UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA DE CORRESPONDENCIAS Y APLICACIÓN AL EQUILIBRIO DE NASH

TESIS

PRESENTADA POR:

LUIS FRANCISCO LAURENTE BLANCO

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO – PERÚ

2022

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a mis amados padres, Frans Laurente Quiñonez y Luz Marina Blanco Loza, de quienes recibo cada momento su amor y sus consejos para ser una persona de bien.

AGRADECIMIENTOS

A Jesucristo mi Señor (el Hijo de Dios) por guiarme en cada proyecto de mi vida.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

TEMA: Topología de Correspondencias y Equilibrio de Nash

ÁREA: Matemática

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Aplicada

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 25 de agosto de 2022

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

$\mathcal{G}$: Juego en su forma normal

S_i : Espacio de estrategias del jugador i

u_i : Función de ganancia del jugador i

(s_i, s_{-i}) : Vector estratégico enfatizando la estrategia del jugador i

$S = \prod_{i=1}^{n} S_i$: Espacio producto de estrategias de los n jugadores

$S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_i$: Espacio producto de estrategias de $n - 1$ jugadores sin el jugador i

$\overline{s}$: Vector estratégico de respuesta óptima de los n jugadores

$\varphi: S \rightrightarrows S$: Correspondencia punto a conjunto global de n jugadores

$\max\limits_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$: Problema de maximización de la utilidad del jugador i

RESUMEN

La eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas es una técnica para encontrar las soluciones de equilibrio en la teoría de juegos. Sin embargo, esta técnica presenta inconvenientes relacionados a la precisión al momento de encontrar soluciones de equilibrio en los juegos. Como solución a este problema, Nash presenta una metodología de solución que se basa en las funciones de respuesta racional de los jugadores. Esta metodología se denomina Equilibrio de Nash. El objetivo del presente trabajo es utilizar la topología de correspondencias para demostrar el teorema de existencia del Equilibrio de Nash. Para lograr este objetivo, se analiza el concepto de correspondencias en espacios topológicos, demostrando luego el teorema del punto fijo aplicado a correspondencias; y a partir del teorema de Kakutani se prueba la existencia del equilibrio de Nash para juegos en su forma normal. Este trabajo servirá como base para una mejor comprensión de la topología de correspondencias y su determinación del Equilibrio de Nash permitiendo además la comprensión del equilibrio en juegos de mayor complejidad.

Palabras Claves: Teoría de juegos, topología de correspondencias, teorema de punto fijo de Kakutani, equilibrio de Nash**.**

ABSTRACT

Iterative elimination of strictly dominated strategies is a technique for finding equilibrium solutions in game theory. However, this technique has drawbacks related to precision when finding balance solutions in games. As a solution to this problem, Nash presents a solution methodology that is based on the rational response functions of the players. This methodology is called Nash Equilibrium. The aim of this paper is to use correspondence topology to prove the Nash Equilibrium existence theorem. To achieve this goal, the concept of correspondences in topological spaces is analyzed, then proving the fixed point theorem applied to correspondences; and from Kakutani's theorem the existence of the Nash equilibrium for games in its normal form is proved. This work will serve as a basis for a better understanding of the topology of correspondences and its determination of the Nash Equilibrium, also achieving an understanding of the equilibrium in more complex games.

Keywords: Game theory, correspondence topology, Kakutani's fixed point theorem, Nash equilibrium.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Muchas aplicaciones de teoría de juegos surgen en diversos campos de la microeconomía tales como en organización industrial, en los modelos de intercambio (negocios y subastas), en la economía laboral, economía financiera y en el mercado de factores donde la principal finalidad es verificar las decisiones multipersonales y las relaciones de organización entre ellas. Aplicaciones también se dan en el área de la macroeconomía así como en la economía internacional, donde los agentes son los países que compiten en sus decisiones comerciales, decisiones arancelarias y también en las decisiones de política exterior. La teoría de juegos plantea la determinación de las soluciones a través de la *eliminación iterativa de estrategias* que consiste en la eliminación progresiva de las estrategias razonablemente no deseadas por los agentes. Sin embargo, la técnica de la eliminación iterativa constantemente conlleva a soluciones ambiguas o eliminación de equilibrios razonables.

En tal sentido, la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas presenta dos inconvenientes. Primero, cada iteración necesita un supuesto adicional sobre la racionalidad de los jugadores y sobre el conocimiento que tienen los demás jugadores; en este sentido, es necesaria la información de conocimiento de todos los jugadores sobre su comportamiento racional (Aumann, 1966) . La segunda desventaja de este método es que el proceso del juego conduce muy a menudo a resultados imprecisos en la determinación de los equilibrios en los juegos.

En consecuencia, Nash (1950) propone soluciones mediante la existencia de puntos de equilibrio para los juegos conformados por n jugadores. Esta solución se denomina *equilibrio de Nash* que es un concepto de solución a los juegos que tiene la característica principal de llegar a soluciones más precisas en comparación con la técnica de eliminación iterativa de estrategias debido que esta se basa en las funciones de respuesta racional de los jugadores y como consecuencia, el equilibrio encontrado siempre va sobrevivir a la eliminación iterativa.

Para el desarrollo matemático de la existencia del equilibrio de Nash es necesario la construcción topológica de las *correspondencias* (denominado como *set-values* o *multifunctions* que tuvieron sus aplicaciones en la década de los 60's en los trabajos de Aumann (1965), Banks & Jacobs (1970), Bridgland (1970), Debreu (1967), Hermes (1968), Hukuhara (1967) y Jacobs (1969); y posteriormente utilizar el teorema de punto fijo para correspondencias para finalmente encontrar el equilibrio de Nash.

La teoría topológica de correspondencias es de gran aplicación en la economía matemática debido que para el desarrollo de los modelos económicos y juegos, muchas veces se tiene respuestas para el análisis de un cierto fenómeno. En este sentido, las técnicas matemáticas como la topología y el análisis aplicado a la economía han permitido estudiar esta ciencia desde un punto de vista más formal y analítico.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El presente estudio ayuda a comprender la aplicación de teoría topológica de correspondencias en la determinación del equilibrio de Nash en la teoría de juegos económicos para juegos con n jugadores y con información completa. Se preguntas de investigación planteadas son las siguientes:

Pregunta General

¿Qué herramienta topológica se utiliza para verificar el teorema de existencia del Equilibrio de Nash?

Preguntas Específicas

- ¿Cómo se formula la teoría de espacios topológicos de correspondencias?
- ¿Cómo se verifica el teorema del punto fijo de Kakutani para correspondencias?

1.3 HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 Hipótesis General

La topología de correspondencias permite determinar la existencia del Equilibrio de Nash.

1.3.2 Hipótesis Específicos

- La teoría topológica de correspondencias se formula a partir de la teoría de espacios topológicos.
- El teorema del Punto Fijo de Kakutani se verifica utilizando la teoría topológica de correspondencias.

1.4 JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

La topología de correspondencias (o *set-values*) tuvo su desarrollo en la década de los sesenta en los trabajos de Aumann (1965), Banks & Jacobs (1970), Bridgland (1970), Debreu (1967), Hermes (1968), Hukuhara (1967) y Jacobs (1969) quienes desarrollaron la teoría matemática de la topología considerando las multifunciones y posteriormente señalan aplicaciones en diversas ramas de las ciencias matemáticas. En este trabajo se estudia la teoría topológica de correspondencias para la determinación del equilibrio de Nash en la teoría de juegos económicos (Nash, 1950) donde un equilibrio de Nash en un juego siempre va a sobrevivir a la eliminación iterativa permitiendo determinar un equilibrio estable en un determinado juego usando las funciones de respuesta racional de los jugadores. Luego, la presente investigación servirá como base para una mejor comprensión de la topología de correspondencias y su aplicación a la determinación del equilibrio de Nash donde el uso del análisis matemático y la teoría matemática de la topología son ingredientes necesarios. Asimismo, esta investigación será de base para una mejor comprensión del equilibrio de Nash en juegos de mayor complejidad como son: los juegos estáticos y dinámicos con información incompleta y la teoría de riesgo donde se utiliza conceptos matemáticos de medida de correspondencias y medida de probabilidad aplicados a los juegos.

1.5 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1 Objetivo General

Utilizar la topología de correspondencias para demostrar el teorema de existencia del Equilibrio de Nash.

1.5.2 Objetivos Específicos

- Estudiar la teoría topológica de correspondencias.
- Presentar la demostración del teorema del Punto Fijo de Kakutani para correspondencias

El presente trabajo se estructura de la siguiente manera: en el capítulo 1 se presenta la introducción, en ella se describe la formulación del problema de investigación, las hipótesis de investigación, la justificación e importancia del estudio y los objetivos general y específicos. En el capítulo 2 se presenta una revisión de antecedentes más importantes en la teoría topológica de correspondencias y la teoría de juegos. En seguida, se presenta un marco conceptual donde se describe algunos conceptos básicos y notaciones; luego se describe el marco teórico para el desarrollo de la investigación. En esta sección, se presenta de forma concisa los conceptos topológicos de conjunto abierto en un espacio métrico, aplicaciones continuas en un espacio métrico, conjuntos compactos, convexidad, cuasiconvexidad, cuasiconcavidad, espacios topológicos, semicontinuidad y los principales teoremas de punto fijo para funciones.

En el capítulo 3 se presenta los materiales y métodos empleados para el desarrollo de la investigación. En el capítulo 4, se presentan los resultados del estudio. En ese capítulo se desarrolla la teoría topológica de correspondencias denominada también multifunciones. Al respecto, se presentan las importantes definiciones de continuidad y hemicontinuidad de correspondencias que son conceptos más generales que la continuidad de funciones estudiados en espacios métricos. En seguida, se desarrolla los conceptos económicos de una función de utilidad, denominado también la función de pago de un agente económico, en esta sección se presenta la definición de un conjunto de consumo, relaciones de preferencia y la definición de una función de utilidad. El capítulo finaliza con la parte más importante del trabajo, en ella se realiza una demostración del teorema del equilibrio de Nash utilizando el teorema de Kakutani para correspondencias, para ello, en la sección se presenta la definición de un juego y ejemplos. Finalmente, se presenta algunas aplicaciones del equilibrio de Nash en economía, como son el Modelo de Cournot para diversos escenarios de mercado. En el capítulo 5 se presenta las conclusiones más resaltantes del estudio y en el capítulo 6 las recomendaciones del presente trabajo.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Para la presente investigación se siguen diversos trabajos que desarrollan la teoría de juegos usando las herramientas de la matemática pura. El punto de partida para la presente investigación es el trabajo de Nash (1950) quien propone puntos de equilibrio para los juegos con n jugadores dando lugar al denominado equilibrio de Nash que es un concepto de solución a los juegos con soluciones más precisas que el método de eliminación iterativa de estrategias debido que permite determinar un cierto equilibrio estable en un juego usando las funciones de respuesta racional de los jugadores.

Utilizando la teoría de Nash en un entorno de correspondencias, Accinelli (2007) señala que no todo juego normal posee un equilibrio de Nash, así las condiciones que aseguren la existencia del equilibrio es de importancia para los trabajos relacionados. En sus resultados, presenta una solución usando el teorema de punto fijo de Kakutani y la teoría de correspondencias para presentar el equilibrio de Nash. En este trabajo se muestra la importancia de aplicar la teoría topológica al equilibrio de Nash. Esta importancia también se detalla en el trabajo descriptivo de Delgado (2014) quien estudia la existencia de equilibrios económicos haciendo uso de los teorema de punto fijo, donde señala la importancia que tiene las herramientas de la matemática pura en las aplicaciones de equilibrio en economía. En este sentido, los autores realizan una presentación de los teoremas de punto fijo de Brouwer y de Kakutani y su aplicación en la teoría de equilibrio general y de juegos.

Por su parte, en el estudio topológico de los juegos, el trabajo de Balkenborg & Vermeulen, (2019) prueban la conjetura en la teoría de los juegos no cooperativos que señala que el equilibrio de Nash es universal para la colección de conjuntos semialgebraicos compactos (no vacíos), lo que significa que para cada conjunto de este tipo hay un juego cuyo conjunto de equilibrios de Nash es homeomorfo al conjunto dado. Por otro lado, Yu & Peng (2020) investigan las ecuaciones para juegos diferenciales no cooperativos mostrando que los juegos diferenciales con equilibrios estables forman un conjunto residual denso y cada juego diferencial puede ser aproximado mediante una secuencia de juegos diferenciales estables, encontrándose mediante la Categoría de Baire, que la mayoría de juegos diferenciales son estables.

Otras aplicaciones de la teoría de correspondencias al estudio de equilibrio donde se utiliza teoría de convergencia y continuidad usando correspondencias se encuentra en el trabajo de Faro (2002) quien aplica la teoría de correspondencias a la teoría de equilibrio general económico con bienes finitos y con agentes continuos generando algunos cambios al modelo de producción y agentes. Similarmente, Arrow & Debreu (1954) utilizan la teoría de correspondencias para probar la existencia de un equilibrio para un mercado competitivo de Wald compuesto por el mercado de producción, mercado de cambio y de consumo. Estos resultados contribuyeron en la economía abstracta para la generalización de la teoría de juegos.

En la teoría de correspondencias y su aplicación en teoría de juegos es de mucha importancia estudiar la continuidad de correspondencias que es la ampliación de la continuidad estudiada en topología. Esta continuidad de correspondencias se denomina semicontinuidad o hemicontinuidad. Al respecto, el trabajo de Yannelis (1990) estudia la generalización de la semicontinuidad superior e inferior de la integral de Aumann considerando el problema para $X = R^n$ y utiliza sus contribuciones para aplicarla en la teoría de juegos y de equilibrio general económico. Por otro lado, la continuidad de correspondencias sugiere la un equilibrio fuerte de Nash señalado por Nessah & Tian

(2014) quienes investigan la existencia del equilibrio fuerte de Nash (EFN) en juegos cóncavos y continuos quienes muestran que la propiedad de colición introducida en el equilibrio de Nash y añadiéndole pagos continuos y cóncavos permiten la existencia del EFN que pueden ser aplicados a economías con externalidades ambientales multilaterales y al modelo de oligopolio estático.

En un entorno de optimización de equilibrios usando correspondencias, se encuentra el aporte de Hildenbrand (1972) quien estudia los conjuntos de correspondencias continuos y de equilibrio generalizando los avances de Debreu para economías donde el número de agentes es variable.

Extensiones del equilibrio de Nash se encuentra en el trabajo de Fu & Wu (2019) quienes realizan una caracterización del equilibrio de Nash para juegos de mayor complejidad que contienen múltiples elementos contables en el espacio de agentes y en el espacio de alternativas. Considerando el equilibrio de Nash con estrategia pura, el trabajo de Enomoto *et al.* (2018) presenta la discusión de la existencia de equilibrio de Nash sobre gráficos con diámetro pequeño en los juegos de localización, juegos de difusión y los juegos de Voronoi.

2.2 MARCO TEÓRICO

En esta sección se desarrolla los conceptos matemáticos importantes que sirven de base para el desarrollo de la tesis. Se presenta la definición de los conjuntos abiertos en un espacio métrico, seguidamente las aplicaciones continuas en un espacio métrico. En seguida se presenta el concepto de conjuntos compactos en espacios métricos. El concepto de convexidad también se presenta así como el concepto de cuasiconcavidad y cuasiconvexidad que son muy necesarios para las aplicaciones en economía. Luego, se presenta el concepto de espacio topológico que es una generalización del espacio métrico.

Seguidamente se presenta el concepto de semicontinuidad superior e inferior de una función definida en un espacio topológico y finalmente las definiciones de teoremas de punto fijo.

2.2.1 Conjuntos abiertos en un espacio métrico

Definición 1. *Un subconjunto A de un espacio métrico M se denomina conjunto abierto cuando todo punto $a \in A$ es centro de una bola abierta enteramente contenida en A. Es decir, para cada $a \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $x \in M$ y $d(x, a) > \epsilon$, entonces $x \in A$.*

Ejemplo 1. Se tiene los siguientes ejemplos de conjuntos abiertos:

1. En el espacio euclidiano $\mathbb{R}$, si $r > 0$ y un punto $a \in \mathbb{R}$, entonces una bola abierta con centro en a y radio r es un intervalo en la recta, esto es

$$B(a; r) = (a - r, a + r)$$

2. Sea el conjunto X dotado con la métrica discreta, entonces

$$B(x; r) = \{x\}, r \leq 1 \quad y \quad B(x; r) = X, r > 1$$

3. Un intervalo abierto es un conjunto abierto.

4. Los intervalos $[0,1 >$ y $[0,1]$ no son abiertos en $\mathbb{R}$.

5. En $\mathbb{R}$ el conjunto $\{0\}$ no es un conjunto abierto.

Comentario 1. Un punto cualquiera de un espacio métrico $a \in M$ es un conjunto abierto de M si y sólo si el punto a es isolado. Esto es, sólo siendo el punto a una bola esta puede contener una bola abierta. En este sentido se define un *espacio métrico discreto* aquel donde todos sus subconjuntos son abiertos.

Teorema 1. *Toda bola abierta $B(a; r)$ definida en un espacio métrico M es un subconjunto abierto de M.*

Demostración. Para cada punto $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{r})$, tenemos $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \boldsymbol{r}$ y por tanto $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) > \mathbf{0}$. Afirmamos que la bola $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\epsilon})$ está contenida en $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{R})$. De hecho, si $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\epsilon})$ entonces $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) < \boldsymbol{r} - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ y por tanto $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) \leq \boldsymbol{d}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \boldsymbol{r} - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{r}$, luego $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{r})$.

Teorema 2. *Los subconjuntos abiertos de un espacio métrico M mantienen las siguientes propiedades:*

1. el espacio M y el conjunto vacío $\emptyset$ son subconjuntos abiertos de M;

2. si $(A_\lambda)_{\lambda \in A}$ es una familia finita o infinita de subconjuntos abiertos de M, entonces su unión $A = \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$ será un subconjunto abierto de M;

3. la intersección $A_1 \cap \dots \cap A_n$ de una familia finita de subconjuntos $A_1, \dots, A_n$ abiertos en M es todavía un subconjunto abierto de M.

Demostración. (1) Es claro que M es abierto. Para mostrar que el conjunto $\emptyset$ es abierto basta notar que un subconjunto $X \subseteq M$ sólo deja de ser abierto cuando existe un punto $x \in X$ tal que ninguna bola de centro x está contenida en X. Como no existe $x \in \subset$, el conjunto vacío no viola la condición que define los abiertos.

(2) Dado $x \in A$, existe un índice $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ es abierto, existe una bola $B(x; \epsilon)$ contenida en A_λ. Luego, $B(x; \epsilon) \subseteq A$.

(3) Sea $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$. Para $i = 1, \dots, n$, existe una bola abierta $B(x; \epsilon_i)$ contenida en A_i. Tomemos un $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$. Entonces $\epsilon > 0$ y $B(x; \epsilon) \subseteq B(x; \epsilon_i) \subseteq A_i$ para cada i. Luego $B(x; \epsilon) \subseteq A_1 \cap \dots \cap A_n$, culminando la demostración.

Corolario 1. *Un subconjunto $A \subseteq M$ es un conjunto abierto en M si y solamente si A es la reunión de bolas abiertas de M.*

Demostración. Como las bolas abiertas son subconjuntos abiertos de M (Teorema 2.4), toda unión de bolas abiertas es un abierto de M, por Teorema 2.5(2). Recíprocamente, si $A \subseteq M$ es abierto, para cada $x \in A$ existe una bola abierta B_x con $\{x\} \subseteq B_x \subseteq A$. Luego, $A \subseteq \cup_{x \in A} B_x \subseteq A_i$ lo que muestra ser $A = \cup_{x \in A} B_x$ una unión de bolas abiertas.

Comentario 2. La intersección de una familia infinita de subconjuntos abiertos, no es en general un subconjunto abierto. Supongamos que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$ es la intersección de todas las bolas abiertas con centro en $\boldsymbol{x}$. El conjunto $\{\boldsymbol{x}\}$ no es un subconjunto abierto en general, a menos que x sea un punto isolado.

Ejemplo 2. Dado cualquier espacio métrico M el complemento de una *bola cerrada* $B[a;\ r]$ es un conjunto abierto $A = M - B[a;\ r]$.

Ejemplo 3. Todo intervalo abierto acotado (a, b) es un subconjunto abierto de la recta debido que es una bola abierta en su punto céntrico $(a + b)/2$ donde su radio es $r = (b - a)/2$. Por otro lado, las semirrectas abiertas $(-\infty, b)$ y $(a, +\infty)$ también son subconjuntos abiertos de la recta R, debido que si tomamos un punto cualquier $c \in (\infty, b)$, esto es, $c < b$, entonces haciendo $r = b - c$ observamos que $(c - r, c + r)$ es una bola abierta de centro c que está contenida en el intervalo $(-\infty, b)$. Similarmente, si tomamos un punto $c \in (a, +\infty)$, esto es, $c > a$, entonces haciendo $r = c - a$ observamos que $(c - r, c + r)$ es una bola abierta de centro c que se encuentra contenida en el intervalo $(a, +\infty)$.

Comentario 3. El espacio métrico M es abierto en M. Al respecto, la propiedad que sea un conjunto abierto es “relativo”, es decir, depende del espacio en que un conjunto está definido. Como ejemplo, supongamos el conjunto $X = [0,1)$, este es un subconjunto abierto del espacio $M = [0,1]$, basta observar que cada intervalo del tipo $[0, \epsilon)$ con valores de $0 < \epsilon \leq 1$, es una bola abierta de centro en 0 en el espacio $M = [0,1]$. Sin embargo, el conjunto $\mathrm{X} = [0,1)$ no es un conjunto abierto en la recta $\mathbb{R}$. Otro ejemplo es el intervalo $(0,1)$ del eje de las abscisas en el espacio $\mathbb{R}^2$, este intervalo es abierto en ese eje (el conjunto $\mathbb{R}$) mas no es abierto en el conjunto $\mathbb{R}^2$. Un ejemplo de un conjunto que es abierto en cualquier espacio que este contenido es el conjunto vacío $\emptyset$. Para probar que un conjunto X no es abierto, se debe encontrar un punto $x \in X$ que no sea interior a X. Claramente es imposible de realizar cuando el conjunto es vacío $X = \emptyset$, por lo tanto, el conjunto vacío $\emptyset$ es abierto.

Teorema 3. *Sea M un espacio métrico y $X \subseteq M$ un subespacio del conjunto M. Un subconjunto $A' \subseteq X$ es un conjunto abierto en X si y solamente si $A' = A \cap X$, donde A es un subconjunto abierto de M.*

Demostración. Indicando con B' las bolas abiertas de X y con B las de M, es claro que $B'(x;\epsilon) = B(x;\epsilon) \cap X$ para cada $x \in X$. Por el Corolario 2.6, el conjunto $A' \subseteq X$ es abierto en X si y solamente si $A' = \cup_x B_{x'} = \cup_x (B_x \cap X) = (\cup_x B_x) \cap X = A \cap X$, donde $A = \cup_x B_x$ es un abierto de M.

Corolario 2. Sea $X \subseteq M$ abierto. Un subconjunto $A' \subseteq X$ es abierto en X si y solamente si A' es abierto en M.

2.2.2 Aplicaciones continuas en un espacio métrico

Se dice que una función o aplicación $F: M \to N$ es *continua* en el punto $a \in M$ si y solo si para cada vecindad V de $f(a)$ en N existe una vecindad U de a en M tal que $f(U) \subset V$. A continuación se presenta algunos teoremas importantes que relacionan los conjuntos abiertos con la continuidad

Teorema 4. *Sean M y N espacios métricos. La aplicación $f: M \to N$ es continua si y sólo si la imagen inversa $f^{-1}(A')$ de todo subconjunto abierto $A' \subseteq N$ es un subconjunto abierto de M.*

Demostración. Sea f contínua y $A' \subseteq N$ un abierto. Probaremos que $A = f^{-1}(A')$ es abierto en M. Luego, para cada punto $a \in A$, $f(a) \in A'$. Siendo A' abierto, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(f(a);\epsilon) \subseteq A'$. Siendo f contínua en el punto a, al ϵ corresponde un $\delta > 0$ tal que $f(B(a;\delta)) \subseteq B(f(a);\epsilon) \subseteq A'$. Pero $f(B(a;\delta)) \subseteq A'$ significa que $B(a;\delta) \subseteq f^{-1}(A') = A$. Luego, A' es abierto ya que conteniendo un punto a contiene también una bola $B(a;\delta)$.

Recíprocamente, supongamos que $f: M \to N$ es tal que, para todo abierto $A' \subseteq N, A = f^{-1}(A')$ es abierto en M. Sea $a \in M$ un punto cualquiera. Mostraremos que f es continua en el punto a. Luego, toda bola $B(f(a);\epsilon) = A'$ es un abierto de N conteniendo $f(a)$. Luego, $A = f^{-1}(A')$ es un abierto de M conteniendo al punto a. Por lo tanto, existe una bola $B(a;\delta) \subseteq A$, esto es, $f(B(a;\delta)) \subseteq B(f(a);\epsilon)$, lo que concluye la demostración.

Corolario 3. *Sean $A_1 \subseteq M_1, \dots, A_n \subseteq M_n$ subconjuntos abiertos. Entonces $A_1 \times \dots \times A_n$ es un subconjunto abierto del producto cartesiano $M_1 \times \dots \times M_n$.*

Demostración. Las proyecciones $p_i: M_1 \times \dots \times M_n \to M_i$ son continuas $(i = 1,2, \dots, n)$ luego $p_1^{-1}(A_1), p_2^{-1}(A_2), \dots, p_n^{-1}(A_n)$ son subconjuntos abiertos de $A_1 \times \dots \times A_n$ y como

$$A_1 \times \dots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(A_n),$$

se sigue del Teorema que $A_1 \times \dots \times A_n$ es abierto en $M_1 \times \dots \times M_n$.

Corolario 4. *Sean $f_1, \dots, f_n: M \to N$ aplicaciones continuas y $a_1, \dots, a_n \in N$. El conjunto de puntos $x \in M$ tales que $f_1(x) \neq a_1, \dots, f_n(x) \neq a_n$ es abierto en M. Si $f_1, \dots, f_n: M \to \mathbb{R}$ son funciones reales continuas es todavía abierto el subconjunto de M definido por*

$$f_1(x) > 0, \dots, f_n(x) > 0.$$

Definición 2. Sean M y N espacios métricos. Un aplicación $f : M \to N$ que transforma cada subconjunto abierto $A \subseteq M$ en un subconjunto abierto $f(A) \subseteq N$ se llama una *aplicación abierta*.

2.2.3 Conjuntos Compactos

Definición 3.

1. Sea X un subconjunto de un espacio métrico M. Una *cobertura* de X es una familia $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in I}$ de subconjuntos de M tal que $X \subseteq \cup_{\lambda \in I} C_\lambda$. Esto significa que para $x \in X$, existe por lo menos un índice $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.

2. Si existe un subconjunto $L' \subseteq L$ tal que para cada $x \in X$ se puede obtener $\lambda \in L'$ con $x \in C_\lambda$, es to es, $X \subseteq \cup_{\lambda \in L'} C_\lambda$, entonces la subfamilia $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ se llama *subcobertura* de $\mathcal{C}$.

3. Una cobertura $X \subseteq \cup_{\lambda \in L} C_\lambda$ se dice *abierta* cuando cada conjunto $C_\lambda, \lambda \in L$ es abierta en M.

4. Una cobertura $X \subseteq \cup_{\lambda \in L} C_\lambda$ se dice *finito* cuando L es un conjunto finito. En este caso, se tiene $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ y escribimos $X \subseteq C_{\lambda_1} \cup \dots \cup C_{\lambda_n}$.

Definición 4. *Un espacio métrico M se llama compacto cuando toda cobertura abierta posee una subcobertura finita. En otros términos, $M = \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$, entonces existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in L$ tal que $M = A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$.*

Definición 5. $K \subseteq M$ se llama un *subconjunto compacto* cuando el subespacio métrico K es compacto.

Esto significa que toda cobertura $X = \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$, por medio de abiertos A_λ, en X se puede extraer una subcobertura finita $X = A'_{\lambda_1}, \cup \dots \cup A'_{\lambda_n}$. Como para cada $\lambda \in L, A'_\lambda = X \cap A_\lambda, A_\lambda$ es abierto en M, vemos que $X = \cup A'_\lambda \Leftrightarrow X \subseteq \cup A_\lambda$. Luego, $X \subseteq M$ es compacto si y solo si para cada cobertura $X \subseteq \cup A_\lambda, A_\lambda \subseteq M$ abiertos, se puede extraer una subcobertura finita $X \subseteq A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$.

Ejemplo 4. *Si* $K, L \subseteq M$ *son subconjuntos compactos, entonces* $K \cup L$ *es compacto. En efecto, si* $K \cup L \subseteq \cup A_\lambda$, *entonces en particular* $K \subseteq \cup A_\lambda, L \subseteq \cup A_\lambda$ *donde* $K \subseteq A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n}$ *y* $L \subseteq \cup A_\lambda$ *donde* $K \subseteq A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n}$ *y* $L \subseteq A_{\lambda_{n+1}} \cup \ldots \cup A_{\lambda_p}$ *y por tanto,* $K \cup L \subseteq A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_p}$. *Se sigue que la unión de un número finito de subconjuntos compactos es compacto.*

Teorema 5. *Todo subconjunto cerrado F de un espacio compacto M es compacto.*

Demostración. Sea $F \subseteq \cup_{\lambda \in L} U_\lambda$ una cobertura de F por abiertos $U_\lambda \subseteq M$ Una familia que consiste de los $U_\lambda, \lambda \in L$ y el conjunto $U = X - F$ es una cobertura abierta de M. Como M es compacto, existe una cobertura finita $M = U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n} \cup U$. Como ningún punto de F puede pertenecer a U, se tiene $F \subseteq U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n}$, lo que prueba la compacidad de F.

Corolario 5. *Cualquier intersección* $K \cap K_\lambda$ *de compactos* $K_\lambda \subseteq M$ *es compacto.*

Corolario 6. *Todo espacio métrico compacto es completo.*

Demostración. Si M es compacto, de la cobertura abierta $M = \cup_{x \in M} B(x; 1)$ podemos extraer una subcobertura finita $M = B(x_1; 1) \cup \ldots \cup B(x_n; 1)$, luego M es acotado.

Teorema 6. *La imagen de un conjunto compacto por una aplicación continua es un conjunto compacto.*

Demostración. Sea $f: M \to N$ continua y $K \subseteq M$ compacto. Dada una cobertura abierta $f(K) \subseteq \cup A_\lambda$, obtenemos la cobertura abierta $K \subseteq \cup_\lambda f^{-1}(A_\lambda)$, de la cual extraemos una subcobertura finita $K \subseteq f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(A_{\lambda_n})$ y de ahí $f(K) \subseteq f f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \ldots \cup f f^{-1}(A_{\lambda_n}) \subseteq A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n}$. Luego, $f(K)$ es compacto.

Teorema 7. *(Weierstrass). Si* M *es compacto, toda función real continua* $f: M \to \mathbb{R}$ *es acotado y obtiene sus valores máximo y mínimo en* M. *Mas precisamente existe* $x_0, x_1 \in$

M tales que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para cualquier $x \in M$.

Demostración. La imagen $f(M)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Luego, es acotado y cerrado. Así, f es acotado y poniendo $\alpha = \inf f(M), B = \sup f(M)$, tenemos que $\alpha \in f(M), B \in f(M)$. Osea existe $x_0, x_1 \in M$ tales que $f(x_0) = \alpha, f(x_1) = \beta$. Por lo tanto, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in M$.

Corolario 7. *Sea M compacto y $f: M \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in M$. Entonces, existe $c > 0$ tales que $f(x) \geq c$ para todo $x \in M$.*

Ejemplo 5. *La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas para todo $c > 0$ es posible obtener $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < c$. Esto se debe pues $\mathbb{R}$ no es compacto.*

2.2.4 Convexidad

El concepto de convexidad es uno de los conceptos importantes en el análisis matemático y tiene aplicaciones muy importantes en la teoría de la optimización, en la estadística, probabilidad aplicada y en la economía. A continuación presentamos la definición de un conjunto convexo

Definición 6. *Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice convexo si el segmento de recta que une dos puntos x e y de S se encuentran dentro de S. Esto significa que para $x, y \in S$ y $\alpha \in [0,1]$, el punto $z = \alpha x + (1-\alpha)y \in S$.*

En general, alguna *combinación convexa* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ de puntos $x_1, \dots, x_n \in S$ se encuentran en S donde los coeficientes α_i son no negativos y suman 1. Podemos mencionar algunos conjuntos convexos. Por ejemplo, cada intervalo sobre la recta real es convexo; cada bola abierta o cerrada en $\mathbb{R}^n$ es convexo; y cada rectángulo abierto o cerrado multidimensional es un conjunto convexo.

Definición 7. *Una función convexa está definida sobre un conjunto convexo. Una función de valor real f definida sobre un conjunto convexo es convexo, donde se cumple*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

para todo $x, y \in S$ y $\alpha \in [0,1]$. Además, se dice que f es *estrictamente convexo* si para cada $x \neq y$ y $\alpha \in (0,1)$, se cumple

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

Por inducción se puede probar que la desigualdad se puede extender a

$$f(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

para alguna combinación convexa de puntos $x_i \in S$. Si el sentido de la desigualdad cambiara se puede definir una función cóncava

Definición 8. *Una función de valor real f definida sobre un conjunto convexo se dice cóncava si se cumple*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

para todo $x, y \in S$ y $\alpha \in [0,1]$. Además, se dice que f es *estrictamente cóncavo* si para cada $x \neq y$ y $\alpha \in (0,1)$, se cumple

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

A continuación algunos ejemplos importantes de conjuntos y funciones convexas y cóncavas.

Ejemplo 6. (Las normas son convexas). *Una función de valor real f definida sobre un conjunto convexo se dice cóncava si se cumple*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

para todo $x, y \in S$ y $\alpha \in [0,1]$. Además, se dice que f es *estrictamente cóncavo* si para cada $x \neq y$ y $\alpha \in (0,1)$, se cumple

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Ejemplo 7. (La distancia a un conjunto convexo es convexo.) *La función distancia $d(x,S)$ de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ a un conjunto convexo S es convexo. Para alguna combinación convexa $\alpha x + (1-\alpha)y$, tome secuencias (u_k) y (v_k) de S tal que*

$$d(x,S) = \lim_{k\to\infty} \| x - u_k \|$$

$$d(y,S) = \lim_{k\to\infty} \| y - v_k \|.$$

Los puntos $\alpha u_k + (1-\alpha)v_k$ están en S, y tomando límites en la desigualdad

$$d(\alpha x + (1-\alpha y), S) \leq \| \alpha x + (1-\alpha)y - \alpha u_k - (1-\alpha)v_k \|$$

$$\leq \alpha \| x - u_k \| + (1-\alpha) \| y - v_k \|,$$

Por lo tanto, $d(\alpha x + (1-\alpha y), S) \leq \alpha d(x,S) + (1-\alpha)d(y,S)$.

Definición 9. *Sea $Y \subset \mathbb{R}^l$ tal que $intY \neq \emptyset$. El conjunto Y se dice que es estrictamente convexo si $\forall x, y \in Y$ y $0 < \lambda < 1$, se cumple $\lambda x + (1-\lambda)y \in intY$.*

2.2.5 Cuasiconcavidad y cuasiconvexidad

Existen generalizaciones de convexidad para funciones que son comúnmente aplicadas en teoría económica. A continuación se definen las funciones cuasicóncavas y cuasiconvexas.

Definición 10. Una función real $f: C \to \mathbb{R}$ sobre un subconjunto convexo C de un espacio vectorial es

1. *Cuasiconvexo* si se cumple

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq máx\{f(x, f(y))\}$$

para todo $x, y \in C$ y para todo $0 \leq \alpha \leq 1$.

2. *Estrictamente cuasiconvexo* si se cumple

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < máx\{f(x, f(y))\}$$

para todo $x, y \in C$ con $x \neq y$ y para todo $0 < \alpha < 1$.

3. *Cuasicóncavo* si $-f$ es una función cuasiconvexa. Es decir, f es cuasicóncavo si

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq mín\{f(x, f(y))\}$$

para todo $x, y \in C$ y para todo $0 \leq \alpha \leq 1$

4. *Estrictamente cuasicóncavo* si $-f$ es una función estrictamente cuasiconvexa. Es decir, f es estrictamente cuasicóncavo si

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > mín\{f(x, f(y))\}$$

para todo $x, y \in C$ con $x \neq y$ y para todo $0 < \alpha < 1$.

Lema 1. *Cada función convexa es cuasiconvexa y cada función cóncava es cuasicóncavo.*

Lema 2. *Para una función real $f: C \to \mathbb{R}$ sobre un conjunto convexo, los siguientes resultados son equivalentes:*

1. La función f es cuasiconvexa.

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in C: f(x < \alpha)\}$ es un conjunto convexo.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in C: f(x \geq \alpha)\}$ es un conjunto convexo.

2.2.6 Espacios topológicos

Definición 11. Una *topología* sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, llamados subconjuntos abiertos, con las siguientes propiedades

1. $\emptyset$ y X están en $\mathcal{T}$,

2. La unión de elementos de $\mathcal{T}$ están en $\mathcal{T}$,

3. La intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Definición 12. Un espacio topológico es un par ordenado $(X, \mathcal{T})$ formado por un conjunto X y una topología $\mathcal{T}$ sobre X. Si X es un espacio topológico con una topología $\mathcal{T}$ o llamado también espacio topológico X, se dice que un subconjunto $U \subseteq X$ es un conjunto abierto de X si $U \in \mathcal{T}$.

Definición 13. Una función $f: X \to Y$ entre espacios topológicos es *abierta* (*open function*) si lleva conjuntos abiertos a conjuntos abiertos (i.e. $f(U)$ es una función abierta mientras que $U \subseteq X$ lo es).

Definición 14. Una función $f: X \to Y$ entre espacios topológicos es *cerrada* (*closed function*) si lleva conjuntos cerrados a conjuntos cerrados (i.e. $f(F)$ es una función cerrada mientras que $F \subseteq X$ lo es).

Definición 15. Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es continua si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.

La relación $(g \circ f)-1(V) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ muestra que la compuesta $g \circ f : X \to Z$ de dos funciones continuas $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ es un función continua.

Más específicamente, la función f se dice *continua en el punto a* cuando para cada abierto $V \subseteq Y$, con $f(a) \in V$, existe un abierto $A \subseteq X$ con $a \in A$, tal que $f(A) \subseteq V$. Es fácil observar que si $f: X \to Y$ es continua en el punto $a \in X$ y $g: Y \to Z$ es continua en el punto $b = f(a) \in Y$, entonces $g \circ f: X \to Z$ es continua en el punto a. La relación entre ambas definiciones es la siguiente:

Teorema 8. *Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f: X \to Y$ es continua si y solo* *si es continua en cada punto* $z \in X$.

Demostración. Sea $f: X \to Y$ continua. Dados un punto $a \in X$ y un abierto $B \subseteq Y$ con $f(a) \in B$, el conjunto $A = f^{-1}(B)$ es abierto en X. Como $a \in A$ y $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, esto establece la continuidad de f en el punto a. Recíprocamente, sea f continua en cada punto $a \in X$. Dado $B \subseteq Y$ abierto, sea $A = f^{-1}(B)$. Para cada $x \in A$, se tiene $f(x) \in B$ y como f es continua en el punto x, existe un abierto $A_x \subseteq X$, con $x \in A_x$, $f(A_x) \subseteq B$. En otras palabras, se tiene $\{x\} \subseteq A_x \subseteq A$ para cada $x \in A$. Luego, $A = \cup_{x \in A} \{x\} \subseteq \cup_{x \in A} A_x \subseteq A$, esto es, $A = \cup_x A_x$. De este modo, $A = f^{-1}(B)$ es abierto en X, por ser una unión de abiertos y $f: X \to Y$ es continua.

Definición 16. Un espacio topológico X se denomina un espacio separado o espacio de Hausdorff cuando para dos puntos cualquiera $x \neq y$ de X existen conjuntos abiertos $A, B \subseteq X$ tal que $x \in A, y \in B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Definición 17. Una función $f : X \to Y$ donde los conjuntos X e Y son espacios topológicos se dice que es una aplicación abierta (*open mapping*) si para cada conjunto abierto U de X, el conjunto $f(U)$ es abierto en Y.

Definición 18. Una función $f : X \to Y$ donde los conjuntos X e Y son espacios topológicos se dice que es una aplicación cerrada (*closed mapping*) si para cada conjunto cerrado U de X, el conjunto $f(U)$ es cerrado en Y.

Definición 19. Sea $S \subseteq X$ un subconjunto de un espacio topológico X. Un punto $x \in S$ se denomina un *punto interior* de S cuando existe un conjunto abierto A de X tal que $x \in A \subseteq X$.

Definición 20. Sea $S \subseteq X$ un subconjunto de un espacio topológico X. Se define el *interior* de S como el conjunto int(S) formado por los puntos interiores de S.

Teorema 9. *Dado un espacio topológico X y sea $S \subseteq X$ un subconjunto del espacio topológico X. El interior de S es la unión de todos los subconjuntos abiertos de X que están en S. En particular, int(S) es abierto en X.*

Demostración. Sea $A = \cup A_\lambda$ la unión de todos los abiertos $A_\lambda \subseteq S$. Entonces, A es abierto en X y $A \subseteq S$. Luego, $x \in A$ implica $x \in int(S)$. De este modo, $A \subseteq int(S)$.Recíprocamente, si $x \in int(S)$ existe un abierto A' en X tal que $x \in A' \subseteq S$. Luego, $A' = A_\lambda$ para algún λ y por lo tanto $A' \subseteq A$. Esto muestra que $x \in A$, donde $int(S) \subseteq A$.

Corolario 8. *El conjunto S es abierto si y solo si S =* int(S).

Definición 21. En un espacio topológico X, se dice que un conjunto V es *vecindad* de un punto $x \in X$ cuando $x \in \text{int}(V)$. Esto quiere decir que V contiene un abierto que contiene a x.

Definición 22. Se define una frontera de un subconjunto S de un espacio topológico X como el conjunto $\text{fr}(S)$ formado por todos los puntos $x \in X$ tales que toda vecindad de x contiene puntos de S y del complemento $X - S$.

Equivalentemente, para que $x \in fr(S)$ es necesario y suficiente que x no pertenezca ni al interior de S ni al interior de $X - S$. En un espacio métrico M, $x \in fr(S)$ si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un punto $s \in S$ y el punto $t \in M - S$ tales que $d(s, x) < \epsilon$ y $d(t, x) < \epsilon$

Definición 23. Un subconjunto F de un espacio topológico X se dice *cerrado* cuando su complemento $X - F$ es abierto. Para que F sea un subconjunto cerrado de X es necesario y suficiente que , para cada punto $x \in X - F$ exista un abierto Ux, con $x \in U_x \subseteq X - F$, *esto es,* $x \in U_x$ *y* $U_x \cap F = \emptyset$.

Teorema 10. *Se cumple las siguientes propiedades para los conjuntos cerrados en un* *espacio topológico:*

1. *el conjunto vacío $\emptyset$ y el espacio entero X son conjuntos cerrados;*

2. *la intersección $F = \cap F_\lambda$ de una familia cualquiera $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ (finita o infinita) de subconjuntos cerrados $F_\lambda \subseteq X$ es un subconjunto cerrado de X;*

3. *la unión de subconjuntos finitos $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ donde los conjuntos $F_1, \ldots, F_n \subseteq X$ son conjuntos cerrados, es un subconjunto cerrado de X.*

Demostración. (1) Los conjuntos X y $\emptyset$ son complementarios de los conjuntos abiertos $\emptyset$ y X, respectivamente, luego son cerrados. (2) Sea $A_\lambda = X - F_\lambda$. Cada A_λ es abierto en X, luego, $A = \cup A_\lambda$ es también abierto. Como $F = \cap F_\lambda = \cap (X - A_\lambda) = X - \cup A_\lambda = X - A$, se sigue que F es cerrado. (3) Nuevamente, los conjuntos $A_1 = X - F_1, \ldots, A_n = X - F_n$ son abiertos. Luego, $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ es abierto y $F_1 \cup \ldots \cup F_n = (X - A_1) \cup \ldots \cup (X - A_n) = X - (A_1 \cap \ldots \cap A_n)$ es cerrado.

2.2.7 Semicontinuidad

En esta sección se presenta la definición de una función semicontinua superior y de una función semicontinua inferior.

Definición 24. Sea $f : X \to [-\infty, \infty]$ una función definida en un espacio topológico, entonces se define la función f como

1. *Semicontinua inferior* si para cada elemento cualquiera $c \in \mathbb{R}$, se cumple que el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq c\}$ es un conjunto cerrado. De manera equivalente, se cumple que el conjunto $\{x \in X : f(x) > c\}$ es un conjunto abierto.

2. *Semicontinua superior* si para cada elemento cualquiera $c \in \mathbb{R}$, se cumple que el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq c\}$ es un conjunto cerrado. De manera equivalente, se cumple que el conjunto $\{x \in X : f(x) < c\}$ es un conjunto abierto.

2.2.8 Teoremas de Punto Fijo

Brouwer (1911) investiga el teorema de punto fijo para funciones. Esta teoría es muy usada por los trabajos de von Neumann (1928) y von Neumann (1937) y para la economía matemática y la teoría de juegos. Luego Kakutani (1941) generaliza este concepto para correspondencias. El siguiente desarrollo tiene como referencia el trabajo de Vohra (2004) que presenta los teorema de punto fijo siguientes.

Definición 25. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f: S \to S$ una función, un elemento $p \in X$ es un *punto fijo* de f cuando $f(p) = p$

La definición de un punto fijo tienen múltiples aplicaciones en la matemática. Constantentemente se desea resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_1$$

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ donde $i, j = 1, \dots, n$.

Si $A = (a_{ij})_{n\times n}, x = (x_j)_{n\times 1}$ y $b = (b_i)_{n\times 1}$, reescribimos el sistema como

$$Ax = b$$

Note que

$$Ax = b \Leftrightarrow Ax - b = 0 \Leftrightarrow Ax - b + x - x = x.$$

Definiendo $\varphi(x) = (A_I)x - b$, tenemos

$$Ax = b \Leftrightarrow \varphi(x) = x$$

Resolver $Ax = b$ es equivalente a hallar un punto fijo de φ. Por lo tanto se requiere teoremas que garanticen la existencia de punto fijo.

Los Teoremas de punto fijo nos dicen sobre qué condiciones la función f tiene punto fijo. Según las condiciones van apareciendo diversos teoremas de punto fijo (Banach, Brouwer, Shauder, Kakutani, etc). A continuación se presenta la definición de contracción para definir la existencia del punto fijo de Banach para contracciones.

Definición 26. (Contracción). Sea (M, d) un espacio métrico. La aplicación $f: M \to M$ es una *contracción* si existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y), \forall x, y \in M$$

En el caso unidimensional, la contracción se reduce a $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$.

Corolario 9. *(Unicidad). Una contracción f puede tener a lo más un punto fijo.*

Demostración. Si $f(x) = x$ y $f(y) = y$, por la desigualdad fundamental

$$d(x, y) = 0$$

Lo que implica que $x = y$.

Observación. Si f es lipschitziana con constante c, entonces f^n es lipschitziana con constante de lipschitz c^n, esto es,

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq c^n d(x, y)$$

Teorema 11. *(Desigualdad Fundamental de la Contracción). Si $f: (M, d) \to (M, d)$ es una contracción con constante de contracción c, entonces para todo $x, y \in M$*

$$d(x, y) \leq d(x, f(x)) + d(f(y), y)$$

Demostración. Usando la desigualdad triangular

$$d(x, y) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), y)$$

$$\leq d(x, f(x)) + c \cdot d(x, y) + d(f(y), y)$$

Lema 3. *(Existencia de la sucesión de Cauchy). Sea* $f: M \to M$ *una contracción. Si* $x_0 \in M$, *entonces* $\left(f^n(x_0)\right)$ *es de Cauchy.*

Teorema 12. *(Teorema de Punto Fijo de Banach). Si M es un espacio métrico completo y* $f: M \to M$ *una contracción. Entonces existe un único* $x \in M$ *tal que* $f(x) = x$.

El teorema de Banach es muy débil. Considere $f : [0, 1] \to [0, 1]$, donde $f(x) = x$. Esta función apenas deja de ser una contracción ya que $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ para todo x, $y \in [0, 1]$. Sin embargo, cada punto en [0, 1] es un punto fijo de esta función. EL teorema de Banach es interpretado como una condición suficiente para un algoritmo simple de calculo del punto fijo (Vohra, 2005). El siguiente teorema se debe a Brouwer (1881-1966). Se ponen las siguientes definiciones que permiten la demostración del teorema de Brouwer.

Teorema 13. *(Teorema de Aproximación de Weierstrass). Sea* $K \subset R^m$ *un espacio métrico compacto. Entonces dada una aplicación continua* $f : K \to$ R *existe una sucesión de polinomios* $p_n: K \to \mathbb{R}$ *que converge uniformemente para f.*

Teorema 14. *No existe función* $f: \overline{B}^n \to S^{n-1}$ *de clase* $\mathcal{C}^1$ *tal que* $f(x) = x$ *para todo* $x \in S^{n-1}$.

Teorema 15. *(Teorema de Punto de fijo de Brouwer). Si* $f: \overline{B}^n \to \overline{B}^n$ *es continua, entonces existe* $x \in \overline{B}^n$ *tal que* $f(x) = x$.

Demostración. Sea $f: \overline{B}^n \to \overline{B}^n$ continua. Por el Teorema de Aproximación de Weierstrass existe una sucesión de funciones (polinomiales) de clase $\mathcal{C}^1$, dado por p_k tal que $\| f(x) - p_k(x \| \leq 1/k$ para todo $x \in \overline{B}^n$. Entonces

$$\| p_k(x) \| \leq \| f(x) \| + \| p_k(x) - f(x) \| \leq 1 + 1/k$$

Por lo tanto, si $h_k = (1 + 1/k)^{-1} p_k$ tenemos

$$h_k: \overline{B}^n \to \overline{B}^n \quad y \quad h_k \to f \quad uniformemente$$

Afirmación. Cada h_k posee punto fijo en $\overline{B}^n$. En efecto, si no fuese verdad, sea $f_k: \overline{B}^n \to S^{n-1}$ la aplicación dada por $f_k(x) =$ punto donde la semi recta partiendo de $h_k(x)$ y pasando por x intercepta S^{n-1}.

Si h_k no tuviese puntos fijos esta aplicación es de clase C^1 y es tal que $f_k(x) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$. Pero esto contradice la proposición. Sea x_k el punto fijo de h_k. Osea, $h_k(x_k) = x_k$. Como $\overline{B}^n$ es compacto, pasando a una subsucesión si fuese necesario, podemos asumir que $x_k \to x_0$ para algún $x_0 \in \overline{B}^n$. Como $h_k \to f$ uniformemente, entonces

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} h_k(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$$

en este sentido f tienen punto fijo.

2.3 MARCO CONCEPTUAL

Se consideran las siguientes definiciones necesarias en el presente trabajo:

Subconjunto. Se dice que *A* es un *subconjunto* de *B* si cada elemento de *A* es también un elemento de *B*, escribiremos este hecho como $A \subseteq B$ y se lee "*B* contiene a *A*". Si $A \subseteq B$ pero *A* es distinto de *B*, diremos que *A* es un *subconjunto propio* de *B* y escribimos $A \subset B$. Las relaciones $\subseteq$ y $\subset$ se denominan *inclusión* e *inclusión propia*, respectivamente.

Singletón. Un conjunto con un solo elemento *x* es llamado *singletón x* y se representa como el conjunto $\{x\}$.

Función. Se define una función $f : A \to B$ a aquella conformada por un conjunto *A que se denomina dominio de la función,* el conjunto *B*, denominado el codominio de la función, y una regla que hace corresponder a cada elemento $x \in A$ un único elemento $f(x)$ en el conjunto B. Se usa la notación $x \to f(x)$ para indicar que f hace corresponder a x el valor $f(x)$. El símbolo de f es distinto del símbolo $f(x)$, f denota la función o regla y el símbolo $f(x)$ es el valor que toma la función en el punto x de su dominio.

La regla o función que muestra cómo obtener el valor $f(x) \in B$ para elementos $x \in A$ esta sujeta a las siguientes condiciones:

1. No debe haber excepciones para los elementos del dominio. Si f tiene al conjunto A como su dominio, la regla debe satisfacer $f(x)$ para todo elemento $x \in A$.

2. No debe haber ambigüedades en la definición de la regla. Esto es, a cada elemento $x \in A$, la regla debe hacer corresponder un único elemento $f(x)$ en B.

Observe que no existe funciones "plurívocas". Por la segunda condición, si $x = y$ en A, entonces $f(x) = f(y)$ en B. Se sigue de las condiciones encima que dos funciones $f : A \to B$ y $g: A' \to B'$ son iguales si y solamente si $A = A'$, $B = B'$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Esto es, dos funciones se dicen iguales cuando tienen el mismo dominio, el mismo contradominio y la misma regla de correspondencia.

Ejemplo 8. Sea $A = B = \mathbb{Q}$, intentaremos definir una función $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ considerando la siguiente regla: a cada número $x \in \mathbb{Q}$ hacemos corresponder el número $\mathrm{f(x)} \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot f(x) = 1$. Esta regla no define una función de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ ya que dado un $0 \in \mathbb{Q}$, no existe número racional alguno $y = f(0)$ tal que $\mathrm{o} \cdot \mathrm{y} = 1$. Por lo tanto, si escogemos el conjunto $A = \mathbb{Q} - \{0\}$ para codominio, la misma regla define la función $f: A \to \mathbb{Q}, f(x) = 1/x$.

Ejemplo 9. Sea T el conjunto de los triángulos del plano y $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos. Consideremos la tentativa de definir una función $f: \mathbb{R}^+ \to T$ por la regla siguiente: a cada número real $x > 0$, hagamos corresponder el triángulo $f(x)$ cuya área es x. Evidentemente hay ambigüedades ya que dado un número real $x > 0$, existe una infinidad de triángulos cuya área es x. La regla no define una función.

Función inversa. Dada una función $f: A \to B$, consideremos un conjunto $Y \subset B$. la imagen inversa de Y dada por la función f es el conjunto $f^{-1}(Y)$ formado por todos los $x \in A$ tal que $f(x) \in Y$. De este modo

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A: f(x) \in Y\}.$$

Note que puede ocurrir $f^{-1}\,(Y) = \emptyset$ cuando $Y \subset B$ es un subconjunto no vacío. Esto se da cuando $Y \cap f(A) = \emptyset$. En particular, f no es sobreyectiva. Dado $y \in B$, escribimos $f^{-1}(Y)$ en vez de $f^{-1}(\{y\})$. Puede acontecer que $f^{-1}(Y)$ posea más de un elemento ya que f puede no ser inyectiva.

La imagen inversa se comporta relativamente a las operaciones con conjuntos. Dados los subconjuntos $(Y, Z \subseteq B)$ y la función $f: A \to B$, se tiene

1. $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$
2. $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$
3. $f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$
4. $Y \subset Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$
5. $f^{-1}(B) = A$
6. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

Demostración. (1) Tomemos $x \in f^{-1}(Y \cup Z) \Leftrightarrow f(x) \in Y \cup Z \Leftrightarrow f(x) \in Y$ ó $f(x) \in Z \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y)$ ó $x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$.

(2) $x \in f^{-1}(Y \cap Z) \Leftrightarrow f(x) \in Y \cap Z \Leftrightarrow f(x) \in Y \;\; e \;\; f(x) \in Z \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \;\; e \;\; x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$.

(3) $x \in f^{-1}(Y^c) \Leftrightarrow f(x) \in Y^c \Leftrightarrow f(x) \notin Y \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(Y) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(Y))^c$.

(4) Debido que $Y \subset Z$, entonces para un $f(x) = y \in Y$ se tiene que $y \in Z$. Además, para

$x \in f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f(x) \in Y \Leftrightarrow y \in Y \Rightarrow f(x) = y \in Z \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Z)$.

(5) Sea $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow x \in A$.

(6) Por contradicción, supongamos que $x \in f^{-1}(\emptyset) \Leftrightarrow f(x) \in \emptyset$ lo que contradice. Por lo tanto, se cumple $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 UBICACIÓN GEOGRÁFICO DEL ESTUDIO

La investigación se realizó en la Escuela Profesional de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

3.2 PERÍODO DE DURACIÓN DE ESTUDIO

La investigación tuvo una duración de II semestres académicos para su culminación.

3.3 PROCEDENCIA DEL MATERIAL UTILIZADO

Las fuentes o materiales utilizados en el desarrollo de la investigación fueron libros de texto y especialmente investigaciones publicadas en revistas científicas de matemática y economía matemática donde se estudia la teoría topológica de correspondencias, teoremas de punto fijo y su relación con el equilibrio de Nash.

3.4 POBLACIÓN Y MUESTRA DEL ESTUDIO

La investigación no tiene una población ni una muestra debido que es teórica y no experimental.

3.5 DISEÑO ESTADÍSTICO

La investigación no tiene un diseño estadístico debido que es teórica y no hace uso de la experimentación.

3.6 PROCEDIMIENTO

Se dedujo el comportamiento del equilibrio de Nash usando la teoría topológica de correspondencias. Además, haciendo uso de la lógica, se probó los principales resultados en la construcción de esta teoría y se presentó de forma ordenada las principales definiciones y proposiciones que corresponden al tema de investigación.

3.7 VARIABLES

La variable dependiente es el equilibrio de Nash. La variable independiente es el estudio de la topología de correspondencias.

3.8 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Los resultados se presentan en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 RESULTADOS

En este capítulo se expone el resultado principal de la tesis la misma que es utilizar la topología de correspondencias para demostrar el teorema de existencia del Equilibrio de Nash. Para desarrollar este objetivo, este capítulo presenta la teoría topológica de correspondencias, donde se presenta la definición de correspondencia o multifunciones, la definición de continuidad de correspondencias, inversas naturales de la correspondencia que son la inversa inferior y la inversa superior y la importante definición de continuidad para correspondencias que en este caso se denomina hemicontinuidad. Como el concepto de equilibrio de Nash está ligado a juegos estratégicos y en economía, en seguida se presenta la definición de algunos conceptos económicos como función de utilidad, conjunto de consumo y la definición de un juego en su forma normal. Luego, se presenta la definición del equilibrio de Nash y se prueba la existencia de dicho equilibrio utilizando la topología y el importante teorema de punto fijo de Kakutani para correspondencias.

4.1.1 Topología de correspondencias

En esta sección se desarrolla la teoría topológica de correspondencias. En este sentido se define una correspondencia φ que asocia cualquier punto de su dominio un subconjunto no vacío. Seguidamente se presenta la definición de inversa de una correspondencia, que a diferencia de la inversa de una función punto a punto, la correspondencia tiene dos inversas naturales, una inversa fuerte y una inversa débil. A continuación tenemos: dado dos conjuntos X e Y , el *producto cartesiano* $X \times Y$ es la colección de pares ordenados (x, y) de elementos de X e Y, respectivamente. Una *relación* entre los elementos de X e Y puede ser representada a través de $X \times Y$. Una relación entre elementos de X se denomina *relación binaria* en X. A partir de estos enunciados se define lo siguiente:

Definición 27. *Una correspondencia φ de X a Y asocia a cada $x \in X$ un subconjunto no vacío $\varphi(x) \subseteq Y$ y se denota por $\varphi: X \rightrightarrows Y$.*

Muchas veces se puede pensar de φ como una "función multivalor" de X a Y en lugar de una función de X al conjunto potencia 2^Y de Y.

Definición 28. Los espacios X e Y son respectivamente el *dominio* y el *codominio* de la correspondencia φ.

Definición 29. *Se denomina gráfico de la correspondencia φ (o gráfico de φ) al conjunto*

$$Gr_{\varphi} = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \varphi(x)\}$$

Definición 30. *Dado un subconjunto $A \subseteq X$, la imagen de A bajo la correspondencia φ está definida por $\varphi(A) = \bigcup_x \{\varphi(x) : x \in A\} = \bigcup_{x \in A} \varphi(x)$.*

Definición 31. *Cada correspondencia $\varphi: X \rightrightarrows Y$ tiene dos inversas naturales:*

1. Inversa fuerte o superior $\varphi_s^{-1}(A)$ de un subconjunto $A \subset Y$ definido por

$$\varphi_s^{-1}(A) = \{x \in X : \varphi(x) \subset A\},$$

2. Inversa débil o inferior $\varphi_i^{-1}(A)$ de un subconjunto $A \subset Y$ definido por

$$\varphi_i^{-1}(A) = \{x \in X : \varphi(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Ejemplo 10. Considere la correspondencia $\varphi: [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0,1) \\ [0,1] & si \quad x = 1 \end{cases}$$

El gráfico de la correspondencia es la siguiente:

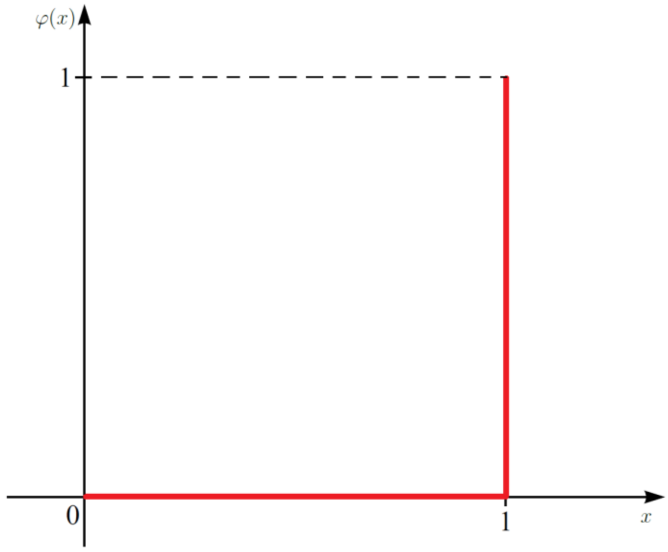

Figura 1. Gráfico de la correspondencia $\varphi\colon [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$

Suponga que $A = \left(\frac{1}{2}, 2\right) \subset \mathbb{R}$. Entonces la inversa superior de $A \subset \mathbb{R}$ es

$$\varphi_s^{-1}(A) = \{x \in X\colon \varphi(x) \subset A\} = \emptyset$$

Pero si considera un conjunto $B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Entonces la inversa superior de $B \subset \mathbb{R}$ será

$$\varphi_s^{-1}(B) = \{x \in X\colon \varphi(x) \subset B\} = [0,1)$$

Para el caso de la inversa inferior del conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se tiene

$$\varphi_i^{-1}(A) = \{x \in X\colon \varphi(x) \cap A \neq \emptyset\} = \{x \in X\colon \varphi(x) \cap (1/2,2) \neq \emptyset\} = \{1\}.$$

Similarmente,

$$\varphi_i^{-1}(B) = \{x \in X\colon \varphi(x) \cap B \neq \emptyset\}$$

$$= \{x \in X\colon \varphi(x) \cap (-1/2,1/2) \neq \emptyset\}$$

$$= [0,1) \cup \{1\} = [0,1]$$

Es fácil verificar que $\varphi_s^{-1}(A) \subseteq \varphi_i^{-1}(A)$. En efecto, para un $x \in \varphi_s^{-1}(A)$, se tiene que $\emptyset \neq \varphi(x) \subseteq A$. Lo que implica que $A \neq \emptyset$, luego $\varphi(x) \cap A \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in \varphi_i^{-1}(A)$.

Comentario 4. Si se tiene una función cualquiera $f: X \to Y$ y si se define una correspondencia $\varphi: X \rightrightarrows Y$ dada por $x \mapsto \{f(x)\} \subset Y$, entonces la inversa superior es igual a la inversa inferior y esta a su vez es igual a la inversa de la función para un cierto conjunto, esto es, $\varphi_s^{-1}(A) = \varphi_i^{-1}(A) = f^{-1}(A)$.

Demostración del comentario. Sea $x \in \varphi_s^{-1}(A) \Leftrightarrow \varphi(x) \subset A \Leftrightarrow f(x) \in A \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$. De forma similar, $x \in \varphi_i^{-1}(A) \Leftrightarrow \varphi(x) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow f(x) \in A \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$.

Recuerde que para el caso de una función $f: X \to Y$ se cumple las siguientes propiedades

(a) $f^{-1}(A^C) = [f^{-1}(A)]^C$

(b) $f^{-1}(\cap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) = \cap_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(A_\alpha)$

(c) $f^{-1}(\cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) = \cup_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(A_\alpha)$

La pregunta natural que surge es si esas propiedades de funciones son válidas para multifunciones. La respuesta es que sí pero únicamente para las dos primeras. Observe el siguiente teorema.

Teorema 16. *Sea la correspondencia $\varphi: X \rightrightarrows Y$ para un conjunto $A \subset Y$, se cumple*

1. $\varphi_s^{-1}(A^C) = [\varphi_i^{-1}(A)]^C$
2. $\varphi_i^{-1}(A^C) = [\varphi_s^{-1}(A)]^C$
3. $\varphi_s^{-1}(\cap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) = \cap_{\alpha\in\Gamma} \varphi_s^{-1}(A_\alpha)$

Demostración. (1)

$$x \in \varphi_s^{-1}(A^C) \Leftrightarrow \varphi(x) \subset A^C \Leftrightarrow \varphi(x) \cap (A^C)^C = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow x \notin \varphi_i^{-1}(A)$$

$$\Leftrightarrow x \in [\varphi_i^{-1}(A)]^C$$

(2) $$[\varphi_s^{-1}(A)]^C = \varphi_i^{-1}(A^C)$$

(3) $$x \in \varphi_s^{-1}(\cap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) \Leftrightarrow \varphi(x) \subset \cap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \Leftrightarrow \varphi(x) \subset A_\alpha, \quad \forall\alpha \in \Gamma$$

$$\Leftrightarrow x \in \varphi_s^{-1}(A_\alpha), \quad \forall\alpha \in \Gamma \Leftrightarrow x \in \cap_{\alpha\in\Gamma} \varphi_s^{-1}(A_\alpha)$$

Comentario 5. Las propiedades del teorema anterior no ocurren para la inversa inferior. Para ello observe el siguiente ejemplo para verificar que en general $\varphi_i^{-1}(\cap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) \neq \cap_{\alpha\in\Gamma} \varphi_i^{-1}(A_\alpha)$.

Ejemplo 11. *Sea la correspondencia* $\varphi\colon [0,\infty] \to \mathbb{R}$ *dado por* $\varphi(x) = \{-x, x\}$. *Si considera los conjuntos* $A_1 = \{-2,1\}$ *y* $A_2 = \{-2,2\}$, *se obtiene* $\varphi_i^{-1}(A_1) = \{1,2\}$ *y* $\varphi_i^{-1}(A_2) = [0,2]$. *Si se cumple*

$$\varphi_i^{-1}(A_1) \cap \varphi_i^{-1}(A_2) = \{1,2\}.$$

Por otro lado,

$$\varphi_i^{-1}(A_1 \cap A_2) = \varphi_i^{-1}(\{1\}) = \{1\}.$$

Entonces,

$$\varphi_i^{-1}(A_1) \cap \varphi_i^{-1}(A_2) \neq \varphi_i^{-1}(A_1 \cap A_2).$$

No siendo válida la propiedad para la inversa inferior. La propiedad se cumple también para la unión de conjuntos en el caso de la inversa inferior y no siendo válida para la inversa inferior de la correspondencia. Este resultado se muestra en el teorema siguiente:

Teorema 17. *Sea* $\varphi\colon X \to Y, A \subset Y$, *se cumple*

$$\varphi_i^{-1}(\cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) = \cup_{\alpha\in\Gamma} \varphi_i^{-1}(A_\alpha)$$

Demostración.

$$[\varphi_i^{-1}(\cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)]^C = \varphi_s^{-1}[(\cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^C] = \varphi_s^{-1}(\cap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^C)$$

$$= \cap_{\alpha\in\Gamma} \varphi_s^{-1}(A_\alpha^C) = \cap_{\alpha\in\Gamma} [\varphi_i^{-1}(A_\alpha)]^C$$

Por lo tanto,

$$\varphi_i^{-1}(\cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) = \cup_{\alpha\in\Gamma} \varphi_i^{-1}(A_\alpha).$$

4.1.2 Continuidad y hemicontinuidad de correspondencias

Un *entorno* de un conjunto A es algún conjunto B para lo cual existe un conjunto abierto V que satisface $A \subseteq V \subseteq B$. Algún conjunto abierto V que satisface $A \subseteq V$ se llama un *entorno abierto* de A. Análogamente, se dice que el conjunto U es un entorno del punto $x \in X$ si existe un conjunto abierto V en X tal que $x \in V \subseteq U$.

Definición 32. Se define una correspondencia $\varphi: X \rightrightarrows Y$ entre espacios topológicos X e Y que es una correspondencia:

1. *Hemicontinua superior* (hcs) en $x \in X$ si para cada entorno U de $\varphi(x)$ existe un entorno V de x tal que $z \in V$ implica $\varphi(z) \subset U$. Equivalentemente, $\varphi: X \rightrightarrows Y$ es hemicontinua superior (hcs) en $x \in X$ si para todo entorno abierto U de $\varphi(x)$ se verifica que $\varphi_s(U) \subseteq X$ es un entorno de X. Similar a las funciones, se dice que φ es hemicontinua superior en X si es hemicontinua en cada punto de X.

2. *Hemicontinua inferior* (hci) en $x \in X$ si para cada conjunto abierto U tal que $\varphi(x) \cap U \neq \emptyset$, existe un entorno V de x tal que $z \in V$ implica $\varphi(z) \cap U \neq \emptyset$. Equivalentemente, $\varphi: X \rightrightarrows Y$ es hemicontinua inferior (hci) en $x \in X$ si para todo entorno abierto U tal que $\varphi(x) \cap U \neq \emptyset$ se verifica que $\varphi_i(U) \subseteq X$ es un entorno de x. Se dice que φ es hemicontinua inferior en X si es hemicontinua en cada punto de X.

3. *Continua* en $x \in X$ cuando es hemicontinua superior y hemicontinua inferior en x. Similarmente, se dice que la correspondencia es continua cuando es continua en cada punto de su dominio.

Comentario 6. En general una correspondencia $\varphi: X \rightrightarrows Y$ entre espacios topológicos X e

Y puede ser hemicontinua superior sin ser hemicontinua inferior. El ejemplo siguiente muestra este resultado.

Ejemplo 12. Considere la correspondencia φ: $[0,1] \rightrightarrows [0,1]$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ [0,1] & si \quad x = 1 \end{cases}$$

El gráfico de la correspondencia es la siguiente:

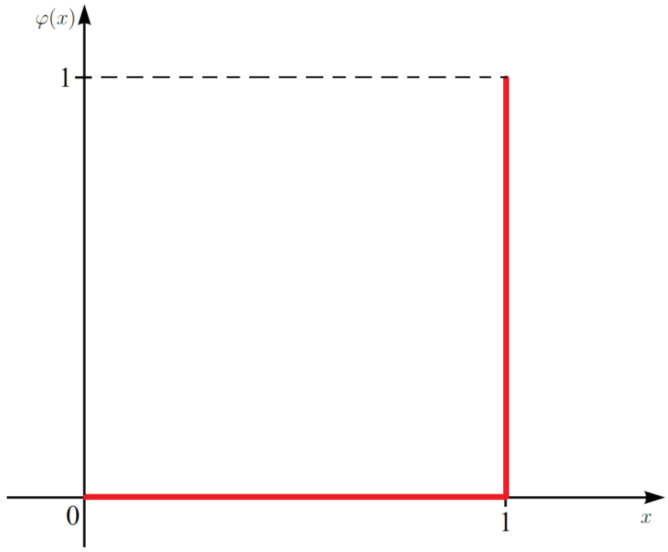

Figura 2. Gráfico de la correspondencia φ: $[0,1] \rightrightarrows [0,1]$

Si supone que dada una vecindad $U = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subset \mathbb{R}$. Entonces claramente $0 \in U$ y si considera una vecindad sobre x como se muestra en la figura siguiente, entonces para un $z \in (x - r, x + r)$ se tiene que $\varphi(z) = \{0\} \subset U$, lo que muestra que la correspondencia φ es hemicontinua superior en x.

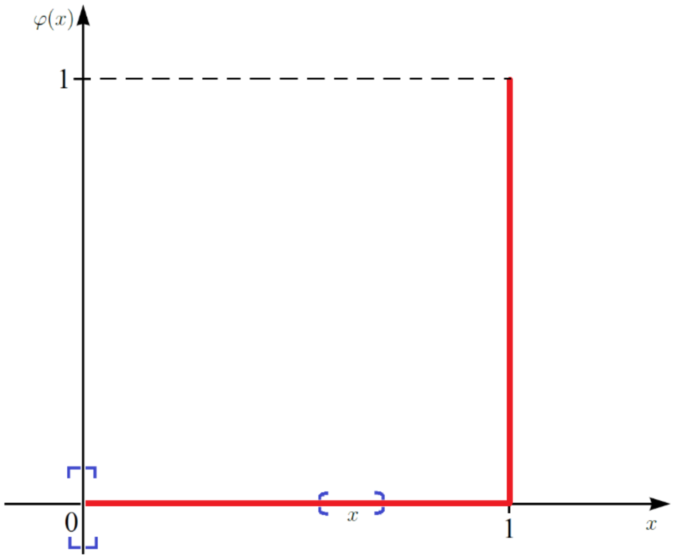

Figura 3. Gráfico de la correspondencia $\varphi: [0,1] \rightrightarrows [0,1]$ con vecindad $U = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Similarmente, si considera una vecindad $U = [0,1] \subset \mathbb{R}$ dada en la figura siguiente. Entonces para cualquier z que se enceuntra en una vecindad de $(1 - r, 1]$ de x, esto es, para cualquier $z \in (1 - r, 1]$, entonces $\varphi(z) = \{0\} \cup [0,1] \subset U$ lo que muestra que la correspondencia φ es hemicontinua superior en x.

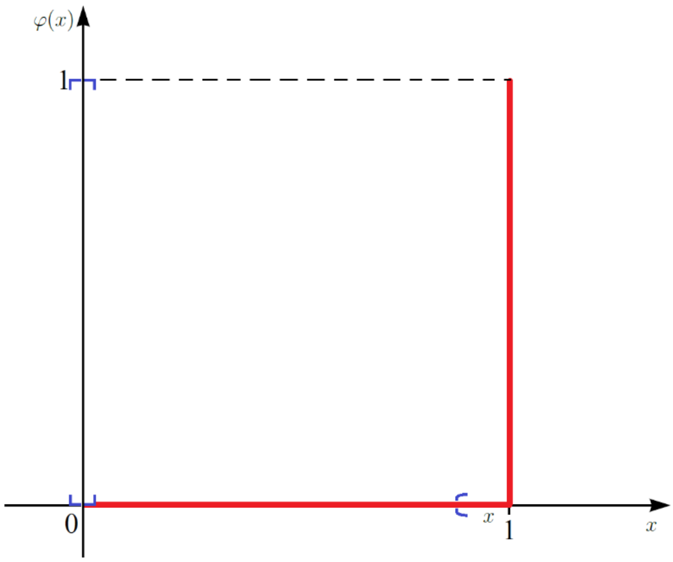

Figura 4. Gráfico de la correspondencia $\varphi: [0,1] \rightrightarrows [0,1]$ con vecindad $U = [0,1] \subset \mathbb{R}$

Ahora se verifica si la correspondencia es hemicontinua inferior. Si supone que dada una vecindad $U = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subset \mathbb{R}$ y si considera una vecindad un $z \in (x - r, x + r)$ se tiene que $\varphi(z) = \{0\} \subset U$, entonces $\varphi(z) \cap U \neq \emptyset$ lo que muestra que la correspondencia φ

es hemicontinua inferiro en $0 \leq x < 1$. Sin embargo, si se considera una vecindad dada por $U = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}\right) \subset \mathbb{R}$ y una vecindad $(1 - r, 1]$ de x como en la figura siguiente, se observa claramente que existe un $z \in (1 - r]$ tal que $\varphi(z) = \{0\}$, entonces $\varphi(z) \cap \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}\right) = \emptyset$. Lo que muestra que φ no es hemicontinua inferior en $x = 1$. De este modo, el presente ejmplo muestra que una correspondencia φ puede ser hemicontinua superior sin ser hemicontinua inferior.

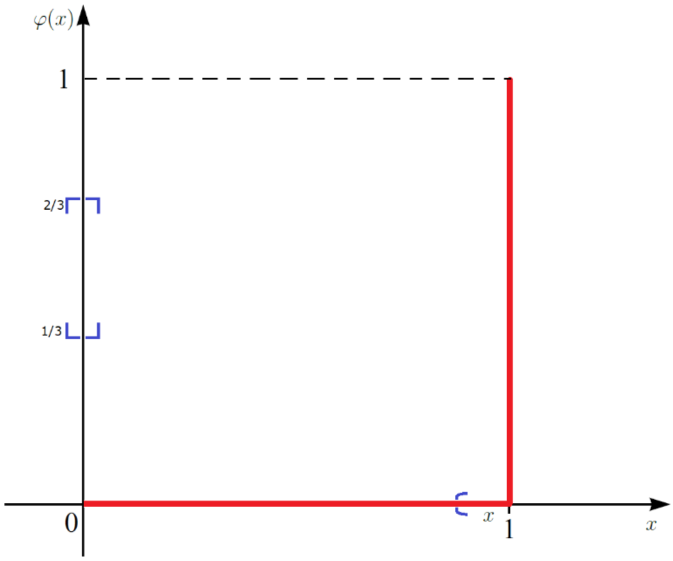

Figura 5. Gráfico de la correspondencia $\varphi: [0,1] \rightrightarrows [0,1]$ con vecindad $U = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}\right) \subset \mathbb{R}$

Lema 4. *(Hemicontinuidad superior). Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una correspondencia $\varphi: X \rightrightarrows Y$ entre espacios topológicos:*

1. *φ es hemicontinua superior.*
2. *$\varphi_s^{-1}(U)$ es abierto en X para cada subconjunto abierto V de Y.*
3. *$\varphi_i^{-1}(F)$ es cerrado en X para cada subconjunto cerrado F de Y.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea U un abierto en Y. Sea un $x \in \varphi_s^{-1}(U)$. Luego, $\varphi(x) \subset U$. Por hipótesis, existe una vecindad abierta V de x tal que $z \in V$ implica $\varphi(z) \subset U$, así $z \in \varphi_s^{-1}(U)$. Por lo tanto, $V \subset \varphi_s^{-1}(U)$.

(2) ⇒ (3) Sea F cerrado en Y. Luego, F^c es abierto en Y. Por (2) se tiene $\varphi_s^{-1}(F^c) = [\varphi_i^{-1}(F)]^c$ es abierto en X. Luego, $\varphi_i^{-1}(F)$ es cerrado en X.

(3) ⇒ (1) Sea $x \in X$ y sea U abierto tal que $\varphi(x) \subset U$. Luego, U^c es cerrado. Por (3) se tiene que $\varphi_i^{-1}(U^c) = [\varphi_s^{-1}(U)]^c$ cerrado en X. Luego, $\varphi_s^{-1}(U)$ es abierto. Además, $x \in \varphi_s^{-1}(U)$. Por lo tanto, existe una vecindad abierta V de X tal que $V \subset \varphi_s^{-1}(U)$. Así, $z \in V$ implica $z \in \varphi_s^{-1}(U)$ y de este modo $\varphi(z) \subset U$.

Lema 5. *(Hemicontinuidad inferior). Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una correspondencia $\varphi: X \rightrightarrows Y$ entre espacios topológicos:*

1. *φ es hemicontinua inferior.*
2. *$\varphi_i^{-1}(U)$ es abierto en X para cada subconjunto abierto V de Y.*
3. *$\varphi_s^{-1}(F)$ es cerrado en X para cada subconjunto cerrado F de Y.*

Lema 6. *Una correspondencia de valor singletón es hemicontinua superior si y solo si es hemicontinua inferior, en tal caso esta es continua como una función.*

Recordando el teorema de la aplicación abierta, que dice que dada una aplicación $f: X \to Y$ entre espacios topológicos, esta es:

- una *aplicación abierta* si $f(V)$ es un conjunto abierto en Y para cada conjunto abierto V en X.
- una *aplicación cerrada* si $f(F)$ es un conjunto cerrado en Y para cada conjunto cerrado F en X.

Teorema 18. *Sea $f: X \to Y$ una aplicación entre espacios topológicos y considere la inversa de la correspondencia $f^{-1}: Y \rightrightarrows X$ definida por la fórmula usual $f^{-1}(y) = \{x \in X: f(x) = y\}$. Entonces:*

1. f es una aplicación cerrada si y solo si f^{-1} es hemicontinua superior.

2. f es una aplicación abierta si y solo si f^{-1} es hemicontinua inferior.

Demostración. 1) Suponga que f es una aplicación cerrada. Fijando un $y \in Y$ y elegiendo un subconjunto abierto U de X tal que $f^{-1}(y) \subseteq U$. Sea $W = (f(U^c))^c$ y note que W es un entorno abierto de y (i.e. existe un conjunto abierto V en Y tal que $y \in V \subseteq W$) tal que para cada $z \in W$ se tiene $f^{-1}(z) \subseteq U$ esto muestra por Definición 32 que f^{-1} es hemicontinua superior en $y \in Y$.

Para el regreso, suponga que f^{-1} es hemicontinua superior. Sea F un subconjunto cerrado de X y fijando un elemento $y \in (f(F))^c$. Entonces $f^{-1} \subseteq F^c$ (i.e. F^c es un entorno de f^{-1}). Así por la hemicontinuidad de f^{-1}, existe un entorno V de y tal que para un $z \in V$ se tiene $f^{-1}(z) \subseteq F^c$. Esto implica que $V \cap f(F) = \emptyset$ (debido que $y \in V \subseteq f(F)^c$). Por lo tanto, cada punto de $(f(F))^c$ es un punto interior, de este modo $(f(F))^c$ es un conjunto abierto, lo que implica que $f(F)$ es cerrado.

4.1.3 Teoría de Juegos

En esta sección se presenta la definición de un juego en su forma normal. Para el desarrollo se presenta la definición de una función de utilidad en economía que es aquella que relaciona a un conjunto de consumo $X \subset \mathbb{R}^n$ con un valor númerico que representa la ganancia o la utilidad de un cierto individuo. Además se presenta la definición de un conjunto de consumo X y sus propiedades que ella cuenta. En seguida, se presenta la definición de las relaciones de preferencia entre las decisiones realizadas por algún agente económico que optimiza su nivel de bienestar. Se presenta el concepto de relación de preferencia racional como aquella relación de preferencia que cumple con las propiedades de completitud y transitividad. Esto es, un agente es racional si su relación de preferencia cumple con la propiedad de completitud y transitividad. Luego, se presenta la definición de una función de utilidad $u(x)$ como aquella función continua que asigna un valor numérico a cada elemento del conjunto de consumo X de acuerdo con las preferencias que tiene el individuo. Finalmente, se presenta la definición de un juego en forma normal que es aquella situación donde cada jugador selecciona en forma simultánea la cual determina la ganancia individual de los jugadores. Es importante señalar que el término *individuo* que se presenta en esta sección, no se refiere sólo a una persona, sino puede referirse a un grupo u organización cuyo comportamiento es de interés analizar, el término puede referirse también a un gobierno o una empresa en competencia que toman decisiones estratégicas.

Conjunto de Consumo

Sea X el *conjunto de consumo* el cual representa el conjunto de todas las alternativas o planes de consumo que el individuo necesita para su existencia. Se puede pensar en X como el conjunto de todas las canastas x de consumo del individuo.

Luego, cada canasta x está conformada por diversa cantidad finita de bienes x_i. Cada unidad de bien de consumo (que conforma la canasta) será medido por un número real, de este modo, $x_i \in \mathbb{R}$ representa el número de unidades del bien i.

Asimismo, se asume que existe un número finito y fijo de n diferentes bienes. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un vector que contiene diferentes cantidades de cada uno de los n bienes y se denomina a x como el *conjunto de consumo* o *plan de consumo*. Un conjunto de consumo $x \in X$ es representado por un punto $x \in \mathbb{R}_+^n$, usualmente el conjunto de consumo X se encontrará enteramente en el ortante no negativo $X = \mathbb{R}_+^n$. En este sentido, es fácil observar que se satisface lo siguiente:

Supuesto 1. *(Propiedades del conjunto de consumo X)*

1. $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}_+^n$

2. X es cerrado

3. X *es convexo*

4. $0 \in X$

Relaciones de preferencia

Las *relaciones de preferencia* representa las decisiones hechas por algún agente racional que optimiza en todo momento su bienestar, dichas decisiones estarán representadas por X. Matemáticamente, $\succcurlyeq$ es una relación binaria dentro del conjunto de alternativas X; de este modo, comparando dos alternativas $x, y \in X$, se lee $x \succcurlyeq y$ "x es tan bueno como y". De $\succcurlyeq$ se puede asignar dos importantes relaciones en X:

1. La relación de *preferencia estricta*, $\succ$, definida por:

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succcurlyeq y \text{ pero no } y \succcurlyeq x$$

y se lee "x es preferible a y".

2. La relación de *indiferencia*, $\sim$, definida por:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq x$$

y se lee "x es indiferente a y".

Comentario 7. Como ejemplo de (1), suponga que Luis (estudiante de matemática de la Universidad del Altiplano) prefiere estudiar álgebra en lugar de geometría, asimismo de (2), Luis es indiferente entre el álgebra y la geometría. Note que la decisión de Luis está ligada al concepto de *racionalidad*, es decir, le da un mayor nivel de satisfacción estudiar álgebra en (1); y en (2) ambas materias maximizan su bienestar. Asimismo, estos niveles de satisfacción que siente respecto de las materias, son propios de él, no está relacionado con la satisfacción de otros individuos y ninguno de ellos siente el mismo nivel de satisfacción que Luis en las respectivas elecciones.

Es muy necesario notar lo que se comentó, ya que para modelar el comportamiento hay que entender que cada individuo es diferente del resto.

Definición 33. Una relación de preferencia $\succcurlyeq$ se dice que es *racional* si posee las propiedades siguientes:

1. *Completitud:* $\forall x, y \in X$, se tiene que $x \succcurlyeq y$ ó $y \succcurlyeq x$ (o ambos).
2. *Transitividad:* $\forall x, y \in X$, si $x \succcurlyeq y$ e $y \succcurlyeq z$, entonces $x \succcurlyeq z$.

El supuesto que está detrás de la relación de preferencia $\succcurlyeq$ que cumple la propiedad de *completitud* indica que un individuo tiene una preferencia bien definida entre todas sus posibles alternativas. Por otro lado, la transitividad es un supuesto fuerte dentro del concepto de racionalidad.

Teorema 19. *Si $\succcurlyeq$ es racional, entonces:*

1. $\succ$ es irreflexiva ($x \succ x$ no ocurre) y transitiva (si $x \succ y$ e $y \succ z$, entonces ($x \succ z$)

2. $\sim$ es reflexiva ($x \sim x$ para todo x), transitiva (si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces ($x \sim z$), y simétrica (si $x \sim y$, entonces $y \sim x$)

3. Si $x \succ y \succcurlyeq z$, entonces $x \succ z$

Las preferencias individuales pueden no satisfacer la propiedad transitiva por un número de razones, la dificultad ocurre por el problema de *diferencias perceptibles*. Los siguientes ejemplos muestran la presencia de este fenómeno.

Ejemplo 13. Si preguntamos a una persona elegir entre dos tonos muy similares de gris para pintar su habitación, ella será incapaz de notar la diferencia de los colores y será indiferente en su elección. Suponga que se ofrece nuevamente los tonos de gris pero, ligeramente claros ambos (proporcionalmente), así progresivamente continuando con este proceso, ella nuevamente será incapaz de notar la diferencia. Finalmente, si se ofrece el gris original (inicial) y el gris final (casi blanco), ella será capaz de distinguir entre ambos colores y probablemente preferiría alguno de ellos. Así, se viola la transitividad. Observe esta relación expresada como:

$$x_1 \sim y_1, x_2 \sim y_2, \dots, x_n \sim y_n$$

entonces,

$$x_1 \sim y_1 \sim x_2 \sim y_2 \sim \cdots \sim x_n \sim y_n$$

por transitividad:

$$x_1 \sim y_n$$

pero como es capaz de distinguir entre ambos colores, entonces ella elegirá uno de ellos:

$$x_1 \succ y_n \bigtriangleup y_n \succ x_1$$

donde $\bigtriangleup$ es la *disyunción fuerte o exclusiva*.

Ejemplo 14. (*Paradoja de Condorcet*). Una familia formada por la madre (*M*), padre (*P*) y niños (*C*) hacen sus decisiones mediante votación para salir todos juntos el viernes para entretenerse. Las alternativas son ópera (*O*), concierto de rock (*R*) y un show de patinaje (*I*). Los tres miembros de la familia tienen preferencias racionales: $O \succ_M R \succ_M I$, $I \succ_P O \succ_P R$, $R \succ_C I \succ_C O$, donde $\succ_M$, $\succ_P$, $\succ_C$ son las relaciones de preferencia estricta y con la propiedad de transitividad de cada individuo. Ahora, imagine tres opciones de votación: O y R, R y I e I con O. Los resultados de esos votos (O gana al primero, R al segundo e I al tercero) hacen que las decisiones de la familia tengan la forma *intransitiva*: $O \succ R \succ I \succ O$, esta intransitividad es conocida como la *Paradoja de Condorcet* y esta es una dificultad central en la *teoría de la decisión*.

Funciones de utilidad

En la ciencia económica muy a menudo se describe las relaciones de preferencia haciendo uso de las funciones de utilidad. La función de utilidad denotada por $u(x)$ asigna un valor numérico a cada elemento de X de su dominio, clasificando los elementos de X de acuerdo con las preferencias del individuo.

Definición 34. Una función $u: X \to \mathbb{R}$ es una *función de utilidad* que representa la relación de preferencia $\succcurlyeq$ si para todo $x, y \in X$ se cumple:

$$x \succcurlyeq y \iff u(x) \geq u(y)$$

Teorema 20. *La relación de preferencia $\succcurlyeq$ se representa por una función de utilidad siempre que sea racional.*

Demostración. Para probar este teorema se requiere que exista una función de utilidad que represente la preferencia $\succcurlyeq$ y esta relación debe ser completa y transitiva.

1. *Completitud:* dado una función de utilidad $u(x)$ con valor real definida en X, entonces para algún $x, y \in X$ se cumple la desigualdad $u(x) \geq u(y)$ ó $u(y) \geq u(x)$. Debido que $u(\cdot)$ es una función de utilidad que representa $\succcurlyeq$, esto implica que se cumple $x \succcurlyeq y$ o $y \succcurlyeq x$ de la definición. Por lo tanto, la relación de preferencia $\succcurlyeq$ es completa.

2. *Transitiva:* Supongamos que $u(x) \geq u(y)$ y $u(y) \geq u(z)$, luego por ser $u(\cdot)$ una función de valor real y se encuentra en un cuerpo ordenado, entonces $u(x) \geq u(z)$. Asimismo, $u(\cdot)$ representa $\succcurlyeq$ lo cual implica que $x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq z$ entonces $x \succcurlyeq z$ y de este modo la transitividad se cumple.

Juegos en su forma normal

Se define al conjunto S_i como el espacio de estrategias del jugador i y sea s_i un elemento arbitrario de este conjunto, de este modo $s_i \in S_i$ que indica que la estrategia s_i es un elemento del conjunto S_i. Para los n jugadores dentro del juego, se define el vector $(s_1, \dots, s_n)$ como una combinación de estrategias, una para cada jugador, respectivamente. En este sentido, se define al conjunto $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ del producto cartesiano del conjunto de estrategias de los jugadores i como el espacio de estrategias que considera a todos los jugadores donde $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ es el vector estratégico correspondiente a la elección de la estrategia S_i seleccionada por parte del jugador i. Se denota además con el símbolo $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_i$ al espacio producto que está conformado por los $n - 1$ espacios de estrategias donde no se considera el espacio de estrategias del jugador i-ésimo. En este sentido, el vector estratégico s_{-i} es el vector de estrategias sin considerar la estrategia s_i.

Añadiendo a la notación el vector estratégico (s_i, s_{-i}) que indica la selección de la estrategia s_i del jugador i-ésimo, considerándose que los demás jugadores hicieron su elección de sus estrategias de acuerdo con el conjunto de estrategias S.

Además, se define la función de utilidad continua $u_i : S \to \mathbb{R}$ con $i = 1,2, \dots, n$ que representa las funciones de utilidad del jugador i-ésimo como la función de ganancias del jugador i cuando todos los jugadores seleccionan la estrategia $(s_1, \dots, s_n)$. Para un caso general, se asume que dicha función de utilidad u_i es cuasicóncava.

Definición 35. (Juegos en su forma normal). Para que un juego de n jugadores este en su forma normal es necesario que cuente con los espacios de estrategias de los jugadores $S_1, \dots, S_n$ y sus respectivas funciones de ganancias $u_1, \dots, u_n$. El juego en su forma normal se denota por $\mathcal{G} = \{ S_1, \dots, S_n;\ u_1, \dots, u_n\}$.

4.1.4 Existencia del Equilibrio de Nash

En esta sección se presenta la definición del equilibrio de Nash (1950) como aquel vector estratégico de mejor respuesta para un determinado jugador. En seguida se presenta la demostración del teorema de punto fijo de Kakutani (1941) para correspondencias la misma que es una generalización del famoso teorema de punto fijo de Brouwer (1911) para funciones. Finalmente, se presenta la demostración de la existencia del equilibrio de Nash utilizando el teorema de Kakutani.

Considere el juego normal con n jugadores

$$\mathcal{G} = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$$

Se define como

$$\varphi_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})\}$$

la *correspondencia mejor respuesta* del jugador i-ésimo a la elección s_{-i} de los otros jugadores.

Definición 36. *Un equilibrio de Nash es un vector estratégico* $\bar{s} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$ *que es mejor respuesta para sí mismo. Es decir* $\bar{s} \in \varphi_i(s_{-i})$ *para todo* $i \in \{1, \dots, n\}$.

De este modo se define la *correspondencia global* $\varphi = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i : S \rightrightarrows S$ como el producto cartesiano de n correspondencias individuales φ_i. Según la definición, se puede considerar que un equilibrio de Nash es un punto fijo de esta correspondencia global φ. Esto es, $\bar{s} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$ es un Equilibrio de Nash si y solo si $\bar{s} \in \varphi(\bar{s})$, esto es, $\bar{s}$ es una mejor respuesta para sí mismo.

Si se demuestra que la correspondencia φ cumple con las condiciones del Teorema de Kakutani, se habrá demostrado la existencia del Equilibrio de Nash.

Se va a estudiar el concepto de equilibrio de Nash usado por Nash (1950). Sea S_i el conjunto de estrategias del jugador i. Sea $u_i : \prod_{i=1}^{n} S_i \to \mathbb{R}$ la función de utilidad del jugador i. Entonces el concepto de equilibrio de Nash es dado por:

Definición 37. *(Equilibrio de Nash). El vector* $\bar{s} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n) \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ *es el equilibrio de Nash si y solo si para todo* i *se cumple* $u_i(\bar{s}) = máx_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \bar{s}_{-i})$ *donde*

$$\bar{s}_{-i} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{i-1}, \bar{s}_{i+1}, \dots, \bar{s}_n)$$

y

$$(s_i, \overline{s}_{-i}) = (\overline{s}_1, \dots, \overline{s}_{i-1}, s_i, \overline{s}_{i+1}, \dots, \overline{s}_n)$$

Para la demostración de la existencia de equilibrio de Nash es necesario el teorema del punto fijo de Kakutani para correspondencias debido a Kakutani (1941) que es una generalización del teorema del punto fijo de Brouwer.

Teorema 21. *(Teorema del punto fijo de Kakutani). Suponga que* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *es no vacío, compacto y convexo. Sea además* $\varphi: S \rightrightarrows S$ *es una correspondencia hemicontinua superior con valores convexos. Entonces, la correspondencia* $\varphi(\cdot)$ *tiene un punto fijo, es decir, existe un* $\overline{s} \in S$ *tal que* $\overline{s} \in \varphi(\overline{s})$.

Demostración. Para la demostración del teorema de Kakutani para un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, convexo y compacto. En primer lugar, se prueba la existencia de un elemento $\overline{s} \in S$. Para este fin, se utiliza las condiciones del teorema y el teorema de punto fijo de Brouwer. En segundo lugar, se prueba la condición que debe cumplir dicho elemento: $\overline{s}$ es un punto fijo de la correspondencia φ, esto es, $\overline{s} \in \varphi(\overline{x})$. Desarrollando la demostración.

(i) Existe un $\overline{s} \in S$. En efecto, dado un $\epsilon > 0$, como el conjunto S es compacto, existe una secuencia finita $(\lambda_i)_{i=1}^n$ tal que $S \subset \bigcup_{i=1}^n B(\lambda_i, \epsilon)$ donde $B(\lambda_i, \epsilon)$ son bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$ para todo i. Tomando para cada i un punto arbitrario $y_i \in \varphi(\lambda_i)$, se define la función $f: S \to S$ dado por la expresión siguiente $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) y_i$ que es una función continua. Usando el teorema del punto fijo de Brouwer, existe $s \in S$ tal que $s = f(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(s) y_i$ donde $\alpha_i(s) \neq 0$. Sea $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia decreciente de números reales positivos que convergen a cero. Para cada ϵ_n se asocia un s_n que es un punto fijo de f. Debido que S es compacto, se asume sin pérdida de generalidad que $s_n \to \overline{s} \in S$. Demostrando así la existencia de un elemento $\overline{s} \in S$.

(ii) $\overline{s}$ es un punto fijo de la correspondencia φ. En efecto, se prueba por contradicción. Suponga que $\overline{s} \notin \varphi(\overline{s})$. Como φ es cerrado y de valor convexo, por teorema existen $p \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p \cdot \overline{s} < \alpha < p \cdot z$, para todo $z \in \varphi(\overline{s})$. Por la hemicontinuidad superior de φ en $\overline{s}$, se tiene que para algún $\epsilon > 0$, $s \in B(\overline{s}, \epsilon)$ lo que implica $\alpha < p \cdot z$ para todo $z \in \varphi(x)$. Sea la secuencia decreciente de reales positivos $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a cero. Para todo $\epsilon > 0$ existe $n_1 \leq n$ tal que $\epsilon_n < \frac{\epsilon}{2}$, también $s_{\epsilon_n} \to \overline{s}$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $n_2 \leq n$ tal que $|s_{\epsilon_n} - \overline{s}| < \frac{\epsilon}{2}$. Haciendo $n_0 = \text{mín}\{n_1, n_2\}$ para todo $n > n_0$, se tiene $s_{\epsilon_n} = f(s_{\epsilon_n}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\epsilon_n}(s_{\epsilon_n}) y_{i,\epsilon_n}$ con $y_{i,\epsilon_n} \in \varphi(s_{\epsilon_n})$ y $\alpha_{i,\epsilon_n}(s_{\epsilon_n}) \neq 0$ lo que implica $s_{\epsilon_n} \in B(s_{i,\epsilon_n}, \epsilon_n) \cap S$. Lo que implica $|s_{i,\epsilon_n} - \overline{s}| \leq |s_{i,\epsilon_n} - s_{\epsilon_n}| + |s_{\epsilon_n} - \overline{s}| < \epsilon_n + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Luego, $s_{i,\epsilon_n} \in B(\overline{s}, \epsilon)$ implica $\alpha < p \cdot z$ para todo $z \in \varphi(s_{i,\epsilon_n})$ en particular $\alpha < p \cdot y_{i,\epsilon_n}$ así para todo $n > n_0$, se tiene $\alpha < p \cdot s_{\epsilon_n}$. Tomando límite a la expresión se obtiene $\alpha < p \cdot \overline{s}$, lo que contradice la hipótesis de $p \cdot \overline{s} < \alpha$. Por lo tanto, $\overline{s} \in S$ es un punto fijo de la correspondencia φ.

Teorema 22. *(Existencia del equilibrio de Nash). Sea S_i un conjunto compacto y convexo, $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$. Sea $u_i : S \to \mathbb{R}$ una aplicación continua y cuasicóncava para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces existe el equilibrio de Nash.*

Primera demostración. (i) Se define la correspondencia de respuesta óptima individual φ_i a cada jugador i la que asigna a cada vector estratégico $s = (s_i, s_{-i}) \in S$ la correspondencia de respuesta óptima $\varphi_i(s)$ a la estrategia s_{-i}. Esto es,

$$\varphi_i(s) = \{s_i \in S_i : s_i \; es\; solución\;\; del\;\; problema\; \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})\}$$

(ii) Se define ahora la correspondencia φ que asigna a cada estrategia $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ el conjunto de las respuestas óptimas de todos los jugadores. En consecuencia $\varphi : S \rightrightarrows S$ es la correspondencia tal que

$$\varphi(s) = \varphi_1(s) \times \cdots \times \varphi_n(s) = \{s = (s_1, \dots, s_n) \in S: s_i \in S_i(s), \forall i = 1, \dots, n\}$$

(iii) φ es una correspondencia hcs.

(iv) $S \neq \emptyset$, es compacto y convexo. En efecto, como los conjuntos $S_1, \dots, S_n$ son compactos y convexos por la hipótesis, entonces el conjunto $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ es un conjunto compacto y convexo

(v) u_i es contínua en S_i. En efecto, como u_i es una aplicación continua en el conjunto $S = S_1 \times \cdots \times S_n$, entonces la aplicación u_i es también continua en el conjunto S_i para todo $i = 1, \dots, n$.

(vi) u_i es cuasicóncava en S_i.

(vii) $\varphi(s)$ es convexo.

(viii) Existe $\bar{s} \in \varphi(\bar{s})$. En efecto, la correspondencia $\varphi: S \rightrightarrows S$ cumple con las hipótesis del teorema de Kakutani, i.e., φ es hcs, el conjunto $S \neq \emptyset$, S es compacto y convexo, $\varphi(s) \neq \emptyset$ para todo s y los valores de la correspondencia φ son convexas. Entonces, existe $\bar{s} \in \varphi(\bar{s})$ que se denomina el equilibrio de Nash para un juego con n jugadores.

Segunda demostración. Sea $\varphi(s_{-i}) = \{s_i \in S_i: u_i\,(s_i, s_{-i}) = \max\limits_{t \in S_i(x)} u_i(t, s_{-i})\}$. Se demuestra que la correspondencia φ es hemicontinua superior y tiene valores convexos.

Afirmación. Sea $u: S \times T \to \mathbb{R}$ una función contínua y $\varphi: S \rightrightarrows T$ una correspondencia hemicontinua inferior y con valores compactos. Sea

$$\varphi(x) = \{y \in \varphi(x): u(x, y) = \max_{z \in \varphi(x)} u(x, z)\}$$

entonces φ es hemicontinua superior.

Prueba de la afirmación. Sea $x_n \to x, y_n \to y$ con $y_n \in \varphi(x_n)$. Se necesita mostrar que

$y \in \varphi(x)$. Esto es, se necesita mostrar que

$$\forall z \in \varphi(x), u(x,z) \leq u(x,y).$$

En efecto, como φ es hemicontinua inferior, $x_n \to x$ y $z \in \varphi(x)$ conllevan la existencia de $z_{n_k} \in \varphi(x_{n_k})$ con $z_{n_k} \to z$. Por consiguiente,

$$u(x_{n_k}, x_{n_k}) \leq u(x_{n_k}, y_{n_k}).$$

Luego, por la continuidad de u,

$$u(x,z) \leq u(x,y).$$

Para que $\varphi(p,Y)$ sea una función basta exigir que Y sea estrictamente convexo. Siendo Y estrictamente convexo por definición, es fácil ver que $\varphi(p,Y)$ es una función que es continua asi es una correspondencia hemicontinua superior.

Por la cuasiconcavidad de u_i en S_i. Entonces,

$$\varphi(s) = \varphi_1(s_{-1}) \times \cdots \times \varphi_n(s_{-n})$$

es hcs y de valores convexos. Además, el conjunto $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ es convexo y compacto. Luego por el teorema del punto fijo de Kakutani existe $\bar{s} \in S$ tal que $\bar{s} \in \varphi(\bar{s})$, i.e., $\bar{s}_i \in \varphi_i(\bar{s}_{-i})$. Se sigue entonces que $\bar{s}_i$ maximiza $u_i(t, \bar{s}_{-i})$ para $t \in S_i$, i.e., $\bar{s}$ es el equilibrio de Nash.

4.1.5 Aplicación del Equilibrio de Nash en economía

A continuación se presenta una aplicación del equilibrio de Nash en economía. Se trata del modelo de Cournot donde se estudia la interacción entre empresas competidoras donde su interés en la optimización son las cantidades de producción de cada empresa. En el trabajo de Pérez *et al.* (2004) se presenta el modelo de Cournot para un duopolio (dos empresas en el mercado), para el comportamiento de n empresas competidoras, para un monopolio (una sola empresa en el mercado), para competencia perfecta (infinitas empresas pequeñas que no tienen poder de variar el precio de mercado) y finalmente para un caso general en las funciones de demanda y la función de costos de las empresas.

El modelo de Cournot estudia la interacción que tienen las empresas que compiten por las cantidades de producción. En esta sección se analiza el modelo de Cournot para un duopolio, es decir, para la interacción entre dos empresas en el mercado. Asimismo, se estudia el modelo de Cournot para n empresas donde cada una de las empresas producen una cantidad homogénea de producción. Seguidamente se estudia el modelo de Cournot considerando $n = 1$ una sola empresa en el mercado, llamado un monopolio y se hace una comparativa con el modelo de Cournot en competencia perfecta, es decir cuando se asume que existen una infinidad de empresas en el mercado ($n = \infty$) de tal modo que sus decisiones no son posibles impactar sobre el nivel de precios en la economía. Finalmente, se estudia el modelo de Cournot para n empresas en el caso general, es decir, se analiza hipótesis más generales sobre las funciones de demanda y de costos de las empresas. Las funciones de demanda de las empresas son estrictamente decrecientes y cóncavas y las funciones de costos de producción de las empresas son crecientes y convexas. Para todos estos análisis se presenta el equilibrio del mercado denominado el equilibrio de Nash para el óptimo de las cantidades producidas.

Duopolio de Cournot

En el modelo de duopolio de Cournot se considera la existencia de sólo dos empresas E_1 y E_2 en una economa donde cada una de ellas produce una cantidad homogénea de producto denotado por q_1 y q_2, respectivamente. La producción de las cantidades está relacionada con una función lineal de los costos variables de producción. En el modelo no se consideran los costos fijos, es así que los costos marginales de producción son constantes. En el modelo, se considera que las empresas compiten por las cantidades q_1 y q_2 de producción, las mismas que se asumen que todas esas cantidades son vendidas a un precio determinado. En el modelo se considera una función de demanda inversa y lineal dada por la ecuación siguiente

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & si \quad bQ < a \\ 0 & si \quad bQ \geq a \end{cases}$$

donde el parámetro $b > 0$ y la cantidad total de producción Q viene a ser la suma de las cantidades de las empresas dadas, i.e., $Q = q_1 + q_2$. Las funciones de costo de producción lineales de las empresas E_1 y E_2 se definen como sigue

$$C_1(q_1) = cq_1$$

$$C_2(q_2) = cq_2$$

donde $c < a$ (el precio es mayor que el costo). Los beneficios de ambas empresas están definidas como la diferencia entre el ingreso total y el costo total del mercado,

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2) - cq_1 = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2) - cq_2 = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

Luego, este juego tiene 2 jugadores que son las empresas E_1 y E_2 cuyo espacio de estrategias viene dado por $S_1 = S_2 = \left[0, \frac{a}{b}\right]$ que corresponde a los niveles de producción q_1 y q_2 de las empresas respectivamente. Si consideramos que las utilidades de las empresas son iguales a los beneficios, las ecuaciones siguientes señalan esta igualdad

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

Para el cálculo del equilibrio de Nash se define la respuesta óptima de la empresa E_1 a una acción cualquiera de la empresa E_2. Se obtiene resolviendo el programa de maximización de la utilidad de la empresa E_1 con respecto a su cantidad, esto es

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = \max_{q_1}[q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)]$$

donde $0 \leq q_1 \leq a/b$.

La condición de primer orden del programa permite determinar la cantidad de equilibrio de la empresa E_1, esto es

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = a - bq_1 - bq_2 - c - bq_1 = 0 \Longrightarrow q_1^* = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

La condición de segundo orden del programa es

$$\frac{\partial^2 u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1^2} = -2b < 0$$

lo que muestra que la cantidad óptima de la empresa E_1 es una cantidad que maximiza el programa de maximización. Así, la correspondencia de respuesta óptima de la empresa E_1 está dada por la relación

$$R_1(q_2) = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

Realizando un análisis similar para el jugador E_2, se tiene que la respuesta óptima de la empresa E_2 a una acción cualquiera de E_1 está determinada por

$$R_2(q_1) = \frac{a - c - bq_1}{2b}$$

El equilibrio de Nash es la mejor respuesta de cada una de las empresas dado las cantidades de la otra. Si (q_1^*, q_2^*) es el equilibrio de Nash, entonces la cantidad q_1^* será la respuesta óptima a la cantidad q_2^* y viceversa. Por lo tanto se cumple la relación siguiente

$$q_1^* = \frac{a - c - bq_2^*}{2b}, \quad q_2^* = \frac{a - c - bq_1^*}{2b}$$

Resolviendo el sistema, tenemos las cantidades óptimas de producción de las empresas E_1 y E_2 respectivamente,

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3b}$$

Estos puntos de equilibrio representan el equilibrio de Nash para el duopolio de Cournot,

$$S^{EN} = \left\{ \left(q_1^* = \frac{a-c}{3b}, q_2^* = \frac{a-c}{3b} \right) \right\}$$

Reemplazando estos puntos de equilibrio, obtenemos la cantidad total producida en equilibrio en la economía dada por

$$Q^* = q_1^* + q_2^* = 2\frac{a-c}{3b}$$

Asimismo, el precio de equilibrio en la economía viene dado por la relación lineal

$$P^* = a - bQ^* = \frac{a+2c}{3}$$

Los beneficios de equilibrio para las empresas E_1 y E_2 vienen dado por

$$u_1^* = u_1(q_1^*, q_2^*) = q_1^*(a - bq_1^* - bq_2^* - c) = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

$$u_2^* = u_2(q_1^*, q_2^*) = q_2^*(a - bq_1^* - bq_2^* - c) = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

Y finalmente, el beneficio total de equilibrio de la economía en el modelo de duopolio de Cournot es la suma de los beneficios de ambas empresas,

$$U^* = 2\frac{(a-c)^2}{9b}$$

La figura siguiente muestra el equilibrio de Nash como la intersección de las funciones de respuesta óptima de ambas empresas respecto de la otra.

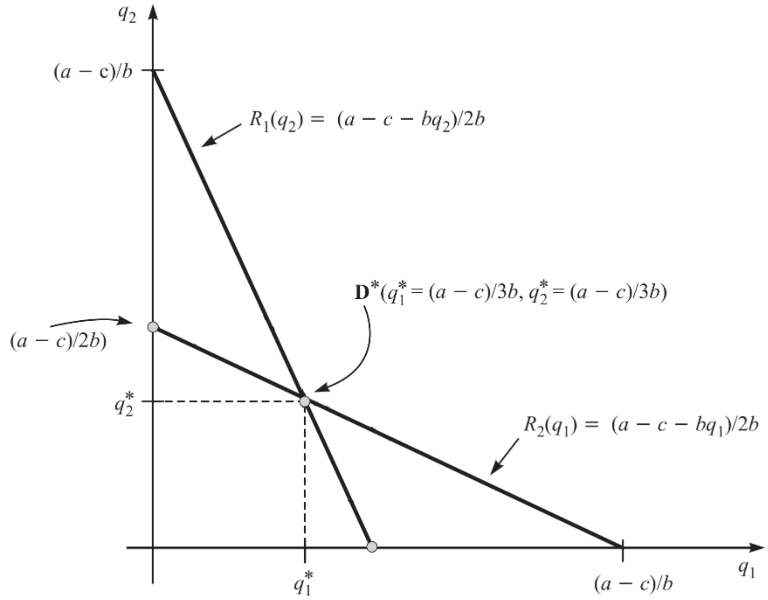

Figura 6. Equilibrio de Nash en el modelo de duopolio de Cournot (Pérez *et al.*, 2004)

Modelo de Cournot para n empresas

El modelo de Cournot es considerado para una participación de n empresas $E_1, \dots, E_n$ dentro de la economía. Cada una de ellas compiten en las cantidades de producción $q_1, \dots, q_n$ donde se asume que estas cantidades de producción son homogéneas para las empresas y todas estas son vendidas en el mercado. Se asume una función de demanda inversa lineal y decreciente dado por la siguiente expresión:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & si \quad bQ < a \\ 0 & si \quad bQ \geq a \end{cases}$$

donde $b > 0$ y $Q = q_1 + \cdots + q_n$.

El modelo considera una función de costos marginales constantes y ausencia de costos fijos. Las funciones de costo de producción de las n empresas están dadas por la siguiente expresión:

$$C_i(q_i) = cq_i, \quad i = 1, \dots, n$$

donde $c < a$ (el precio es mayor que el costo).

Igual al caso del duopolio, se asume las funciones de ganancia o utilidad de las empresas iguales a los beneficios, esto es

$$u_i(q_1, \dots, q_n) = q_i \cdot P(Q) - c_i q_i$$

$$= q_i[a - b(q_1 + \dots + q_n)] - c_i q_i$$

$$= q_i[a - b(q_i + Q_{-i})] - c_i q_i$$

$$= q_i[a - b(q_i + Q_{-i}) - c_i]$$

donde $Q_{-i} = q_1 + \dots + q_{i-1} + q_{i+1} + \dots + q_n$

Para el cálculo del equilibrio de Nash para el juego de n empresas, tenemos que la respuesta óptima de una empresa E_i a una combinación de acciones prefijadas $q_{-i} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$ del resto de empresas, se obtiene resolviendo el siguiente programa de maximización:

$$\underset{q_i}{\text{máx}}\, u_i(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n) = \underset{q_i}{\text{máx}}[q_i(a - b(q_i + Q_{-i}) - c_i)]$$

donde $0 \leq q_i \leq a/b$. Para hallar los valores óptimos, hacemos uso de la condición de primer orden, que es

$$\frac{\partial u_i(q_i, Q_{-i})}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}[q_i(a - b(q_i + Q_{-i}) - c_i)] = a - b(q_i + Q_{-i}) - c_i - bq_i = 0$$

$$\Longrightarrow q_i^* = \frac{a - c - bQ_{-i}}{2b}$$

lo que muestra que la cantidad óptima de la empresa i es $q_i^* = \frac{a-c-bQ_{-i}}{2b}$. Para verificar si este valor es de máximo, usamos la condición de condición de segundo orden, esto es

$$\frac{\partial^2 u_i(q_1, Q_{-i})}{\partial q_i^2} = -2b < 0$$

la segunda derivada es menor que cero, lo que muestra que la cantidad óptima maximiza la función de ganancia. Luego, la correspondencia de respuesta óptima de E_i viene dada por la siguiente expresión

$$R_i(Q_{-i}) = \frac{a - c - bQ_{-i}}{2b}$$

para todas las empresas $i = 1, \dots, n$. Si consideramos $EN = (q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*)$ es el equilibrio de Nash, entonces las cantidades óptimas q_i^* será respuesta óptima a q_{-i}^* y viceversa. Por lo tanto

$$q_1^* = \frac{a - c - bQ_{-1}^*}{2b}, \dots, q_n^* = \frac{a - c - bQ_{-n}^*}{2b}$$

Resolviendo el sistema de n ecuaciones, tenemos por simetría que $q_i^* = q_j^*$, entonces $(n - 1)q_i^* = Q_{-i}^*$. Luego,

$$q_i^* = \frac{a - c - bQ_{-i}^*}{2b} = \frac{a - c - b(n-1)q_i^*}{2b}$$

$$\Longrightarrow q_i^* = \frac{a - c}{b(1+n)}, \quad i = 1, \dots, n$$

por tanto, se tiene que las cantidades óptimas de las n empresas es $q_i^* = \frac{a-c}{b(1+n)}$. Así el conjunto de los puntos de equilibrio o equilibrio de Nash para las empresas viene dado por

$$S^{EN} = \left\{ \left(q_1^* = \frac{a - c}{b(1+n)}, \dots, q_i^* = \frac{a - c}{b(1+n)}, \dots, q_n^* = \frac{a - c}{b(1+n)} \right) \right\}$$

Al reemplazar estas cantidades de equilibrio en la cantidad total obtenemos la cantidad producida total en equilibrio, la misma que es la suma de todas las cantidades producidas por las empresas, esto es

$$Q^* = q_1^* + \cdots + q_n^* = n\frac{a - c}{b(1+n)}$$

Reemplazando el equilibrio en la función de demanda lineal, obtenemos el nivel de precios de equilibrio, la cual es igual a

$$P^* = a - bQ^* = \frac{a + nc}{n + 1}$$

Al reemplazar los valores óptimos en la función de ganancias, obtenemos los beneficios de equilibrio, esto es

$$u_i^* = q_i^*(a - b(q_i^* + Q_{-i}^*) - c_i)$$

$$= q_i^* \left(a - n\frac{a - c}{1 + n} - c_i\right)$$

$$= \frac{(a - c)^2}{b(1 + n)^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

Finalmente, sumando todos las funciones de ganancias óptimas, obtenemos el beneficio total de equilibrio, la misma que representa el beneficio óptimo que obtienen las n empresas en general en la producción de las cantidades óptimas, esto es

$$U^* = u_1^* + \cdots + u_n^* = n\frac{(a - c)^2}{b(1 + n)^2}$$

Modelo de Cournot para Monopolio y para Competencia perfecta

Ahora se estudia el modelo de Cournot para dos situaciones extremas que se dan en una economa. El caso de un monopolio, donde sólo existe una empresa que provee de una cantidad de producción; y el caso de competencia perfecta, donde asumiremos que existe un número grande de empresas donde el precio del mercado no puede ser afectado por las empresas, debido que la cantidad producida por cada una de las empresas es insignificante sobre la cantidad agregada de la economía.

Iniciando para el caso de un Monopolio. Los supuestos del modelo indican la existencia de $n = 1$ empresa E en la economía, la misma que produce una cantidad Q.

Esta cantidad es vendida en su totalidad en el mercado. La función de demanda inversa es decreciente y lineal y es dada por la función siguiente

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & si \quad bQ < a \\ 0 & si \quad bQ \geq a \end{cases}$$

donde $b > 0$ y Q es la cantidad total producida por la empresa monopolista.

Los costos totales de la empresa monopolista están constituidos sólo por los costos variables, es decir, se considera la no existencia de costos fijos. De este modo, la función de costo de producción de la empresa monopolista viene dado por

$$C(Q) = cQ,$$

donde $c < a$ (el precio es mayor que el costo). De este modo, los costos marginales de la empresa son constantes. La función de ganancia o de utilidad de la empresa monopolista se iguala a la de sus beneficios, esta es dada por la expresión siguiente

$$U(Q) = \pi(Q) = Q \cdot P(Q) - cQ$$

$$= Q(a - bQ) - cQ$$

$$= Q(a - c - bQ)$$

Para el cálculo del equilibrio de Nash se procede como las versiones anteriores del modelo de Cournot. La respuesta óptima del monopolio E la denotamos por Q^* que maximiza el programa de maximización siguiente

$$\max_{Q} U(Q) = \max_{Q}[Q(a - c - bQ)]$$

La condición de primer orden del programa es

$$\frac{\partial U(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q}[Q(a - c - bQ)] = a - bQ - c - bQ = 0$$

$$\Rightarrow Q^* = \frac{a - c}{2b}$$

Evaluando la condición de segundo orden, se tiene

$$\frac{\partial^2 U(Q)}{\partial Q^2} = -2b < 0$$

que corresponde a la condición suficiente de máximo, es decir, la cantidad obtenida de equilibrio $Q^* = \frac{a-c}{2b}$ corresponde a un punto que maximiza el programa de maximización de la utilidad. Reemplazando la cantidad óptima obtenida Q^* en la función de demanda, nos permite encontrar el nivel de precios de equilibrio dado por

$$P^* = a - bQ^* = \frac{a+c}{2}$$

Reemplazando en las ganancias del monopolista, obtenemos el beneficio de equilibrio del monopolio dado por

$$U^* = Q^*(a - c - bQ^*) = \frac{a-c}{2b}\left[a - c - b\left(\frac{a-c}{2b}\right)\right] = \frac{(a-c)^2}{4b}$$

Considerando ahora el caso de competencia perfecta, es decir cuando en el mercado existe un gran número de empresas. El supuesto del modelo de Cournot indica que existe muchas empresas en la economía, la cantidad producida por cada una de ellas es insignificante a la cantidad agregada, así el precio del mercado de un determinado bien no es afectado. Estas infinitas empresas producen una cantidad q_i con el precio fijo dado por le mercado igual a P^*, se asume que esta cantidad producida es vendida en su totalidad. Igual que antes, la función de demanda inversa del mercado es decreciente y lineal y es dada por la siguiente ecuación

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & si \quad bQ < a \\ 0 & si \quad bQ \geq a \end{cases}$$

donde $b > 0$ y Q es la cantidad total producida por las empresas en la economía. Los costos marginales de cada empresa son constantes y su función de costos de producción de cada empresa viene dada por la siguiente expresión

$$C_i(q_i) = c_i q_i$$

donde $c < a$ (el precio es mayor que el costo). Las funciones de ganancia o utilidad de las empresas con precios fijos están dadas por

$$\pi_i(q_i) = P^* q_i - c_i q_i = (P^* - c_i) q_i$$

El equilibrio de Nash se obtiene resolviendo el siguiente programa de maximización

$$\max_{q_i} \pi_i(q_i) = \max_{q_i} [(P^* - c_i) q_i]$$

La condición de primer orden es

$$\frac{\partial \pi_i(q_i)}{\partial q_i} = P^* - c_i = 0 \Longrightarrow P^* = c_i$$

la misma que indica que el equilibrio se da en el nivel de precios $P^* = c_i$. Reemplzando este óptimo, se tiene la cantidad total producida óptima en la economía dado por

$$Q^* = \frac{a - c}{b}$$

Los beneficios de equilibrio son

$$\pi_i^*(q_i) = 0$$

lo que señala que en equilibrio, las empresas en general no maximizan sus beneficios en competencia perfecta.

Modelo de Cournot para n empresas, caso general

Estudiando el modelo de Cournot para n empresas en el caso general. Las condiciones del modelo adopta hipótesis más generales sobre las funciones de demanda y de costos de producción. Igual que antes, se asume la existencia de n empresas $E_1, \dots, E_n$, donde cada una de ellas produce una cantidad homogénea de producto

$q_1, \dots, q_n$, y compiten justamente por estas cantidades de producción, respectivamente. Ahora, el caso general se considera una función de demanda inversa estrictamente decreciente y cóncava. La demanda inversa debe cumplir la condición siguiente:

$$P'(Q) < 0, \quad P''(Q) \leq 0, \quad \forall Q \in [0, Q_0]$$

y $P(Q) = 0, \forall Q \geq Q_0$.

El caso general también considera funciones de costos crecientes y convexas de cada empresa. Estas son dadas por

$$C_i(q_i) \geq 0, \quad C_{i\prime\prime}(q_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Las funciones de precios $P(Q)$ y de costos de producción $C_i(q_i)$ son continuas en $[0, +\infty]$ y sus derivadas $C_{i\prime\prime}(q_i)$ y $P''(Q)$ son continuas en $[0, Q_0]$. Si consideramos el vector de cantidades menos el i-ésimo, se tiene $q_{-i} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$ y $Q_{-i} = \sum_{j \neq i} q_j$. Usando estas notaciones, tenemos las funciones de ganancia o utilidad dados por

$$u_i(q_1, \dots, q_n) = u_i(q_i, q_{-i}) = q_i \cdot P(Q) - C_i(q_i) = q_i P(q_i + Q_{-i}) - C_i(q_i)$$

Asumimos que cada una de estas funciones u_i es estrictamente cóncava en la región

$$A = \{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n : q_i > 0, \sum_j q_j \leq Q_0\}$$

con respecto a la variable q_i debido a

$$\frac{\partial^2 u_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_i^2} = q_i P''(Q) + 2P'(Q) - C_{i\prime\prime}(q_i) < 0$$

Para el cálculo del Equilibrio de Nash, se tiene la respuesta óptima de una empresa E_i a una combinación de acciones prefijadas $q_{-i} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$ del resto de empresas, se obtiene resolviendo el programa de maximización siguiente

$$\max_{q_i} u_i(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n) = \max_{q_i} [q_i \cdot P(Q) - C_i(q_i)]$$

La condición de primer orden del programa permite encontrar los valores óptimos de producción de las empresas, esto es

$$\frac{\partial u_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_i} = q_i P'(Q) + P(Q) - C_{i'}(q_i) = 0$$

La condición de segundo orden es

$$\frac{\partial^2 u_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_i^2} = q_i P''(Q) + 2P'(Q) - C_{i''}(q_i) < 0$$

condición suficiente de máximo. Así $(q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*)$ es el equilibrio de Nash si cumple las condiciones. En general, dichas soluciones son interiores y podemos decir que $(q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*)$ es un equilibrio de Nash si cumple las n condiciones de primer orden, luego

$$q_i^* = R_i(Q_{-i}^*), \quad i = 1, \dots, n$$

siendo $R_i(Q_{-i}^*)$ son las funciones de respuesta óptima para cada uno de los jugadores. La figura siguiente muestra el equilibrio de Nash para un modelo de Cournot en el caso general.

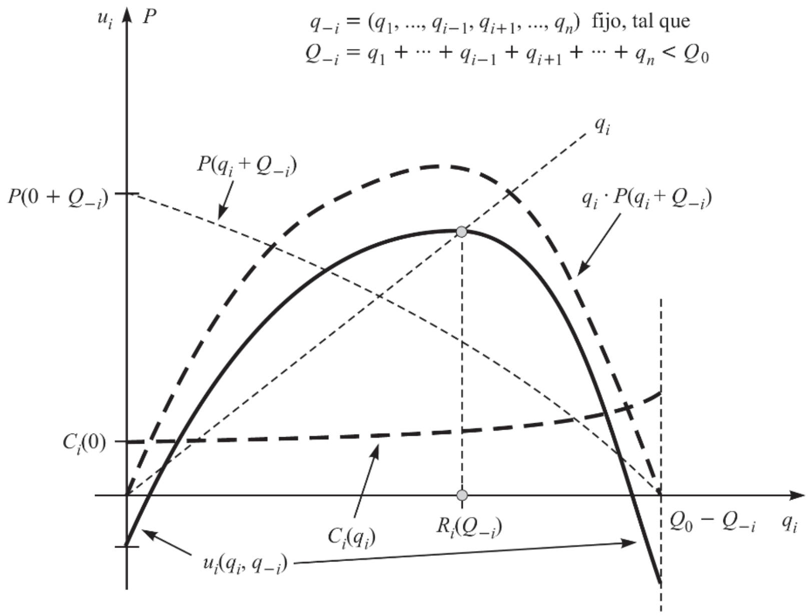

Figura 7. Equilibrio de Nash para un modelo de Cournot general (Pérez *et al.*, 2004)

4.2 DISCUSIONES

La topología de correspondencias (o *set-values*) tuvo su desarrollo en la década de los sesenta en los trabajos de Aumann (1965), Banks & Jacobs (1970), Bridgland (1970), Debreu (1967), Hermes (1968), Hukuhara (1967) y Jacobs (1969) quienes desarrollaron la teoría matemática de la topología considerando las multifunciones y posteriormente señalan aplicaciones en diversas ramas de las ciencias matemáticas. En este trabajo se estudia la teoría topológica de correspondencias para la determinación del equilibrio de Nash en la teoría de juegos económicos (Nash, 1950).

Para el desarrollo de la investigación se realizó una exposición de los principales conceptos de espacios métricos y espacios topológicos para los conjuntos. Posteriormente se hizo una exposición de la topología de correspondencias que estudia a las correspondencias punto a conjunto. Este estudio permite la demostración del teorema del punto fijo de Kakutani, la misma que bajo ciertas condiciones permite la demostración de la existencia del equilibrio de Nash que se encuentra presente en el documento. Esta investigación tomó como base al trabajo de Accinelli (2007) quien presenta de forma ordenada y rápida la teoría que respalda la existencia del equilibrio de Nash y presenta una breve demostración del equilibrio. Similar resultado se encontró en el trabajo de Campos (2008) para la teoría de correspondencias en el equilibrio de Nash y Torres-Martínez (2012) que estudia el equilibrio de Nash y aplicaciones en el modelo de Cournot. Resultados similares con aplicaciones a juegos presenta el trabajo de Vohra (2004) que presenta teoremas de punto fijo de correspondencias y aplicaciones en lattices y juegos supermodulares. Respecto a los puntos fijos una presentación resumida se encontró en el trabajo de Border (1985) para aplicaciones en economía y finalmente en el trabajo de Araújo (2011) se da una presentación de los juegos minimax y aplicaciones en la teoría económica.

V. CONCLUSIONES

Las conclusiones del presente trabajo de investigación son las siguientes:

PRIMERO. Se estudió la teoría topológica de correspondencias la misma que se formula a partir de la teoría de espacios topológicos ampliada para multifunciones, esto es, las definiciones de convexidad, la compacidad y el importante concepto de continuidad son ampliadas para una estructura de correspondencias o multifunciones punto-conjunto.

SEGUNDO. Se demostró el teorema de punto fijo de Kakutani para correspondencias la misma que es una generalización del famoso teorema de punto fijo de Brouwer. El teorema de Kakutani se desarrolla en las correspondencias punto conjunto. Para la demostración del teorema de Kakutani se hace uso de la definición de topología de correspondencias y del teorema de punto fijo de Brouwer.

TERCERO. Se demostró el teorema de existencia del Equilibrio de Nash utilizando las condiciones del teorema de Kakutani para correspondencias. En el desarrollo de la demostración se utilizó las definiciones de hemicontinuidad superior, hemicontinuidad inferior, convexidad y concavidad para la definición de las correspondencias punto-conjunto.

VI. RECOMENDACIONES

Las recomendaciones del presente trabajo de investigación son las siguientes:

PRIMERO. En este estudio se aplicó la teoría de correspondencias en el estudio de la Teoría de Juegos para los denominados: juegos estáticos no-cooperativos con información completa para n jugadores, donde para este caso, el equilibrio se denomina el equilibrio de Nash. Se recomienda estudiar el equilibrio de Nash para juegos dinámicos con información incompleta no-cooperativos para n jugadores.

SEGUNDO. Se recomienda ampliar el estudio de correspondencias, por ejemplo utilizando el concepto de medida de correspondencias e integral de correspondencias.

TERCERO. Se recomienda estudiar aplicaciones del equilibrio de Nash para modelos económicos donde se incorpora incertidumbre. Así por ejemplo para modelos financieros, de subastas y en modelos de riesgos. Además aplicar el concepto de equilibrio de Nash para modelos de equilibrio general usando las definiciones de correspondencias.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Accinelli, E. (2007). La topología de las correspondencias y el equilibrio de Nash. In *Economía Dinámica, Economía Aplicada y Teoria de Juegos. Ensayos en homenaje a Ramón García-Cobián* (pp. 181–197). Lima, Perú.

Araújo, A. (2011). *Introdução à Economia Matemática*. Rio de Janeiro, Brasil. Retrieved from https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/PM_08.pdf

Arrow, K., & Debreu, G. (1954). Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, *22*(3), 265–290. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Aumann, R. (1966). Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continuum of Traders Linked refere. *Econometrica*, *34*(1), 1–17. https://doi.org/10.2307/1909854

Aumann, R. J. (1965). Integrals of set-valued functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *12*(1), 1–12. https://doi.org/10.1016/0022-247X(65)90049-1

Balkenborg, D., & Vermeulen, D. (2019). On the topology of the set of Nash equilibria. *Games and Economic Behavior*, *118*, 1–6. https://doi.org/10.1016/j.geb.2019.08.008

Banks, H. T., & Jacobs, M. Q. (1970). A differential calculus for multifunctions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *29*(2), 246–272. https://doi.org/10.1016/0022-247X(70)90078-8

Border, K. (1985). *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bridgland, T. F. (1970). Trajectory integrals of set valued functions. *Pacific Journal of Mathematics*, *33*(1), 43–68. https://doi.org/10.2140/pjm.1970.33.43

Brouwer, L. E. J. (1911). Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische*

Annalen, *71*(1), 97–115. https://doi.org/10.1007/BF01456931

Campos, D. (2008). *Una versión didáctica de la aplicación de la teoría de correspondencias en el equilibrio de Nash*. *Universidad Nacional del Callao*. Universidad Nacional del Callao. Retrieved from http://repositorio.unac.edu.pe/handle/20.500.12952/111

Debreu, G. (1967). Integration of correspondences. *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, *2*(part 1), 351–372.

Delgado, G. (2014). Una introducción a los teoremas de punto fijo y a la existencia de equilibrios en economía. *Economía Informa*, *388*(388), 22–35. https://doi.org/10.1016/s0185-0849(14)71348-9

Enomoto, H., Hachimori, M., Nakamura, S., Shigeno, M., Tanaka, Y., & Tsugami, M. (2018). Pure-strategy Nash equilibria on competitive diffusion games. *Discrete Applied Mathematics*, *244*, 1–19. https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.03.031

Faro, J. (2002). *Correspondências e aplicações à teoria do equilíbrio geral econômico*. Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Fu, H., & Wu, B. (2019). Characterization of Nash equilibria of large games. *Journal of Mathematical Economics*, *85*, 46–51. https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2019.08.005

Hermes, H. (1968). Calculus of set valued functions and control. *Journal of Mathematics and Mechanics*, *1*(1), 47–59. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/24902144

Hildenbrand, K. (1972). Continuity of the Equilibrium-Set Correspondence. *Journal of Economic Theory*, *162*(5), 152–162.

Hukuhara, M. (1967). Integration des Applicaitons Mesurables dont la Valeur est un Compact Convexe. *Funkcialaj Ekvacioj*, *10*, 205–223.

Jacobs, M. (1969). On the approximation of integrals of multivalued functions. *SIAM Journal on Control*, *7*(I), 158–177. https://doi.org/10.1137/0307012

Kakutani, S. (1941). A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, *8*, 416–427.

Nash, J. (1950). Equilibrium Points in-Person Games. *Proceedings of the National Academy of Sciences Ofthe United States of America*, *36*(1), 48–49.

Nessah, R., & Tian, G. (2014). On the existence of strong Nash equilibria. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *414*(2), 871–885. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.01.030

Pérez, J., Jimeno, J., & Cerdá, E. (2004). *Teoría de Juegos* (Vol. 15). Madrid, España: Pearson Educación.

Torres-Martínez, J. (2012). *Elementos de Economía Matemática*.

Vohra, R. V. (2004). *Advanced mathematical economics*. *Routledge advanced texts in economics and finance*.

von Neumann, J. (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, *100*, 295–320.

von Neumann, J. (1937). Uber ein Okonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. *Erg. Math. Kolloqu.*, *8*, 73–83.

Yannelis, N. (1990). On the upper and lower semicontinuity of the Aumann integral. *Journal of Mathematical Economics*, *19*(4), 373–389. https://doi.org/10.1016/0304-4068(90)90028-8

Yu, J., & Peng, D. (2020). Generic stability of Nash equilibria for noncooperative differential games. *Operations Research Letters*, *48*(2), 157–162. https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.02.001