



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO**  
**ESCUELA DE POSGRADO**  
**DOCTORADO EN CIENCIA, TECNOLOGÍA Y MEDIO**  
**AMBIENTE**



**TESIS**

**MODELOS MATEMÁTICOS PARA ESTIMAR CURVAS DE LACTANCIA EN**  
**VACUNOS BROWN SWISS DEL CENTRO EXPERIMENTAL**  
**CHUQUIBAMBILLA, PUNO**

**PRESENTADA POR:**

**GERARDO GODOFREDO MAMANI CHOQUE**

**PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:**

**DOCTORIS SCIENTIAE EN CIENCIA, TECNOLOGÍA Y MEDIO AMBIENTE**

**PUNO, PERÚ**

**2023**

Reporte de similitud

NOMBRE DEL TRABAJO

**MODELOS MATEMÁTICOS PARA ESTIMAR CURVAS DE LACTANCIA EN VACUNOS BROWN SWISS DEL CENTRO EXPERIMENTAL**

AUTOR

**Gerardo Godofredo Mamani Choque**

RECuento DE PALABRAS

**31459 Words**

RECuento DE CARACTERES

**158564 Characters**

RECuento DE PÁGINAS

**122 Pages**

TAMAÑO DEL ARCHIVO

**1.1MB**

FECHA DE ENTREGA

**Oct 31, 2023 5:18 PM CST**

FECHA DEL INFORME

**Oct 31, 2023 5:20 PM CST**

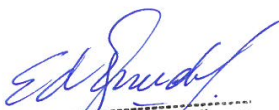
● **7% de similitud general**

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base

- 7% Base de datos de Internet
- 1% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de Crossref
- Base de datos de contenido publicado de Crossref
- 1% Base de datos de trabajos entregados

● **Excluir del Reporte de Similitud**

- Material bibliográfico
- Material citado
- Bloques de texto excluidos manualmente
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 12 palabras)



Dr. Sabino Edgar Mamani Choque  
Reg. CIP. 65114



Resumen



# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

## ESCUELA DE POSGRADO

### DOCTORADO EN CIENCIA, TECNOLOGÍA Y MEDIO AMBIENTE

#### TESIS

### MODELOS MATEMÁTICOS PARA ESTIMAR CURVAS DE LACTANCIA EN VACUNOS BROWN SWISS DEL CENTRO EXPERIMENTAL

#### CHUQUIBAMBILLA, PUNO

PRESENTADA POR:

GERARDO GODOFREDO MAMANI CHOQUE

PARA OPTAR EL GRADO ACADEMICO DE:

DOCTORIS SCIENTIAE EN CIENCIA, TECNOLOGÍA Y MEDIO AMBIENTE

APROBADA POR EL JURADO SIGUIENTE:

PRESIDENTE

  
.....  
Dr. Sc. FAUSTINO ADOLFO JAHUIRA HUARCAYA

PRIMER MIEMBRO

  
.....  
Dr. Sc. JAVIER MAMANI PAREDES

SEGUNDO MIEMBRO

  
.....  
Dr. Sc. BILO WENCESLAO CALSIN CALSIN

ASESOR DE TESIS

  
.....  
Dr. Sc. SABINO EDGAR MAMANI CHOQUE

Puno, 29 de setiembre de 2023

**ÁREA :** Ciencias Biomédicas

**TEMA :** Curvas de lactancia en vacunos

**LÍNEA:** Ciencia y Producción Animal



## DEDICATORIA

Dedico este trabajo a Dios, por haberme dado la vida y brindarme vitalidad y sabiduría para lograr esta meta trazada; por ser la luz que ilumina mi camino y haberme permitido lograr mis objetivos.

A mis amados padres, que se encuentran en el cielo, por concederme la vida, valores y principios; por su amor, trabajo y sacrificio en todos estos años, y por orientar con motivación constante mi desarrollo personal y profesional.

A mi esposa, por su comprensión y aliento constante e incondicional, en muchos momentos de la vida y por ser el pilar más importante y por demostrarme siempre su cariño y apoyo incondicional sin importar nuestras diferencias de opinión. A mis hijos, que me motivaron y me dieron la fuerza día a día para terminar y cumplir con este sueño ahora hecho realidad.

A mis hermanos y hermanas, por compartir una infancia feliz, por todos los bellos momentos que hemos pasado juntos y las experiencias que nunca olvidaré.

A todas las personas que me han apoyado y han hecho que el trabajo se realice con éxito, en especial a aquellos que me abrieron las puertas y compartieron sus conocimientos.



## AGRADECIMIENTOS

A mi alma mater, Universidad Nacional del Altiplano a través de la Facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia, por darme la oportunidad de superarme como profesional.

A los Docentes del Doctorado en Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Altiplano.

Al Dr. Sc. Sabino Edgar Mamani Choque, mi director de Tesis, mi sincero agradecimiento por su guía, acertada dirección en la ejecución y redacción del presente trabajo de investigación.

A los miembros del Jurado: Dr. Sc. Faustino Adolfo Jahuir Huarcaya, Dr. Sc. Javier Mamani Paredes y Dr. Sc. Bilo Wenceslao Calsin Calsin, por su paciencia durante las correcciones y sugerencias realizadas en la ejecución de la presente Tesis.

Al Centro Experimental Chuquibambilla de la Facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia de la UNA Puno, por facilitarnos la base de datos para realizar el trabajo de investigación.

A todos mis amigos, compañeros y a todas aquellas personas que directa o indirectamente apoyaron en la ejecución y culminación del presente trabajo de investigación.



## ÍNDICE GENERAL

	<b>Pág.</b>
DEDICATORIA	i
AGRADECIMIENTOS	ii
ÍNDICE GENERAL	iii
ÍNDICE DE TABLAS	vii
ÍNDICE DE FIGURAS	ix
ÍNDICE DE ANEXOS	x
RESUMEN	xi
ABSTRACT	xii
INTRODUCCIÓN	1

### CAPÍTULO I

#### REVISIÓN DE LITERATURA

1.1 Marco teórico	3
1.1.1 Raza Brown Swiss	3
1.1.2 Curvas de lactancia	5
1.1.3 Modelos matemáticos de curvas de lactancia	7
1.1.3.1 Modelos no lineales	7
1.1.3.2 Modelos lineales	11
1.1.3.3 Modelos mixtos	13
1.1.4 Persistencia	14
1.2 Antecedentes	15



## CAPÍTULO II

### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 Identificación del problema	20
2.2 Enunciados del problema	22
2.3 Justificación	22
2.4 Objetivos	23
2.4.1 Objetivo general	23
2.4.2 Objetivos específicos	23
2.5 Hipótesis	24
2.5.1 Hipótesis general	24
2.5.2 Hipótesis específicas	24

## CAPÍTULO III

### MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Lugar de estudio	25
3.2 Población	26
3.3 Método de investigación	27
3.4 Descripción detallada de métodos por objetivos específicos	27
3.4.1 Modelos No Lineales	27
3.4.2 Modelos lineales	28
3.4.3 Descripción de métodos para el objetivo específico 1	30
3.4.3.1 Método de mínimos cuadrados no lineales	30
3.4.3.2 Método de Mínimos cuadrados ordinarios	31
3.4.3.4 Criterios de selección de modelos	32



3.4.4 Descripción del método para el objetivo específico 2	33
3.4.4.1 Método de optimización	33
3.4.5 Descripción del método para el objetivo específico 3	37
3.4.5.1 Cálculo de persistencia	37
3.4.6 Descripción del método para el objetivo específico 4	37
3.4.6.1 Producción de leche por campaña	37
3.4.7 Procesamiento de la información	37
<b>CAPÍTULO IV</b>	
<b>RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	
4.1 Curvas de lactancia para vacas de primer parto	39
4.2 Curvas de lactancia para vacas de tercer parto o más con curvas típicas	41
4.2.1 Características de las curvas de lactancia	48
4.2.2 Persistencia después del pico de lactancia.	50
4.2.3 Producción de leche	52
4.2.4 Predicción de la producción de leche por campaña	52
4.3 Curvas de lactancia para vacas de tercer parto o más con curvas atípicas	53
4.3.1 Características de las curvas de lactancia	58
4.3.2 Persistencia después del pico de lactancia	60
4.3.3 Producción de leche	61
4.3.4 Predicción de la producción de leche por campaña	62
4.4 Discusión	62
CONCLUSIONES	67
RECOMENDACIONES	68





BIBLIOGRAFÍA	69
ANEXOS	79

## ÍNDICE DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
1. Análisis de Varianza	32
2. Modelos no Lineales de Curvas de Lactancia, Pico de Lactancia y Producción en el Pico de Lactancia	35
3. Modelos Lineales de Curvas de Lactancia, Pico de Lactancia y Producción en el Pico de Lactancia	36
4. Modelos no Lineales Estimados para Vacas Brown Swiss de Primer Parto del Centro Experimental Chuquibambilla	40
5. Modelos no Lineales Estimados para Vacas Brown Swiss de Tres Partos a Más del Centro Experimental Chuquibambilla	44
6. Modelos Lineales Estimados Para Vacas Brown Swiss de Tres Partos a Más del Centro Experimental Chuquibambilla	45
7. Pico de lactancia y producción en el pico de lactancia para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla: modelos no lineales.	50
8. Pico de lactancia y producción en el pico de lactancia para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla: modelos lineales.	50
9. Persistencia Lechera (%) para Vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla, Modelo Compartamental.	51
10. Predicción de los Modelos de la Producción Total de Leche por Campaña (kg.) para Vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla.	53
11. Modelos no Lineales Estimados para Vacas Brown Swiss de Tres Partos a Más del Centro Experimental Chuquibambilla: Caso Atípicos.	55
12. Modelos Lineales Estimados para Vacas Brown Swiss de Tres Partos a Más del Centro Experimental Chuquibambilla: Caso Atípicos.	56
13. Tiempo y Producción Máxima en el Pico de Lactancia de los Modelos no Lineales.	59
14. Tiempo y Producción Máxima en el Pico de Lactancia de los Modelos Lineales.	60



<b>15.</b> Persistencia de la Producción de Leche (kg) en Base al Modelo Parabólico Exponencial.	61
<b>16.</b> Producción Promedio de Leche (kg) en Vacas de Tercer Ordeño y Posteriores.	61
<b>17.</b> Producción de Leche Estimado por los Modelos no Lineales y Lineales.	62



## ÍNDICE DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
1. Curva de Lactancia en Vacunos: Modelo de Wood	7
2. Curvas de lactancia estimados para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla para vacas de primer parto: Modelos No lineales	41
3. Curvas de Lactancia Estimados Para Vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla: Vacas de Tres Partos a Más - Modelos no Lineales.	47
4. Curvas de lactancia estimados para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla: Vacas de tres partos a más - modelos lineales.	48
5. Curvas de Lactancia Estimados Para Vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla: Vacas de Tres Partos a Más - Modelos no Lineales.	57
6. Curvas de lactancia estimados para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla: Vacas de tres partos a más - Modelos lineales.	58



## ÍNDICE DE ANEXOS

	<b>Pág.</b>
1. Estimación de los modelos no lineales en STATA: casos típicos	80
2. Estimación de los modelos lineales en STATA: casos típicos	86
3. Estimación de los modelos no lineales en STATA: casos atípicos	91
4. Estimación de los modelos lineales en STATA: casos atípicos	97
5. Predicción de los modelos no lineales: casos típicos	102

## RESUMEN

El objetivo de esta investigación fue evaluar once modelos matemáticos (seis no lineales y cinco lineales) referidos a curvas de lactancia en vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla de la Universidad Nacional del Altiplano. El sistema de crianza es mixto y doble ordeño; la información corresponde al periodo enero de 2019 a diciembre del 2020 con registros diarios. Al depurar los datos, quedó mayor información para vacas de tercer parto y posteriores, considerando además aspectos teóricos se analizó este conjunto de datos en lugar de las que corresponde a vacas de primer parto, que fue el objetivo inicial. La estimación de los modelos se hizo mediante STATA y se tomó en cuenta el  $R^2$  y los criterios de información de Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC), además del error cuadrático medio (MSE) en la elección del mejor modelo. Para los casos típicos, los resultados indican que el mejor modelo es el Compartamental ( $R^2=98.4$ ) con pico de lactancia a los 24 días, producción máxima de 18.3 kg/día y una producción total estimada de 3841 kg en 305 días, que es igual al promedio observado; le sigue de cerca el modelo de Wood ( $R^2=98.37$ ). Para los casos atípicos, el mejor modelo fue el Parabólico exponencial ( $R^2=95.85$ ), sin pico de lactancia y una producción total estimada de 3656 kg en 305 días, que sobreestima en 15.2 kg el promedio observado. Se concluye que los modelos Compartamental y Parabólico exponencial son mejores porque capturan patrones complejos y se derivan de consideraciones biológicas.

**Palabras clave:** Curva de lactancia, modelos no lineales, modelos lineales, pico de lactancia, producción máxima, producción a 305 días.



## ABSTRACT

The objective of this research was to evaluate eleven mathematical models (six non-linear and five linear) referring to lactation curves in Brown Swiss cows from the Chuquibambilla Experimental Center of the National University of the Altiplano. The breeding system is mixed and double milking; The information corresponds to the period January 2019 to December 2020 with daily records. When purifying the data, more information was left for cows of third calving and later, also considering theoretical aspects, this set of data was analyzed instead of those corresponding to cows of first calving, which was the initial objective. The estimation of the models was done using STATA and the  $R^2$  and the Akaike (AIC) and Bayesian (BIC) information criteria were taken into account, in addition to the mean square error (MSE) in choosing the best model. For typical cases, the results indicate that the best model is the Compartmental ( $R^2=98.4$ ) with peak lactation at 24 days, maximum production of 18.3 kg/day and an estimated total production of 3841 kg in 305 days, which is equal to the observed average; The Wood model follows closely ( $R^2=98.37$ ). For atypical cases, the best model was the Parabolic Exponential ( $R^2=95.85$ ), without peak lactation and an estimated total production of 3656 kg in 305 days, which overestimates the observed average by 15.2 kg. It is concluded that the Compartmental and Parabolic exponential models are better because they capture complex patterns and are derived from biological considerations.

**Keywords:** Lactation curve, nonlinear models, linear models, lactation peak, maximum production, production at 305 days

## INTRODUCCIÓN

Los vacunos de la raza Brown Swiss son animales eficientes en la producción de leche a bajo costo, actualmente esta raza viene ejerciendo un destacado papel en el contexto de la mejora genética de la ganadería vacuna de la zona altiplánica, por ser una raza que incorpora rusticidad, productividad y longevidad y; además porque es utilizado por los criadores como base para hacer los cruzamientos para producir animales más productivos. Sin embargo, los productores mayormente no llevan registros ni información de indicadores productivos y reproductivos. Tales indicadores, deben monitorearse de manera precisa para reflejar lo que ocurre en la población de referencia y orientar acciones certeras, pues permitirán a los productores contar con una valiosa herramienta para seleccionar las mejores vacas bajo las condiciones del altiplano, la misma que será la base para establecer estrategias en la mejora genética.

Por otro lado, podemos identificar empresas ganaderas que sí llevan de forma adecuada sus registros como es el caso del Centro Experimental Chuquibambilla. En este contexto, es importante el estudio de curvas de lactancia, ésta es la representación gráfica de la relación que existe entre la producción por día de leche y el tiempo que transcurre desde el momento del parto (Papajcsik & Boderó, 1988). Presenta dos fases diferenciadas, una ascendente que se extiende desde el parto hasta alcanzar la máxima producción y otra descendente desde este punto hasta el secado (persistencia). El estudio de esta curva permite realizar estimaciones de la producción total de leche mediante una medición diaria y es una herramienta valiosa para el productor con respecto a la toma de decisiones gerenciales y de selección como la identificación de animales con mayor potencial productivo y el descarte de los animales poco productivos (Gipson & Grossman, 1989; Wood, 1974).

Las curvas de lactancia en ganado lechero, constituyen una importante herramienta en programas de mejoramiento, ya que permiten una selección más adecuada de hembras productoras de leche, con el fin de incrementar y mejorar la producción y así mismo, optimizar el manejo nutricional y reproductivo de los animales en lactancia (Wood, 1974). Permiten también, conocer la evolución de la producción lechera de los animales, así como sus variaciones a lo largo de una lactancia mediante el seguimiento de un animal o un grupo de ellos, estimándose de este modo, su producción lechera total o parcial.

Es fundamental el estudio de las curvas de lactancia porque permiten la identificación de posibles errores en el manejo de un determinado grupo de animales, como pueden ser una



alimentación deficiente, inadecuadas instalaciones, patologías no detectadas, etc. (Tekerli et al., 2000). Además, con la elaboración de las curvas de lactancia, se pueden detectar anticipadamente las vacas potencialmente más productivas de un hato, facilitándose de este modo la toma de decisiones sobre el posible desecho de los animales por su aptitud productiva (Coleman et al., 2010).

Según Wood (Cañas et al., 2012), el conocimiento de la curva de lactancia es necesario para determinar el manejo nutricional y reproductivo de animales en lactancia, mediante la estimación de la producción total por ciclo, así como el pico de producción y la persistencia de la lactancia. Para ello es importante establecer los parámetros de las curvas de lactancia que mejor se ajusten a la producción de leche en ganado lechero. Por tanto, las curvas de lactancia de un hato se constituyen en el mejor indicativo sobre el índice productivo lechero del mismo, en las condiciones ambientales que lo afectan.

Determinar las curvas de lactancia en el ganado Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla reviste gran importancia, ya que estas curvas describen la producción de leche de una vaca desde el final de la fase calostrual hasta el momento del secado. En este proceso, se registran datos cruciales, como la cantidad de litros de leche al inicio de la campaña, el día en que se alcanza el pico de producción, los días de producción máxima, la persistencia y la producción diaria promedio a lo largo del ciclo de producción láctea. Dado que la forma de la curva de lactancia tiende a ser consistentemente uniforme, la producción de leche al comienzo de la curva se convierte en una herramienta predictiva para estimar la producción durante la lactancia completa. El análisis de la forma de la curva de lactancia también resulta esencial para identificar problemas en la alimentación y el manejo, en caso de que las vacas no alcancen los picos de producción esperados.

Esta investigación tuvo como objetivo evaluar 11 modelos matemáticos en cuanto a su capacidad para describir las curvas de lactancia de vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla, bajo el sistema de crianza mixto. Esto permitió evaluar y comparar las curvas de lactancia, así como determinar: las etapas productivas, las características de la curva, y los niveles de producción de leche.

## CAPÍTULO I

### REVISIÓN DE LITERATURA

#### 1.1 Marco teórico

##### 1.1.1 Raza Brown Swiss

La ganadería vacuna orientada a la producción de leche en el Perú tuvo sus inicios a principios del siglo XIX. Se realizaron importaciones de ganado vacuno, específicamente de las razas Brown Swiss y Normando de Suiza en 1908, destinadas a la región de la sierra. Este desarrollo experimentó un crecimiento sustancial con la creación de la Asociación de Ganaderos del Perú en 1915. A finales de 1919, se llevó a cabo una importante importación de ganado lechero de la raza Holstein, proveniente de los Estados Unidos, Chile y Argentina, además de ejemplares de la raza Brown Swiss de origen estadounidense (Ramirez & Chavez, 2001).

La raza Brown Swiss se distingue por sus características morfológicas específicas. Posee una talla mediana, y su pelaje presenta un tono "café-gris" y sombras más oscuras. Zonas de tonalidad más clara se localizan en los ojos, hocico, orejas y las extremidades inferiores. El pelaje es corto, fino y suave, con una piel pigmentada que exhibe pigmentación negra en áreas como el hocico. Los cuernos son de tamaño mediano o pequeño, de color blanco con puntas negras, curvándose hacia afuera y hacia arriba.

La cabeza se caracteriza por ser amplia y moderadamente larga, mientras que la espalda es ancha con una línea dorsal recta. El pecho se presenta profundo y con costillas bien arqueadas, y los cuartos traseros son carnosos y desarrollados (Gasqué & Posadas, 2001). En cuanto a la longevidad, tanto las hembras suelen producir hasta los 15 años y los machos manteniéndose en servicio productivo hasta los nueve años.

Esta raza exhibe un contenido graso alto, variando entre 3.75 y 4.5 por ciento, además de un contenido proteico del 3.3 por ciento. El alto contenido graso la hace especialmente adecuada para la producción de quesos. La selección de los animales se orienta hacia el nivel de producción, aptitud para el ordeño, conformación mamaria y estructura corporal, sin descuidar la aptitud para la producción cárnica (Arapa, 2022).

Según el último censo, el Perú posee 5'156,895 de vacunos, que producen 1'115,045 t de leche; conformados por animales de razas definidas (Brown Swiss 17.6%, Criolla 63.9%, Holstein 10.3%, Gyr/Cebú 3.4% y otras razas 4.8%). La región de Puno tiene 628,460 vacunos (12.2%), de ellos sólo el 13% (81,700 animales) son especializados en producción de leche. (Instituto Nacional de estadística e Informática [INEI], 2012).

La raza de ganado vacuno Brown Swiss es la única introducida que con éxito se ha adaptado a las condiciones adversas de nuestra sierra peruana, como la altitud, cambios bruscos de temperatura, gran variabilidad en el régimen pluvial, baja presión barométrica, escasa tensión de oxígeno, gran concentración de anhídrido carbónico y otros gases, intensidad de radiación ultravioleta, pastos de baja calidad nutritiva y falta de buenas tecnologías de manejo y crianza; donde uno de los mayores problemas en la adaptación es el mal de altura (León-Velarde & Quiroz, 1994).

Quispe et al. (2016), indican que entre las ventajas destacadas de esta raza se encuentran su rusticidad y su notoria adaptabilidad a diversas condiciones climáticas, así como su resistencia a enfermedades. Además, se distingue por su versatilidad, ya que es capaz de producir tanto leche como carne, exhibiendo una excelente habilidad materna y una fertilidad reconocida como una de las más elevadas en comparación con otras razas. Asimismo, los sementales de esta raza demuestran una notable capacidad de empadre.

Rosemberg (2000) destaca que la raza bovina que ha demostrado un mayor éxito en adaptarse a altitudes elevadas es la Brown Swiss, lo que la convierte en una raza de gran relevancia en la sierra peruana. Esta raza se encuentra principalmente en la sierra central del país y presenta una producción promedio de leche que oscila entre 1 500 y 3 000 kg por vaca en una campaña. En condiciones de altitud y con una alimentación basada en pastos tanto naturales como cultivados, la raza Brown Swiss se posiciona como una mejora con respecto al ganado criollo, especialmente en zonas que superan los 3 500 metros sobre el nivel del mar. A través de la cría de esta raza, se está fomentando la selección de animales con una marcada tendencia hacia el tipo lechero.

### 1.1.2 Curvas de lactancia

La producción de leche durante el ciclo de producción, conocido como periodo de lactancia, está representada por una función matemática llamada curva de lactancia que relaciona la producción a lo largo del tiempo. La forma típica describe dos partes; un rápido aumento de la producción hasta un nivel máximo, luego una disminución gradual hasta que ya no es recomendable continuar el ordeño. (León-Velarde & Quiroz, 1994; Sherchand et al., 1995).

En el caso de vacunos, se han propuesto diversas funciones matemáticas como aplicación de modelos matemáticos en ciencia animal (Brody et al., 1924; McMillan, 1981; Papajcsik & Boderó, 1988; Sikka, 1950; Wood, 1967), éstos describen los aspectos relevantes como son el nivel de producción inicial, el tiempo en el que se alcanza la producción máxima, la producción máxima conocida también como pico de producción, la persistencia o nivel en el que se mantiene la producción y, la longitud de la lactancia, que se describen a partir de los parámetros de cada función matemática.

Las fases que describen son el tiempo a la máxima producción, el pico de producción de leche y la persistencia, que pueden ser influenciadas genéticamente y afectadas por factores medio ambientales como las prácticas de manejo, días abiertos, días secos, gestación, estación y edad al parto. En general, se utilizan métodos no lineales y lineales para estimar los parámetros del pico de producción y las fases de aumento y disminución de la producción de leche durante la lactancia (Duque et al., 2018; Farhangfar et al., 2000; Nasri et al., 2008; Quintero et al., 2007).

La pendiente después del pico de lactancia representa la persistencia (Pérochon et al., 1996). Este fenómeno está relacionado con el aumento exponencial del volumen de las células secretoras, durante la gestación por el fenómeno de hiperplasia o proliferación de células, y entre el parto y el pico de lactancia por hipertrofia o intensificación de su actividad. La fase descendente de la lactancia es la más larga durante la cual la secreción de leche disminuye gradualmente hasta secarse. Esta segunda fase se explica por la involución de las células secretoras, pero especialmente por la disminución de su número. La persistencia se define como la capacidad de una vaca para mantener la producción de leche después del pico. Suponiendo condiciones uniformes de nutrición y manejo, la tasa de disminución posterior al pico de lactancia se calcula como la

proporción de la disminución en la producción de leche del mes anterior, que generalmente oscila entre el 4 y el 9% (Knight & Wilde, 1993).

Sin embargo, investigaciones previas reportan que algunos modelos matemáticos tienen dificultades para ajustar curvas de lactancia atípicas, incluidas curvas con registros insuficientes para caracterizar todas las lactaciones, curvas cóncavas y aquellas con distribuciones irregulares. Además, varios estudios han destacado la genética, la dieta, la secuencia de parto, la temporada, los trastornos metabólicos, las enfermedades y otros factores ambientales que contribuyen a las condiciones de lactaciones atípicas (Ahmed et al., 2019; Dijkstra et al., 2010; Olori et al., 1999).

Estos factores pueden explicar por qué algunos modelos no coinciden con ciertos datos de lactancia. Por lo tanto, es necesario estudiar otros modelos aplicables a otras situaciones y describir el fenómeno de la lactancia no lineal. Algunos de dichos modelos son el de Brody (Brody et al., 1924), Exponencial negativo (Brody et al., 1923), Parabólico exponencial (Sikka, 1950) y Cuadrático (Dave, 1971).

Los modelos algebraicos de curvas de lactancia proporcionan un resumen de los patrones longitudinales de producción de leche a partir de los cuales se puede predecir la producción total de leche (Figura 1). Los modelos apropiados brindan información útil para las decisiones de mejoramiento y manejo a nivel finca. Para garantizar decisiones precisas relacionadas con animales individuales o rebaños, el rendimiento debe predecirse con un error mínimo y relativamente pocos días de prueba, lo que reduce el costo y el registro de la producción de leche (Quinn et al., 2005).

La curva de lactancia se puede caracterizar por varios parámetros: a) Duración de la lactancia definida por el intervalo. Se estandariza en un intervalo de 5 a 305 días; b) Producción total. Se considera de gran importancia económica, matemáticamente se traduce como la integral de una función matemática durante el intervalo de duración de la lactancia; c) Producción inicial. Estimada por el promedio de las producciones del 4°, 5° y 6° días posparto; d) Tasa de crecimiento en la fase ascendente. Comprende desde el parto hasta la máxima producción; e) La producción máxima diaria y la fecha en la que se observa este máximo. El pico de producción es el mayor rendimiento de lactancia, y su fecha se expresa en unidades de tiempo (Wood, 1967). Para cualquier modelo matemático de ajuste de la curva de lactancia, el valor máximo se obtiene mediante un proceso de optimización matemática.

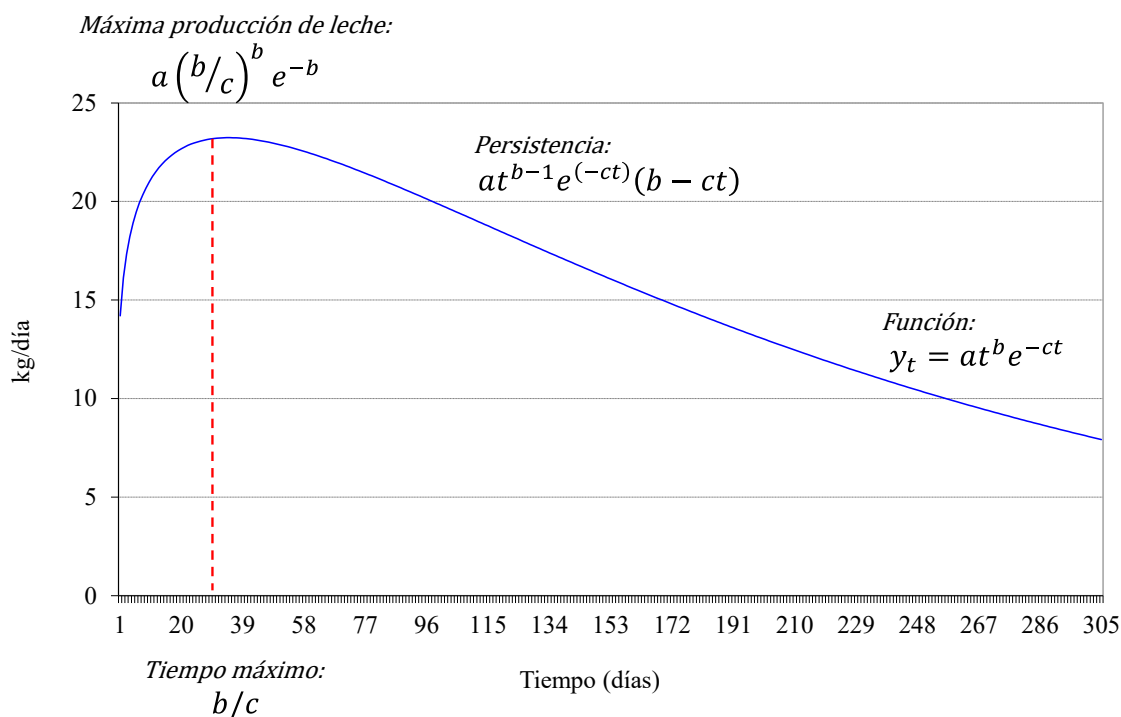


Figura 1. Curva de Lactancia en Vacunos: Modelo de Wood

Fuente. Elaborado en base a Duque, Casellas, Quijano, Casals, & Such, (2018).

### 1.1.3 Modelos matemáticos de curvas de lactancia

En general, se representa por una variedad de modelos matemáticos que permiten describir y predecir; su utilidad se basa en la interpretación biológica o económica sencilla. Los diferentes modelos matemáticos difieren en sus propiedades matemáticas, el número de parámetros y su relación con las principales características de una estructura de lactancia típica, como el rendimiento en el momento máximo, la persistencia y el rendimiento total. Los modelos paramétricos no lineales son los más utilizados para el modelamiento de grupos de animales con cierta homogeneidad (Macciotta et al., 2011).

#### 1.1.3.1 Modelos no lineales

Se denominan modelos no lineales cuando los cambios en la variable dependiente no son proporcionales a los cambios en las variables independientes; son necesarios cuando los fenómenos que se están modelando son intrínsecamente no lineales en la naturaleza y es común en muchas disciplinas científicas y aplicaciones del mundo real. Permiten capturar y representar de manera más precisa y flexible las relaciones

complejas entre las variables, lo que los hace esenciales en una variedad de campos, desde la biología y la física hasta la economía y la ingeniería.

Así los modelos paramétricos resumen las características de distribución mediante tres o cuatro parámetros de fácil interpretación biológica y son los de mayor preferencia, aunque un mayor número de parámetros mejora la calidad de ajuste de algunas funciones, la interpretación de los parámetros resulta difícil y en algunos casos no es posible asociarlos con las características clásicas de la curva de lactancia (Ali & Schaeffer, 1987; Rekaya et al., 2000).

Entre los modelos paramétricos, se han utilizado ampliamente las curvas de lactancia aproximadas mediante funciones exponenciales o la integración de términos exponenciales en la fórmula del modelo. El primer intento de desarrollar un modelo matemático que describe una curva de lactancia corresponde a Brody et al. (1923), cuya función exponencial tiene la siguiente forma:

$$y_t = ae^{-bt}$$

Esta función destaca el factor de escala para ajustar la producción al nivel inicial  $a$  y el parámetro  $b$  se relaciona con la fase descendente de la curva de lactancia, destacado como medida de persistencia, pero no modela la tasa de crecimiento en la fase ascendente para alcanzar el pico de lactancia. Una segunda propuesta del mismo autor, toma en cuenta el aumento en la producción de leche hasta un nivel máximo incorporando una función de disminución exponencial (Brody et al., 1924); el modelo es el siguiente:

$$y_t = ae^{-bt} - ae^{-ct}$$

Aunque esta es una mejora significativa con respecto al modelo anterior, Cobby y Le Du (1978) encontraron que este modelo subestimaba la producción de leche a mitad de la lactancia y sobrestimaba al final de la lactancia. Posteriormente se propone la función parabólica exponencial (Sikka, 1950) que se ajusta bien a las curvas de lactancia para las vacas de primer parto, pero es menos efectivo para vacas de partos múltiples, dando como resultado una curva con forma de campana que no coincide con la regularidad de la curva de lactancia alrededor del pico de producción. Este modelo se representa como:

$$y_t = ae^{bt-ct^2}$$

Dado que los modelos anteriormente no expresan correctamente la fase ascendente de la curva de lactancia, Wood (Wood, 1967) propuso ajustar la curva mediante una función de tipo gamma incompleta. Genera la forma estándar de la curva de lactancia y actualmente es el más utilizado para describir curvas de lactancia en vacunos y se representa como:

$$y_t = at^b e^{-ct} \quad \text{h} \quad (1)$$

donde:

$y$  : es el rendimiento estimado en el estado de lactancia  $n$ , kg/día.

$t$  : es la producción de leche en el  $t$ -ésimo día del periodo de lactancia.

$a$ ,  $b$  y  $c$  : son los parámetros del modelo.

$e$ : es la función exponencial.

En esta expresión, la función de potencia  $t^b$  integra la fase ascendente de la curva de lactancia, mientras que la función exponencial representa la fase descendente. Los parámetros  $b$  y  $c$  representan índices de intensidad de crecimiento y disminución de la producción, respectivamente. La función  $t^b e^{-ct}$  es un factor de forma de la curva (Pérochon et al., 1996).

El parámetro  $a$  de este modelo, representa la escala de producción del animal a través del periodo de lactancia, es decir, los valores altos significan mayor productividad. El parámetro  $b$  está relacionado con la fase de desarrollo, los valores altos harán que se alcance más rápido el pico de producción. El parámetro  $c$  representa la pendiente de la curva en la fase de recuperación o última fase de lactancia, si el valor absoluto es pequeño, representa una ligera disminución en la producción, y la curva declina suavemente (León-Velarde & Quiroz, 1994). En este modelo, la persistencia se define como:  $S = -(b + 1) \ln(c)$ . Este es un indicador importante porque las vacas con persistencia alta de lactancia, tienden a producir menos leche de lo esperado al principio y más de lo esperado al final (Cole et al., 2009).



El tiempo en el que se obtiene el valor más alto de la producción se calcula optimizando la función respecto al tiempo. Es decir, derivando respecto a  $t$  (Chiang & Wainwright, 2006):

$$abt^{b-1}e^{-ct} - act^b e^{-ct} = 0 \quad (2)$$

Despejando  $t$  se encuentra el tiempo en el que se alcanza el pico de producción es:

$$t_{pico} = \frac{b}{c} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$y = a \left(\frac{b}{c}\right)^b e^{-c\left(\frac{b}{c}\right)} \quad (4)$$

Se obtiene la ecuación que representa la producción en el pico de lactancia:

$$y_{max} = a \left(\frac{b}{c}\right)^b e^{-b} \quad (5)$$

Las características de este modelo hacen posible que también se pueda estimar mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios porque se trata de un modelo intrínsecamente lineal (Gujarati & Porter, 2009); aplicando una transformación logarítmica se obtiene un modelo lineal en los parámetros:  $\ln y = \ln a + b \ln t - ct$ . Sin embargo, los resultados no son idénticos porque se trata de diferentes métodos de estimación.

Otro modelo importante es el denominado Compartamental (McMillan, 1981) y se representa como:

$$y_t = ae^{-bt} [1 - e^{-c(t-d)}] \quad (6)$$

Donde  $y_i$  es la producción de leche por día  $t$ ,  $a$  es un parámetro asociado con el máximo potencial de producción de leche,  $b$  es la disminución en la fase de declinación de producción de leche,  $c$  es la pendiente de la producción de leche durante la fase de incremento y  $d$  es el tiempo del proceso lactogénesis antes del parto (León-Velarde & Quiroz, 1994).

El procedimiento de optimización de este modelo es como sigue:

Primera derivada de la función o condición de primer orden:

$$ace^{-c(t-d)-bt} - abe^{-bt}[1 - e^{-c(t-d)}] = 0 \quad (7)$$

Entonces, la ecuación que representa el pico de lactancia es igual a:

$$t = \frac{cd + \ln(b+c) - \ln(b)}{c} \quad (8)$$

Reemplazando (8) en (6) se obtiene la ecuación que representa la producción en el pico de lactancia:

$$Y = ae^{-b \left( \frac{cd + \ln(b+c) - \ln(b)}{c} \right)} [1 - e^{-[\ln(b+c) - \ln(b)]}] \quad (9)$$

Siendo un hecho biológico, se asume que existe una gran variabilidad entre individuos genéticamente idénticos. Por tanto, la curva de lactancia puede ser representado por un conjunto de modelos matemáticos con características específicas. Además, no todos los modelos se ajustan adecuadamente a una curva de lactancia típica (Figura 1) con una primera fase creciente, un nivel máximo de producción y una fase en el que declina la producción (Rodríguez et al., 2005), estos pueden ser influenciados genéticamente y afectados por factores ambientales como las prácticas de manejo, días abiertos, días secos, gestación, año, estación y edad al parto (León-Velarde & Quiroz, 1994).

### 1.1.3.2 Modelos lineales

Cuando la información no muestra un comportamiento típico de una curva de lactancia, es posible representarlo mediante una relación lineal entre la producción de leche y el tiempo, representa básicamente la persistencia. Otro modelo lineal es el cuadrático y fue propuesto por Dave (1971), su forma funcional es el siguiente:

$$y_t = a + bt - ct^2$$

Aunque estos modelos son simples de estimar, la interpretación y el significado biológico representan una dificultad importante. Además, un modelo cuadrático tiende a ser simétrico con respecto a su punto estacionario pero la curva de lactancia no tiene dicho comportamiento. Por esta razón, Nelder (1966) sugirió que es mejor realizar primero una transformación inversa de datos ya que un polinomio cuadrático inverso es acotado, generalmente no negativo y no es simétrico. Su representación matemática es:

$$y_t = \frac{t}{a + bt - ct^2}$$

En base al coeficiente de determinación ( $R^2$ ), Batra (1986) reportó que este modelo proporcionó un buen ajuste para lactaciones de bajo rendimiento con un pico de lactancia temprano y genera un mejor ajuste que la función gamma cuando se utilizan datos de control de leche semanal. Esta función podría ser más adecuada para las vacas que comienzan su lactancia con un nivel de producción muy bajo, alcanzan su punto máximo muy temprano y luego comienzan a disminuir en una etapa temprana (Savaliya et al., 2017). Sin embargo, subestima la producción de leche alrededor del pico y sobreestima inmediatamente después (Olori et al., 1999).

Por otra parte, Singh y Gopal (1982) aumentaron el número de parámetros al incluir un término  $\text{Log}(t)$  como covariable adicional que permite eliminar la simetría del modelo parabólico. Este modelo tiene la siguiente forma:

$$y_t = a + bt - ct^2 + d \ln t$$

Según los autores, estos modelos fueron superiores a los modelos de Wood y al polinomio inverso cuando se ajustaron a datos de producción registrados quincenalmente; una limitación de este modelo es que no está definido en  $t = 0$  porque se incluye la transformación  $\text{Log}(t)$ . Aunque estos modelos no se han aplicado ampliamente, sirvieron como soporte para el desarrollo de otros modelos. Ali y Schaeffer (1987) agregaron el término  $e (\text{Log}(t))^2$  al segundo modelo de Singh y Gopal (1982) y propusieron el uso de un modelo lineal de cinco variables.

$$y_t = a + b x + cx^2 + d \log \frac{1}{x} + e \left( \log \frac{1}{x} \right)^2$$

donde  $x = t$  es la duración de la lactancia,  $a$  es un parámetro asociado al pico de producción,  $d$  y  $e$  están asociados a la parte ascendente de la curva de producción y  $b$  y  $c$  a la descendente; aunque los coeficientes permiten el ajuste a la curva de lactancia, sus parámetros no tienen un significado técnico ni biológico (Macciotta et al., 2011). Algunos modelos matemáticos como el de Ali y Schaeffer se utilizaron con éxito para ajustar curvas individuales, pero sus parámetros están fuertemente correlacionados, lo que puede limitar su uso.

En esta investigación, el proceso de estimados de los modelos se hizo mediante el software Stata y el procedimiento *nl* (Nonlinear least-squares estimation) que estima modelos no lineales ya sea especificando valores iniciales o sin ellos. En cambio, el software estadístico SAS (Proc Nlin) requiere la especificación del modelo, los valores iniciales de los parámetros y las derivadas parciales respecto de cada uno de los parámetros (SAS Institute Inc., 2015).

### 1.1.3.3 Modelos mixtos

Los modelos mixtos son estructuras estadísticas que permiten abordar la variabilidad en los datos al considerar parámetros fijos, que generalmente se aplican a una población en su conjunto, así como los parámetros aleatorios, que están vinculados a unidades individuales o grupos dentro de la población. Se utilizan para modelar y cuantificar las relaciones entre las variables de respuesta y ciertas covariables que se agrupan en función de la estructura de los datos observados. El número de parámetros aleatorios en un modelo puede variar y corresponder al número de parámetros fijos, permitiendo la incorporación de efectos aleatorios que representan la variabilidad natural entre unidades de observación. A cada parámetro aleatorio se le asocia un efecto aleatorio, que refleja la variabilidad entre las unidades experimentales o grupos que permite capturar la heterogeneidad natural entre las unidades de observación, teniendo en cuenta que no todas se comportan de la misma manera y que existen diferencias aleatorias entre ellas.

Un aspecto importante en la construcción de modelos de efectos mixtos es decidir cuáles de los parámetros del modelo no lineal requieren efectos aleatorios para explicar sus variaciones entre sujetos y cuáles pueden tratarse como efectos puramente fijos (Pinheiro & Bates, 1995).

A modo de ilustración, cuando en el modelo de Gompertz ( $y_t = ae^{-bie^{-ct}}$ ) se introducen tres efectos aleatorios, uno asociado a cada parámetro fijo, se transforma en un modelo mixto que puede expresarse de la siguiente manera:

$$y_{ij} = (a + a_{1i})e^{(b+b_{1i})e^{-(c+c_{1i})t_{ij}}} + \varepsilon_{ij}$$

Donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los coeficientes de la función con efectos fijos que definen los valores esperados de las observaciones, mientras que  $a_{1i}$ ,  $b_{1i}$  y  $c_{1i}$  son los efectos

aleatorios que caracterizan la variabilidad y la covariabilidad de las observaciones para cada uno de los efectos fijos relacionados al *i-ésimo* animal, mientras que  $\varepsilon_{ij}$  es el residual asociado al *i-ésimo* animal en el *j-ésimo* período de tiempo. Tanto los residuos como los efectos aleatorios se consideran independientes entre sí y se asume que siguen una distribución normal, con media cero y varianza constante  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$  (France et al., 1996).

#### 1.1.4 Persistencia

Gasqué y Posadas (2001) menciona que la persistencia lechera se refiere a la medida de cambio en la producción de leche entre las campañas productivas del hato lechero. Indica el grado de declinación en la producción de leche después de alcanzar su punto máximo y se calcula dividiendo la cantidad de leche producida en un mes entre la cantidad producida en el mes anterior, expresándolo como un porcentaje. En promedio, se espera que la persistencia esté en el rango del 94 al 95 por ciento. El análisis de la forma de la curva permite identificar posibles problemas de alimentación y manejo en el ganado lechero. Una mayor producción de leche, generalmente se relaciona con picos de producción más elevados y una mayor persistencia. Por cada kilogramo adicional en el pico de producción, se pueden obtener entre 200 y 230 kilogramos adicionales de leche durante el período completo de lactancia. La correlación entre el pico de producción y la producción total por lactancia es más sólida que la correlación entre la persistencia y la producción total.

Andersen (2012) menciona que existe un descenso en la producción de leche en las vacas después de alcanzar su pico de producción. En el caso de las vacas adultas con una alta producción, este descenso se sitúa entre el 8 y el 10 por ciento mensual, mientras que, en las vacas de primer parto con menor producción, la reducción oscila entre el 4 y el 6 por ciento al mes. En el período medio de lactancia, las vacas adultas muestran una disminución del 8 por ciento, mientras que las vacas de primer parto experimentan una disminución del 4 por ciento. Hacia el final de la lactancia, las vacas adultas muestran una caída que varía entre 10 a 14 por ciento, en contraste con las vacas de primer parto, cuya disminución es más moderada, oscilando entre el 6 y el 8 por ciento. Esto dificulta la recuperación de las reservas corporales en las vacas de primer parto.

Vásquez (2017) manifiesta que en el caso de las vacas Holstein de primer parto, utilizando el modelo de Wood, alcanzan su producción máxima en el tercer mes de lactancia, mientras que las vacas de segundo y tercer parto a más logran su máxima producción en el segundo mes.

### 1.1.5 Producción de leche

Góngora (2006) manifiesta que la producción de leche abarca desde el parto hasta el momento en que la vaca cesa su producción, conocido como el período de seca. Lo ideal en cuanto a la duración de la lactancia es de 305 días, es decir, 10 meses de producción de leche, seguidos de dos meses de secado. Este período de descanso permite que el animal se recupere adecuadamente y cumple el objetivo de garantizar una cría por año.

## 1.2 Antecedentes

Duque et al. (2018) evaluaron el desempeño estadístico de seis modelos con el fin de ajustar curvas de lactancia, utilizando registros de control, con el propósito de caracterizar la producción de leche en un rebaño Holstein colombiano ubicado en un entorno tropical. Se emplearon 425 lactaciones completas y se recopilaron un total de 244 876 registros de control diario correspondientes a 14 años consecutivos. La selección de los modelos se basó en su capacidad para ajustarse adecuadamente a los datos. Las vacas promediaron  $5830 \pm 59$  kg, una duración de lactancia de  $330 \pm 3$  días, una producción máxima de  $27.7 \pm 0.3$  kg, un tiempo para alcanzar el pico de producción de  $4.7 \pm 0.1$  semanas, y una persistencia durante seis meses del  $63.1 \pm 0.6\%$ . Los resultados indican que la producción a 305 días, la duración de la lactancia y la producción al pico aumentaron con el número de partos. Concluyen que el modelo bifásico de Grossman y Koops se ajustó de manera óptima para describir las curvas de lactancia, especialmente en un contexto de investigación, mientras que el modelo de Wood resultó más adecuado para aplicaciones ganaderas.

Cañas et al. (2012) evaluaron diferentes modelos matemáticos aplicados a las curvas de lactancia para establecer el mejor ajuste y estimar los parámetros genéticos para las características a partir del mejor modelo. Usaron 426 797 registros de control lechero mensual de 49 108 vacas Holstein de 470 hatos en Colombia. Se evaluaron los modelos propuestos por Wood, Brody, Wilmink y Papajcsik y Boderó y seleccionaron el modelo de mejor ajuste a las curvas de lactancia; estimaron los parámetros genéticos para las características ( $b_0$ ), producción de leche al pico ( $y_{max}$ ), tiempo al pico ( $t_{pico}$ ) y producción

total a los 305 días, empleando los efectos fijos de zona, parto y grupo contemporáneo. El modelo de Wood fue el de mejor ajuste. La media y error estándar para las características  $b_o$ ,  $y_{max}$ ,  $t_{pico}$  y P305 (producción en 305 días), fueron:  $16.64 \pm 6.34$  lt,  $27.39 \pm 6.85$  lt,  $44.55 \pm 13.19$  días y  $6212 \pm 1690$  lt, respectivamente. Las características  $b_o$  y  $t_{pico}$  presentaron una heredabilidad baja (0.02) y las características  $y_{max}$  y P305 presentaron una heredabilidad entre baja a media (0.15 y 0.17). Las heredabilidades medias y la alta correlación genética entre la producción máxima y la P305, indican que es posible incluirlas en programas de selección.

Macciotta et al. (2011) indican que el desarrollo de modelos matemáticos para ajustar curvas de lactancia ha respondido principalmente a los requerimientos de la industria del ganado lechero y predecir rendimientos con fines de manejo. Según los autores, los modelos más utilizados son: Brody, Wood, Cobby y Le Du, Wilmink, Ali y Schaeffer, Grossman y Koops.

Brotherstone et al. (2000) mencionan que la mayor disponibilidad de registros por lactaciones individuales y la evaluación genética basada en los registros del día de la prueba ha cambiado el interés de los modeladores hacia funciones lineales más flexibles y generales. El principal interés de la modelización ya no es la reconstrucción del patrón general del fenómeno, sino el ajuste de las desviaciones individuales de una curva promedio. La adecuación de un modelo no es un requisito absoluto, ya que debe evaluarse de acuerdo con el propósito específico para el que se utiliza. Sin embargo, mencionan que difícil encontrar una función adecuada para todos los campos de aplicación y que la validez del modelo debe evaluarse sobre la base de su sostenibilidad para un propósito particular.

La importancia de la modificación genética de la forma de la curva de lactancia en una dirección económicamente deseable ha sido señalada por varios investigadores. Las vacas con curvas caracterizadas por picos más bajos y mayor persistencia están menos expuestas a problemas de salud y fertilidad y pueden explotar eficientemente alimentos más baratos. Reportan que algunos artículos iniciales utilizaron un modelo simple como la función de Wilmink. Sin embargo, otros métodos no convencionales, como el análisis de series temporales, con su capacidad para separar los componentes deterministas y periódicos del ruido blanco de la variación aleatoria, pueden representar una alternativa adecuada para abordar estos problemas.

Quintero et al. (2007) indican que una curva de lactancia sirve para el pronóstico de la producción total a partir de muestras parciales, planificación del hato con predicción

confiable de la producción y selección a partir de las características de la curva. Mencionan que los modelos más utilizados para la estimación de curvas de lactancia se clasifican como: a) lineales, entre los que se encuentran el modelo lineal, cuadrático, cuadrático logarítmicos, lineal hiperbólico, Ali y Schaeffer (regresión múltiple), y polinomial inversos y b) no lineales, entre los que se encuentran la función gamma incompleta, la parabólica exponencial, Wilmink, Papajcsik y Bordero, Cobby y Brody; dichos modelos fueron descritos y analizados algebraicamente con el propósito de interpretar los cambios que ocurren en la producción de leche durante una lactancia. Los autores concluyen que cada modelo predice la producción total de leche en base a un rendimiento parcial, lo cual es de gran importancia para la evaluación genética de las vacas lecheras. Además, consideran de gran importancia el método de estimación de los modelos.

Rodríguez et al. (2005) muestran que el uso de modelos matemáticos para describir las curvas de lactancia proporciona información valiosa en la toma de decisiones de los sistemas de producción. Compararon los modelos que utilizan exponentes negativos, gamma parcial y polinomios de quinto grado. Concluyen que el modelo gamma incompleto es la mejor opción para su uso en la cuenca de Lima. Fue capaz de explicar el 72% de la variación en la producción de leche, con un error estándar de 3.3 kg en la predicción de la producción de leche al día 305. Encontraron que el ajuste dentro de las lactancias mejora significativamente la capacidad predictiva de los modelos a través de un aumento del coeficiente de determinación y en una reducción de los errores estándar en la predicción de la producción de leche a los 305 días. Hasta la tercera lactancia, se mantuvo una relación directa con los parámetros que reflejan la producción inicial, la tasa de ascenso de la producción, la producción máxima en el pico y el rendimiento de la producción a los 305 días, pero una relación inversa con los días hasta el pico y la persistencia, pero a partir de la cuarta lactancia, estos parámetros tienden a estabilizarse o disminuir.

Con el objetivo de encontrar el mejor modelo para ajustar curvas de lactancia, Val-Arreola et al. (2004), evaluaron cinco funciones matemáticas para describir curvas de lactancia en dos sistemas de manejo diferentes en México; el propósito fue comparar y evaluar según su habilidad para predecir y describir curvas de lactancia. Los modelos estimados fueron Gaines, Wood, Rook, Dijkstra y Pollott. La información fue analizada por grupos de lactancia: primer parto, segundo parto y, tercero parto y mayores. En todos los casos, excepto para mayores al segundo parto del sistema de pequeña escala, la ecuación de Gaines reportan un mejor ajuste. Indican que la ecuación de Wood explica muchas de las variaciones, pero



que sus parámetros no tienen interpretación biológica directa. La ecuación Rook predice bien los datos, pero algunos de los parámetros estimados no fueron significativos. La ecuación de Dijkstra permitió las mejores predicciones, con parámetros significativos e interpretación fisiológica.

Tekerli et al. (2000), estimaron curvas de lactancia en vacunos Holstein de la provincial Balıkesir de Turquía a partir de la función gamma. Aplicando transformación logarítmica a la función original, encontraron que el modelo estimado explica el 71% de las variaciones del rendimiento diario. Entre los factores no genéticos estudiados (manejo, año de parto, estación de parto, grupo de lactancia y, periodo de servicio) fueron significativos varios rasgos de la curva de lactancia. El pico de lactancia y los rendimientos fueron mayores para vacas que parieron en otoño e invierno y, la persistencia fue mayor en vacunos cuyos partos tuvieron lugar en las estaciones de verano y otoño. En cambio, la persistencia mayor se registró en vacunos de primera lactancia.

Sherchand et al. (1995), reportan que el efecto del número de lactaciones fue significativo ( $p < 0.05$ ). Sin embargo, no encontraron diferencias significativas entre las lactaciones 2, 3 y 4 ( $p > 0.05$ ). Evaluando diez modelos matemáticos para describir curvas de lactancia, concluyen que la función logística difásica tuvo la mejor predicción de producción de leche para las cuatro lactaciones, donde los rendimientos de leche fueron de 5,402 hasta 11,015 kg., por tanto, describe adecuadamente la curva de lactancia para vacas Holstein, resaltando su utilidad para lograr eficiencia reproductiva y manejo adecuado de la alimentación. Para los primeros 30 días, una función gamma modificada dio el mejor ajuste para la primera lactancia, la función polinomial inversa para la segunda lactancia y la función logarítmica cuadrática para la tercera lactancia.

Olori et al. (1999) evaluaron cinco modelos de curvas de lactancia: gamma incompleta (1981), polinomio inverso (1966), polinomio exponencial (1950) y logaritmo mixto (1982) para predecir la lactancia típica de una vaca lechera a partir de la producción diaria promedio de leche de 325 vacas Holstein-Friesian de primera lactancia. Todos los modelos probados predijeron bien el patrón de lactancia media del rebaño, con poca diferencia en el ajuste. Sin embargo, los residuos en su mayoría no fueron aleatorios, con correlaciones seriales que indicaron predicciones sesgadas de rendimiento en ciertas etapas de la lactancia. Los modelos probados funcionaron igual de bien en la predicción de lactaciones típicas, que alcanzaron su punto máximo entre las semanas 6 y 9, e igualmente malos en la predicción

de lactaciones atípicas. Indican además que la proporción de lactaciones individuales predichas con precisión en cualquier grupo de vacas depende principalmente del número cuya producción sigue el patrón típico de lactancia.

Entre los modelos más utilizados resalta el de Wood, fue ampliamente adoptado como un estándar en la modelización de fenómenos específicos en diversas ubicaciones geográficas, lo que evidencia su versatilidad y aplicabilidad global (Arango et al., 2000; Farhangfar et al., 2000; Gara et al., 2000). Además, se ha observado una notable coherencia en los valores de sus parámetros en diferentes latitudes, lo que respalda su robustez y confiabilidad en una amplia gama de condiciones y contextos geográficos (Aberrachid, 2012; Ossa-Saraz et al., 1997; Quispe Coaquira et al., 2016).

Las investigaciones realizadas en la región de Puno son limitadas. León-Velarde C. y Quiroz (1994), estimaron curvas de lactancia utilizando los modelos Gamma incompleta y Compartamental, estimando una producción promedio de  $4012 \pm 630$  y  $4087 \pm 611$  kg, respectivamente. En relación a los datos observados, el primer modelo subestimó en  $-0.6\%$ , mientras que el segundo sobreestimó en  $1.2\%$ , concluyendo que se pueden utilizar estos modelos para predecir la producción media de un hato.

En otros casos, también utilizaron modelos de crecimiento para ajustar curvas de lactancia. Así, por ejemplo, López et al. (2015), ajustaron la producción de leche acumulada a seis funciones de crecimiento clásicas (monomolecular, Schumacher, Gompertz, logística, Richards y Morgan) como una forma diferente de predicción de la producción de leche, utilizando información de vacunos Holstein en Canadá. Las funciones fueron estimadas mediante procedimientos de regresión no lineal y su rendimiento evaluado mediante estadísticas de bondad de ajuste (coeficiente de determinación, cuadrados medios residuales, criterio de información de Akaike (1974), los coeficientes de correlación y concordancia entre los rendimientos de leche observados y ajustados). Encontraron que todas las funciones se ajustan de manera aceptable, siendo mejor la ecuación de Richards seguido por la de Morgan, y la menos precisa fue la ecuación logística. Concluyen que las funciones de crecimiento clásicas, especialmente las sigmoideas con un punto de inflexión, son alternativas viables para adaptarse a las curvas acumulativas de producción de leche, lo que resulta en un rendimiento estadístico adecuado y estimaciones precisas de los rasgos de lactancia.

## CAPÍTULO II

### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

#### 2.1 Identificación del problema

En la actualidad, los sistemas de producción en el altiplano peruano responden a las características predominantes de la región (condiciones ambientales adversas, riesgo productivo, sequías, heladas y precipitaciones pluviales) que definen una vocación productiva en cada Zona Agroecológica de la Región (Ccama, 1991). Así, la crianza de ganado vacuno de doble propósito (leche y carne) se viene intensificando durante los últimos años porque constituye una fuente importante de ingresos monetarios y de menor riesgo económico en relación a los cultivos.

De acuerdo a las estadísticas agropecuarias correspondiente a 15 años (1995-2009; MINAG), la producción de leche se incrementó considerablemente (11.85%), debido principalmente al incremento en la productividad, ya que la población promedio de vacunos creció a una tasa de 1.06% y el número de animales en ordeño creció en 1.94%. La razón de ello es que esta actividad económica provee a los productores, ingresos monetarios importantes que oscilan entre S/. 185 y S/. 625 mensuales, calculados en base a un número de vacas en ordeño que oscilan entre 3 y 7 (León-Velarde, 1996).

Por otro lado, la ganadería lechera adquiere una significativa relevancia en el altiplano debido a diversos factores. Requiere de una inversión mínima en infraestructura y se fundamenta en la utilización de pastos naturales y forrajes, como la avena, así como pastos cultivados como la alfalfa, dactylis, trébol y rye grass. Esta actividad económica se adapta de manera idónea a las particularidades y limitaciones de los sistemas de producción altiplánicos, caracterizados por recursos de poca calidad, escaso capital y una mano de obra con limitada capacitación. No solo es una opción tecnológicamente viable, sino que también

brinda a los productores ingresos económicos superiores en comparación con la mayoría de los cultivos (Bernués, 2007; León-Velarde, 1996).

En este contexto, la producción de leche está influida por diversos factores como la salud, alimentación, medio ambiente, reproducción y bienestar de los animales. Significa que, al desarrollar herramientas más precisas para medir los cambios en la producción de leche, es posible medir también la influencia de otras variables, en suma, se puede medir la respuesta del rebaño a cualquier intervención. En consecuencia, la caracterización precisa de la curva de lactancia en ganado lechero es esencial para la gestión del rebaño y la cría de animales (Gipson & Grossman, 1989), sin embargo, no hay consenso sobre un modelo matemático aceptado (Ehrlich, 2010).

Desde el punto de vista bio-económico, es esencial que el modelo de la curva de lactancia refleje de manera precisa las expectativas a nivel de la explotación ganadera, permitiendo definir su rentabilidad (Quinn et al., 2005).

Además, en el altiplano de la Región de Puno, son escasos los trabajos desarrollados para determinar el modelo matemático que caracterice la curva de lactancia en el ganado vacuno Brown Swiss (Quispe Coaquira et al., 2016) que permita describir la producción de leche de una vaca desde el final de la fase calostrual hasta el momento del secado, lo que, a su vez, permita graficar la curva de lactancia, mostrando la producción inicial, el pico de la producción, el día que alcanza el pico de producción, la persistencia y la producción diaria promedio durante el ciclo de producción láctea.

Mediante un adecuado entendimiento de la dinámica de la curva de lactancia en un sistema de producción específico, se posibilita la implementación de estrategias de gestión integral en los ámbitos nutricional, reproductivo, sanitario y administrativo, orientadas a la optimización de la eficiencia y competitividad del sistema de producción durante la fase de lactancia. En suma, se lograría mejorar el rendimiento productivo.

Así, los objetivos de esta investigación deben responder a las siguientes preguntas:

*¿Cuál es el modelo matemático que mejor explique la curva de lactancia aplicable a la lactancia de vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla, asociado a las diferentes etapas de la producción láctea?*

*¿Cuál es el rendimiento de leche al pico de lactancia y el día al pico de lactancia para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla?*

*¿Cuál es el porcentaje de persistencia después del pico de producción para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla?*

*¿Cuál es la producción de leche por campaña para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla?*

## **2.2 Enunciados del problema**

¿Es posible realizar la evaluación de 11 modelos matemáticos propuestos en cuanto a su capacidad de describir las curvas de lactancia aplicable a la lactancia de vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla?

## **2.3 Justificación**

La crianza de vacunos Brown Swiss en la Región de Puno es una actividad de gran importancia socioeconómica por su adaptación a las condiciones del altiplano, la actividad está enmarcada dentro de la problemática de baja producción y productividad, acompañada de una reducida rentabilidad, debido a que la mayoría de los hatos lecheros no cuentan con registros de producción diaria, lo que dificulta evaluar la producción y así tender a la mejora de la productividad y además la transacción de animales de buena producción con el objetivo de mejorar genéticamente cualquier hato mediante una selección adecuada, ya que el desafío es ser competitivo (Mamani et al., 2007).

Los productores tienen que convertirse en empresarios eficientes, por eso se hace imprescindible el uso de registros que permitan medir los resultados y compararlos con las metas planteadas, sean estas actuales o pasadas a fin de corregir deficiencias, y realizar cambios oportunos. Sin embargo, aún existe desconocimiento por parte de los productores del manejo de dicha información para obtener ventajas a la hora de tomar decisiones (Sotelo et al., 2017). Por otro lado, podemos identificar empresas ganaderas que sí llevan de forma adecuada sus registros como es el caso del Centro Experimental Chuquibambilla, dedicado, entre otras cosas, a la crianza de ganado vacuno de la raza Brown Swiss bajo el sistema de crianza mixto.

La curva de lactancia es el resultado de un proceso biológico que puede ser explicado por medio de una función matemática, la cual es útil en el pronóstico de la producción total a

partir de muestras parciales, en la planificación del hato con la ayuda de la predicción y la selección a partir del conocimiento de las relaciones entre las diferentes partes de la curva (Quintero et al., 2007). El conocimiento de las principales características de la curva de lactancia es de gran utilidad para los productores de leche y profesionales responsables de la toma de decisiones en el hato. La predicción de la producción de leche a partir del inicio de la lactancia permite: calcular el ingreso bruto que puede ser obtenido de una vaca, escoger cuáles animales deben ser descartados, identificar animales enfermos en base a la disminución de la producción antes de la aparición de los signos clínicos y establecer planes de selección genética a partir de la identificación de los animales con altas producciones (Gipson & Grossman, 1989).

En la actualidad, la disponibilidad de información específica relacionada con las poblaciones de vacas Brown Swiss en la Región es limitada, lo que ha impedido el desarrollo de un modelo matemático preciso que describa la curva de lactancia de estos animales. Paradójicamente, esta actividad contribuye en la generación de empleo en áreas rurales y a la producción de leche a nivel regional. Por ende, el propósito fundamental de esta investigación radica en enriquecer el acervo de conocimiento respecto al comportamiento de la curva de lactancia en este contexto de producción. Esta iniciativa busca brindar las bases necesarias para una planificación efectiva en los aspectos nutricionales, reproductivos, sanitarios y administrativos de las unidades de producción durante la fase de lactancia. El objetivo final es el aumento de la productividad del sistema, lo que redundaría en una sustancial mejora de su eficiencia y competitividad.

## 2.4 Objetivos

### 2.4.1 Objetivo general

Evaluar 11 modelos matemáticos en cuanto a su capacidad para describir las curvas de lactancia de vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla, bajo el sistema de crianza mixto.

### 2.4.2 Objetivos específicos

- a. Seleccionar un modelo matemático que mejor explique la curva de lactancia aplicable a la lactancia de vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla, asociado a las diferentes etapas de la producción láctea.

- b. Estimar el rendimiento de leche al pico de lactancia y el día al pico de lactancia para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla.
- c. Estimar la persistencia después del pico de producción para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla.
- d. Estimar la producción de leche por campaña para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla.

## 2.5 Hipótesis

### 2.5.1 Hipótesis general

Un modelo matemático específico, como una curva de lactancia, posee la capacidad de representar los procesos fisiológicos y metabólicos inherentes a la lactancia para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla, dichos modelos tienen la capacidad de describir y predecir las fluctuaciones temporales en la producción de leche.

### 2.5.2 Hipótesis específicas

- a. En el Centro Experimental Chuquibambilla, las vacas de la raza Brown Swiss presentan curvas de lactancia que pueden ser adecuadamente representadas mediante ciertos modelos teóricos con capacidad predictiva; se espera que la elección del modelo teórico tenga un impacto significativo en la precisión de la predicción de la producción de leche durante el período de lactancia.
- b. Una curva de lactancia es una representación específica de los procesos fisiológicos y metabólicos que relaciona la producción de leche y el tiempo, por lo tanto, permiten estimar el rendimiento de leche al pico de lactancia y el día en el que ocurre para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla.
- c. La persistencia en la producción de leche de vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla son factibles de estimar a partir del mejor modelo de curva de lactancia.
- d. La producción por campaña para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla es predecible a partir del mejor modelo de curva de lactancia.

## CAPÍTULO III

### MATERIALES Y MÉTODOS

#### 3.1 Lugar de estudio

La investigación fue realizada en la ciudad de Puno con información proveniente del Centro Experimental Chuquibambilla de propiedad de la Universidad Nacional de Altiplano de Puno que se encuentra ubicado en el distrito de Umachiri y provincia de Melgar del departamento de Puno a 17 km de la ciudad de Ayaviri y km 1200 de la carretera Puno – Cusco; sus coordenadas geográficas son 14°50'18" latitud Sur y 70°44'42" longitud oeste. Se ubica a una altitud de 3974 m.s.n.m. La precipitación pluvial acumulada en la época de lluvia (enero a mayo) es de 475.8 mm, mientras que en la época seca (junio a diciembre) es de 397.3 mm, con una precipitación anual de 873.1 mm (2014); la temperatura máxima de 21.0 °C en el mes de diciembre y una temperatura de -14.5 °C en el mes de julio (SENHAMI, 2023).

El Centro Experimental Chuquibambilla es uno de los centros de investigación y producción más importantes de la Universidad Nacional del Altiplano, conocido a nivel regional, nacional e internacional, con mucha trayectoria y remarcado prestigio por la labor que realiza en investigación científica y tecnológica, actividades académicas y de proyección social hacia la comunidad. Cuenta con una extensión total de 5,095.87 hectáreas, cuyas praderas están constituidas por pastos naturales, base para la alimentación de los animales de acuerdo a la zona que tiene el centro una plana o pampa y otra ladera o zona alta.

La zona de pampa se diferencia por presentar una cobertura de pastos naturales divididos en potreros por cercos de alambre con abrevaderos en tiempos de sequía y cuya población de pastos es como sigue: leguminosas, gramíneas, ciperáceas, juncáceas, teniendo como especies dominantes anuales y perennes a la *Festuca dolichdophylla* (Chilligua), *Alchemilla*



*pinnata* (Sillo sillo), *Calamagrostis vicugnarum* (Crespillo), *Calamagrostis sp.* (Sora), *Muhlenbergia fastigiata* (Gramma o chiji) y en menor porcentaje *Trifolium amabili* (Layo), *Stipa ichu* (Ichu), *Margaricarpus pinnatus* (Kanlla) y *Festuca ortophilla* (Iru ichu). En la zona alta; no cuenta con cercos de alambre y tiene menor disponibilidad de abrevaderos en tiempo de lluvias, y ausentes en épocas de secas, las especies de pastos, que se encuentran en esta parte alta son la: *Festuca dolichopylla* (Chilligua), *Margaricarpus pinnatus* (Kanlla), *Festuca ortophilla* (Iru ichu), *Stipa Ichu* (Ichu), que son los más comunes (Belizario, 2000).

### 3.2 Población

La información proviene de los registros de producción de leche del CE Chuquibambilla donde la práctica habitual es el doble ordeño (mañana y tarde). Los registros contienen la identificación de la vaca, la producción de leche correspondiente al primer y segundo ordeño, la producción total del día y una referencia del tercio de lactancia al cual corresponden. Considerando que una curva típica de producción de leche tiene una duración aproximada de 305 días (Cañas et al., 2012; Duque et al., 2018; Kong et al., 2018), se han considerado únicamente lactaciones completas de 305 días por vaca para el análisis.

La información corresponde a la población 75 vacas en ordeño correspondiente al periodo comprendido entre el 1 de enero de 2019 hasta el 21 de diciembre de 2020, a partir del cual se generó una base de datos con las siguientes características:

Número total de registros diarios digitalizados	: 49 755
Número de casos con información completa, restringidos a 305 días	: 38
Número de casos correspondiente a vacas de primer parto	: 9
Número de casos correspondiente a vacas de segundo parto	: 9
Número de casos correspondiente a vacas de tercer parto o más	: 20
Población total de vacas en ordeño	: 75

La información proveniente de vacas en tercer parto o posteriores se considera más confiable para estimar curvas de lactancia debido a que han pasado por múltiples ciclos de lactancia, que se traduce en mayor estabilidad en la producción de leche. Esto reduce la influencia de factores transitorios, como el estrés inicial o las condiciones de manejo, permitiendo una representación más precisa y consistente de la producción láctea a lo largo del tiempo, lo

que a su vez mejora la calidad y utilidad de las curvas de lactancia estimadas. En base a estas razones, se analizó la información de vacas de tercer parto o más en lugar de analizar la información de vacas de primer parto, tal como estuvo previsto inicialmente.

### 3.3 Método de investigación

En esta investigación se utilizó el método hipotético-deductivo que consiste en un procedimiento que parte de aseveraciones teóricas e investigaciones previas, a partir de los cuales se formulan hipótesis que son contrastados con la evidencia empírica y se deducen conclusiones (Bernal, 2016; Hernández et al., 2014). Esta investigación es fundamentalmente cuantitativa porque se fundamenta en la medición de las características lo que supone el análisis de relaciones entre las variables estudiadas de forma deductiva. Este método tiende a generalizar y normalizar resultados (Bernal, 2016). Además, se analiza la relación causa – efecto mediante modelos matemáticos que permiten la predicción o comportamiento futuro de una variable dependiente (Mendoza, 2014).

### 3.4 Descripción detallada de métodos por objetivos específicos

De acuerdo con los objetivos de esta investigación, las ecuaciones utilizadas para describir las curvas de lactancia se agrupan en dos: a) modelos no lineales y b) modelos lineales. Incluye modelos como el de Wood (Serna et al., 2007; Wood, 1967) que fue ampliamente utilizado y seleccionado como la ecuación más simple porque genera un ajuste aceptable pero tiende a sobreestimar los datos durante la lactancia temprana y tardía y a subestimar los datos durante la lactancia media (Grossman & Koops, 1988; Sherchand et al., 1995). Aunque las diferentes ecuaciones se ajustan adecuadamente a los datos de lactancia, también es importante evaluar la facilidad de estimación (Nasri et al., 2008) e interpretación.

#### 3.4.1 Modelos No Lineales

Denominados también modelos intrínsecamente no lineales, son aquellos que no pueden ser expresados en forma lineal respecto a sus parámetros, por lo tanto, no es posible aplicar el método de mínimos cuadrados ordinarios, en su lugar se utilizan otros métodos como mínimos cuadrados no lineales, entre otros (Gujarati & Porter, 2009). En este caso se estimaron los siguientes modelos no lineales:

- a. Modelo de Gamma incompleta

$$y_t = at^b e^{-ct} \qquad \text{Wood, (1967)}$$

b. Modelo Compartamental

$$y_t = ae^{-bt}[1 - e^{-c(t-d)}] \quad \text{McMillan, (1981)}$$

c. Modelo de Papajcsik y Bordero

$$y_t = ate^{-bt} \quad \text{Papajcsik & Bodero, (1988)}$$

d. Modelo de Brody

$$y_t = ae^{-bt} - ae^{-ct} \quad \text{Brody et al., (1924)}$$

e. Modelo parabólico exponencial

$$y_t = ae^{bt-ct^2} \quad \text{Sikka, (1950)}$$

Para todos los modelos,  $y_t$  representa el rendimiento de leche en el día  $t$  (kg/día) en un periodo de producción convencional de 305 días, mientras que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son los parámetros del modelo.

### 3.4.2 Modelos lineales

Se refieren principalmente a funciones que son lineales en los parámetros, aunque no lo sean necesariamente respecto a las variables dependientes. Se pueden representar como  $(y|x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$ . Se encuentran dentro de este grupo las funciones que, aun no siendo lineales, puedan ser linealizables en los parámetros mediante alguna transformación matemática (Gujarati & Porter, 2009). En este grupo de ecuaciones se encontraron los siguientes modelos:

a. Modelo cuadrático

$$y_t = a + bt - ct^2 \quad \text{Dave, (1971)}$$

b. Modelo cuadrático logarítmico

$$y_t = a + bt - ct^2 + d \ln t \quad \text{Singh & Gopal, (1982)}$$

c. Modelo lineal hiperbólico

$$y_t = a + bt - ct^{-1} \quad \text{Fraga et al., (2003)}$$

- d. Modelo polinomial inverso

$$y_t = \frac{t}{a+bt-ct^2} \quad \text{Nelder, (1966)}$$

- e. Modelo de Alí y Shaefer

$$y_t = a + b \left(\frac{t}{305}\right)^2 + c \ln \frac{305}{t} + d \left(\ln \frac{305}{t}\right)^2 \quad \text{Ali \& Schaeffer, (1987)}$$

donde  $y_t$  es el rendimiento de leche en el día  $t$  (kg/día) en un periodo de producción convencional de 305 días, mientras que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son los parámetros del modelo; exceptuando el intercepto, el resto de parámetros representan la pendiente o cambio de la variable dependiente ante un cambio de la variable dependiente.

La diferencia entre los modelos expuestos es que los no lineales se caracterizan por ser más flexibles y precisos para describir la curva de lactancia en vacunos, pero también son más complejos y requieren técnicas de optimización más avanzadas para calcular los parámetros del modelo. En cambio, los modelos lineales asumen que la curva de lactancia sigue una forma lineal o polinómica, cuyos parámetros se estiman mediante una técnica estadística más sencilla.

Según el software utilizado, la estimación de los modelos no lineales mediante procedimientos iterativos, requiere de valores iniciales que se someten a iteraciones sucesivas. Los valores iniciales se ajustan en cada iteración y la suma de los cuadrados de los residuos se reduce significativamente; el proceso continúa hasta que se cumple un criterio de convergencia, aceptando que a partir de este punto ya no es posible una mejora significativa en el ajuste de los datos (López & Kebreab, 2008).

Una dificultad de este procedimiento es conocer y especificar los valores iniciales de los parámetros según las características de cada modelo. Cuando las estimaciones previas no son correctas, es posible que el proceso no converja al mínimo de la suma de cuadrados de error. Además, no siempre es posible saber si el proceso converge hacia la mejor estimación del mínimo de la suma de cuadrados de error (Vohnout, 2003).

Por lo tanto, los valores iniciales deben estar razonablemente próximos a las estimaciones de los parámetros que aún se desconocen si el procedimiento de optimización no puede converger. La consecuencia de una mala elección de los

parámetros iniciales es la obtención de valores bajos del coeficiente de determinación, errores estándar elevados (Fadel, 2004), por lo tanto, una mala calidad del ajuste del modelo a los datos.

### 3.4.3 Descripción de métodos para el objetivo específico 1

#### 3.4.3.1 Método de mínimos cuadrados no lineales

Las ecuaciones normales para la regresión no lineal tienen incógnitas en ambos miembros de la ecuación, por tanto, no se pueden obtener soluciones explícitas de los parámetros, de modo que la suma de error de cuadrados se minimiza mediante un proceso iterativo. Estos procesos de estimación, denominados métodos iterativos se conocen como Gauss-Newton y Newton- Raphson (Gujarati & Porter, 2009).

Este método es una generalización del procedimiento del método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO). Se asume que no se exige la linealidad del modelo, aunque el procedimiento es el mismo, es más complicado que en los modelos lineales.

Considerando la siguiente expresión no lineal:  $y_t = f(x_t, \beta) + \varepsilon_i$

Donde  $f$  es una función cuya primera derivada es no lineal en  $\beta$ , el método de MC no lineales minimiza la sumatoria de los residuales al cuadrado:

$$\text{Min}_{\beta} SR(\beta) = \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^T [y_t - f(x_t; \beta)]^2$$

Al derivar la ecuación anterior se obtienen las condiciones de primer y segundo orden como parte del proceso de optimización, de modo que la condición de primer orden viene a ser:

$$\frac{\partial SR(\beta)}{\partial \beta} = -2 \sum_{t=1}^T [y_t - f(x_t; \beta)] \frac{\partial f(x_t; \beta)}{\partial \beta} = 0$$

Mientras que la condición de segundo orden está dada por:

$$\frac{\partial^2 SR(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'} = 2 \left[ \sum_{t=1}^T \frac{\partial f(x_t; \beta)}{\partial \beta} \frac{\partial f(x_t; \beta)}{\partial \beta'} - \sum_{t=1}^T (y_t - f(x_t; \beta)) \frac{\partial^2 f(x_t; \beta)}{\partial \beta \partial \beta'} \right]$$

Estas ecuaciones no poseen una solución analítica directa por lo que es necesario un método iterativo para obtener los valores de los parámetros  $\beta_i$ . Algunos de tales métodos son Gauss-Newton y Newton- Raphson (Parra Rodríguez, 2008).

### 3.4.3.2 Método de Mínimos cuadrados ordinarios

Este método se utiliza para estimar modelos que tienen la característica de ser lineales en los parámetros. En general, se representa como:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + u_i$$

Donde:

$y_i$  : es la variable dependiente.

$x_{1i} \dots x_{ki}$ : son las variables independientes.

$\beta_i$ : son los parámetros del modelo.

$u_i$ : es el término residual.

Matricialmente se resume como:

$$y = X\hat{\beta} + \hat{u}$$

Donde el valor de los parámetros se calcula matricialmente de la siguiente forma:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'y)$$

donde:

$(X'X)^{-1}$  : es la matriz inversa de variables independientes.

$X'X$  : es una matriz formada por las variables independientes cuya dimensión es de (matriz  $n \times k$ ).

$X'y$  : es un vector columna cuya dimensión es (vector  $n \times 1$ ).

### 3.4.3.3 Validación estadística del modelo y los parámetros

De acuerdo al método de mínimos cuadrados ordinarios, la validez estadística del modelo en conjunto se efectúa mediante la prueba F (Tabla 1) que se representa como:

$$F = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 / (k-1)}{\sum \hat{u}_i^2 / (n-k)}$$

donde  $k$  es el número de parámetros,  $n$  es el número de observaciones,  $\hat{Y}_i$  es el valor estimado de la variable  $Y_i$ ,  $\bar{Y}$  es la media de  $Y_i$ ,  $\sum \hat{u}_i^2$  es la suma de residuales al cuadrado y,  $F$  sigue una distribución con  $k-1$  y  $n-k$  grados de libertad, que resulta del análisis de varianza (ANVA), donde la hipótesis nula es:  $H_0: \beta_0 = \beta_1 = \dots \beta_k = 0$  y la hipótesis alterna:  $H_a: \beta_j \neq 0$ .

Tabla 1

*Análisis de Varianza*

Fuente de variación	G. de L.	Suma de cuadrados	Cuadrado Medio	Fc
Debido al modelo	k-1	$\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	SCM / k-1	$\frac{CMM}{CMR}$
Debido al residual	n-k	$\sum \hat{u}_i^2$	SCR / n-k	
Total	n-1	$\sum Y_i^2$		

Fuente: Elaborado en base a Gujarati y Porter (2009).

La prueba individual de los parámetros se efectúa mediante la prueba  $t$ -student

de la siguiente forma:  $t_{\hat{\beta}_j} \equiv \frac{\hat{\beta}_j}{ee(\hat{\beta}_j)}$

donde  $\hat{\beta}_j$  es el parámetro estimado, y  $ee(\hat{\beta}_j)$  es el error estándar del parámetro estimado.

### 3.4.3.4 Criterios de selección de modelos

La bondad de ajuste de un modelo de regresión mide el porcentaje de variación total de  $Y$  explicado por las variables independientes a través del coeficiente de

determinación ( $R^2$ ) y se calcula como:  $R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum y_i^2}$  (Gujarat &

Porter, 2009).

Luego de estimar los modelos no lineales y lineales, se usaron el criterio de información de Akaike - AIC (1974) que evalúa la calidad relativa del modelo tomando en cuenta su complejidad, mientras que el criterio de información bayesiano – BIC (1978) es una medida de bondad de ajuste, ambos se usan para la selección del modelo óptimo bajo la condición de que sean los valores menores. Se complementan con el error medio cuadrático (MSE) que representa la media de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y los valores predichos por el modelo, se usa también como una medida de la calidad de ajuste del modelo a un conjunto de datos; en este caso, se calculó la raíz cuadrada del error medio cuadrático (root MSE).

### 3.4.4 Descripción del método para el objetivo específico 2

#### 3.4.4.1 Método de optimización

El pico de lactancia se obtiene mediante el método de optimización consistente en dos pasos: a) condición de primer orden, donde se obtiene el valor crítico que optimiza la función, este valor se encuentra igualando a cero la primera derivada de la función ( $f'(x) = 0$ ), en este caso se obtiene el pico de lactancia expresado como el tiempo en días; b) condición de segundo orden, que permite verificar que la función optimiza en el valor crítico. Si la función maximiza, se debe cumplir que la segunda derivada de la función es negativa ( $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ). Finalmente, la producción de leche (kg/día) en el pico de lactancia se obtiene reemplazando el valor crítico en la función analizada. El valor de la segunda derivada, también indica si la función es cóncava ( $\frac{d^2Y}{dX^2} < 0$ ) o convexa ( $\frac{d^2Y}{dX^2} > 0$ ) (Chiang & Wainwright, 2006; Weber, 1999).

Siguiendo este procedimiento, se han establecido los valores algebraicos que representan el pico de lactancia expresado en días y la producción máxima (kg/día) en el pico de lactancia (tablas 2 y 3). En algunos casos como el modelo exponencial negativo, se encontró que la función no maximiza, por lo tanto, no existe un pico de lactancia ni producción máxima en el pico de lactancia. Ocurre lo mismo con el modelo de Alí y Shaeffer que por su complejidad matemática no es posible encontrar los valores algebraicos, pero gráficamente muestra un





pico de lactancia como la mayoría de los modelos que representan curvas de lactancia.

Tabla 2

*Modelos no Lineales de Curvas de Lactancia, Pico de Lactancia y Producción en el Pico de Lactancia*

	Función matemática	Pico de lactancia (días)	Producción máxima (kg)
Wood	$y = at^b e^{-ct}$	$t = \frac{b}{c}$	$y = a \left(\frac{b}{c}\right)^b e^{-b}$
Compartamental	$y = ae^{-bt} [1 - e^{-c(t-d)}]$	$t = \frac{cd + \ln(b+c) - \ln(b)}{c}$	$y = ae^{-b \left(\frac{cd + \ln(b+c) - \ln(b)}{c}\right)} [1 - e^{-[\ln(b+c) - \ln(b)]}]$
Parabólico exponencial	$y = ae^{bt-ct^2}$	$t = \frac{b}{2c}$	$y = ae^{\frac{b^2}{4c}}$
Papajcsik y Bordero	$y = ate^{-bt}$	$t = \frac{1}{b}$	$y = \frac{a}{b} e^{-1}$
Brody	$y = ae^{-bt} - ae^{-ct}$	$t = \frac{\ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}$	$y = a \left[ \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b+c}{b-c}} - 1 \right]$
Exponencial negativo	$y = ae^{-bt}$	n.a	n.a

Tabla 3

*Modelos Lineales de Curvas de Lactancia, Pico de Lactancia y Producción en el Pico de Lactancia*

	<b>Función matemática</b>	<b>Pico de lactancia (días)</b>	<b>Producción máxima (kg)</b>
Cuadrático	$Y_i = a + bt_i - ct_i^2 + \mu_i$	$t = \frac{b}{2c}$	$y = a + \frac{b^2}{4c}$
Cuadrático logarítmico	$Y_i = a + bt_i - ct_i^2 + d \ln t_i + \mu_i$	$t = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 8cd}}{4c}$	$y = a - \frac{b(b + \sqrt{b^2 - 8cd})}{4c} + d \ln \left( -\frac{b + \sqrt{b^2 - 8cd}}{4c} \right)$
Lineal hiperbólico	$Y_i = a + bt_i - ct_i^{-1} + u_i$	$t = \sqrt{\frac{c}{b}}$	$y = a + 2\sqrt{bc}$
Polinomial inverso	$Y_i = \frac{t_i}{a + bt_i - ct_i^2} + \mu_i$	$t = \sqrt{\frac{a}{c}}$	$y = \frac{\sqrt{a}}{2a\sqrt{c} + b\sqrt{a}}$
Alí y Shaefer	$Y_i = a + b \frac{t_i}{305} + c \left( \frac{t_i}{305} \right)^2 + d \ln \frac{305}{t_i} + \dots + e \left( \ln \frac{305}{t_i} \right)^2 + u_i$	-	-

### 3.4.5 Descripción del método para el objetivo específico 3

#### 3.4.5.1 Cálculo de persistencia

La persistencia es una medida de la tasa de cambio de la producción de leche desde el pico de lactancia, a menor persistencia, la producción total será menor. Tanto el pico de lactancia como la persistencia definen la curva de lactancia, por lo tanto, la producción total durante el periodo de lactancia. Cuando el pico de lactancia es normal, pero con baja persistencia, pueden limitar la producción. Asimismo, los picos bajos de lactancia pueden limitar la producción aun cuando la persistencia sea normal (DHI Info Sheet, 2017). Se calcula para intervalos de 30 días de la siguiente forma:

$$\text{Persistencia \%} = \frac{\text{Kg de leche en el último mes}}{\text{Kg de leche en el mes anterior}} \times 100$$

### 3.4.6 Descripción del método para el objetivo específico 4

#### 3.4.6.1 Producción de leche por campaña

La producción real por campaña se calcula como la media de producción por vaca, mientras que la producción estimada se calcula a partir del mejor modelo que representa una curva de lactancia, al comparar ambos, es posible establecer la magnitud de sobreestimación o subestimación respecto de la producción real.

La producción estimada se calculó como la suma de las predicciones diarias del modelo seleccionado. Sin embargo, también es posible calcular utilizando la integral definida del modelo seleccionado, de la siguiente forma:

$$\int_1^{305} [ae^{-bt}(1 - e^{-c(t-d)})] dt.$$

#### 3.4.7 Procesamiento de la información

Los datos fueron organizados en una hoja electrónica mediante una Macro sencilla elaborado para este fin. Después de un proceso de consistenciación y depuración fueron procesados mediante el software STATA versión 15 usando los comandos *regress* para estimar los modelos lineales mediante el método de mínimos cuadrados ordinario y *nl* para estimar los modelos no lineales.



Los resultados se presentan para curvas de lactancia típicas y atípicas. En el primer caso, se ajustan bien al modelo estándar de una curva de lactancia, presentan una producción máxima de leche, un tiempo pico de producción, una curva de descenso suave y una persistencia moderada. En el segundo caso, las curvas de lactancia se desvían significativamente del modelo estándar y pueden ser atribuidos a factores como la genética, la nutrición, la salud, el manejo o el estrés, y pueden tener una producción máxima de leche inferior o superior a la esperada, un tiempo pico de producción más temprano o tardío de lo esperado, una curva de descenso más pronunciada o menos pronunciada, o una persistencia más alta o más baja de lo esperado.

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados de esta investigación se presentan en tres secciones. La primera corresponde a vacunos de primer parto, la segunda a vacunos de tercer parto o más con curvas de lactancia típicas y la tercera a vacunos de tercer parto o más con curvas de lactancia atípicas.

#### 4.1 Curvas de lactancia para vacas de primer parto

En el grupo de vacas, se identificaron únicamente nueve casos con información completa. Los análisis iniciales revelan curvas de lactancia atípicas en estos casos. Paralelamente, investigaciones anteriores destacan que las vacas en su primera lactancia no han alcanzado aún su peso adulto, y están en las primeras etapas de desarrollo de sus características sexuales secundarias, como el tamaño y la capacidad de la ubre. Además, la dieta prioriza la generación de tejido corporal para el crecimiento hacia el peso adulto. Como resultado, la producción láctea se encuentra estrechamente ligada al desarrollo fisiológico de la glándula mamaria para la secreción de leche después del parto. Dado que las vacas aún no han alcanzado su madurez fisiológica en su primera lactancia, su glándula mamaria no ha completado su desarrollo, lo que inevitablemente limita la producción de leche en comparación con su potencial máximo (Olivera, 2001).

Además, cabe la posibilidad de que puedan tomar más tiempo en alcanzar su producción máxima de leche y experimentar una disminución más rápida en la producción después del pico de lactancia. Esto hace que las curvas de lactancia sean atípicas (Shanks et al., 1981).

Por otro lado, la curva de lactancia está influenciada por el cruce, edad, año y época de parto, factores que son responsables de “mudanzas” en el pico de producción, persistencia y pendiente, pero no alteran la función algebraica. Sin embargo, se han reportado casos

atípicos entre 14 y 40% de vacas en un hato (León-Velarde & Quiroz, 1994). En otros estudios se han reportado rangos de lactaciones atípicas como del 26% (Shimizu & Umrod, 1976) e inferiores de 10.6% (Duraes et al., 1991).

La Tabla 4 muestra los resultados del modelo de Wood y Compartamental para vacas de primer parto. Nótese que el parámetro *b* del primer modelo tiene un valor negativo haciendo que sus predicciones muestren una curva convexa sin pico de lactancia (Figura 2). Esto significa que el modelo calculado no tiene las características de una curva típica de lactancia.

En cambio, los parámetros estimados del modelo Compartamental tienen los signos esperados, sin embargo, sus predicciones muestran una curva con un pico de lactancia que se alcanza a los 6 días, hecho que se considera atípico en relación a las investigaciones previas (León-Velarde & Quiroz, 1994). Por estas razones, se ha priorizado el análisis correspondiente a vacas de tercer parto y posteriores.

Tabla 4

*Modelos no Lineales Estimados para Vacas Brown Swiss de Primer Parto del Centro Experimental Chuquibambilla*

Modelo	Parámetros (*)	Error estándar	R <sup>2</sup> (%)	AIC	BIC	Root MSE
Wood	16.8586	0.3375	97.14	12155.9	12173.6	2.2138
	-0.0179	0.0062				
	0.0013	0.00008				
$y_t = 16.86t^{-0.0179}e^{-0.00008}$						
Comportamental	15.97	0.0991	97.13	12163.3	12187.0	2.2164
	0.0015	0.000039				
	0.7826	1.0033				
	-2.3482	4.6574				
$y_t = 15.97e^{-0.0015t}[1 - e^{-0.7826(t+2.3482)}]$						

\* *a*, *b*, *c* y *d*, son los parámetros de cada modelo.

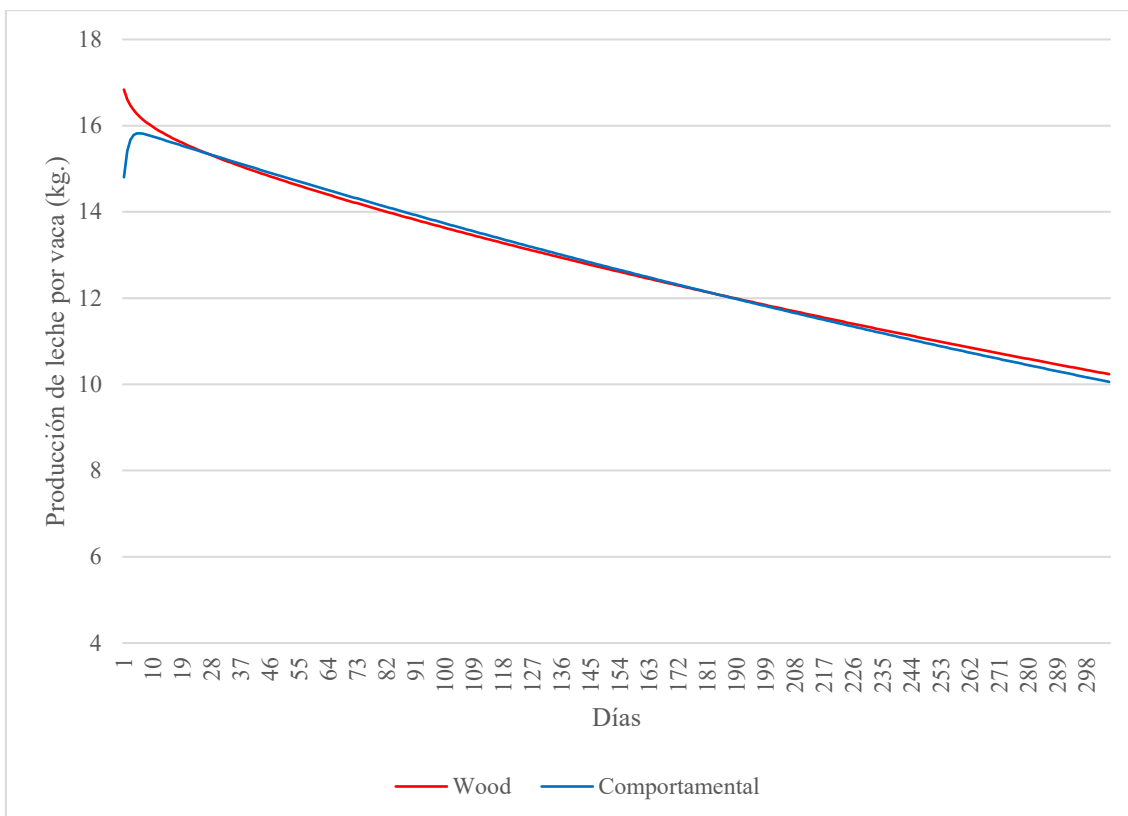


Figura 2. Curvas de lactancia estimados para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla para vacas de primer parto: Modelos No lineales

#### 4.2 Curvas de lactancia para vacas de tercer parto o más con curvas típicas

En esta sección se exponen los resultados de los casos típicos, aunque en este grupo se encontró información únicamente para dos vacas. Sin embargo, es fundamental comparar las características de todos los modelos, ya que esta es la principal contribución de esta investigación; además, las investigaciones previas se refieren a dichos casos.

En la Tabla 5 se presentan los resultados de la estimación de los modelos no lineales, donde resaltan cinco modelos con un coeficiente de determinación ( $R^2$ ) mayor al 98%, demostrando buena precisión de ajuste. El mejor modelo es el Compartamental ( $R^2 = 98.40\%$ ), sin embargo, le siguen con diferencias muy pequeñas los modelos de Wood, Brody, Parabólico Exponencial y Exponencial negativo. Por lo tanto, se evidencia que los modelos no lineales tienen mejor ajuste. Los indicadores de Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC), así como la raíz cuadrada del error medio cuadrático (root MSE) también lo confirman y en el mismo orden definido por el  $R^2$ .



Por lo tanto, el mejor modelo del grupo de modelos no lineales es el Compartamental, cuyos parámetros describen lo siguiente: a) el primer parámetro (20.8) representa el máximo potencial de producción de leche, b) el segundo parámetro (0.00347) representa la disminución en la fase de declinación, c) el tercer parámetro (0.07814) es la pendiente de la producción durante la fase de incremento y d) el cuarto parámetro (-16.7326) es el tiempo del proceso de lactogénesis antes del parto.

Eventualmente, también podría utilizarse el modelo de Wood ya que tiene un coeficiente de determinación alto ( $R^2=98.37$ ) muy cercano al modelo Compartamental. Además, el principio de parsimonia indica que entre dos o más modelos igualmente adecuados para explicar un fenómeno, se debe preferir aquel que sea más simple y tenga menos variables explicativas (Gujarat & Porter, 2009). Finalmente, se trata de uno de los modelos más utilizados para la estimación de curvas de lactancia.

En este caso, sus características son: a) el primer parámetro (15.6) representa la escala de producción del animal a través del periodo de lactancia; mientras mayor sea este valor, el animal tendrá un nivel productivo más alto, b) el segundo parámetro (0.0765) está relacionado con la fase de desarrollo; mientras más alto sea este valor, más rápido se alcanzará el pico de producción, y c) el tercer parámetro (0.00404) representa la pendiente de la curva en la fase de recuperación o última fase de lactancia.

Los modelos antes descritos son los que presentan las mejores aproximaciones entre la producción de leche observada con relación a la producción de leche estimada ( $Y$  y  $\hat{Y}$ ).

La Tabla 6, muestra los resultados de las estimaciones correspondientes a los modelos lineales o linealizables que fueron estimados mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios. En este grupo, el  $R^2$  más alto corresponde al modelo Polinomial inverso, pero los valores de información de AIC y BIC, así como el valor de Root MSE, no son los más bajos. Por lo tanto, el mejor modelo es el Cuadrático logarítmico ( $R^2 = 82.23\%$ ), seguido por el modelo de Alí y Shaeffer ( $R^2 = 80.68\%$ ), el resto de modelos tienen valores de  $R^2$  menores al 80%. Excepto para el modelo Polinomial inverso, los criterios de información AIC y BIC, así como el Root MSE, tienen valores concordantes con el coeficiente de determinación, en consecuencia, los resultados son consistentes.

Desde el punto de vista teórico, el modelo Cuadrático logarítmico tiene mayor número de parámetros que permite eliminar la simetría del modelo parabólico y tiene mejor ajuste



respecto a los modelos previamente desarrollados tales como el lineal, Cuadrático y Polinomial inverso (Singh & Gopal, 1982). Los resultados de esta investigación confirman tales afirmaciones.

Aun cuando el ajuste de estos modelos sea bastante bueno, el problema principal es que los parámetros estimados no tienen necesariamente una explicación biológica, por lo que son útiles básicamente para los fines de predicción.

Tabla 5

*Modelos no Lineales Estimados para Vacas Brown Swiss de Tres Partos a Más del Centro Experimental Chuquibambilla*

Modelo	Modelo estimado	Parámetros (*)	Error estándar	R <sup>2</sup> (%)	AIC	BIC	Root MSE
Wood	$y_t = 15.61t^{0.0765}e^{-0.00404t}$	15.6063 0.0765 0.00404	0.4960 0.01003 0.00013	98.37	2370.7	2383.9	1.69
Compartmental	$y_t = 20.8e^{-0.00347t}[1 - e^{-0.078(t+16.73)}]$	20.800 0.00347 0.07814 -16.7326	0.29467 0.00009 0.01915 5.21983	98.40	2362.5	2380.1	1.67
Parabólico exponencial	$y_t = 19.096e^{-0.00249t} - 0.0000024t^2$	19.0956 -0.00249 2.44e-06	0.24733 0.00024 8.62e-07	98.22	2424.2	2437.4	1.76
Papajcsik y Bordero	$y_t = 0.6655te^{-0.0132t}$	0.6655 0.0132 -19.833	0.01941 0.00023 0.18230	89.49	3504.9	3513.8	4.27
Brody	$y_t = -19.83e^{-0.9018t} + 19.83e^{-0.0032t}$	0.9018 0.0032	0.11043 0.000068	98.27	2403.9	2417.2	1.73
Exponencial negativo	$y_t = 19.58e^{-0.00313t}$	19.5784 0.00313	.1786515 0.000068	98.20	2430.3	2439.1	1.77

\* a, b, c y d, dependiendo de cada modelo.

Tabla 6

*Modelos Lineales Estimados Para Vacas Brown Swiss de Tres Partos a Más del Centro Experimental Chuquibambilla*

Modelo	Modelo estimado	Parámetros (*)	Error estándar	R <sup>2</sup> (%)	AIC	BIC	Root MSE
Cuadrático	$\hat{y}_i = 19.3854 - 0.0555t_i + 0.00005t_i^2$	19.3854 -0.05476 0.00005	0.2153 0.0032 0.00001	79.58	2424.3	2437.6	1.76
Cuadrático logarítmico	$\hat{y}_i = 13.92 - 0.1113t_i + 0.00017t_i^2 + 2.2287 \ln t_i$	13.9213 -0.11128 0.00017 2.2287	0.6095 0.0067 0.000015 0.2347	<b>82.23</b>	2341.7	2359.3	1.64
Lineal parabólico	$\hat{y}_i = 18.90 - 0.0406t_i - 4.9444t_i^{-1}$	18.9013 -0.04056 -4.94399	0.15891 0.00087 1.08358	79.47	2427.9	2441.1	1.76
Polinomial inverso	$\frac{\hat{t}}{y_t} = 0.00941 + 0.04212t_i + 0.00029t_i^2$	0.00941 0.04212 0.00029	0.31537 0.00476 0.000015	95.36	2890.1	2903.3	2.58
Ali y Schaeffer	$\hat{y}_i = 31.25 - 41.75 \left(\frac{t_i}{305}\right)^2 - 4.64 \ln \left(\frac{305}{t_i}\right) + 0.31 \left[ \ln \left(\frac{305}{t_i}\right) \right]^2$	31.2457 -41.7520 18.7359 -4.6411 0.3147	3.1748 5.6292 2.6735 1.6378 0.2114	82.29	2341.5	2363.5	1.64

Los resultados de esta investigación difieren de lo afirmado por Ossa (1997), quien menciona que, en vacas mestizas producto del cruce entre cebú, Holstein, Brown Swiss y normando el modelo que mejor se ajusta es el de Wood. Noronha (2010) afirma que para vacas cruce de Brown Swiss x Cebú de mediana y alta producción el modelo que mejor ajusta los datos es el modelo de Wood, y Aberrachid (2012) también refiere como el modelo que mejor ajusta los datos en vacas Gyrolando al modelo de Wood. Apaza et al. (2016) reportan que el modelo de Wood resultó el más adecuado para definir las curvas de lactancia en vacas mestizas del altiplano. Aparentemente, la capacidad predictiva del ajuste de los modelos a través de lactaciones es limitada; sin embargo, los parámetros obtenidos para el modelo de Wood están dentro del rango obtenido para vacas Holstein en diversas latitudes (Wood, 1970; Arango et al., 2000; Farhangfar et al., 2000; Tekerli et al., 2000; Ben Gara et al., 2002).

En la Figura 3 se muestran las predicciones de los modelos no lineales donde resalta la similitud entre los modelos Compartamental y Wood que describe curvas típicas de lactancia con forma cóncava. Por otro lado, los modelos Parabólico exponencial y Exponencial negativos, describen curvas de lactancia convexas sin pico de lactancia, además, el primero predice valores mayores hacia el final de la curva de lactancia. El modelo de Brody muestra una curva cóncava con valor inicial bastante bajo y un pico de lactancia que ocurre en un periodo de tiempo muy corto. Finalmente, el modelo Papajcsik y Bordero muestra una curva cóncava con valores iniciales muy bajos, un pico de lactancia que ocurre tardíamente y una persistencia muy baja que lo diferencia sustancialmente del resto de modelos.

La Figura 4 muestra las predicciones de los modelos lineales. Resalta el modelo Cuadrático logarítmico que tiene forma cóncava y típica de una curva de lactancia, aunque tiende a sobre estimar los valores al final de la curva de lactancia. El modelo lineal hiperbólico predice valores iniciales bajos, alcanza el pico de lactancia rápidamente y tiende a subestimar los valores en la parte final de la lactancia. Un tercer modelo con forma típica es el de Alí y Shaeffer, pero la predicción de los valores iniciales son los más bajos y un pico de lactancia que está por encima de los modelos antes mencionados. El modelo Polinomial inverso, pese a tener forma cóncava, predice valores iniciales muy altos, con pico de lactancia que se alcanza rápidamente pero muy por encima del resto de los modelos lo que termina caracterizándolo con una baja persistencia. Finalmente, el modelo Cuadrático tiene forma convexa y sin pico de lactancia que lo caracteriza como una curva atípica.

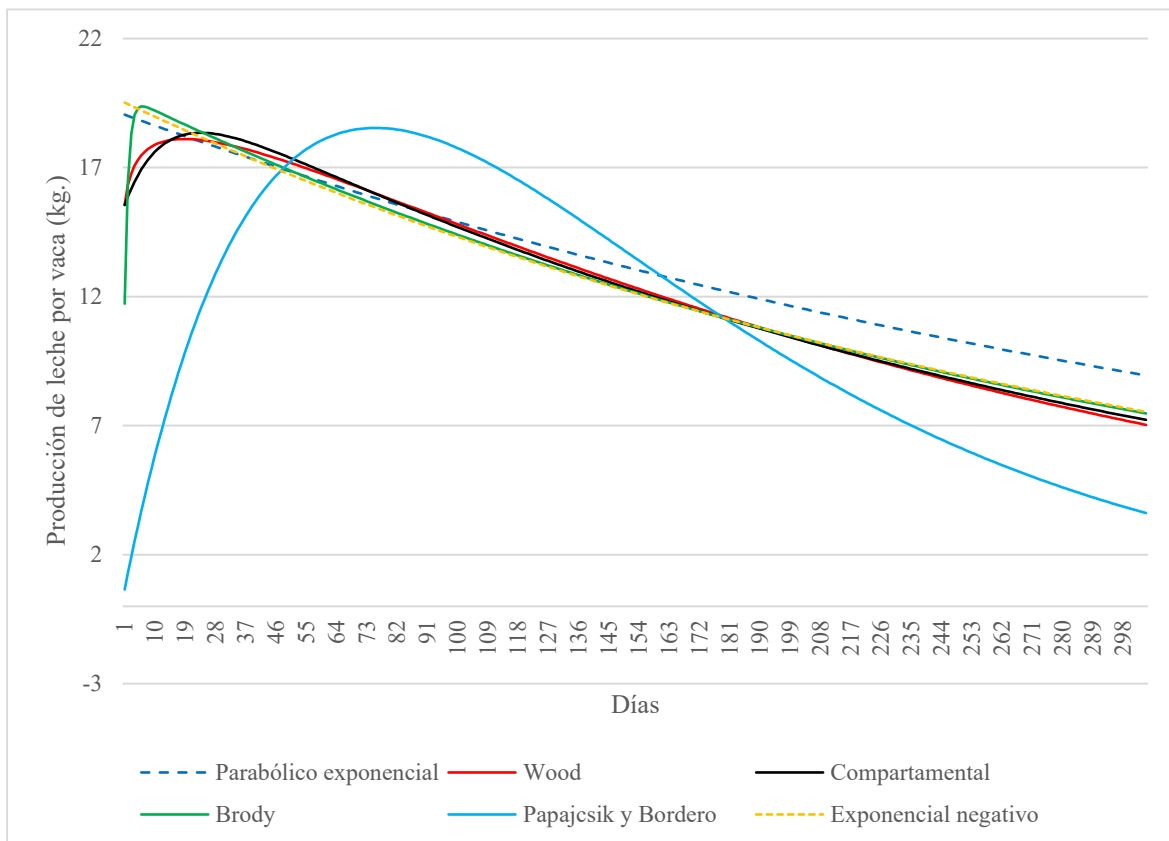


Figura 3. Curvas de Lactancia Estimados Para Vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla: Vacas de Tres Partos a Más - Modelos no Lineales.

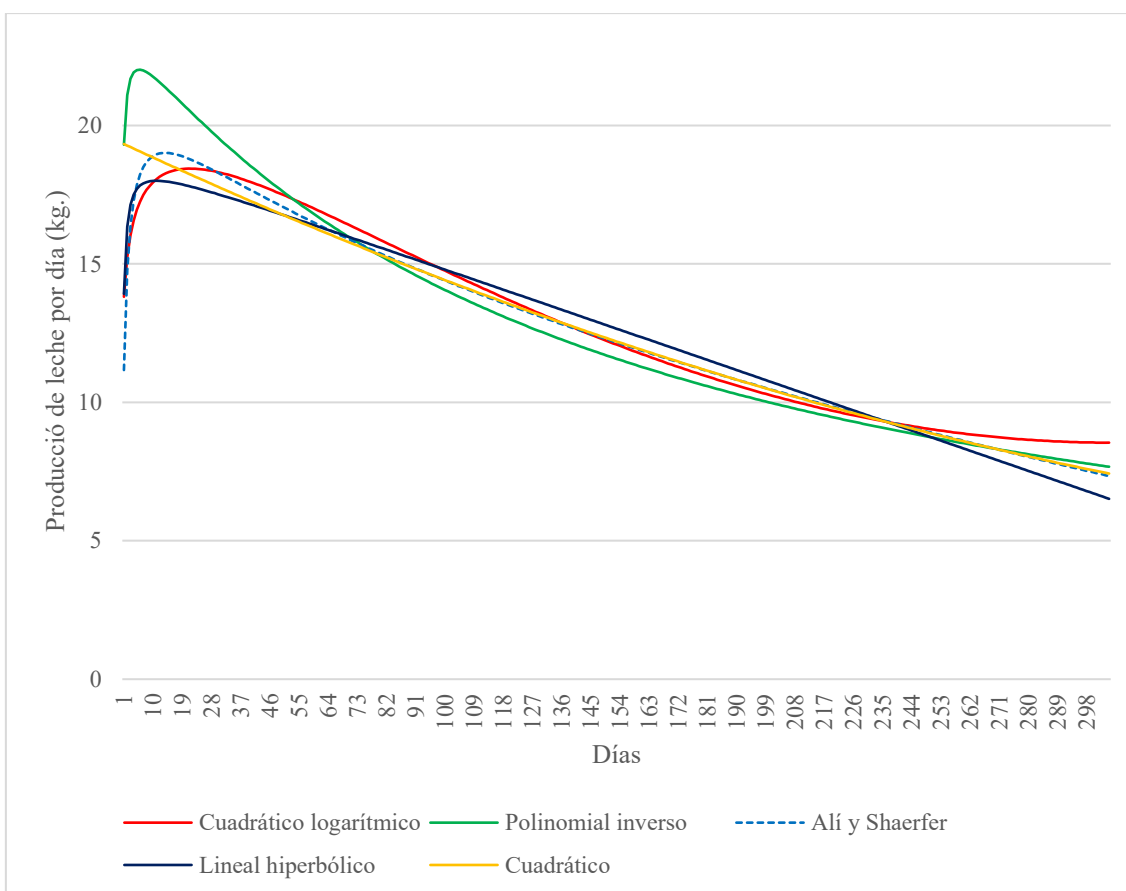


Figura 4. Curvas de lactancia estimados para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla: Vacas de tres partos a más - modelos lineales.

#### 4.2.1 Características de las curvas de lactancia

Respecto a las características de cada uno de los modelos, la Tabla 7 muestra el tiempo (en días) en el que se alcanza el pico de lactancia y su respectivo valor de producción (kg/día). Las diferencias entre los modelos están referidos principalmente al tiempo en el que alcanzan el pico de lactancia. Así, por ejemplo, el modelo Compartamental, alcanza el pico de lactancia a los 24 días con una producción máxima de leche de 18.3 kg/día, mientras que el modelo de Wood alcanza el pico de lactancia a los 19 días con una producción máxima de 18.1 kg/día. Estos valores confirman la similitud entre dichos modelos.

Por otro lado, el modelo de Papajcsik y Bordero describe un pico de lactancia tardíamente (76 días), aunque la producción máxima tiene un valor similar a los modelos anteriores. Contrariamente, el modelo de Brody alcanza el pico de lactancia a los 5 días, con una producción máxima ligeramente sesgada hacia arriba (19.7

kg/día). Estas características hacen que estos modelos no sean los apropiados para describir curvas de lactancia en vacunos Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla.

Finalmente, respecto de las predicciones de los modelos, en el análisis gráfico se resaltó que los modelos Exponencial negativo y Parabólico exponencial no tienen forma cóncava. En el primer caso, la función matemática que lo representa, no maximiza, tal como se observa en el capítulo de Materiales y métodos. En el segundo caso, el segundo parámetro es negativo ( $b = -0.00244$ ), por lo tanto, no maximiza en el primer cuadrante, consecuentemente, no tiene forma cóncava. Por lo tanto, no describen curvas de lactancia con características típicas.

Respecto a los modelos lineales (Tabla 8), el modelo Cuadrático logarítmico alcanza el pico de lactancia a los 21 días, con una producción máxima de leche de 18.4 kg/día; éste es el mejor modelo y sus predicciones son similares a los modelos Compartamental y Wood. Por otra parte, el modelo Lineal hiperbólico tiene las características típicas de una curva de lactancia, pero el pico de lactancia ocurre apenas a los 11 días con una producción máxima de 19.8 kg/día. Mientras que el modelo Polinomial inverso tiene forma cóncava, predice un pico de lactancia a los 6 días y sobre estima la producción máxima de leche (22 kg/día); estas características hacen que no sean las más adecuadas para la estimación de curvas de lactancia.

Respecto al modelo Cuadrático, teóricamente puede tener forma cóncava o convexa de acuerdo al signo de los parámetros estimados. Teóricamente, los signos del segundo y tercer parámetro deben ser positivo y negativo, respectivamente, para representar una curva de lactancia típica (Dave, 1971). En este caso, tales parámetros tienen signos contrarios, por ello, el valor que optimiza la función es de 548 días y dado que la segunda derivada es positiva ( $\frac{d^2y}{dt^2} > 0$ ), la función minimiza, tiene forma convexa y no describe una curva de lactancia típica. Finalmente, el modelo de Alí y Shaeffer, tiene las características de una curva de lactancia típica, pero la complejidad del modelo matemático que lo representa no permite definir algebraicamente un valor óptimo que maximice la función.



Tabla 7

*Pico de lactancia y producción en el pico de lactancia para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla: modelos no lineales.*

<b>Modelos</b>	<b>Tiempo en el pico de lactancia (días)</b>	<b>Producción máxima en el pico de lactancia (kg)</b>
Wood	19	18.1
Compartamental	24	18.3
Parabólico exponencial	No maximiza	-
Papajcsik y Bordero	76	18.5
Brody	5	19.7
Exponencial negativo	No maximiza	-

Tabla 8

*Pico de lactancia y producción en el pico de lactancia para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla: modelos lineales.*

<b>Modelos</b>	<b>Tiempo en el pico de lactancia (días)</b>	<b>Producción máxima en el pico de lactancia (kg)</b>
Cuadrático	No maximiza	-
Cuadrático logarítmico	21	18.4
Lineal hiperbólico	11	19.8
Polinomial inverso	6	22
Alí y Shaefer	No maximiza	-

#### 4.2.2 Persistencia después del pico de lactancia.

La Tabla 9 muestra la persistencia en la producción de leche para el modelo seleccionado (Compartamental). Se observa que después del pico de lactancia (día 24),

la producción del primer mes es de 535.8 kg, este es el valor con el que se compara la producción de los subsiguientes meses. Así, por ejemplo, la producción en el segundo mes disminuye en 9%; estos valores disminuyen paulatinamente hasta llegar al 59%. Por lo tanto, el promedio de las disminuciones mensuales es de 6.5%. Además, se observa que la disminución desde el pico de lactancia es paulatina, sin cambios bruscos y mostrando una producción sostenida.

Tabla 9

*Persistencia Lechera (%) para Vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla, Modelo Compartamental.*

Periodo (días)	Producción de leche (kg.)	Desde al pico de lactancia (%)	Caída mensual (Puntos porcentuales)
1 – 24	421.3		
25 – 54	535.8	100	
55 – 84	489.8	91	9
85 – 114	441.9	82	18
115 - 144	398.3	74	26
145 - 174	358.9	67	33
175 - 204	323.4	60	40
205 - 234	291.5	54	46
235 - 264	262.7	49	51
265 - 294	236.7	44	56
295 - 305	80.8	41*	59

\* Valor ajustado.

Los valores encontrados en esta investigación concuerdan con la teoría, ya que la persistencia es la capacidad de una vaca de mantener una producción constante después del pico de lactancia hasta el final del período de lactancia, por lo tanto, una persistencia alta indica una producción sostenida que es beneficioso para la vaca como para el productor. Además, implica un mejor equilibrio entre la demanda de energía para la producción de leche y la capacidad de la vaca para metabolizar nutrientes. Esto

reduce el estrés metabólico en la vaca y puede contribuir a una mejor salud general y una mayor longevidad. En consecuencia, un manejo adecuado, una alimentación balanceada y la selección genética son factores clave para promover la persistencia de la producción láctea.

#### **4.2.3 Producción de leche**

El análisis estadístico de la producción de leche para este grupo mostró un promedio de 12.6 kg/día, con una desviación estándar de 3.9 kg, un valor mínimo de 5.2 kg y un valor máximo de 23.2 kg; mientras que el promedio de la producción total por campaña fue de 3841 kg con una desviación estándar de 162 kg.

Los valores reportados son superiores a los hallados por Gallo et al. (1994) en vacas Holstein manejadas en el altiplano de Bolivia, alimentadas en praderas naturales (5.24 kg/vaca/día), en vacas criollas (3.70 Kg/día) y en vacas Holstein x criolla (4.88 kg/día), esto puede explicarse debido al sistema de manejo semi-intensivo que se practica en el Centro Experimental Chuquibambilla, donde predomina la disponibilidad de forraje fresco (50% de gramíneas, 35% de leguminosas y 15% de malezas) el suministro de balanceado en el ordeño, sales minerales y agua a voluntad.

#### **4.2.4 Predicción de la producción de leche por campaña**

La Tabla 10, muestra la predicción de la producción total de leche (kg) por campaña de 305 días, correspondiente a todos los modelos analizados en esta investigación. Dentro de los modelos no lineales, destaca el modelo Compartamental que predice una producción de 3841 kg, valor que coincide con el promedio de producción por campaña, es decir, tiene una alta precisión de ajuste a los datos de producción de leche. Además, los modelos de Wood y Brody se aproximan a la mejor predicción con 3837 y 3843 kg, respectivamente; esto es consistente con los criterios de selección de modelos utilizados ( $R^2$ , AIC, BIC y Root MSE). En general, los modelos no lineales pueden representar patrones de crecimiento y decrecimiento que no se ajustan bien a una línea recta, permiten capturar estas relaciones más complejas al permitir formas funcionales más flexibles, como curvas sigmoidales o exponenciales, que se ajustan mejor a la naturaleza de las curvas de lactancia (Wood, 1967).

En el caso de los modelos lineales, las mejores predicciones corresponden a los modelos Lineal hiperbólico y Polinomial inverso con 3841 kg que también coinciden

con la producción promedio, luego se encuentra el modelo Cuadrático logarítmico con 3886 kg, con una sobreestimación de 45 kg. Sin embargo, estos resultados no son consistentes con los criterios de selección de modelos ya que de acuerdo al  $R^2$ , el mejor modelo es el Cuadrático logarítmico. Como ya se aclaró anteriormente, los parámetros estimados carecen de sentido biológico y son menos flexibles porque asumen una relación lineal entre las variables predictoras y la variable dependiente. Significa que solo pueden capturar relaciones directamente proporcionales o inversamente proporcionales de manera lineal (Gujarati & Porter, 2009). Por lo tanto, se concluye que estos modelos deberían utilizarse solo en los casos donde la producción de leche de las vacas siga un patrón de crecimiento lineal constante a lo largo del tiempo, cuando la producción tiene baja variabilidad o en los análisis preliminares para identificar tendencias generales.

Tabla 10

*Predicción de los Modelos de la Producción Total de Leche por Campaña (kg.) para Vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla.*

Modelos no lineales	Kg.	Modelos lineales	Kg.
Wood	3837	Cuadrático	3842
Compartamental	3841	Cuadrático logarítmico	3886
Parabólico exponencial	4078	Lineal parabólico	3841
Papajcsik y Bordero	3474	Polinomial inverso	3876
Brody	3843	Ali y Shaefer	3841
Exponencial negativo	3841		

### 4.3 Curvas de lactancia para vacas de tercer parto o más con curvas atípicas

La información analizada en esta sección corresponde a 20 vacas cuya característica principal es un aumento rápido en la producción de leche seguido de una disminución. Es decir, no tienen un pico de lactancia o el tiempo en el que se alcanza la máxima producción de leche es muy corta, sin pico de lactancia claramente definido. Por lo tanto, se refiere a un patrón de producción de leche que difiere de la curva de lactancia típica observada en la raza Brown Swiss. En algunos casos, es posible que las curvas de lactancia atípicas sean parte del



perfil genético individual, pero también pueden ser causados por otros factores como la nutrición y el manejo del ganado.

La Tabla 11 muestra los resultados estimados de los modelos no lineales, donde se observa que los valores del  $R^2$  son mayores al 95%, excepto para el modelo Papajcsik y Bordero. De acuerdo con los criterios de selección de modelos utilizados en esta investigación, el mejor modelo es el Parabólico exponencial ( $R^2=95.85$ ).

Por otro lado, los resultados correspondientes a los modelos lineales se muestran en la Tabla 12, donde se observa que el modelo Polinomial inverso tiene el  $R^2$  más alto, pero los criterios de información de Akaike (AIC) y Bayesiano BIC son contradictorios. Es decir, el ajuste es bueno, pero demasiado complejo según los criterios de información. En consecuencia, el mejor modelo es el de Alí y Shaeffer.

Tabla 11

*Modelos no Lineales Estimados para Vacas Brown Swiss de Tres Partos a Más del Centro Experimental Chuquibambilla: Caso Atípicos.*

Modelo	Modelo estimado	Parámetros (*)	Error estándar	R <sup>2</sup> (%)	AIC	BIC	Root MSE
Wood	$y_t = 18.50t^{-0.0129}e^{-0.0026}$	18.5023 -0.0128 0.0026	0.2776 0.0048 0.00006	95.65	28910.8	28930.9	2.6362
Compartmental	$y_t = 17.96e^{-0.0028t} [1 - e^{-0.4137(t+3.7784)}]$	17.9581 0.0028 0.4137 -3.7784	0.0909 0.00003 0.1605 2.1598	95.67	28891.7	28918.5	2.6318
Parabólico exponencial	$y_t = 19.20e^{-0.0047t-0.0000071t^2}$	19.19697 -0.0047 -7.08e-06	0.1183 0.00011 4.00e-07	95.85	28624.5	28644.6	2.5746
Papajesik y Bordero	$y_t = 0.5685te^{-0.0124t}$	0.5685 0.0124	0.00673 0.00009	84.25	36700.9	36714.4	5.0179
Brody	$y_t = -17.88e^{-1.8562t} + 17.88e^{-0.0028t}$	-17.88 17.81 1.8562	0.0839 0.08253 0.2034	95.66	28899.1	28919.3	2.6337
Exponencial negativo	$y_t = 17.81e^{-0.0028t}$	17.81 0.0028	0.00003 0.00003	95.65	28916.1	28929.5	2.6376

\* a, b, c y d, dependiendo de cada modelo.

Tabla 12

Modelos Lineales Estimados para Vacas Brown Swiss de Tres Partos a Más del Centro Experimental Chuquibambilla: Caso Atípicos.

Modelo	Modelo estimado	Parámetros (*)	Error estándar	R <sup>2</sup> (%)	AIC	BIC	Root MSE
Cuadrático	$\hat{y}_i = 19.0066 - 0.074t_i + 0.00014t_i^2$	19.00658 -0.074476 0.00014	0.0988 0.0015 4.77e-06	56.85	28502.0	28522.1	2.55
Cuadrático logarítmico	$\hat{y}_i = 15.17 - 0.1144t_i + 0.00022t_i^2 + 1.57 \ln t_i$	15.1741 -0.1144 0.00022 1.5662	0.2946 0.0033 7.54e-06 0.1136	58.16	28316.8	28343.6	2.51
Lineal hiperbólico	$\hat{y}_i = 16.79 - 0.0314t_i + 0.4905t_i^{-1}$	16.7922 -0.0314 0.4905	0.07788 0.00042 0.52928	50.62	29318.0	29338.2	2.73
Polinomial inverso	$\frac{\hat{t}}{y_t} = 0.06805t_i + 0.00019t_i^2$	0.06805 0.00019	0.00256 0.00001	83.54	43429.8	43443.2	8.75
Alí y Schaeffer	$\hat{y}_i = 26.43 - 38.82 \left(\frac{t_i}{305}\right) + 22.39 \left(\frac{t_i}{305}\right)^2 - 2.77 \ln \left(\frac{305}{t_i}\right) + 0.16 \left[\ln \left(\frac{305}{t_i}\right)\right]^2$	26.4271 -38.8158 22.3854 -2.77411 0.1574	1.5429 2.7420 1.3090 0.7951 0.1026	58.18	28316.5	28350.0	2.51

\* a, b, c y d, dependiendo de cada modelo.

La Figura 5, muestra las predicciones de los modelos no lineales donde se observa que el mejor modelo (Parabólico exponencial) tiene forma convexa y sin pico de lactancia. Según Quintero et al. (2007), este modelo se ajusta bien para la producción inicial pero no ocurre lo mismo después del pico de producción debido a que la función es simétrica alrededor del punto máximo de producción, pero en este caso, se ajusta adecuadamente a los datos representando una curva de lactancia atípica. El segundo mejor modelo es el Compartamental (Tabla 11), representa una curva cóncava con un pico de lactancia que se alcanza en un tiempo corto y sus parámetros tienen sentido biológico mejor definidos.

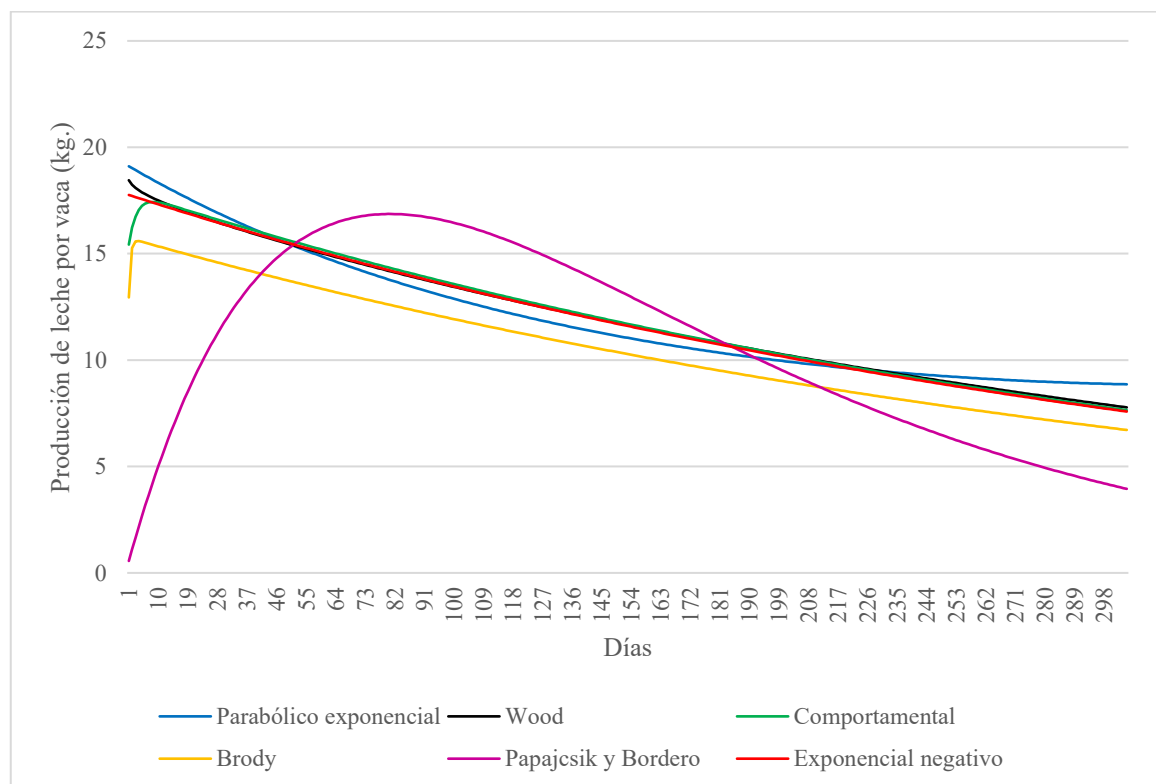


Figura 5. Curvas de Lactancia Estimados Para Vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla: Vacas de Tres Partos a Más - Modelos no Lineales.

Respecto a los modelos lineales (Figura 6), se observa que todos los modelos muestran curvas de lactancia atípicas. El modelo de Alí y Shaeffer tiene el mejor ajuste según el  $R^2$ , sin embargo, predice un incremento en la producción de leche en la parte final de la lactancia. El siguiente mejor modelo es el Cuadrático logarítmico que muestra una predicción muy similar al modelo anterior. En consecuencia, se evidencia que los modelos lineales tienen menor capacidad de ajuste respecto a los modelos no lineales.



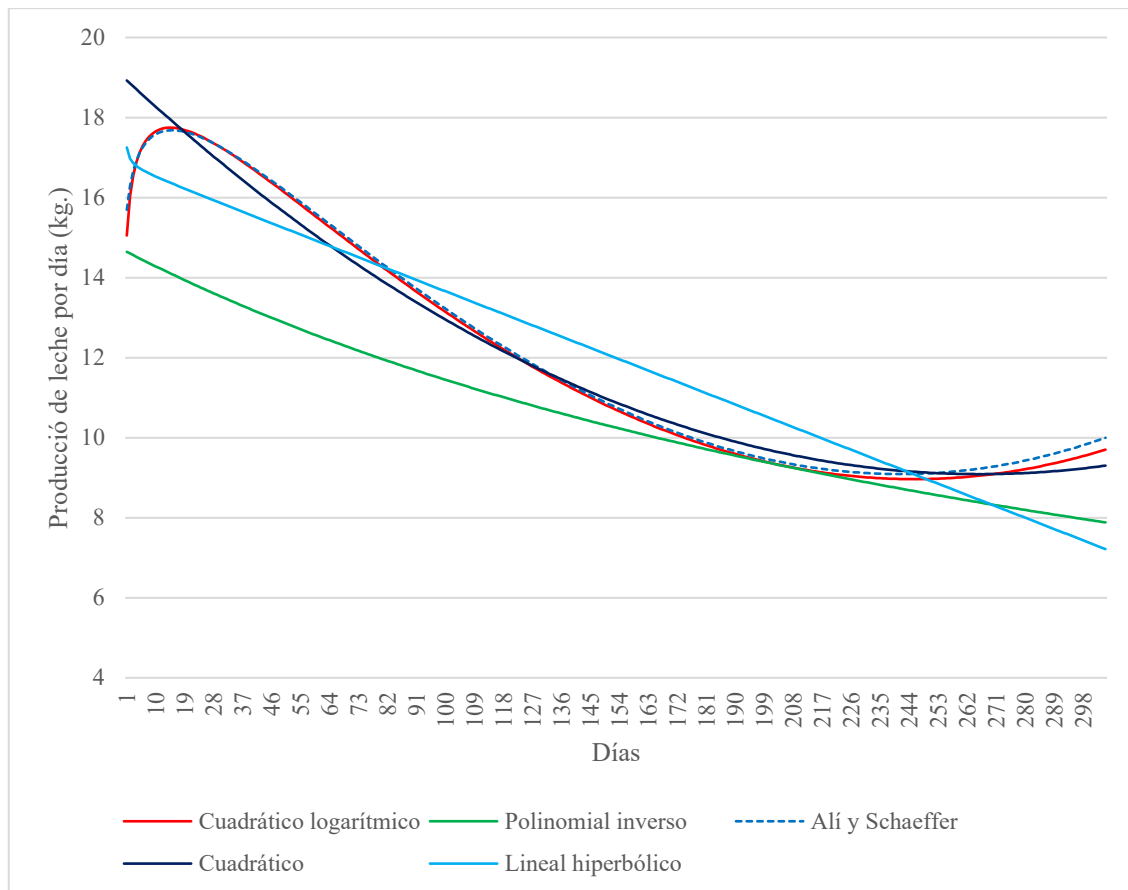


Figura 6. Curvas de lactancia estimados para vacas Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla: Vacas de tres partos a más - Modelos lineales.

#### 4.3.1 Características de las curvas de lactancia

Respecto a las características de los modelos no lineales (Tabla 11), se observa que el mejor modelo (Parabólico exponencial) representa una curva de lactancia atípica sin pico de lactancia. El segundo mejor modelo es el Compartamental ( $R^2=95.67$ ) que alcanza el pico de lactancia a los 8 días con una producción máxima de 17.4 kg/día, luego sigue el modelo de Brody ( $R^2=95.66$ ) que alcanza un pico de lactancia muy rápido (4 días) con una producción máxima de 17.9 kg/día, pero como se observa en el gráfico de las predicciones (Figura 5), subestima la producción de leche. Es decir, las diferencias principales con los casos típicos son: a) el mejor modelo es atípico porque tiene forma convexa y sin pico de lactancia, b) los modelos que le siguen en capacidad de ajuste, alcanzan el pico de lactancia muy rápido (antes de los 9 días). Por lo tanto, el aspecto más relevante de análisis es básicamente la persistencia de producción de leche.

Tabla 13

*Tiempo y Producción Máxima en el Pico de Lactancia de los Modelos no Lineales.*

<b>Modelos</b>	<b>Tiempo en el pico de lactancia (días)</b>	<b>Producción máxima en el pico de lactancia (kg)</b>
Wood	No maximiza (*)	-
Compartamental	8	17.4
Parabólico exponencial	No maximiza	-
Papajcsik y Bordero	81	16.9
Brody	4	17.9
Exponencial negativo	No maximiza	-

\* Se debe al signo negativo de uno de los parámetros.

Respecto a los modelos lineales (Tabla 12), destaca el hecho de que el modelo Alí y Shaeffer (con el  $R^2$  más alto), tiene una forma funcional compleja que no permite definir algebraicamente el pico de lactancia y su respectiva producción máxima, pero en este caso, es importante resaltar que se trata de una curva de lactancia atípica debido a que predice un incremento en la producción de leche en el último tercio de lactancia. El siguiente mejor modelo es el Cuadrático logarítmico que alcanza el pico de lactancia a los 15 días con una producción máxima de 17.8 kg/día, sin embargo, también tiene forma atípica ya que predice una producción de leche creciente en el último tercio de lactancia (Tabla 14). En consecuencia, ninguno de los modelos tiene un buen ajuste.

Tabla 14

*Tiempo y Producción Máxima en el Pico de Lactancia de los Modelos Lineales.*

Modelos	Tiempo en el pico de lactancia (días)	Producción máxima en el pico de lactancia (kg)
Cuadrático	No maximiza (*)	-
Cuadrático logarítmico	15	17.8
Lineal hiperbólico	No maximiza	-
Polinomial inverso	No maximiza	-
Alí y Shaefer	No aplica	-

\* Se debe al signo negativo de uno de los parámetros.

#### 4.3.2 Persistencia después del pico de lactancia

La Tabla 15 muestra la persistencia en la producción de leche para el modelo Parabólico exponencial. Considerando que se trata de una curva atípica sin pico de lactancia, la producción máxima ocurre en el primer mes con 535.9 kg, luego la producción declina a una tasa de 13% en el segundo mes y posteriormente disminuye sin cambios bruscos. Sin embargo, la producción cae abruptamente en 25% durante el último mes llegando a 126.1 kg. En consecuencia, la producción de leche disminuye desde el segundo mes a una tasa promedio de 8.4%.

Tabla 15

*Persistencia de la Producción de Leche (kg) en Base al Modelo Parabólico Exponencial.*

Periodo (días)	Producción de leche (kg.)	Desde al pico de lactancia (%)	Caída mensual (Puntos porcentuales)
1 - 30	535.9	100	
31 - 60	465.4	87	13
61 - 90	404.2	75	25
91 - 120	351.1	66	34
121- 150	304.9	57	43
151 - 180	264.8	49	51
181 - 210	230.0	43	57
211 - 240	199.7	37	63
241 - 270	173.5	32	68
271 - 305	126.1*	24	76

\* Valor ajustado.

#### 4.3.3 Producción de leche

La Tabla 16 muestra la producción promedio de leche (kg) por campaña de 305 días. De acuerdo con la desviación estándar se puede afirmar que la producción tiene poca variabilidad durante el periodo de lactancia, el rango de producción oscila entre 2631 y 4522 kg, mientras que el coeficiente de variabilidad es de 14.6%.

Tabla 16

*Producción Promedio de Leche (kg) en Vacas de Tercer Ordeño y Posteriores.*

Variable	Observaciones	Promedio	Desv. Est.	Min	Max
Producción total (kg.)	20	3640.8	530.9	2631	4522

#### 4.3.4 Predicción de la producción de leche por campaña

La predicción de la producción total de leche (kg) por campaña de 305 días, mediante los modelos analizados en esta investigación se muestran en la Tabla 17. Se observa que el modelo Parabólico exponencial predice una producción total de 3656 kg, con una sobreestimación de 15.2 kg, respecto del promedio observado. De acuerdo a los criterios de selección de modelos utilizados en esta investigación, el siguiente mejor modelo es el Compartamental pero éste predice una producción total sobreestimando en 30.2 kg.

Respecto a los modelos lineales, Alí y Shaeffer sobrestima en 20.2 kg, mientras que el siguiente mejor modelo (Cuadrático logarítmico) subestima en 0.8 kg. Sin embargo, es importante resaltar que un criterio adicional en la selección de modelos es el significado biológico de los parámetros.

Tabla 17

*Producción de Leche Estimado por los Modelos no Lineales y Lineales.*

Modelos no lineales	Producción por campaña (kg)	Modelos lineales	Producción por campaña (kg)
Wood	3670	Cuadrático	3649
Comportamental	3671	Cuadrático logarítmico	3640
Parabólico exponencial	3656	Lineal hiperbólico	3659
Papajcsik y Bordero	3297	Polinomial inverso	3226
Brody	3229	Ali y Schaeffer	3661
Exponencial negativo	3648		

#### 4.4 Discusión

Algunos autores, como Duque et al. (2018), Cañas et al. (2012) y Macciotta et al. (2011), han realizado investigaciones para evaluar y comparar diferentes modelos matemáticos, tanto lineales como no lineales, utilizados para ajustar curvas de lactancia en ganado lechero. Estos estudios han demostrado la importancia de elegir un modelo que se ajuste

de manera adecuada a los datos observados y que tenga relevancia biológica. Así, Duque et al. (2018) evaluaron seis modelos no lineales para ajustar curvas de lactancia en un rebaño Holstein colombiano y concluyeron que el modelo bifásico de Grossman y Koops fue el de mejor ajuste.

En otros casos evaluaron el modelo de Wood y concluyeron que es el más adecuado para ajustar las curvas de lactancia en diferentes tipos de vacas. Ossa (1997) lo menciona para vacas mestizas de cruce entre cebú, Holstein, Brown Swiss y normando. Da Cunha et al. (2010) lo respaldan para vacas cruce de Brown Swiss x Cebú de mediana y alta producción. Aberrachid (2012) también lo confirma en vacas Gyrolando, y Apaza et al. (2016) indican que este modelo se ajusta mejor a las curvas de lactancia en vacas mestizas del altiplano.

Aparentemente, la capacidad predictiva de los modelos de lactancia tiene ciertas limitaciones. No obstante, es interesante observar que los parámetros obtenidos para el modelo de Wood caen dentro del rango observado en vacas Holstein en diferentes latitudes (Arango et al., 2000; Farhangfar et al., 2000; Tekerli et al., 2000).

Por otro lado, Faro y Albuquerque (2003), estudiando curvas de lactancia en hembras bovinas de la raza Caracú, encontraron un mejor ajuste para la producción de leche mediante el modelo polinomial inverso. Además, concluyen que tanto la producción inicial como el pico de producción desempeñan un papel crucial en la determinación de la curva de lactancia. Estos hallazgos no solo tienen implicaciones biológicas, sino que también poseen aplicaciones prácticas relevantes en la gestión de la producción lechera.

En cuanto a la evaluación de ajuste, los autores han utilizado diversos criterios para evaluar la calidad del ajuste de los modelos a los datos observados. Estos incluyen el coeficiente de determinación ( $R^2$ ), los errores estándar, el criterio de información de Akaike, el criterio de información bayesiano y el error medio cuadrático. La comparación entre los modelos permite identificar cuál de ellos se ajusta mejor a los datos. Así, Rodríguez et al. (2005) compararon modelos como el de exponentes negativos, gamma incompleto y polinomio de quinto grado, utilizando el coeficiente de determinación, concluyendo que el modelo de mejor ajuste fue el gamma incompleto en el caso de la cuenca de Lima.

En general, la forma de la curva de lactancia varía entre diferentes animales debido a factores genéticos y ambientales, también depende del modelo de ajuste utilizado. En un estudio en ganado Siboney de Cuba (Hernández & Ponce, 2008) encontraron una curva ligeramente aplanada sin un pico representativo. En contraste, una investigación en vacas de doble propósito en el trópico húmedo de Perú (Sheen & Riesco, 2002) mostraron una curva casi lineal, atribuida a condiciones ambientales desfavorables como altas temperaturas, humedad relativa y pastos tropicales de baja calidad nutricional. Además, se destacó la influencia del manejo del ganado en estos resultados.

En este contexto, autores como Cañas et al. (2012) y Val-Arreola et al. (2004) han resaltado la importancia de los parámetros de los modelos y su interpretación biológica ya que los parámetros pueden proporcionar información valiosa sobre características específicas de las curvas de lactancia. Así, Val-Arreola et al. (2004) evaluaron cinco funciones matemáticas para describir curvas de lactancia y encontraron que la ecuación de Gaines tenía un mejor ajuste y que los parámetros de esta ecuación tenían una interpretación fisiológica.

En otros casos, han utilizado los modelos de curvas de lactancia para estimar parámetros genéticos, como la heredabilidad, y evaluar características importantes para la selección genética en el ganado lechero (Cañas et al., 2012), mientras que Quintero et al. (2007) estimaron heredabilidades para características como la producción al pico y la producción total a los 305 días, lo que indicó la posibilidad de incluirlas en programas de selección.

Respecto al pico de lactancia, los resultados de esta investigación difieren de las investigaciones previas. Jeretina et al. (2013) reportan que las vacas Brown Swiss alcanzaron el pico de lactancia en 50, 46 y 47 días para el primer, segundo y tercer parto o más, respectivamente, con cantidades de 20, 24 y 25 kg de leche. Por otro lado, Irigoyen & Rippoll (2011) indican que las vacas alcanzan su pico de producción a los 60 días, mientras que Pardini (1996) lo situó entre la semana seis y ocho. Sin embargo, en el Centro Experimental Chuquibambilla, las vacas Brown Swiss de tercer parto o más, alcanzaron su pico alrededor de la semana 4, posiblemente debido a un déficit en la suplementación alimentaria después del parto y al pastoreo que no satisface sus necesidades de consumo de materia seca.

Otros autores como Cañas et al. (2012), Zamorano et al. (2018) y Kong et al. (2018) reportaron valores superiores en cuanto a los picos de producción de leche, registrando

24.07; 27.97 y 29.71 litros a los 46, 67 y 72 días, respectivamente. En comparación con sistemas intensivos, se observa que los picos de producción son mayores y se alcanzan en un período más prolongado. Vásquez (2017) encontró que las vacas de primer parto alcanzaron un pico de producción de 31.13 kg a los 82 días. Estas discrepancias pueden atribuirse a diversas condiciones, como la genética, el manejo, la dieta y el entorno, como mencionado por Quispe et al. (2016).

En suma, el pico de lactancia en vacas Brown Swiss puede variar significativamente según diferentes factores, incluyendo la genética, el manejo, la dieta y el ambiente, lo que resalta la importancia de considerar múltiples variables al evaluar y gestionar la producción de leche en el ganado.

Respecto a la persistencia en la producción de leche, es esencial considerar algunos factores interrelacionados. Primero, los resultados de esta investigación ponen de manifiesto discrepancias respecto a la persistencia reportada por Vásquez (2017) en vacunos Holstein, quien utilizando el modelo de Wood indica que la producción máxima se alcanza al tercer mes de lactancia, mientras que, en el caso de las vacas de segundo y tercer parto, utilizando el modelo de Wilmink, la producción máxima se alcanza al segundo mes de lactancia. Esta discrepancia sugiere que la persistencia de la lactancia puede variar según la genética y el modelo utilizado para su evaluación.

Según Naveros Flores & Huanca Mamani (2014) la persistencia de la lactancia inicia aproximadamente a los 60 días, coincidiendo con la aparición del estro, y se manifiesta de manera más notoria hacia el final de la gestación, cuando las demandas nutricionales son más altas (Mellado, 2012). En este período, las vacas suelen ser secadas para permitir la regeneración del tejido secretor mamario. Además, la curva de lactancia se ve influenciada tanto por el número de partos como por el estrés calórico (Zamorano et al., 2018).

Una vez identificada la producción inicial y alcanzado el pico de producción, se presenta un balance energético negativo, una involución uterina durante el puerperio y un aumento en la producción debido a la influencia de la hormona del crecimiento y la disminución de la insulina. Sin embargo, después de este punto, comienza la fase de persistencia. En esta etapa, se acumula tejido corporal y grasa, mientras que la hormona somatotropina (STH) disminuye, lo que conduce gradualmente a una reducción en la producción de leche (Gasqué & Posadas, 2001).



En relación a la producción diaria de leche, los resultados obtenidos en el Centro Experimental Chuquibambilla superan los valores reportados por Gallo et al. (1994) en vacas Holstein en el altiplano de Bolivia. Esto se atribuye al sistema semi-intensivo de manejo, que incluye la disponibilidad de forraje fresco, el suministro de balanceado durante el ordeño, sales minerales y acceso ilimitado al agua. Este enfoque de manejo promueve un mayor rendimiento lechero en las vacas.

Sin embargo, en cuanto a la producción acumulada en 305 días, los resultados de esta investigación son inferiores a investigaciones previas. Jeretina et al. (2013), Cañas et al. (2012), Zamorano et al. (2018) y Vásquez (2017) reportaron producciones significativamente más altas en este período. Los valores obtenidos también son menores que los indicados por Araúz et al. (2014) para vacas Brown Swiss. Esto sugiere que, a pesar de la mejora genética y el manejo adecuado en el Centro Experimental Chuquibambilla, existen factores que limitan la producción de leche en un ciclo de 305 días, posiblemente relacionados con la disponibilidad de materia seca en la pradera, especialmente durante la sequía.

Bueno (2018) en Cajamarca, muestra un promedio diario de producción de leche de 12.29 kg, indicando una mejora genética sostenida y una suplementación alimentaria que respalda esta alta producción. Estos hallazgos demuestran que la calidad genética y el manejo son factores críticos para aumentar la producción de leche en el Centro Experimental Chuquibambilla. Además, se destaca que los resultados actuales superan significativamente los informes de Barriga (1992),  $3\ 029.69 \pm 623.26$  kg de leche en promedio de producción en 305 días, lo que subraya la evolución positiva de la calidad genética y un adecuado manejo del hato.

## CONCLUSIONES

El modelo matemático que ofrece un ajuste más adecuado a las curvas de lactancia típicas es el Compartamental, seguido muy de cerca por el modelo de Wood mostrando un ajuste consistente. Para las curvas de lactancia atípicas, el modelo Parabólico exponencial sobresale como una opción de ajuste preferida, aunque con menor ajuste que en los casos típicos. En contraste, los modelos lineales muestran un ajuste más limitado, lo que resalta la superioridad de los modelos no lineales para ambos tipos de curvas.

Para los casos típicos, el modelo Compartamental predice un pico de lactancia a los 24 días, con una producción máxima de leche de 18.3 kg/día, mientras que el modelo de Wood predice el pico de lactancia a los 19 días con una producción máxima de 18.1 kg/día. Para los casos atípicos, el modelo Parabólico exponencial predice valores que representa una curva de lactancia convexa sin pico de lactancia.

El análisis de las curvas de lactancia revela un patrón consistente de persistencia en la producción de leche. Para los casos típicos, la disminución mensual de la producción de leche es de 6.5%, mientras que, en los casos atípicos la media es de 8.4% por mes.

Para los casos típicos, la producción total estimada de leche durante una campaña de 305 días, coincide con las predicciones de los modelos Compartamental, Exponencial negativo, Lineal parabólico y Ali y Shaeffer. Esto sugiere que, para la predicción de la producción total de leche por campaña, cualquiera de estos modelos podría ser utilizado, incluso modelos lineales. Para los casos atípicos, el modelo Parabólico exponencial predice una media que sobreestima en 15.2 kg, pero el modelo Cuadrático logarítmico predice un valor igual a la media de la producción total.

## RECOMENDACIONES

Los resultados de esta investigación brindan al Centro Experimental Chuquibambilla una valiosa herramienta para tomar decisiones informadas y estratégicas en el manejo, alimentación y selección. A su vez, debe traducirse en una mayor productividad, eficiencia y rentabilidad en la explotación ganadera.

Utilizar los modelos no lineales como herramienta de planificación estratégica, en el establo lechero de vacas Brown Swiss en el Centro Experimental Chuquibambilla, en forma práctica y analítica. Sin embargo, en esta investigación se han estudiado algunos modelos utilizados con mayor frecuencia en las investigaciones previas, pero existen aún otros modelos que deben ser incluido en futuras investigaciones, por ejemplo, los modelos de crecimiento: Gompertz, Logístico, Richards, entre otros. También es importante evaluar curvas de lactancia en otras razas, zonas geográficas y bajo diferentes sistemas de producción.

Aunque la literatura relacionada con curvas de lactancia menciona la existencia de casos atípicos, es necesario realizar nuevas investigaciones para confirmar la posibilidad de que, en la región de Puno, las vacas Brown Swiss con características de manejo similares al Centro de Experimental de Chuquibambilla tienen predominantemente curvas de lactancia atípicas.

Considerando que uno de los factores críticos para estimar curvas de lactancia es la disponibilidad de información, se debe investigar y definir un periodo óptimo para recolectar información para el caso de pequeños y medianos productores de la región de Puno.

## BIBLIOGRAFÍA

- Aberrachid, L. (2012). Curvas de lactação de vacas Girolando através de diferentes modelos. *IX Simpósio Brasileiro de Melhoramento Animal*.
- Ahmed, B. A., Laurence, P., Pierre, G., & Olivier, M. (2019). Lactation curve model with explicit representation of perturbations as a phenotyping tool for dairy livestock precision farming. *BioRxiv 661249*. <https://doi.org/10.1101/661249>
- Akaike, H. (1974). A New Look at the Statistical Model Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716–723. <https://doi.org/10.1109/TAC.1974.1100705>
- Ali, T. E., & Schaeffer, L. R. (1987). Accounting for covariances among test day milk yields in dairy cows. *Canadian Journal of Animal Science*, 67(3), 637–644. <https://doi.org/10.4141/cjas87-067>
- Andersen, H. (2012). *Manual de Ganadería Lechera*. <https://handresen.perulactea.com/manual-de-ganaderia-lechera/>
- Apaza, Y., Loza, M., Rojas, A., & Achu, C. (2016). Determinación del comportamiento de la curva de lactancia y producción lechera del ganado Mestizo del Altiplano de la Provincia Omasuyos Departamento de La Paz. *Journal of the Selva Andina Animal Science*, 3(2), 77–86.
- Arango, J. P., Rivera, B., & Granobles, J. C. (2000). Elaboración y validación de modelos de estimación de producción de leche en sistemas especializados. *Universidad de Caldas, Departamento de Sistemas de Producción - CONDESAN - ILRI-CIP*, 1–12.
- Arapa, L. (2022). *Curvas de lactación en ganado Brown Swiss bajo dos sistemas de crianza en Huancavelica e Ica*. Universidad Nacional Agraria La Molina.
- Araúz, S. E., De Armas, R., Araúz, Y. E., & Grajales, V. J. (2014). *Principales indicadores del patrón reproductivo y lactacional en la vaca lechera e importancia del manejo preventivo en el trópico*. Universidad de Panamá.
- Barriga, P. (1992). *Lactación y persistencia de producción lechera en vacunos Brown Swiss del C. E. Chuquibambilla*. Universidad Nacional del Altiplano.

- Batra, T. R. (1986). *Comparison of two mathematical models in fitting lactation curves for pureline and crossline dairy cows*. 405414(June).
- Belizario, R. M. (2000). *Evaluación y Plan de Manejo de los Pastizales del CIP Chuquibambilla*. Universidad Nacional del Altiplano.
- Bernal, C. (2016). *Metodología de la investigación* (4ta. Ed.). Pearson.
- Bernués, A. (2007). Ganadería de montaña en un contexto global: Evolución, condicionantes y oportunidades. *Pastos*, 37(2), 133–175.
- Brody, S., Ragsdale, A., & Turner, C. (1923). *The rate of decline of milk secretion with the advance of the period of lactation*. 441–444.  
<https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/19872010/>
- Brody, S., Turner, C., & Ragsdale, A. (1924). The relation between the initial rise and the subsequent decline of milk secretion following parturition. *The Journal of General Physiology*, 6, 541–545.
- Brotherstone, S., White, I., & Meyer, K. (2000). Genetic modelling of daily milk yield using orthogonal polynomials and parametric curves. *Animal Science*, 70, 407–415.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1017/S1357729800051754>.
- Bueno, W. (2018). *Indicadores productivos y reproductivos en vacunos Brown Swiss, Jersey y Holstein en altura-Cooperativa Atahualpa Jerusalén, Cajamarca 1999-2013* [Universidad Nacional Agraria La Molina].  
<http://repositorio.lamolina.edu.pe/bitstream/handle/UNALM/3526/bueno-cabrera-wilder-aristides.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Cañas, J., Cerón-Muñoz, M., & Corrales, J. (2012). Modelación y parámetros genéticos de curvas de lactancia en bovinos Holstein en Colombia. *Revista MVZ Cordoba*, 17(2), 2998–3003. <https://doi.org/10.21897/rmvz.234>
- Ccama, F. (1991). *Desarrollo rural: Posibilidades y limitaciones en Puno*. INIAA-PISA, ACDI, CIID.
- Chiang, A., & Wainwright, K. (2006). *Metodos fundamentales de economía matemática* (4ta. (ed.)). Mc Graw Hill.

- Cobby, J. M., & Le Du, Y. L. P. (1978). On fitting curves to lactation data. *Animal Production*, 26(2), 127–133. <https://doi.org/10.1017/S0003356100039532>
- Cole, J. B., Null, D. J., & VanRaden, P. M. (2009). Best prediction of yields for long lactations. *Journal of Dairy Science*, 92(4), 1796–1810. <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S002203020970493X?showall=true>
- Coleman, J., Pierce, K. M., Berry, D. P., Brennan, A., & Horan, B. (2010). Increasing milk solids production across lactation through genetic selection and intensive pasture-based feed system. *Journal of Dairy Science*, 93(9), 4302–4317. <https://doi.org/10.3168/jds.2009-2591>
- Da Cunha, D., Pereira, J. C., Fonseca Silva, F., De Campos, O. F., Braga, J. L., & Martuscello, J. A. (2010). Selection of models of lactation curves to use in milk production simulation systems. *Revista Brasileira de Zootecnia*, 39(4), 891–902. <https://doi.org/10.1590/s1516-35982010000400026>
- Dave, B. (1971). First lactation curve of Indian water buffalo. *JNKVV Res. J.*, 5, 93.
- DHI Info Sheet. (2017). Persistency of milk production. In *Western Canadian Dairy Herd Improvement Services* (pp. 1–4). chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcgiclfefindmkaj/[http://agromedia.ca/ADM\\_Articles/content/DHI\\_persist.pdf](http://agromedia.ca/ADM_Articles/content/DHI_persist.pdf)
- Dijkstra, J., Lopez, S., Bannink, A., Dhanoa, M. S., Kebreab, E., Odongo, N. E., Fathi Nasri, M. H., Behera, U. K., Hernandez-Ferrer, D., & France, J. (2010). Evaluation of a mechanistic lactation model using cow, goat and sheep data. *Journal of Agricultural Science*, 148(3), 249–262. <https://doi.org/10.1017/S0021859609990578>
- Duque, N. P., Casellas, J., Quijano, J. H., Casals, R., & Such, X. (2018). Fitting lactation curves in a Colombian Holstein herd using nonlinear models. *Revista Facultad Nacional de Agronomía Medellín*, 71(2), 8459–8468. <https://doi.org/10.15446/rfna.v71n2.67424>
- Duraes, M., Teixeira, N., & Freitas, A. (1991). Curvas de lactação de vacas de raça Holandesa mantidas em confinamento total. *Arq Bras Med Vet Zoot*, 43, 447–458.

- Ehrlich, J. L. (2010). Quantifying shape of lactation curves, and benchmark curves for common dairy breeds and parities. *The Bovine Practitioner*, 45(1), 88–95. <https://doi.org/10.21423/bovine-vol45no1p88-95>
- Fadel, J. G. (2004). Technical note: Estimating parameters of nonlinear segmented models. *Journal of Dairy Science*, 87(1), 169–173. [https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302\(04\)73154-9](https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302(04)73154-9)
- Farhangfar, H., Rowlinson, P., & Willis, M. B. (2000). Estimation of lactation curve parameters for Iranian Holstein dairy cows using non-linear models. *Proceedings of the British Society of Animal Science*, 2000, 109–109. <https://doi.org/10.1017/s1752756200001101>
- Faro, L. El, & Albuquerque, L. G. (2003). *Estimação de parâmetros genéticos para produção de leite no dia do controle e produção acumulada até 305 dias , para as primeiras lactações de vacas da raça Caracu*. 284–294.
- Fraga, L. M., Gutierrez, M., Fernández, L., & Fundora, O. (2003). Estudio preliminar de las curvas de lactancia en búfalas mestizas de Murrah. *Revista Cubana de Ciencia Agrícola*, 37(2), 151–155.
- France, J., Dijkstra, J., & Dhanoa, M. (1996). Growth functions and their application in animal science. *Ann Zootech*, 45, 165–174. <https://doi.org/10.1016/b978-0-08-012441-4.50027-4>
- Gallo, A., Rojas, A., & Velasquez, E. (1994). Desarrollo de la actividad lechera en el altiplano paceño a través de PROFOLE. In D. Hertvé & A. Rojas (Eds.), *Vías de intensificación de la ganadería bovina en el altiplano boliviano*.
- Gara, A. Ben, Rekik, B., Hamouda, M. Ben, & Guellouz, M. (2000). *Recording System and Quality of Dairy Cattle Production Data in Tunisia*.
- Gasqué, R., & Posadas, E. (2001). *Características Físicas de la Pardo Suizo Moderna*. Departamento de Producción Animal, Universidad Autónoma de México, Facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia.

- Gipson, T. A., & Grossman, M. (1989). Diphasic Analysis of Lactation Curves in Dairy Goats. *Journal of Dairy Science*, 72(4), 1035–1044.  
[https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302\(89\)79199-2](https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302(89)79199-2)
- Góngora, J. (2006). *Evaluación del comportamiento productivo, reproductivo y composición de la leche en vacas normando puras y en diferentes porcentajes de sangre, en la finca Chuguacá, Municipio de San Francisco* (p. 40). Universidad de La Salle.
- Grossman, M., & Koops, W. J. (1988). Multiphasic Analysis of Lactation Curves in Dairy Cattle. *Journal of Dairy Science*, 71(6), 1598–1608.  
[https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302\(88\)79723-4](https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302(88)79723-4)
- Gujarati, D., & Porter, D. (2009). *Econometría* (5ta. Ed.). McGraw Hill.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta. Ed.). Mc Graw Hill.
- Hernández, R., & Ponce, P. (2008). Caracterización de la curva de lactancia y componentes lácteos del genotipo Siboney de Cuba en una granja ganadera de la provincia de La Habana. *FCV-LUZ, XVIII*, 291–295.
- Instituto Nacional de estadística e Informática [INEI]. (2012). *IV Censo Nacional Agropecuario 2012 (IV CENAGRO)*. Instituto Nacional de Estadística e Informática.  
<https://cutt.ly/wwsqYEiE>
- Irigoyen, A., & Rippoll, G. (2011). *Alimentación postparto de la vaca lechera*.
- Jeretina, J., Babnik, D., & Škorjanc, D. (2013). Modeling lactation curve standards for test-day milk yield in holstein, Brown Swiss and simmental cows. *Journal of Animal and Plant Sciences*, 23(3), 754–762.
- Knight, C. H., & Wilde, C. J. (1993). Mammary cell changes during pregnancy and lactation. *Livestock Production Science*, 35(1–2), 3–19.  
[https://doi.org/10.1016/0301-6226\(93\)90178-K](https://doi.org/10.1016/0301-6226(93)90178-K)



- Kong, L. N., Li, J. Bin, Li, R. L., Zhao, X. X., Ma, Y. Bin, Sun, S. H., Huang, J. M., Ju, Z. H., Hou, M. H., & Zhong, J. F. (2018). Estimation of 305-day milk yield from test-day records of Chinese Holstein cattle. *Journal of Applied Animal Research*, 46(1), 791–797. <https://doi.org/10.1080/09712119.2017.1403918>
- León-Velarde, C. (1996). *Informe final Proyecto de Desarrollo Agropecuario Sostenido en el Altiplano - PRODASA*. Centro Internacional de la Papa (CIP), Centro Internacional para la Investigación y Desarrollo (CIID), PRODASA.
- León-Velarde, C., & Quiroz, R. (1994). *Análisis de Sistemas Agropecuarios: Uso de métodos bio-matemáticos*. CONDESAN (CIP-CIID-CIRNMA).
- López, S., France, J., Odongo, N. E., McBride, R. A., Kebreab, E., AlZahal, O., McBride, B. W., & Dijkstra, J. (2015). On the analysis of Canadian Holstein dairy cow lactation curves using standard growth functions. *Journal of Dairy Science*, 98(4), 2701–2712. <https://doi.org/10.3168/jds.2014-8132>
- López, S., & Kebreab, E. (2008). *Non-linear functions in animal nutrition*.
- Macciotta, N. P. P., Dimauro, C., Rasso, S. P. G., Steri, R., & Pulina, G. (2011). The mathematical description of lactation curves in dairy cattle. *Italian Journal of Animal Science*, 2011, 213–223. <https://doi.org/10.4081/ijas.2011.e51>
- McMillan, I. (1981). Comportamental model analysis of poultry egg production curves. *Poultry Science*, 60, 1549–1551.
- Mellado, M. (2012). *Producción de Leche en zonas templadas y tropicales*. Trillas.
- Mendoza, W. (2014). *Como Investigan los Economistas: Guía para elaborar y desarrollar un proyecto de investigación*. Fondo Editorial.
- Nasri, F., France, J., Odongo, N. E., Lopez, S., Bannink, A., & Kebreab, E. (2008). Modelling the lactation curve of dairy cows using the differentials of growth functions. *Journal of Agricultural Science*, 146(6), 633–641. <https://doi.org/10.1017/S0021859608008101>
- Naveros Flores, M. L., & Huanca Mamani, T. (2014). *ABC del inseminador en ganado vacuno de leche*. Instituto Nacional de Innovación Agraria - INIA.

- Nelder, J. A. (1966). *Inverse polynomials, a useful group of multi-factor response functions*. 22(1), 128–135.
- Olivera, S. (2001). Indices de producción y su repercusión económica para un estable lechero. *Revista de Investigaciones Veterinarias Del Peru*, 12(2), 49–54. <https://doi.org/10.15381/rivep.v12i2.1633>
- Olori, V. E., Brotherstone, S., Hill, W. G., & McGuirk, B. J. (1999). Fit of standard models of the lactation curve to weekly records of milk production of cows in a single herd. *Livestock Production Science*, 58(1), 55–63. [https://doi.org/10.1016/S0301-6226\(98\)00194-8](https://doi.org/10.1016/S0301-6226(98)00194-8)
- Ossa-Saraz, G. A., Torregroza-S, L., & Alvarado, L. (1997). Determinación de lactancia de la curva en un hato vacas mestizas de propósito de Colombia Caribe en la Región Caribe. *Revista Corpoica*, 2(1), 54–57.
- Papajcsik, I. A., & Boderó, J. (1988). Modelling lactation curves of Friesian cows in a subtropical climate. *Animal Production*, 47(2), 201–207. <https://doi.org/10.1017/S0003356100003275>
- Parra Rodríguez, F. (2008). *Métodos De Estimación No Lineales*. <https://econometria.files.wordpress.com/2008/05/metodos-de-estimacion-no-lineales1.pdf>
- Pendini, C. R. (1996). Notas Sobre Alimentación De La Vaca Lechera. In *Facultad de Ciencias Agropecuarias* (pp. 1–7). <http://infolactea.com/wp-content/uploads/2017/05/notas-sobre-alimentacion-de-la-vaca-leche2008.pdf>
- Pérochon, L., Coulon, J. B., & Lescourret, F. (1996). Modelling lactation curves of dairy cows with emphasis on individual variability. *Animal Science*, 63(2), 189–200. <https://doi.org/10.1017/S1357729800014740>
- Pinheiro, J. C., & Bates, D. M. (1995). Approximations to the log-likelihood function in the nonlinear mixed-effects model. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 4(1), 12–35. <https://doi.org/10.1080/10618600.1995.10474663>

- Quinn, N., Killen, L., & Buckley, F. (2005). Empirical algebraic modelling of lactation curves using Irish data. *Irish Journal of Agricultural and Food Research*, 44(1), 1–13.
- Quintero, J., Serna, J., Hurtado Lugo, N., Noguera Solano, R., & Cerón Muñoz, M. (2007). Modelos matemáticos para curvas de lactancia en ganado lechero. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias*, 20(2), 149–156.
- Quispe Coaquira, J., Belizario Quispe, C., Apaza Zúñiga, E., Maquera Marón, Z., & Quisocala Carita, V. (2016). Desempeño productivo de vacunos Brown Swiss en el altiplano peruano. *Revista de Investigaciones Altoandinas - Journal of High Andean Research*, 18(4), 411–422.
- Ramirez, M., & Chavez, J. (2001). La cooperación internacional y el desarrollo de la ganadería lechera en el Perú. *Rev Invest. Vet, Peru*, 2, 187–192.
- Rekaya, R., Carabaño, M. J., & Toro, M. A. (2000). Bayesian analysis of lactation curves of Holstein-Friesian cattle using a nonlinear model. *Journal of Dairy Science*, 83(11), 2691–2701. [https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302\(00\)75163-0](https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302(00)75163-0)
- Rodríguez, L., Ara, M., Huamán, H., & Echevarría, L. (2005). *Modelos de ajuste para curvas de lactación de vacas en crianza intensiva en la Cuenca de Lima*. 16(1), 1–12.
- Rosemberg, M. (2000). *Producción de ganado vacuno de carne y de doble propósito* (Universida).
- SAS Institute Inc. (2015). *SAS Stat(R) 14.1 User's Guide*.
- Savaliya, B., SParikh, S., Ahlawat, A., & Makwana, R. (2017). Comparative Efficiency of Various Mathematical Functions of Lactation Curve in Gir Cattle using Weekly Milk Yields. *International Journal of Livestock Research*, August 2019, 1. <https://doi.org/10.5455/ijlr.20170405041410>
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6, 461–464. <http://projecteuclid.org/euclid.aop/1176996548>
- SENHAMI. (2023). *SENHAMI*. Ministerio Del Ambiente. <https://www.senamhi.gob.pe/main.php?dp=puno&p=pronostico-meteorologico>.

- Serna, J. I., Hurtado, N. A., Rosero Noguera, R., & - Muñoz, M. (2007). Modelos matemáticos para curvas de lactancia en ganado lechero Mathematical models for lactation curves of dairy cattle. *Rev Col Cienc Pec*, 20, 149–156.
- Shanks, R. D., Berger, P. J., Freeman, A. E., & Dickinson, F. N. (1981). Genetic Aspects of Lactation Curves. *Journal of Dairy Science*, 64(9), 1852–1860. [https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302\(81\)82775-0](https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302(81)82775-0)
- Sheen, S., & Riesco, A. (2002). Factores que afectan la producción de leche en vacas de doble propósito en trópico húmedo (pucallpa). *Revista de Investigaciones Veterinarias Del Peru*, 13(1), 25–31.
- Sherchand, L., Mcnew, R. W., Kellogg, D. W., & Johnson, Z. B. (1995). Selection of a Mathematical Model to Generate Lactation Curves Using Daily Milk Yields of Holstein Cows. *Journal of Dairy Science*, 78(11), 2507–2513. [https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302\(95\)76880-1](https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302(95)76880-1)
- Shimizu, H., & Umrod, S. (1976). An Application of the Weighted Regression Procedure for Constructing the Lactation Curve in Dairy Cattle. *Zootech. Sci.*, 47(12), 733–738. <https://doi.org/10.2508/chikusan.47.733>
- Sikka, L. C. (1950). A study of lactation as affected by heredity and environment. *Journal of Dairy Research*, 17(3), 231–252. <https://doi.org/10.1017/S0022029900005811>
- Singh, R., & Gopal, R. (1982). Lactation curve analysis of buffalo es maintained under village conditions. *Indian J Dairy Science*, 17, 1–17.
- Tekerli, M., Akinci, Z., Dogan, I., & Akcan, A. (2000). Factors affecting the shape of lactation curves of Holstein cows from the Balikesir Province of Turkey. *Journal of Dairy Science*, 83(6), 1381–1386. [https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302\(00\)75006-5](https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302(00)75006-5)
- Val-Arreola, D., Kebreab, E., Dijkstra, J., & France, J. (2004). Study of the lactation curve in dairy cattle on farms in central Mexico. *Journal of Dairy Science*, 87(11), 3789–3799. [https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302\(04\)73518-3](https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302(04)73518-3)
- Vásquez, A. (2017). *Curva de lactación en ganado bovino lechero con modelos no lineales en un establo del valle de Huaura*. Universidad Nacional Agraria La Molina.



- Vohnout, K. (2003). *Mathematical modeling for system analysis in agricultural research*. Elsevier Science.
- Weber, J. (1999). *Matemáticas para administración y economía* (4ta. Ed.). Oxford University Press.
- Wood, P. (1967). Algebraic model of the lactation curve in cattle. *Nature Publishing Group*, 216, 615–616.
- Wood, P. (1974). A note on the estimation of total lactation yield from production on a single day. *Animal Production*, 19(3), 393–396.  
<https://doi.org/10.1017/S0003356100022972>
- Zamorano, A. R., Sánchez, C. M. A., Leyva, C. J. C., & Luna, N. P. (2018). Componentes de la curva de lactancia en ganado Holstein con diferente número de partos y escenarios térmicos. *Memorias Del XLII Congreso Nacional de Buiatría – Chihuahua, August*, 478–482.



## ANEXOS

## ANEXO 1. Estimación de los modelos no lineales en STATA: Casos Típicos

\*\*\* 1. Modelo de Wood

Source	SS	df	MS		
-----+-----				Number of obs =	610
Model	104234.94	3	34744.9814	R-squared =	0.9837
Residual	1723.6659	607	2.8396472	Adj R-squared =	0.9837
-----+-----				Root MSE =	1.685125
Total	105958.61	610	173.70264	Res. dev. =	2364.742

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
/a	15.60636	.4959933	31.46	0.000	14.63229	16.58043
/b	.0765258	.0100357	7.63	0.000	.0568168	.0962347
/c	.0040486	.0001344	30.13	0.000	.0037847	.0043125
-----						

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
-----+-----						
.	610	.	-1182.371	3	2370.742	2383.983
-----						

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.

\*\*\* 2. Modelo Compartamental

Source	SS	df	MS		
			Number of obs = 610		
Model	104263.71	4	26065.9271	R-squared	= 0.9840
Residual	1694.9017	606	2.79686751	Adj R-squared	= 0.9839
			Root MSE = 1.672384		
Total	105958.61	610	173.70264	Res. dev.	= 2354.477

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/a	20.80003	.2946738	70.59	0.000	20.22132	21.37873
/b	.0034748	.0000901	38.57	0.000	.0032979	.0036517
/c	.0781424	.0191578	4.08	0.000	.0405187	.1157661
/d	-16.73267	5.219836	-3.21	0.001	-26.98384	-6.481509

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	610	.	-1177.238	4	2362.477	2380.131

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.





\*\*\* 3. Modelo Parabolico exponencial

Source	SS	df	MS		
			Number of obs = 610		
Model	104077.1	3	34692.3659	R-squared	= 0.9822
Residual	1881.5123	607	3.09969084	Adj R-squared	= 0.9822
			Root MSE = 1.760594		
Total	105958.61	610	173.70264	Res. dev.	= 2418.192

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/a	19.09564	.247336	77.21	0.000	18.6099	19.58137
/b	-.002486	.0002387	-10.41	0.000	-.0029547	-.0020172
/c	2.44e-06	8.62e-07	2.83	0.005	7.45e-07	4.13e-06

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	610	.	-1209.096	3	2424.192	2437.432

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.



\*\*\* 4. Papajcsik y Bordero

Source	SS	df	MS		
			Number of obs = 610		
Model	94856.861	2	47428.4306	R-squared	= 0.8952
Residual	11101.749	608	18.2594556	Adj R-squared	= 0.8949
			Root MSE = 4.273108		
Total	105958.61	610	173.70264	Res. dev.	= 3500.958

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/a	.6655299	.0194125	34.28	0.000	.6274062	.7036537
/b	.0132083	.0002324	56.84	0.000	.012752	.0136647

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	610	.	-1750.479	2	3504.958	3513.785

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.



\*\*\* 5. Modelo Brody

Source	SS	df	MS		
			Number of obs = 610		
Model	104138.57	3	34712.8566	R-squared	= 0.9828
Residual	1820.0403	607	2.99841887	Adj R-squared	= 0.9827
			Root MSE = 1.731594		
Total	105958.61	610	173.70264	Res. dev.	= 2397.93

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/a	-19.83345	.1823047	-108.79	0.000	-20.19147	-19.47542
/b	.9017772	.1104276	8.17	0.000	.6849107	1.118644
/c	.0032037	.000068	47.09	0.000	.0030701	.0033373

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	610	.	-1198.965	3	2403.93	2417.17

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.



\*\*\* 6. Modelo Exponencial negativo

Source	SS	df	MS		
			Number of obs = 610		
Model	104051.96	2	52025.9783	R-squared	= 0.9820
Residual	1906.6536	608	3.13594338	Adj R-squared	= 0.9819
			Root MSE = 1.77086		
Total	105958.61	610	173.70264	Res. dev.	= 2426.289

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/a	19.57848	.1786515	109.59	0.000	19.22763	19.92933
/b	.0031273	.000068	46.00	0.000	.0029938	.0032608

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	610	.	-1213.145	2	2430.289	2439.116

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.

## ANEXO 2. Estimación de los modelos lineales en STATA: Casos típicos

### \*\*\* 1. Modelo cuadrático

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	610
-----+-----				F(2, 607)	=	1183.15
Model	7336.37742	2	3668.18871	Prob > F	=	0.0000
Residual	1881.92508	607	3.10037081	R-squared	=	0.7958
-----+-----				Adj R-squared	=	0.7952
Total	9218.30251	609	15.1367857	Root MSE	=	1.7608

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
t	-.0547592	.0032489	-16.85	0.000	-.0611396	-.0483787
t2	.0000509	.0000103	4.95	0.000	.0000307	.0000711
_cons	19.38536	.2152867	90.04	0.000	18.96256	19.80816

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
-----+-----						
.	610	-1693.776	-1209.163	3	2424.326	2437.566

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.



\*\*\* 2. Cuadratico logaritmico

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	610
-----+-----				F(3, 606)	=	934.73
Model	7580.18199	3	2526.72733	Prob > F	=	0.0000
Residual	1638.12051	606	2.70316916	R-squared	=	0.8223
-----+-----				Adj R-squared	=	0.8214
Total	9218.30251	609	15.1367857	Root MSE	=	1.6441

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
t	-.1112805	.0066801	-16.66	0.000	-.1243994	-.0981615
t2	.0001653	.0000154	10.73	0.000	.000135	.0001955
lt	2.228658	.2346709	9.50	0.000	1.767792	2.689525
_cons	13.92132	.6094534	22.84	0.000	12.72443	15.11822
-----						

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
-----+-----						
.	610	-1693.776	-1166.845	4	2341.691	2359.345
-----						

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.



\*\*\* 3. Lineal parabólico

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	610
-----+-----				F(2, 607)	=	1174.47
Model	7325.32624	2	3662.66312	Prob > F	=	0.0000
Residual	1892.97627	607	3.11857705	R-squared	=	0.7947
-----+-----				Adj R-squared	=	0.7940
Total	9218.30251	609	15.1367857	Root MSE	=	1.7659

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
t	-.0405615	.0008664	-46.82	0.000	-.042263	-.03886
it	-4.943993	1.083583	-4.56	0.000	-7.07202	-2.815967
_cons	18.9013	.1589111	118.94	0.000	18.58922	19.21338

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
-----+-----						
.	610	-1693.776	-1210.949	3	2427.897	2441.138

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.



\*\*\* 4. Polinomial inverso

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	610
-----+-----				F(2, 607)	=	6239.98
Model	83027.3205	2	41513.6602	Prob > F	=	0.0000
Residual	4038.27798	607	6.65284675	R-squared	=	0.9536
-----+-----				Adj R-squared	=	0.9535
Total	87065.5985	609	142.964858	Root MSE	=	2.5793

ty	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
t	.0421201	.0047592	8.85	0.000	.0327736	.0514666
t2	.0002889	.0000151	19.18	0.000	.0002594	.0003185
_cons	.0094066	.3153655	0.03	0.976	-.6099333	.6287466
-----+-----						

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
-----+-----						
.	610	-2378.645	-1442.037	3	2890.075	2903.315
-----+-----						

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.





\*\*\* 5. Alí y Shaeffer

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	610
-----+-----				F(4, 605)	=	703.01
Model	7586.15805	4	1896.53951	Prob > F	=	0.0000
Residual	1632.14446	605	2.69775943	R-squared	=	0.8229
-----+-----				Adj R-squared	=	0.8218
Total	9218.30251	609	15.1367857	Root MSE	=	1.6425

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
x1	-41.75196	5.629207	-7.42	0.000	-52.80712	-30.6968
x2	18.73592	2.673496	7.01	0.000	13.48546	23.98638
x3	-4.641141	1.637768	-2.83	0.005	-7.857541	-1.42474
x4	.3147109	.2114484	1.49	0.137	-.1005511	.7299729
_cons	31.24566	3.174752	9.84	0.000	25.01078	37.48053

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
-----+-----						
.	610	-1693.776	-1165.731	5	2341.462	2363.529

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.

### ANEXO 3. Estimación de los modelos no lineales en STATA: Casos atípicos

\*\*\* 1 Modelo de Wood

Source	SS	df	MS		
			Number of obs = 6,052		
Model	925154.48	3	308384.827	R-squared	= 0.9565
Residual	42038.317	6049	6.94963085	Adj R-squared	= 0.9565
			Root MSE = 2.636215		
Total	967192.8	6052	159.813747	Res. dev.	= 28904.77

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/a	18.50232	.2776293	66.64	0.000	17.95806	19.04657
/b	-.0128833	.0048087	-2.68	0.007	-.02231	-.0034565
/c	.0026311	.0000659	39.92	0.000	.0025019	.0027603

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	6,052	.	-14452.39	3	28910.77	28930.9

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.



\*\*\* 2 Modelo Compartamental

Source	SS	df	MS		
			Number of obs = 6,052		
Model	925300.65	4	231325.163	R-squared	= 0.9567
Residual	41892.146	6048	6.92661147	Adj R-squared	= 0.9567
			Root MSE = 2.631846		
Total	967192.8	6052	159.813747	Res. dev.	= 28883.69

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/a	17.95819	.0909397	197.47	0.000	17.77991	18.13646
/b	.0028347	.0000357	79.49	0.000	.0027648	.0029046
/c	.4136904	.160519	2.58	0.010	.0990159	.7283649
/d	-3.778426	2.159805	-1.75	0.080	-8.012414	.4555627

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	6,052	.	-14441.85	4	28891.69	28918.53

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.



\*\*\* 3 Modelo Parabolico exponencial

Source	SS	df	MS		
			Number of obs = 6,052		
Model	927096.88	3	309032.293	R-squared	= 0.9585
Residual	40095.917	6049	6.62851999	Adj R-squared	= 0.9585
			Root MSE = 2.574591		
Total	967192.8	6052	159.813747	Res. dev.	= 28618.47

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/a	19.19697	.118303	162.27	0.000	18.96506	19.42889
/b	-.0046798	.0001138	-41.11	0.000	-.004903	-.0044566
/c	-7.08e-06	4.00e-07	-17.69	0.000	-7.86e-06	-6.29e-06

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	6,052	.	-14309.24	3	28624.47	28644.6

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.

\*\*\* 4. Papajcsik y Bordero

Source	SS	df	MS		
			Number of obs = 6,052		
Model	814852.55	2	407426.273	R-squared	= 0.8425
Residual	152340.25	6050	25.1802068	Adj R-squared	= 0.8424
			Root MSE = 5.017988		
Total	967192.8	6052	159.813747	Res. dev.	= 36696.94

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/a	.5684912	.0067354	84.40	0.000	.5552874	.5816951
/b	.0124818	.0000905	137.88	0.000	.0123044	.0126593

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	6,052	.	-18348.47	2	36700.94	36714.35

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.



\*\*\* 5 Modelo Brody

Source	SS	df	MS		
			Number of obs = 6,052		
Model	925235.28	3	308411.758	R-squared	= 0.9566
Residual	41957.522	6049	6.93627404	Adj R-squared	= 0.9566
			Root MSE = 2.633681		
Total	967192.8	6052	159.813747	Res. dev.	= 28893.13

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/a	-17.87995	.0839433	-213.00	0.000	-18.04451	-17.71539
/b	1.856219	.2034195	9.13	0.000	1.457445	2.254994
/c	.0028091	.0000339	82.84	0.000	.0027426	.0028755

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	6,052	.	-14446.57	3	28899.13	28919.26

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.



\*\*\* 6 Modelo Exponencial negativo

Source	SS	df	MS		
			Number of obs = 6,052		
Model	925103.42	2	462551.709	R-squared	= 0.9565
Residual	42089.378	6050	6.956922	Adj R-squared	= 0.9565
			Root MSE = 2.637598		
Total	967192.8	6052	159.813747	Res. dev.	= 28912.12

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/a	17.81435	.0825383	215.83	0.000	17.65254	17.97615
/b	.0027873	.0000336	82.96	0.000	.0027214	.0028532

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	6,052	.	-14456.06	2	28916.12	28929.54

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.



## ANEXO 4. Estimación de los modelos lineales en STATA: Casos atípicos

### \*\*\* 1. Cuadrático

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	6,052
-----+-----				F(2, 6049)	=	3984.06
Model	51758.934	2	25879.467	Prob > F	=	0.0000
Residual	39292.789	6,049	6.49574954	R-squared	=	0.5685
-----+-----				Adj R-squared	=	0.5683
Total	91051.723	6,051	15.0473844	Root MSE	=	2.5487

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
t	-.074476	.0014994	-49.67	0.000	-.0774154	-.0715366
t2	.0001412	4.77e-06	29.57	0.000	.0001318	.0001505
_cons	19.00658	.0988036	192.37	0.000	18.81289	19.20027

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
-----+-----						
.	6,052	-16791.02	-14248.01	3	28502.02	28522.14

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.





\*\*\* 2. Cuadratico logaritmico

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	6,052
-----+-----						
				F(3, 6048)	=	2802.37
Model	52955.8277	3	17651.9426	Prob > F	=	0.0000
Residual	38095.8953	6,048	6.29892449	R-squared	=	0.5816
-----+-----						
				Adj R-squared	=	0.5814
Total	91051.723	6,051	15.0473844	Root MSE	=	2.5098

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
t	-.1143992	.0032509	-35.19	0.000	-.1207721	-.1080263
t2	.0002224	7.54e-06	29.50	0.000	.0002076	.0002372
lt	1.566235	.113622	13.78	0.000	1.343495	1.788974
_cons	15.17418	.2945531	51.52	0.000	14.59675	15.75161

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
-----+-----						
.	6,052	-16791.02	-14154.4	4	28316.8	28343.64

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.

\*\*\* 3. Lineal parabólico

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	6,052
-----+-----						
				F(2, 6049)	=	3100.02
Model	46087.2448	2	23043.6224	Prob > F	=	0.0000
Residual	44964.4782	6,049	7.43337382	R-squared	=	0.5062
-----+-----						
				Adj R-squared	=	0.5060
Total	91051.723	6,051	15.0473844	Root MSE	=	2.7264

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
t	-.0314124	.0004276	-73.46	0.000	-.0322507	-.0305741
it	.4905021	.5292802	0.93	0.354	-.5470756	1.52808
_cons	16.7922	.077881	215.61	0.000	16.63952	16.94487

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
-----+-----						
.	6,052	-16791.02	-14656.01	3	29318.02	29338.15

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.



\*\*\* 4. Polinomial inverso

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	6,052
-----+-----				F(2, 6050)	=	15353.59
Model	2350549.15	2	1175274.57	Prob > F	=	0.0000
Residual	463110.579	6,050	76.5472031	R-squared	=	0.8354
-----+-----				Adj R-squared	=	0.8354
Total	2813659.73	6,052	464.914033	Root MSE	=	8.7491

ty	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
t	.0680587	.0025604	26.58	0.000	.0630394	.0730779
t2	.0001926	.0000109	17.68	0.000	.0001712	.0002139
-----						

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
-----+-----						
.	6,052	.	-21712.92	2	43429.85	43443.26
-----						

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.

\*\*\* 6. Alí y Shaefer

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	6,052
-----+-----				F(4, 6047)	=	2102.84
Model	52970.6644	4	13242.6661	Prob > F	=	0.0000
Residual	38081.0586	6,047	6.29751259	R-squared	=	0.5818
-----+-----				Adj R-squared	=	0.5815
Total	91051.723	6,051	15.0473844	Root MSE	=	2.5095

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
x1	-38.81583	2.742033	-14.16	0.000	-44.19119	-33.44046
x2	22.38539	1.308969	17.10	0.000	19.81935	24.95144
x3	-2.774108	.795088	-3.49	0.000	-4.332764	-1.215452
x4	.1574137	.102555	1.53	0.125	-.0436307	.3584581
_cons	26.42706	1.542889	17.13	0.000	23.40245	29.45168

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
-----+-----						
.	6,052	-16791.02	-14153.22	5	28316.45	28349.99

Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.

## ANEXO 5. Predicción de los modelos no lineales: Casos típicos

Días	Wood	Comportamental	Parabólico exponencial	Papajcsik y Bordero	Brody	Exponencial negativo
1	15.5	15.5	19.0	0.7	11.7	19.5
2	16.3	15.9	19.0	1.3	16.4	19.5
3	16.8	16.2	19.0	1.9	18.3	19.4
4	17.1	16.5	18.9	2.5	19.0	19.3
5	17.3	16.7	18.9	3.1	19.3	19.3
6	17.5	16.9	18.8	3.7	19.4	19.2
7	17.6	17.1	18.8	4.2	19.4	19.2
8	17.7	17.3	18.7	4.8	19.3	19.1
9	17.8	17.5	18.7	5.3	19.3	19.0
10	17.9	17.6	18.6	5.8	19.2	19.0
11	17.9	17.7	18.6	6.3	19.1	18.9
12	18.0	17.8	18.5	6.8	19.1	18.9
13	18.0	17.9	18.5	7.3	19.0	18.8
14	18.0	18.0	18.4	7.7	19.0	18.7
15	18.1	18.1	18.4	8.2	18.9	18.7
16	18.1	18.2	18.4	8.6	18.8	18.6
17	18.1	18.2	18.3	9.0	18.8	18.6
18	18.1	18.2	18.3	9.4	18.7	18.5
19	18.1	18.3	18.2	9.8	18.7	18.4
20	18.1	18.3	18.2	10.2	18.6	18.4
21	18.1	18.3	18.1	10.6	18.5	18.3
22	18.1	18.3	18.1	10.9	18.5	18.3
23	18.1	18.3	18.0	11.3	18.4	18.2
24	18.1	18.3	18.0	11.6	18.4	18.2
25	18.0	18.3	17.9	12.0	18.3	18.1
26	18.0	18.3	17.9	12.3	18.3	18.0
27	18.0	18.3	17.9	12.6	18.2	18.0
28	18.0	18.3	17.8	12.9	18.1	17.9
29	18.0	18.3	17.8	13.2	18.1	17.9
30	17.9	18.3	17.7	13.4	18.0	17.8
31	17.9	18.2	17.7	13.7	18.0	17.8
32	17.9	18.2	17.6	14.0	17.9	17.7
33	17.8	18.2	17.6	14.2	17.8	17.7
34	17.8	18.1	17.5	14.4	17.8	17.6
35	17.8	18.1	17.5	14.7	17.7	17.5
36	17.7	18.1	17.5	14.9	17.7	17.5
37	17.7	18.0	17.4	15.1	17.6	17.4
38	17.7	18.0	17.4	15.3	17.6	17.4
39	17.6	17.9	17.3	15.5	17.5	17.3
40	17.6	17.9	17.3	15.7	17.5	17.3
41	17.6	17.8	17.2	15.9	17.4	17.2



42	17.5	17.8	17.2	16.0	17.3	17.2
43	17.5	17.7	17.2	16.2	17.3	17.1
44	17.4	17.7	17.1	16.4	17.2	17.1
45	17.4	17.6	17.1	16.5	17.2	17.0
46	17.4	17.6	17.0	16.7	17.1	17.0
47	17.3	17.5	17.0	16.8	17.1	16.9
48	17.3	17.5	16.9	16.9	17.0	16.8
49	17.2	17.4	16.9	17.1	17.0	16.8
50	17.2	17.4	16.9	17.2	16.9	16.7
51	17.2	17.3	16.8	17.3	16.8	16.7
52	17.1	17.3	16.8	17.4	16.8	16.6
53	17.1	17.2	16.7	17.5	16.7	16.6
54	17.0	17.2	16.7	17.6	16.7	16.5
55	17.0	17.1	16.7	17.7	16.6	16.5
56	16.9	17.1	16.6	17.8	16.6	16.4
57	16.9	17.0	16.6	17.9	16.5	16.4
58	16.8	17.0	16.5	17.9	16.5	16.3
59	16.8	16.9	16.5	18.0	16.4	16.3
60	16.7	16.8	16.4	18.1	16.4	16.2
61	16.7	16.8	16.4	18.1	16.3	16.2
62	16.7	16.7	16.4	18.2	16.3	16.1
63	16.6	16.7	16.3	18.2	16.2	16.1
64	16.6	16.6	16.3	18.3	16.2	16.0
65	16.5	16.6	16.2	18.3	16.1	16.0
66	16.5	16.5	16.2	18.4	16.1	15.9
67	16.4	16.5	16.2	18.4	16.0	15.9
68	16.4	16.4	16.1	18.4	16.0	15.8
69	16.3	16.4	16.1	18.5	15.9	15.8
70	16.3	16.3	16.0	18.5	15.9	15.7
71	16.2	16.2	16.0	18.5	15.8	15.7
72	16.2	16.2	16.0	18.5	15.8	15.6
73	16.1	16.1	15.9	18.5	15.7	15.6
74	16.1	16.1	15.9	18.5	15.7	15.5
75	16.0	16.0	15.8	18.5	15.6	15.5
76	16.0	16.0	15.8	18.5	15.6	15.4
77	15.9	15.9	15.8	18.5	15.5	15.4
78	15.9	15.9	15.7	18.5	15.5	15.3
79	15.8	15.8	15.7	18.5	15.4	15.3
80	15.8	15.7	15.7	18.5	15.4	15.2
81	15.7	15.7	15.6	18.5	15.3	15.2
82	15.7	15.6	15.6	18.5	15.3	15.1
83	15.6	15.6	15.5	18.5	15.2	15.1
84	15.6	15.5	15.5	18.4	15.2	15.1
85	15.5	15.5	15.5	18.4	15.1	15.0
86	15.5	15.4	15.4	18.4	15.1	15.0



87	15.4	15.4	15.4	18.3	15.0	14.9
88	15.4	15.3	15.3	18.3	15.0	14.9
89	15.3	15.3	15.3	18.3	14.9	14.8
90	15.3	15.2	15.3	18.2	14.9	14.8
91	15.2	15.2	15.2	18.2	14.8	14.7
92	15.2	15.1	15.2	18.2	14.8	14.7
93	15.2	15.1	15.2	18.1	14.7	14.6
94	15.1	15.0	15.1	18.1	14.7	14.6
95	15.1	15.0	15.1	18.0	14.6	14.5
96	15.0	14.9	15.0	18.0	14.6	14.5
97	15.0	14.9	15.0	17.9	14.5	14.5
98	14.9	14.8	15.0	17.9	14.5	14.4
99	14.9	14.8	14.9	17.8	14.4	14.4
100	14.8	14.7	14.9	17.8	14.4	14.3
101	14.8	14.6	14.9	17.7	14.4	14.3
102	14.7	14.6	14.8	17.6	14.3	14.2
103	14.7	14.5	14.8	17.6	14.3	14.2
104	14.6	14.5	14.7	17.5	14.2	14.1
105	14.6	14.4	14.7	17.5	14.2	14.1
106	14.5	14.4	14.7	17.4	14.1	14.1
107	14.5	14.3	14.6	17.3	14.1	14.0
108	14.4	14.3	14.6	17.3	14.0	14.0
109	14.4	14.2	14.6	17.2	14.0	13.9
110	14.3	14.2	14.5	17.1	13.9	13.9
111	14.3	14.2	14.5	17.0	13.9	13.8
112	14.2	14.1	14.5	17.0	13.9	13.8
113	14.2	14.1	14.4	16.9	13.8	13.7
114	14.1	14.0	14.4	16.8	13.8	13.7
115	14.1	14.0	14.3	16.8	13.7	13.7
116	14.0	13.9	14.3	16.7	13.7	13.6
117	14.0	13.9	14.3	16.6	13.6	13.6
118	13.9	13.8	14.2	16.5	13.6	13.5
119	13.9	13.8	14.2	16.4	13.6	13.5
120	13.8	13.7	14.2	16.4	13.5	13.4
121	13.8	13.7	14.1	16.3	13.5	13.4
122	13.8	13.6	14.1	16.2	13.4	13.4
123	13.7	13.6	14.1	16.1	13.4	13.3
124	13.7	13.5	14.0	16.0	13.3	13.3
125	13.6	13.5	14.0	16.0	13.3	13.2
126	13.6	13.4	14.0	15.9	13.3	13.2
127	13.5	13.4	13.9	15.8	13.2	13.2
128	13.5	13.3	13.9	15.7	13.2	13.1
129	13.4	13.3	13.9	15.6	13.1	13.1
130	13.4	13.2	13.8	15.5	13.1	13.0
131	13.3	13.2	13.8	15.4	13.0	13.0



132	13.3	13.2	13.8	15.4	13.0	13.0
133	13.2	13.1	13.7	15.3	13.0	12.9
134	13.2	13.1	13.7	15.2	12.9	12.9
135	13.1	13.0	13.7	15.1	12.9	12.8
136	13.1	13.0	13.6	15.0	12.8	12.8
137	13.1	12.9	13.6	14.9	12.8	12.8
138	13.0	12.9	13.6	14.8	12.8	12.7
139	13.0	12.8	13.5	14.7	12.7	12.7
140	12.9	12.8	13.5	14.7	12.7	12.6
141	12.9	12.8	13.4	14.6	12.6	12.6
142	12.8	12.7	13.4	14.5	12.6	12.6
143	12.8	12.7	13.4	14.4	12.6	12.5
144	12.7	12.6	13.3	14.3	12.5	12.5
145	12.7	12.6	13.3	14.2	12.5	12.4
146	12.7	12.5	13.3	14.1	12.4	12.4
147	12.6	12.5	13.3	14.0	12.4	12.4
148	12.6	12.4	13.2	13.9	12.4	12.3
149	12.5	12.4	13.2	13.9	12.3	12.3
150	12.5	12.4	13.2	13.8	12.3	12.2
151	12.4	12.3	13.1	13.7	12.2	12.2
152	12.4	12.3	13.1	13.6	12.2	12.2
153	12.3	12.2	13.1	13.5	12.2	12.1
154	12.3	12.2	13.0	13.4	12.1	12.1
155	12.3	12.1	13.0	13.3	12.1	12.1
156	12.2	12.1	13.0	13.2	12.0	12.0
157	12.2	12.1	12.9	13.1	12.0	12.0
158	12.1	12.0	12.9	13.0	12.0	11.9
159	12.1	12.0	12.9	13.0	11.9	11.9
160	12.0	11.9	12.8	12.9	11.9	11.9
161	12.0	11.9	12.8	12.8	11.8	11.8
162	12.0	11.9	12.8	12.7	11.8	11.8
163	11.9	11.8	12.7	12.6	11.8	11.8
164	11.9	11.8	12.7	12.5	11.7	11.7
165	11.8	11.7	12.7	12.4	11.7	11.7
166	11.8	11.7	12.6	12.3	11.7	11.6
167	11.7	11.7	12.6	12.2	11.6	11.6
168	11.7	11.6	12.6	12.2	11.6	11.6
169	11.7	11.6	12.5	12.1	11.5	11.5
170	11.6	11.5	12.5	12.0	11.5	11.5
171	11.6	11.5	12.5	11.9	11.5	11.5
172	11.5	11.5	12.5	11.8	11.4	11.4
173	11.5	11.4	12.4	11.7	11.4	11.4
174	11.4	11.4	12.4	11.6	11.4	11.4
175	11.4	11.3	12.4	11.5	11.3	11.3
176	11.4	11.3	12.3	11.5	11.3	11.3





177	11.3	11.3	12.3	11.4	11.3	11.3
178	11.3	11.2	12.3	11.3	11.2	11.2
179	11.2	11.2	12.2	11.2	11.2	11.2
180	11.2	11.1	12.2	11.1	11.1	11.1
181	11.2	11.1	12.2	11.0	11.1	11.1
182	11.1	11.1	12.1	10.9	11.1	11.1
183	11.1	11.0	12.1	10.9	11.0	11.0
184	11.0	11.0	12.1	10.8	11.0	11.0
185	11.0	10.9	12.1	10.7	11.0	11.0
186	11.0	10.9	12.0	10.6	10.9	10.9
187	10.9	10.9	12.0	10.5	10.9	10.9
188	10.9	10.8	12.0	10.4	10.9	10.9
189	10.8	10.8	11.9	10.4	10.8	10.8
190	10.8	10.8	11.9	10.3	10.8	10.8
191	10.8	10.7	11.9	10.2	10.8	10.8
192	10.7	10.7	11.8	10.1	10.7	10.7
193	10.7	10.6	11.8	10.0	10.7	10.7
194	10.6	10.6	11.8	10.0	10.7	10.7
195	10.6	10.6	11.8	9.9	10.6	10.6
196	10.6	10.5	11.7	9.8	10.6	10.6
197	10.5	10.5	11.7	9.7	10.6	10.6
198	10.5	10.5	11.7	9.6	10.5	10.5
199	10.5	10.4	11.6	9.6	10.5	10.5
200	10.4	10.4	11.6	9.5	10.5	10.5
201	10.4	10.4	11.6	9.4	10.4	10.4
202	10.3	10.3	11.6	9.3	10.4	10.4
203	10.3	10.3	11.5	9.2	10.4	10.4
204	10.3	10.2	11.5	9.2	10.3	10.3
205	10.2	10.2	11.5	9.1	10.3	10.3
206	10.2	10.2	11.4	9.0	10.3	10.3
207	10.2	10.1	11.4	8.9	10.2	10.2
208	10.1	10.1	11.4	8.9	10.2	10.2
209	10.1	10.1	11.4	8.8	10.2	10.2
210	10.0	10.0	11.3	8.7	10.1	10.1
211	10.0	10.0	11.3	8.6	10.1	10.1
212	10.0	10.0	11.3	8.6	10.1	10.1
213	9.9	9.9	11.2	8.5	10.0	10.1
214	9.9	9.9	11.2	8.4	10.0	10.0
215	9.9	9.9	11.2	8.4	10.0	10.0
216	9.8	9.8	11.2	8.3	9.9	10.0
217	9.8	9.8	11.1	8.2	9.9	9.9
218	9.7	9.8	11.1	8.1	9.9	9.9
219	9.7	9.7	11.1	8.1	9.8	9.9
220	9.7	9.7	11.1	8.0	9.8	9.8
221	9.6	9.7	11.0	7.9	9.8	9.8



222	9.6	9.6	11.0	7.9	9.7	9.8
223	9.6	9.6	11.0	7.8	9.7	9.7
224	9.5	9.6	10.9	7.7	9.7	9.7
225	9.5	9.5	10.9	7.7	9.7	9.7
226	9.5	9.5	10.9	7.6	9.6	9.7
227	9.4	9.5	10.9	7.5	9.6	9.6
228	9.4	9.4	10.8	7.5	9.6	9.6
229	9.4	9.4	10.8	7.4	9.5	9.6
230	9.3	9.4	10.8	7.3	9.5	9.5
231	9.3	9.3	10.8	7.3	9.5	9.5
232	9.3	9.3	10.7	7.2	9.4	9.5
233	9.2	9.3	10.7	7.1	9.4	9.4
234	9.2	9.2	10.7	7.1	9.4	9.4
235	9.2	9.2	10.6	7.0	9.3	9.4
236	9.1	9.2	10.6	7.0	9.3	9.4
237	9.1	9.1	10.6	6.9	9.3	9.3
238	9.0	9.1	10.6	6.8	9.3	9.3
239	9.0	9.1	10.5	6.8	9.2	9.3
240	9.0	9.0	10.5	6.7	9.2	9.2
241	8.9	9.0	10.5	6.6	9.2	9.2
242	8.9	9.0	10.5	6.6	9.1	9.2
243	8.9	9.0	10.4	6.5	9.1	9.2
244	8.8	8.9	10.4	6.5	9.1	9.1
245	8.8	8.9	10.4	6.4	9.1	9.1
246	8.8	8.9	10.4	6.4	9.0	9.1
247	8.7	8.8	10.3	6.3	9.0	9.0
248	8.7	8.8	10.3	6.2	9.0	9.0
249	8.7	8.8	10.3	6.2	8.9	9.0
250	8.7	8.7	10.3	6.1	8.9	9.0
251	8.6	8.7	10.2	6.1	8.9	8.9
252	8.6	8.7	10.2	6.0	8.9	8.9
253	8.6	8.6	10.2	6.0	8.8	8.9
254	8.5	8.6	10.2	5.9	8.8	8.8
255	8.5	8.6	10.1	5.8	8.8	8.8
256	8.5	8.6	10.1	5.8	8.7	8.8
257	8.4	8.5	10.1	5.7	8.7	8.8
258	8.4	8.5	10.1	5.7	8.7	8.7
259	8.4	8.5	10.0	5.6	8.7	8.7
260	8.3	8.4	10.0	5.6	8.6	8.7
261	8.3	8.4	10.0	5.5	8.6	8.6
262	8.3	8.4	10.0	5.5	8.6	8.6
263	8.2	8.4	9.9	5.4	8.5	8.6
264	8.2	8.3	9.9	5.4	8.5	8.6
265	8.2	8.3	9.9	5.3	8.5	8.5
266	8.1	8.3	9.9	5.3	8.5	8.5



267	8.1	8.2	9.8	5.2	8.4	8.5
268	8.1	8.2	9.8	5.2	8.4	8.5
269	8.1	8.2	9.8	5.1	8.4	8.4
270	8.0	8.2	9.8	5.1	8.4	8.4
271	8.0	8.1	9.7	5.0	8.3	8.4
272	8.0	8.1	9.7	5.0	8.3	8.4
273	7.9	8.1	9.7	4.9	8.3	8.3
274	7.9	8.0	9.7	4.9	8.3	8.3
275	7.9	8.0	9.6	4.8	8.2	8.3
276	7.8	8.0	9.6	4.8	8.2	8.3
277	7.8	8.0	9.6	4.7	8.2	8.2
278	7.8	7.9	9.6	4.7	8.1	8.2
279	7.8	7.9	9.5	4.7	8.1	8.2
280	7.7	7.9	9.5	4.6	8.1	8.2
281	7.7	7.8	9.5	4.6	8.1	8.1
282	7.7	7.8	9.5	4.5	8.0	8.1
283	7.6	7.8	9.4	4.5	8.0	8.1
284	7.6	7.8	9.4	4.4	8.0	8.0
285	7.6	7.7	9.4	4.4	8.0	8.0
286	7.6	7.7	9.4	4.4	7.9	8.0
287	7.5	7.7	9.4	4.3	7.9	8.0
288	7.5	7.7	9.3	4.3	7.9	7.9
289	7.5	7.6	9.3	4.2	7.9	7.9
290	7.4	7.6	9.3	4.2	7.8	7.9
291	7.4	7.6	9.3	4.1	7.8	7.9
292	7.4	7.6	9.2	4.1	7.8	7.8
293	7.4	7.5	9.2	4.1	7.8	7.8
294	7.3	7.5	9.2	4.0	7.7	7.8
295	7.3	7.5	9.2	4.0	7.7	7.8
296	7.3	7.4	9.1	3.9	7.7	7.8
297	7.2	7.4	9.1	3.9	7.7	7.7
298	7.2	7.4	9.1	3.9	7.6	7.7
299	7.2	7.4	9.1	3.8	7.6	7.7
300	7.2	7.3	9.1	3.8	7.6	7.7
301	7.1	7.3	9.0	3.8	7.6	7.6
302	7.1	7.3	9.0	3.7	7.5	7.6
303	7.1	7.3	9.0	3.7	7.5	7.6
304	7.1	7.2	9.0	3.6	7.5	7.6
305	7.0	7.2	8.9	3.6	7.5	7.5



## DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo **GERARDO GODOFREDO MAMANI CHOQUE**, identificado con DNI 01228048 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional,  Programa de Segunda Especialidad,  Programa de Maestría o Doctorado

**DOCTORADO EN CIENCIA, TECNOLOGÍA Y MEDIO AMBIENTE.**

informo que he elaborado el/la  Tesis o  Trabajo de Investigación denominada:

**“MODELOS MATEMÁTICOS PARA ESTIMAR CURVAS DE LACTANCIA EN VACUNOS**

**BROWN SWISS DEL CENTRO EXPERIMENTAL CHUQUIBAMBILLA, PUNO”**

Es un tema original.

Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y **no existe plagio/copia** de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como tuyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno, 8 de noviembre del 2023



FIRMA (obligatoria)



Huella



Universidad Nacional  
del Altiplano Puno



Vicerrectorado  
de Investigación



Repositorio  
Institucional

## AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo **GERARDO GODOFREDO MAMANI CHOQUE**, identificado con DNI01228048 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional,  Programa de Segunda Especialidad,  Programa de Maestría o Doctorado

**DOCTORADO EN CIENCIA, TECNOLOGÍA Y MEDIO AMBIENTE**, informo que he elaborado el/la  Tesis o  Trabajo de Investigación denominada:

**“MODELOS MATEMÁTICOS PARA ESTIMAR CURVAS DE LACTANCIA EN VACUNOS BROWN SWISS DEL CENTRO EXPERIMENTAL CHUQUIBAMBILLA, PUNO ”**

para la obtención de  Grado,  Título Profesional o  Segunda Especialidad.

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los “Contenidos”) que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia:

Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno, 8 de noviembre del 2023



FIRMA (obligatoria)



Huella