda$ es un valor propio de $T$, entonces $\overline{\lambda}$ es un valor propio de $T^*$. De hecho, $T(v) = \lambda v$ implica que $T^*(v) = \overline{\lambda} v$

d) Si $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son distintos valores propios de $T$ con vectores propios correspondientes $v_1$ y $v_2$, entonces $v_1$ y $v_2$ son ortogonales.

*Demostración*:

a) Para cualquier $v \in \mathbb{V}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|T(v)\|^2 &= \langle T(v)|T(v)\rangle \\ &= \langle T^*T(v)|v\rangle \\ &= \langle TT^*(v)|v\rangle \\ &= \langle T^*(v)|T^*(v)\rangle \\ &= \|T^*(v)\|^2\end{aligned}$$

Con lo cual $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$

b) Es claro.

c) Sea $U = T - \lambda I$ y supóngase que $T(v) = \lambda v$ para alguna $v \in \mathbb{V}$.

Entonces $U(v) = 0$, y en virtud de $(a)$ y $(b)$ tenemos que

$$0 = \|U(v)\| = \|U^*(v)\| = \left\|\left(T^* - \overline{\lambda} I\right)(v)\right\| = \left\|T^*(v) - \overline{\lambda} v\right\|$$

Por lo tanto $T^*(v) = \overline{\lambda} v$

d) Sean $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son distintos eigenvalores de $T$ con vectores propios correspondientes $v_1$ y $v_2$. Entonces, utilizando el inciso c), tenemos que

$$\lambda_1\langle v_1|v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1|v_2\rangle = \langle T(v_1)|v_2\rangle = \langle v_1|T^*(v_2)\rangle = \left\langle v_1\middle|\overline{\lambda_2} v_2\right\rangle$$
$$= \lambda_2\langle v_1|v_2\rangle$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ concluimos que $\langle v_1|v_2\rangle = 0$.

**Corolario 4.3.3.** Sea $T$ un operador normal en un espacio con producto interno $\mathbb{V}$ y sea $\mathfrak{B}$ una base ortonormal para $\mathbb{V}$. Entonces $\mathfrak{B}$ está formada por vectores propios de $T$ si y sólo si $\mathfrak{B}$ está formada por vectores propios de $T^*$.

**Definición 4.3.4.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno, y sea $T$ un operador lineal en $\mathbb{V}$. $T$ se denomina *operador autoadjunto* si $T = T^*$. Una matriz $A$ de orden $n \times n$ es autoadjunta si $A = A^*$.

**Corolario 4.3.5.** Sea $T$ un operador lineal autoadjunto en un espacio con producto interno $\mathbb{V}$. Si $\lambda$ es un valor propio de $T$, entonces $\lambda$ es un número real.

*Demostración*:

Sea $v$ un vector propio correspondiente al valor propio $\lambda$. Por el inciso (c) del teorema 4.3.2 tenemos que $\lambda v = T(v) = T^*(v) = \bar{\lambda} v$. Como $v \neq 0$, tenemos que $\lambda = \bar{\lambda}$; por lo tanto $\lambda$ es real.

**Teorema 4.3.6.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, y sea $T$ un operador lineal en $\mathbb{V}$.

a) Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial complejo (esto es, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), entonces $T$ tiene un valor propio.

b) Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial real (o sea, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) y $T$ es autoadjunto, entonces $T$ tiene un valor propio (real).

*Demostración*:

Supóngase que $dim(\mathbb{V}) = n$, y sea $f$ el polinomio característico de $T$.

a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces por el teorema fundamental del álgebra garantiza que $f$ tiene un cero. Por tanto, $T$ tiene un valor propio.

b) Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathfrak{B}$ una base ortonormal para $\mathbb{V}$. Entonces $A = [T]_{\mathfrak{B}}$ es autoadjunta y tiene elementos reales.

   Defínase a $T_A: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante $T_A(x) = Ax$. De (a) se tiene que $T_A$ tiene un valor propio $\lambda$. Como la matriz de $T_A$ en la base ordenada estándar para $\mathbb{C}^n$ es $A$, tenemos que $T_A$ es autoadjunto y, por lo tanto, según el corolario 4.3.5, $\lambda$ es real. Luego, el polinomio $f(t) = det(A - tI)$ tiene el cero real $\lambda$ y entonces $T$ tiene el valor propio $\lambda$.

**Teorema 4.3.7.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno complejo de dimensión finita, y sea $T$ un operador lineal en $\mathbb{V}$. Entonces $T$ es normal si y sólo si $\mathbb{V}$ tiene una base ortonormal formada por vectores propios de $T$.

**Teorema 4.3.8.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno real y dimensionalmente finito, y sea $T$ un operador lineal en $\mathbb{V}$. Entonces $T$ es autoadjunto si y sólo si $\mathbb{V}$ tiene una base ortonormal formada por vectores propios de $T$.

*Demostración*:

Supondremos primero que $T$ es normal o autoadjunto y luego obtendremos la base ortonormal adecuada. La demostración se hará por inducción sobre $dim(\mathbb{V}) = n$. Si $n = 1$, entonces $\mathbb{V} = L(\{x\})$ para alguna $x \neq 0$. En este caso es obvio que $\{(1/\|x\|)x\}$ es una base ortonormal formada por un vector propio de $T$.

Ahora supóngase que el resultado es cierto para operadores normales (autoadjuntos) en espacios con producto interno de dimensión $n - 1$. Demostraremos que el resultado es cierto para el operador $T$ en $\mathbb{V}$.

Por el teorema 4.3.6, $T$ tiene un eigenvalor $\lambda_1$; sea $x_1$ un eigenvector asociado. Supondremos que $\|x_1\| = 1$. Sea $\mathbb{W} = L(\{x_1\})$. De acuerdo con el teorema 4.3.2, $x_1$ es también un eigenvector de $T^*$, de manera que evidentemente $\mathbb{W}$ es invariante por $T$ y $T^*$. Además, $\mathbb{W}^\perp$ es invariante por $T$ y $T^*$, además $T_{W^\perp}$ es normal (autoadjunto) puesto que $T$ lo es. Del corolario 4.1.22 tenemos que $dim(\mathbb{W}^\perp) = n - 1$. Por lo tanto, podemos aplicar la hipótesis de inducción a $T_{W^\perp}$ para producir una base ortonormal $\{x_2, x_3, \dots \dots, x_n\}$ para $\mathbb{W}^\perp$ formada por vectores propios de $T_{W^\perp}$ y, por lo tanto, de $T$. Se infiere fácilmente que $\{x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$ es la base ortonormal deseada para $\mathbb{V}$.

La primera parte de la demostración, que es la más difícil, queda terminada. Ahora supongamos que $\{x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$ es una base ortonormal formada por vectores propios de $T$ con $T(x_i) = \lambda_i x_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Si $\mathbb{V}$ es un espacio con producto interno complejo, entonces por el teorema 4.3.2

$$(TT^*)(x_i) = T\left(\overline{\lambda_i} x_i\right) = \overline{\lambda_i} T(x_i) = \overline{\lambda_i} \lambda_i x_i = |\lambda_i|^2 x_i, para\ 1 \leq i \leq n$$

Análogamente

$$(T^*T)(x_i) = |\lambda_i|^2 x_i, para\ 1 \leq i \leq n$$

Por lo tanto, $T$ es normal.

Por otra parte, si $\mathbb{V}$ es un espacio con producto interno real, entonces $\lambda_i$ es real para $1 \leq i \leq n$. Así, $T(x_i) = \lambda_i x_i = \overline{\lambda_i} x_i = T^*(x_i)$, para $1 \leq i \leq n$ y, por lo tanto, $T$ es autoadjunto.

## 4.4 PROYECCIONES ORTOGONALES Y EL TEOREMA ESPECTRAL

**Definición 4.4.1.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno, y sea $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ una proyección. Decimos que $T$ es una proyección ortogonal si $Im(T)^\perp = N(T)$ y $N(T)^\perp = Im(T)$.

**Teorema 4.4.2.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio con producto interno, y sea $T$ un operador lineal en $\mathbb{V}$. Entonces $T$ es una proyección ortogonal si y sólo si $T^2 = T = T^*$.

*Demostración*:

Supóngase que $T$ es una proyección ortogonal. Como $T = T^2$ por el hecho de ser $T$ una proyección, sólo necesitamos demostrar que $T = T^*$. Ahora bien,

$\mathbb{V} = Im(T) \oplus N(T)$ y $Im(T)^\perp = N(T)$. Si $x, y \in \mathbb{V}$, entonces $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$, donde $x_1, y_1 \in Im(T)$ y $x_2, y_2 \in N(T)$. Por lo tanto

$$\langle x | T(y) \rangle = \langle x_1 + x_2 | y_1 \rangle = \langle x_1 | y_1 \rangle + \langle x_2 | y_1 \rangle = \langle x_1 | y_1 \rangle$$

Y

$$\langle x|T^*(y)\rangle = \langle T(x)|y\rangle = \langle x_1|y_1 + y_2\rangle = \langle x_1|y_1\rangle + \langle x_1|y_2\rangle = \langle x_1|y_1\rangle$$

Así, $\langle x|T(y)\rangle = \langle x|T^*(y)\rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{V}$ y, por lo tanto, $T = T^*$.

Ahora supóngase $T = T^2 = T^*$. Para que $T$ sea una proyección ortogonal, debemos demostrar que $Im(T) = N(T)^{\perp}$ y $Im(T)^{\perp} = N(T)$. Sean $x \in R(T)$ y $y \in N(T)$. Entonces $x = T(x) = T^*(x)$, y así $\langle x|y\rangle = \langle T^*(x)|y\rangle = \langle x|T(y)\rangle = \langle x|0\rangle = 0$. Por lo tanto $x \in N(T)^{\perp}$, de donde se tiene que $Im(T) \subseteq N(T)^{\perp}$. Sea $y \in N(T)^{\perp}$; debemos demostrar que $y \in Im(T)$, esto es, que $T(y) = y$. Ahora bien, $\|y - T(y)\|^2 = \langle y - T(y)|y - T(y)\rangle = \langle y|y - T(y)\rangle - \langle T(y)|y - T(y)\rangle$

Como $y - T(y) \in N(T)$, el primer término es cero. Pero también

$$\langle T(y)|y - T(y)\rangle = \langle y|T^*(y - T(y))\rangle = \langle y|T(y - T(y))\rangle = \langle y|0\rangle = 0$$

Así, tenemos que $y - T(y) = 0$; esto es, $y = T(y) \in Im(T)$. Por lo tanto $Im(T) \subseteq N(T)^{\perp}$

Utilizando lo anterior, tenemos que $Im(T)^{\perp} = N(T)^{\perp\perp} \supseteq N(T)$. Únicamente necesitamos demostrar que si $x \in Im(T)^{\perp}$, entonces $x \in N(T)$. Para cualquier $y \in \mathbb{V}$, tenemos que $\langle T(x)|y\rangle = \langle x|T^*(y)\rangle = \langle x|T(y)\rangle = 0$. Así, $T(x) = 0$ y por tanto $x \in N(T)$.

**Teorema 4.4.3.** (*El teorema espectral*). Sea $T$ es un operador lineal en un espacio con producto interno de dimensión finita $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{K}$. Supóngase que $T$ es normal si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (y que $T$ es autoadjunta si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots, \lambda_k$ son los distintos valores propios de $T$, sea $W_i = E_{\lambda_i} = \{x \in \mathbb{V}/T(x) = \lambda_1 x\}$ el espacio propio de $T$ correspondiente al valor propio $\lambda_i (1 \leq i \leq k)$ y sea $T_i$ la proyección ortogonal sobre $W_i$ $(1 \leq i \leq k)$. Entonces

a) $\mathbb{V} = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k$

b) Si $W_i'$ es la suma directa de los subespacios $W_j, j \neq i$, entonces $W_i^{\perp} = W_i'$

c) $T_i T_j = \delta_{ij} T_i$ para $1 \leq i, j \leq k$

d) $I = T_1 + T_2 + \ \ldots\ldots + T_k$

e) $T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \ \ldots\ldots + \lambda_k T_k$

[*Friedberg – Insel – Spence. Álgebra Lineal. Pág. 458*]

*Demostración*:

a) De acuerdo con el teorema 4.3.7 y teorema 2.11.3, $T$ es diagonalizable y entonces, de acuerdo con el teorema 2.11.21, se tiene que

$$\mathbb{V} = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k$$

b) Si $x \in W_i$ y $y \in W_j$ para algunas $i$ y $j$, entonces $\langle x|y\rangle = 0$, de acuerdo con el teorema 4.3.2. Se infiere de esto fácilmente que $W_i' \subseteq W_i^{\perp}$. Ahora bien, de (a) tenemos que

$$dim(W_i') = \sum_{j \neq i} dim\left(W_j\right) = dim(\mathbb{V}) - dim(W_i)$$

Por otra parte, de acuerdo con el corolario 4.1.21, tenemos que $dim(W_i^{\perp}) = dim(\mathbb{V}) - dim(W_i)$. Por lo tanto, $W_i' = W_i^{\perp}$, con lo que se demuestra el inciso (b).

c) Es claro.

d) Como $T_i$ es la proyección ortogonal sobre $W_i$, tenemos de (b) que $N(T_i) = Im(T_i)^{\perp} = W_i^{\perp} = W_i'$. Por lo tanto, para $x \in \mathbb{V}$ tenemos que $x = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_k$, donde $x_j \in W_j$ y $T_i(x) = x_i$, demostrando así el inciso (d).

e) Para $x \in \mathbb{V}$, escríbase $x = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_k$, donde $x_j \in W_j (1 \leq j \leq k)$. Entonces

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x_1) + T(x_2) + \ldots\ldots + T(x_k) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots\ldots + \lambda_k x_k \\ &= \lambda_1 T_1(x) + \lambda_2 T_2(x) + \ldots\ldots + \lambda_k T_k(x) \\ &= (\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \ldots\ldots + \lambda_k T_k)(x) \end{aligned}$$

**Observación 4.4.4.** El conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_k\}$ de valores propios de $T$ se llama *espectro de* $T$, la suma $I = T_1 + T_2 + \ldots\ldots + T_k$ del inciso (d) se llama *resolución del operador identidad inducida por* $T$, y la suma $T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \ldots\ldots + \lambda_k T_k$ del inciso (e) se denomina *descomposición espectral de* $T$.

# V. CONCLUSIONES

- Se enuncio y demostró el teorema espectral para operadores lineales en un espacio vectorial complejo de dimensión finita, el cual es una versión general y nos condujo a un mayor entendimiento de como el operador actúa sobre el espacio vectorial.

- Se demostró que existe una base ortonormal $\mathfrak{B}$ para un espacio vectorial $\mathbb{V}$ tal que la matriz que representa al operador lineal $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ es diagonal, esto permitió que dicho operador se exprese como una suma de operadores más simples.

- En el caso de dimensión finita, el espectro de un operador lineal sólo está formado por valores propios.

- Como los distintos valores propios de $T$ quedan determinados de manera única (hasta el orden) por los subespacios $W_i$ (y, por lo tanto, por las proyecciones ortogonales $T_i$), la descomposición espectral de $T$ es única.

# VI. RECOMENDACIONES

- Concientizar a los estudiantes respecto a la importancia de Algebra Lineal en las matemáticas, en las aplicaciones a ingenierías u otras ciencias. Y más aún, sabiendo que es un curso base para seguir estudios de postgrado para los matemáticos y físicos.

- Incentivar a los estudiantes de matemática a estudiar la extensión de este teorema a espacios de dimensión infinita

- Instar a los estudiantes de matemática a investigar el teorema espectral de operadores no lineales.

- A los estudiantes de Física investigar las aplicaciones de este teorema en la mecánica cuántica, ya que por ser ésta una rama de la física que tiene muchos avances, ha hecho posible el descubrimiento y desarrollo de muchas tecnologías.

- A los docentes del departamento, se les insta a mostrar la gran relevancia e importancia del teorema espectral en Algebra Lineal en estudiantes de pregrado y postgrado.

# VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Stephen H. Friedberg - Arnold J. Insel -Lawrence E. Spence. (1982). *Algebra Lineal* (Primera edición). Publicaciones cultural.

Kenneth Hoffman - Ray Kunze (1982). *Algebra Lineal* (2da edición). Prentice Hall Hispanoamericana.

Elon Lages Lima (1998). *Algebra Lineal*. Colección textos del IMCA

Seymour Lipschutz (1992). *Algebra Lineal* (2da edición). McGraw-Hill. Colección Schaum.

Claudio Pita Ruiz (1995). *Algebra Lineal* (2da edición). McGraw-Hill.

Bernard Kolman - David R. Hill (2006). *Algebra Lineal* (8va edición). Pearson Eduacación.

Armando O. Rojo (1998). *Algebra II* (14a edición). El Ateneo.

Juan Carlos del Valle Sotelo (2012). *Algebra Lineal* (1ra edición). McGraw-Hill.

David C. Lay (2012). *Algebra Lineal* y sus aplicaciones (4ta edición). Pearson Educación.

Serge Lang (1990). Introducción al *Algebra Lineal* (2da edición). Addison-wesley Iberoamericana.