



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DEL MODELO CIRCUITO  
ELÉCTRICO RC MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES  
FRACCIONARIAS**

**TESIS**

**PRESENTADA POR:**

**Bach. RAUL CHAMPI APAZA**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS**

**PUNO - PERÚ**

**2023**



NOMBRE DEL TRABAJO

**ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DEL MODELO  
CIRCUITO ELÉCTRICO RC MEDIANTE EC  
UACIONES DIFERENCIALES FRACCIONA  
RIAS**

AUTOR

**RAUL CHAMPI APAZA**

RECUENTO DE PALABRAS

**14386 Words**

RECUENTO DE CARACTERES

**63449 Characters**

RECUENTO DE PÁGINAS

**85 Pages**

TAMAÑO DEL ARCHIVO

**2.1MB**

FECHA DE ENTREGA

**Nov 22, 2023 10:00 AM GMT-5**

FECHA DEL INFORME

**Nov 22, 2023 10:01 AM GMT-5**

● **20% de similitud general**

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base

- 17% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 12% Base de datos de trabajos entregados
- 5% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Cross

● **Excluir del Reporte de Similitud**

- Material bibliográfico
- Material citado
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 8 palabras)



*Juana I. Zavaleta Gómez*  
Lic. Juana I. Zavaleta Gómez  
Dra. En Matemática

*Dr. Richar M. Mollinedo Churo*  
Dr. Richar M. Mollinedo Churo  
DOCENTE

Resumen



## DEDICATORIA

*A Dios. Por poner en mi vida a quienes han sido mi apoyo y compañía durante todo el periodo de estudios. A mis padres, Luis Champi Machacca y Julia Apaza Huillca, en especial. A ellos por ser los únicos que pudieron concebirme y criarme. Por estar a mi lado constantemente y traer alegría a mi vida.*



## AGRADECIMIENTOS

A todos mis maestros y compañeros de la promoción “*Los Forjadores de Sabiduría y Conocimiento*” por sus enseñanzas y conocimientos compartidos.

Al director de esta tesis, Dr. Richar Marlon Mollinedo Chura, por su dirección, seguimiento y supervisión permanente, en particular por su aliento y apoyo incondicional hasta conseguir mi objetivo.

A los Jurados de Tesis: M. Fabiola Loayza Torreblanca, Lic. Raquel Veronica Ari Suaña y M. Derly Pari Mendoza; por sus esclarecedores comentarios y conocimientos que ayudaron a que este proyecto de investigación se hiciera realidad.

Finalmente a todos mis amigos y compañeros graduados de mi promoción de estudios, por brindarme todo su apoyo incondicional.



# ÍNDICE GENERAL

**DEDICATORIA**

**AGRADECIMIENTOS**

**ÍNDICE GENERAL**

**ÍNDICE DE TABLAS**

**ÍNDICE DE FIGURAS**

**RESUMEN .....10**

**ABSTRACT .....11**

## **CAPÍTULO I**

### **INTRODUCCIÓN**

**1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....12**

1.1.1. Descripción del problema ..... 12

**1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA .....13**

**1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN .....13**

1.3.1. Hipótesis general ..... 13

1.3.2. Hipótesis específicos ..... 14

**1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO .....14**

**1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN .....15**

1.5.1. Objetivo general ..... 15

1.5.2. Objetivos específicos ..... 15

## **CAPÍTULO II**

### **REVISIÓN DE LITERATURA**

**2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN.....16**



<b>2.2. MARCO TEÓRICO.....</b>	<b>18</b>
2.2.1. Espacio de Funciones.....	18
2.2.2. Función Gamma.....	19
2.2.3. Función Beta.....	20
2.2.4. Función de Mittag-Leffler.....	22
2.2.5. Derivada iterada.....	24
2.2.6. La Integral iterada.....	24
2.2.7. Derivada Fraccionaria.....	27
2.2.8. Transformada de Laplace.....	27
2.2.9. Propiedades de la Transformada de Laplace.....	29
2.2.10. Convolución de Funciones.....	32
2.2.11. Transformada de Laplace de la Funcion Mittag-Leffler.....	33
2.2.12. Derivada fraccionaria de Caputo.....	34
2.2.13. Transformada de Laplace de la derivada de Caputo.....	40
2.2.14. Derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio.....	44
2.2.15. Transformada de Laplace de la derivada de Caputo-Fabrizio.....	49
2.2.16. Circuitos Eléctricos.....	50
2.2.17. Circuito Eléctrico RC.....	52
2.2.18. Ley del voltaje de Kirchhoff para un circuito RC.....	52
2.2.19. Ecuación Diferencial del Circuito RC.....	53

### **CAPÍTULO III**

#### **MATERIALES Y MÉTODOS**

<b>3.1. MATERIALES.....</b>	<b>56</b>
<b>3.2. MÉTODOS.....</b>	<b>56</b>



## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

<b>4.1. Ecuación Diferencial Fraccionaria del Circuito RC .....</b>	<b>58</b>
4.1.1. Solución del Circuito RC Fraccionaria a Través de la Derivada de Caputo. ....	59
4.1.2. Solución del Circuito RC Fraccionaria a Través de la Derivada de Caputo-Fabrizio. ....	63
<b>V. CONCLUSIONES .....</b>	<b>72</b>
<b>VI. RECOMENDACIONES .....</b>	<b>73</b>
<b>VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>74</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>79</b>

**Tema:** Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias.

**Área:** Matemática

**Línea de investigación:** Matemática Aplicada

**FECHA DE SUSTENTACIÓN:** 24 de Noviembre de 2023



## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1</b>	<i>Tabla de la transformada de Laplace. ....</i>	28
----------------	--	----



## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1</b>	Capacitor Simple.....	51
<b>Figura 2</b>	Circuito Eléctrico RC .....	53
<b>Figura 3</b>	Solución del Circuito RC para un Capacitor Descargado .....	54
<b>Figura 4</b>	Solución del Circuito RC para un Capacitor Cargado .....	55
<b>Figura 5</b>	Solución del Circuito RC Mediante Caputo para Fuente Constante y Capacitor Descargado.....	61
<b>Figura 6</b>	Solución del Circuito RC Mediante Caputo para Fuente Constante y Capacitor Cargado .....	61
<b>Figura 7</b>	Solución del Circuito RC Mediante Caputo para Fuente Periódica y Capacitor Cargado .....	64
<b>Figura 8</b>	Solución del Circuito RC Mediante Caputo-Fabrizio para Fuente Constante y Capacitor Cargado.....	66
<b>Figura 9</b>	Solución del Circuito RC Mediante Caputo-Fabrizio para Fuente Constante y Capacitor Descargado .....	66
<b>Figura 10</b>	Solución del Circuito RC Mediante Caputo-Fabrizio para Fuente Periódica y Capacitor Cargado.....	70
<b>Figura 11</b>	Solución del Circuito RC Mediante Caputo-Fabrizio para Fuente Periódica y Capacitor Descargado .....	71



## RESUMEN

En este trabajo de investigación, se analizó las soluciones analíticas con derivada de Caputo y Caputo-Fabrizio en el modelo circuito eléctrico RC de orden entero al orden fraccionaria, con el objetivo de analizar y simular el modelo circuito eléctrico RC mediante ecuaciones de orden fraccionaria, por lo que se analizó el modelo circuito eléctrico RC por diferentes métodos de solución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y se realizó la simulación del modelo circuito eléctrico RC usando software Wolfram Mathematica 10.4. La metodología de esta investigación se enmarca en el descriptivo-deductivo. Para el modelamiento se utilizó las leyes físicas y transición del operador derivado ordinario al operador fraccionario, luego para la solución analítica se analizó por medio de la función especial de Mittag-Leffler, transformada de Laplace y las inversas de algunas funciones. Finalmente para la simulación de una fuente constante y fuente periódica del modelo circuito eléctrico RC de orden fraccionario, se utilizó el software Wolfram Mathematica 10.4. El resultado más relevante es que se estableció una analogía entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales fraccionarias mediante derivadas fraccionarias de Caputo y Caputo-Fabrizio. La cual permitió analizar el comportamiento del circuitos eléctricos RC.

**Palabras clave:** Derivada Fraccionaria, Ecuaciones Diferenciales de orden fraccionaria, Circuito eléctrico (RC).



## ABSTRACT

In this research work, the analytical solutions with Caputo and Caputo-Fabrizio derivative in the RC electric circuit model from integer order to fractional order were analyzed, with the objective of analyzing and simulating the RC electric circuit model by means of fractional order equations, so the RC electric circuit model was analyzed by different methods of solution of fractional order differential equations and the simulation of the RC electric circuit model was performed using Wolfram Mathematica 10.4 software. The methodology of this research is framed in the descriptive-deductive. For the modeling we used the physical laws and transition from the ordinary derivative operator to the fractional operator, then for the analytical solution we analyzed by means of the special Mittag-Leffler function, Laplace transform and the inverses of some functions. Finally, for the simulation of a constant source and periodic source of the RC electric circuit model of fractional order, the Wolfram Mathematica 10.4 software was used. The most relevant result is that an analogy was established between the ordinary differential equations and the fractional differential equations by means of Caputo and Caputo-Fabrizio fractional derivatives. This allowed to analyze the behavior of the RC electric circuit.

**Keywords:** Fractional Derivative, Differential Equations of fractional order, Electric Circuit (RC).



# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

#### 1.1.1 Descripción del problema

Así como el cálculo diferencial; el cálculo de orden fraccionaria tiene el estudio tan antiguo. Desde los los años 1695 Leibniz y L'Hôpital, ya tenían la inquietud de darle nombre a la media derivada de una función, es decir:  $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ ; para  $n = 1/2$ . Posteriormente Riemann-Liouville, Cayley y entre otros grandes matemáticos dieron aportes muy importantes al desarrollo del Cálculo de orden fraccionaria. Desde el primer congreso que se llevo a cabo en la década de los 70 el cálculo de orden fraccionaria ha experimentado avances considerables en el área de la matemática pura y aplicada en ingeniería, física, química entre otros; en la actualidad existen investigadores en esta área de estudio [8, 9, 13, 19].

Muchos investigadores están interesados en este nuevo campo del conocimiento con una inquietud de resolver las interrogantes de, ¿cómo caracterizar una derivada de orden fraccionaria?, ¿cuál es su importancia y en que momentos usar? [35], pero son pocos los trabajos relacionados en el modelamiento y análisis basados en ecuaciones diferenciales fraccionarias [4, 32, 33].

La importancia del cálculo de orden fraccionaria en los artículos [12, 28] es más notorio, especialmente en el afán de modelar problemas físicos que requiere de una modelización matemática y obtener resultados precisos [8]; solución factible a los problemas más complejos. Entre las ecuaciones fundamentales de



circuitos eléctricos, se encuentra la ecuación del circuito eléctrico RC (2.47), cuya solución se encuentra en ecuaciones diferenciales, para modelamiento se utiliza las leyes físicas y transición del operador derivado ordinario al operador fraccionario, ahora surge una interrogante ¿Será posible analizar y simular el modelo circuito eléctrico RC usando las ecuaciones diferenciales fraccionarias?

En consecuencia, en esta investigación; desde el análisis teórico hasta la modelización las ecuaciones diferenciales fraccionarias toma un rol muy importante y proporciona un análisis mediante las derivadas fraccionarias de Caputo y Caputo-Fabrizio del modelo circuito eléctrico RC de orden fraccionaria para dar una solución factible [19].

Para simular el comportamiento del análisis se hizo en el programa Mathematica 10.4, que es una herramienta computacional de libre acceso en su plataforma digital para el área de matemática, ingeniería y comúnmente usado para la simulación.

## **1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

¿Será posible analizar y simular el modelo circuito eléctrico RC usando las ecuaciones diferenciales fraccionarias?

## **1.3 HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.3.1 Hipótesis general**

Con el uso de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionaria es factible analizar y simular el modelo circuito eléctrico (RC)



### 1.3.2 Hipótesis específicos

Las ecuaciones diferenciales de orden fraccionaria es una herramienta fundamental para modelar y resolver el modelo circuito eléctrico RC.

Es posible simular el modelo circuito eléctrico RC usando el Software Wolfram Mathematica 10.4.

## 1.4 JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

En la actualidad las ecuaciones diferenciales y el cálculo de orden fraccionaria tiene un papel muy importante en la matemática pura y aplicada; principalmente en el área de física, pues esta permite generalizar muchos conceptos de las ecuaciones diferenciales y ampliar el estudio. El análisis de los circuitos eléctricos RC se encuentran en una amplia variedad de dispositivos electrónicos, desde circuitos integrados hasta sistemas de control y comunicaciones. Tradicionalmente, estos circuitos se han modelado y analizado utilizando ecuaciones diferenciales, basadas en las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm. La simulación de circuitos eléctricos son esenciales para comprender el comportamiento de sistemas eléctricos en diversas aplicaciones. Estos comportamientos a menudo no pueden ser interpretados completamente por las ecuaciones diferenciales; en este contexto, las ecuaciones diferenciales de orden fraccionaria surgen como una herramienta muy importante para modelar el comportamiento de voltaje del capacitor en función del tiempo del circuito eléctrico RC de orden fraccionaria complejo y dinámico; así como es el caso del presente trabajo de investigación, que analiza y luego simula la ecuación diferencial de orden fraccionaria del circuito eléctrico RC, interpreta gráficamente los resultados obtenidos que son esenciales para la descripción y comprensión.



El cálculo de orden fraccionaria muestra estudios mucho más precisos y generales; es por tal razón que se espera aplicaciones a otras ramas del conocimiento.

## **1.5 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.5.1 Objetivo general**

Analizar y simular el modelo circuito eléctrico RC mediante Ecuaciones diferenciales de Orden Fraccionaria.

### **1.5.2 Objetivos específicos**

Analizar el modelo circuito eléctrico RC por diferentes métodos de ecuaciones diferenciales de orden fraccionaria.

Simular el modelo circuito eléctrico RC usando software Wolfram Mathematica 10.4.



## CAPÍTULO II

### REVISIÓN DE LITERATURA

#### 2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Se utilizaron como modelo los siguientes trabajos de investigación:

- HERRERA, MARIEL FERNANDA GARCÍA, 2017. Ecuaciones diferenciales fraccionarias y sus aplicaciones a la ingeniería, Universidad de Guanajuato.

El propósito fundamental de este trabajo es resolver el circuito eléctrico RC bajo estas cuatro diferentes definiciones: Caputo, Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu y el enfoque de la derivada Confortable. Para orden de derivación igual a la unidad las ecuaciones resultantes es preciso el resultado mientras para orden fraccionaria recomienda analizar experimentalmente.

- LÓPEZ, ALEXIS TADEO SILVAN Y GARCIA, JUAN ROSALES, 2016. El Circuito Eléctrico RC de Orden Arbitrario, volumen 2, Jóvenes en la Ciencia.

El principal objetivo de este Artículo es crear un modelo teórico más preciso del circuito eléctrico RC, analizó este comportamiento del modelo utilizando las definiciones de derivadas fraccionarias de Caputo y Caputo-Fabrizio. En los resultados muestra que la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio implica la forma más correcta de usar para los resultados precisos.

- VELÁSQUEZ AYMA, ÁLVARO, 2019. Modelos matemáticos del Movimiento de un Proyectoil Mediante la Existencia de las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias no Lineal, Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco.

Este Tesis de Maestría tiene por objetivo. Encontrar condiciones de existencia de



una ecuación diferencial fraccionaria no lineal y formular modelos matemáticos.

En el análisis llega a una condición necesaria y suficiente para la existencia, donde  $f$  continua y acotada en un conjunto cerrado.

- LÓPEZ MAMANI, MARIO, 2019. Ecuación de Calor y de Onda Mediante una Ecuación Diferencial de Orden Fraccional, Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco.

Este Tesis de Maestría tiene por objetivo. Establecer una relación entre las ecuaciones de calor y de onda estándar y luego generalizar usando las ecuaciones de orden fraccionaria y encontrar la solución, en los resultados establece la relación y luego generaliza, finalmente por medio de dos teoremas de solución de la ecuación diferencial parcial de orden fraccional para una función  $f$  y funciones  $f, g$ ; llega al objetivo propuesto, para lo cual empleó las derivadas de Riemann-Liouville, de hecho usando su transformadas de Laplace y Fourier en términos de la función Mittag-Leffler.

- INGA YOVERA, FABIAN, 2019. Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias Lineales con Coeficientes Constantes, Universidad Nacional de Piura.

Este Tesis tiene por objetivo. Resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales con coeficientes constantes, utilizó las Transformadas de Laplace, las función especial de Mittag-Leffler de uno y dos parámetros así logrando el objetivo trazado.

- LIN, DA and LIAO, XIAOZHONG and DONG, LEI and YANG, RUOCEN and SAMSON, S YU and IU, HERBERT HO-CHING and FERNANDO, TYRONE and LI, ZHEN, 2021. Experimental Study of Fractional-Order RC Circuit Model

Using the Caputo and Caputo-Fabrizio Derivatives, volume 68, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers.

El principal aporte de este Artículo es construir el modelo circuito eléctrico RC de orden fraccionaria y a su vez dar soluciones analíticas basados en las derivadas de Caputo y Caputo-Fabrizio para fuente contante y periódica para una función voltaje del capacitor.

Al hacer una búsqueda general de las tesis e informes archivados en el repositorio de la Universidad Nacional del Altiplano; no se encontraron antecedentes del presente trabajo de investigación que estén relacionados con el tema de estudio.

## 2.2 MARCO TEÓRICO

Antes de mencionar el concepto de Cálculo de orden Fraccionaria, es necesario abordar conceptos previos.

### 2.2.1 Espacio de Funciones.

Se define espacios de funciones en donde las ecuaciones diferenciales sean bien definidas.

**Definición 2.1.** Sea  $\Omega = [a, b]$  un dominio en  $\mathbb{R}$  [13, 33].

$$L_p[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; \text{ es medible sobre } [a, b] \text{ y } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

$$C(\Omega) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ es continua } \}.$$

$$C(\Omega) = C[a, b] = C_0[a, b].$$

$$C^k(\Omega) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ es } k \text{ veces continuamente diferenciable } \}.$$

$$C^\infty(\Omega) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ es infinitamente diferenciable } \}.$$

$$AC[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; \text{ la función } f \text{ es absolutamente continua } \}.$$



**Observación 2.1.** Donde:  $L_p[a, b], p \in [1, \infty]$  espacio de Lebesgue.

### 2.2.2 Función Gamma.

**Definición 2.2.** Para todo número positivo  $x$  se define la función gamma de la siguiente forma [4]:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (2.1)$$

#### Propiedades

- a)  $\Gamma(1) = 1.$
  - b)  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), x > 0.$
  - c)  $\Gamma(n + 1) = n!,$  siendo  $n \in \mathbb{N}.$
- 
- a)  $\Gamma(1) = 1.$

#### Demostración

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_0^b \\ &= 1 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

- b)  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), x > 0.$

### Demostración

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \quad \text{por partes} \quad \left[ \begin{array}{l} u = t^x \Rightarrow du = xt^{x-1} dt \\ dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t} \end{array} \right] \\ &= -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -t^x e^{-t} \Big|_0^b + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

c)  $\Gamma(n+1) = n!$ , siendo  $n \in \mathbb{N}$ .

### Demostración

Por la propiedad de la parte b de esta demostración y que  $\Gamma(1) = 1$ , se tiene.

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 1 \cdot 2 = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$$

Se tiene por hipótesis de inducción  $\Gamma(k+1) = k!$  para  $n = k+1$ :

$$\Gamma((k+1)+1) = (k+1)\Gamma(k+1)!$$

$$= (k+1)k!$$

$$\therefore \Gamma((k+1)+1) = (k+1)! \quad \blacksquare$$

### 2.2.3 Función Beta.

**Definición 2.3.** Sea  $\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  La función Beta está definida por:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt; \text{ para } x, y > 0. \quad (2.2)$$



*Para determinar el vínculo entre las funciones gamma y beta se tienen en cuenta las siguientes propiedades [33]:*

### **Propiedades**

a) Para  $x > 0$  y  $y > 0$  se tiene.

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.3)$$

b) Si  $x > 0, y > 0$  entonces.

$$\beta(x, y) = \beta(y, x) \quad (2.4)$$

c) Si  $m < x < m + 1$ , con  $x = \alpha + m$  y  $0 < \alpha < 1$ , entonces.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi x)} \quad (2.5)$$

d) Si  $2x \notin \mathbb{Z}_0^-$ , entonces.

$$\Gamma(x)\Gamma(x + \frac{1}{2}) = 2^{1-2x}\Gamma(2x)\sqrt{\pi} \quad (2.6)$$

Las demostraciones de las propiedades 2.3, 2.4 se encuentran en el [7], la parte 2.5 y 2.6 se encuentra en [25].

## 2.2.4 Función de Mittag-Leffler.

### 1. Función de Mittag-Leffler de un parámetro $\alpha$ .

**Definición 2.4.** Sea  $z$  de una sola variable (real o compleja) y  $\alpha$  es un solo parámetro (real positivo, o en la mitad derecha del plano complejo), La función Mittag-Leffler para un parámetro se define [18]:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}; (\operatorname{Re}(\alpha) > 0) \quad (2.7)$$

### 2. Función de Mittag-Leffler de dos parámetros $\alpha, \beta$ .

**Definición 2.5.** Una generalización para dos parámetros se define como sigue, donde nuevamente  $z$  es una sola variable y  $\alpha, \beta$  son dos parámetros (en  $\alpha$  sigue las mismas restricciones de la definición 2.4, sin restricciones en  $\beta$ ) [18]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.8)$$

**Observación 2.2.** a) Si  $\beta = 1$ , entonces  $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$ .

b) Si  $\alpha = \beta = 1$ , entonces se obtiene la función exponencial.

### Demostración

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= e^z \\ E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k)!} \\ &= e^z \end{aligned} \quad \blacksquare$$

- c) La suma de una progresión geométrica decreciente se obtiene cuando  $\alpha = 0, \beta = 1$ .

$$E_{0,1}(z) = \frac{1}{1-z}$$

Demostración

$$\begin{aligned} E_{0,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(0+1)} && ; \Gamma(n+1) = n! \\ & && \longrightarrow \Gamma(0+1) = 0! = 1 \\ E_{0,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \\ &= 1 + z^1 + z^2 + z^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1-z}; |z| < 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- d) Si  $\alpha = 2, \beta = 1$ , se obtiene el  $\cosh(\sqrt{z})$ .

$$E_{2,1}(z) = \cosh(\sqrt{z})$$

Demostración

$$\begin{aligned} E_{2,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{z})^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 + \frac{(\sqrt{z})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{z})^4}{4!} + \dots \\ \therefore E_{2,1}(z) &= \cosh(\sqrt{z}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 2.2.5 Derivada iterada.

Sea  $f(x)$  una función real y se aplica  $n$ -derivadas [27].

Para  $n = 0$ .

$$D^0 f(x) = \frac{d^0}{dx^0} f(x) = f^0(x) = f(x)$$

Cuando  $n = 1$ .

$$D^1 f(x) = \frac{d^1}{dx^1} f(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f^{(1)}(x) = f'(x)$$

Para  $n = 2$ .

$$D^2 f(x) = D[Df(x)] = \frac{d}{dx} \left[ \frac{d}{dx} f(x) \right] = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = f^{(2)}(x)$$

Para  $n$ -derivadas se tiene.

$$D^n f(x) = D[D \cdots [Df(x)]] = \underbrace{\frac{d}{dx} \left[ \frac{d}{dx} \cdots \left[ \frac{d}{dx} f(x) \right] \right]}_{n\text{-veces}} = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) \quad (2.9)$$

### 2.2.6 La Integral iterada.

Una integral iterada es una integral evaluada múltiples veces sobre la misma variable (en contraste con una integral múltiple, que consiste en un número de integrales evaluadas con respecto a diferentes variables) [27].

**Definición 2.6.** Sea  $f(x)$ , para  $x > 0$ , se define la integral indefinida de  $f$  entre

$[0, x]$ , y se denota por:  $I f(x)$  ó  $D^{-1} f(x)$  [33], por lo tanto:

$${}_0 I_x^1 = D^{-1} f(x) = I f(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (2.10)$$

Desde  $n = 2$  se generaliza aplicando el operador integral.

$${}_0 I_x^2 = D^{-2} f(x) = {}_0 I_x^2 f(x)$$

Por otra parte 2.10 se escribe como:

$${}_0I_x g(x) = \int_0^x g(x_1) dx_1$$

Cuando se considera  $g(x_1)$  como  ${}_0I_{x_1} g(x)$ , ocurre lo siguiente.

$$\begin{aligned} {}_0I_x g(x) &= \int_0^x g(x_1) dx_1 \\ &= \int_0^x \int_0^{x_1} f(t) dt dx_1 \end{aligned}$$

Otra vez usando la notación 2.10, se tiene.

$$\begin{aligned} {}_0I_x g(x) &= {}_0I_x ({}_0I_x f(x)) = {}_0I_x^2 f(x) \\ {}_0I_x^2 f(x) &= \int_0^x \int_0^{x_1} f(t) dt dx_1 \end{aligned}$$

Al hacer un cambio de variable en el dominio de integración se tiene.

$$D_1 = \{(t, x_1) / 0 \leq t \leq x_1 \wedge 0 \leq x_1 \leq x\}$$

$$D_2 = \{(x_1, t) / t \leq x_1 \leq x \wedge 0 \leq t \leq x\}$$

En consecuencia se tiene.

$$\begin{aligned} {}_0I_x^2 f(x) &= \int_0^x \int_t^x f(t) dx_1 dt \\ &= \int_0^x f(t) \int_t^x dx_1 dt \\ &= \int_0^x f(t)(x-t) dt \end{aligned}$$

Para  $n = 3$ .

$${}_0I_x^3 = D^{-3} f(x) = {}_0I_x^3 f(x) = {}_0I_x^2 [{}_0I_x f(x)]$$

Sabemos que.

$${}_0I_x^2 = {}_0I_x^2 f(x) = \int_0^x \int_t^x f(t) dx_1 dt$$

Así

$$\begin{aligned} {}_0I_x^3 &= D^{-3}f(x) = {}_0I_x^3f(x) \\ &= \int_0^x \left[ \int_0^t {}_0I_x f(s) ds \right] dt \\ &= \int_0^x \left[ \int_0^{x_1} \left[ \int_0^{x_2} f(t) dt \right] dx_2 \right] dx_1 \end{aligned}$$

Ahora tendremos una integral iterada de tercer orden.

$$\begin{aligned} {}_0I_x^3 f(x) &= \int_0^x \int_0^{x_1} \int_t^{x_1} f(t) dx_2 dt dx_1 \\ &= \int_0^x \int_0^{x_1} f(t)(x_1 - t) dt dx_1 \\ &= \int_0^x \int_t^x f(t)(x_1 - t) dx_1 dt \\ &= \int_0^x f(t) \frac{(x_1 - t)^2}{2} \Big|_t^x dt \\ &= \frac{1}{2!} \int_0^x f(t)(x - t)^2 dt \end{aligned}$$

luego para  $n$ -integrales iteradas, se tiene.

$${}_0I_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt \quad (2.11)$$

Mas conocido como formula de Cauchy para todo  $n$ -natural para integrales iteradas.

**Proposición 2.1.** [ley de exponentes] Para  $f \in L_1(a, b)$  se verifica que

$$I^\alpha I^\beta f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \quad (2.12)$$

La demostración de la proposición 2.1 se encuentra en [22].

### 2.2.7 Derivada Fraccionaria.

En [29], mencionan  $D = \frac{d}{dx}$  como el operador derivada, y para  $n$ -natural;  $D^n f(x)$  la derivada  $n$ -ésima. Si  $n \notin \mathbb{Z}^+$  entonces se plantea  $D^{-v}$ , también se definen  $D^\alpha$  como la derivada fraccionaria de  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

Se tiene  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  y  $n$  el entero más pequeño mayor que  $\alpha$ ; sea  $v = n - \alpha$ , entonces  $0 < v \leq 1$ , donde  $D^\alpha$  se define la derivada fraccionaria de la función  $f(x)$  de orden  $\alpha$ .

Para  $\alpha = n - v$  ocurre.

$${}_0D_x^\alpha f(x) = D^{n-v} f(x) = D^n [D^{-v} f(x)], \quad x > 0$$

Para una función de tipo  $f(x) = x^\mu$ , la derivada fraccionaria se tiene  $D^\alpha x^\mu = D^n [D^{-v} x^\mu]$

**Definición 2.7.** Para  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+ / n - 1 \leq \alpha < n$ , la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de la función  $f(x)$  de orden  $\alpha$  se define [13].

$${}^RL D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (2.13)$$

### 2.2.8 Transformada de Laplace.

**Definición 2.8.** Para una función  $f(t)$  la transformada de Laplace está definida por  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ , donde.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (2.14)$$

En general, denotaremos la transformación por  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ . Suponemos que en (2.14) la función  $f(t)$  está definida para todo  $t$  positivo  $t \in \langle 0, \infty \rangle$ ,  $s$  es real y, lo más importante, que la integral es convergente. Una condición necesaria para la convergencia se detalla en [2].

**Definición 2.9.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función, se dice que  $f$  es continua por tramos o seccionalmente continua en el intervalo  $[a, b]$ , si es posible particionar el intervalo en un número finito de subintervalos de tal manera que la función sea continua en cada uno de ellos, pero no necesariamente en sus extremos [21].

**Definición 2.10.** Sea  $f$  de orden exponencial  $c$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ ; existen constantes positivos  $c$ ,  $M$  y  $T$  tales que [31]:

$$|e^{-ct}f(t)| < M \text{ ó } |f(t)| < Me^{ct}, \forall t > T \quad (2.15)$$

**Teorema 2.1.** Sea  $f$  seccionalmente continua en cada intervalo finito para  $t \in [0, T]$  de orden exponencial y para  $t > T$ ; existe transformada de Laplace  $F(s)$ ,  $\forall s > c$  [21].

La siguiente tabla 1 presenta la transformada de Laplace de las funciones mas usuales en la investigación.

**Tabla 1**

*Tabla de la transformada de Laplace.*

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
$t$	$\frac{1}{s^2}, s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}, s > 0$
$\frac{\text{sen}(at)}{a}$	$\frac{1}{s^2+a^2}, s > 0$
$\text{cos}(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$

### 2.2.9 Propiedades de la Transformada de Laplace.

1. Propiedad de la Linealidad.

Sea  $c_1$  y  $c_2$  las constantes con  $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ ;  $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$ ,

entonces su transformada de:

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \quad (2.16)$$

#### Demostración

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} &= \int_0^{\infty} (c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t))e^{-st} dt, \text{ por (2.14)} \\ &= c_1 \underbrace{\int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt}_{F_1(s)} + c_2 \underbrace{\int_0^{\infty} f_2(t)e^{-st} dt}_{F_2(s)} \\ &= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. Transformada de Laplace de la derivada de primer orden.

**Teorema 2.2.** Si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , entonces.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (2.17)$$

Donde  $f$  es continua para  $t \in [0, N]$ , de orden exponencial para  $t > N$  y  $f'$  seccionalmente continua para  $t \in [0, N]$  [24].

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-st} f'(t) dt \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \{ [e^{-st} f(t)]_0^P + s \int_0^P e^{-st} f(t) dt \} \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \{ e^{-sP} f(P) - f(0) + s \int_0^P e^{-st} f(t) dt \} \\ &= s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt - f(0) \\ &= sF(s) - f(0) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Para  $t \rightarrow \infty$ ,  $f$  es de orden exponencial, de tal forma  $\lim_{P \rightarrow \infty} e^{-sP} f(P) = 0$ , para  $s > N$ .

### 3. Transformada de Laplace de la Derivada de Orden $n$

**Teorema 2.3.** Sea  $f(t)$  y sus derivadas  $f'(t), f''(t), f'''(t), \dots, f^{n-1}(t)$  funciones continuas para  $t \geq 0$ , que satisfacen (2.15), para ciertos valores de  $c$  y  $M$  y sea la derivada  $f^{(n)}(t)$  sobre cualquier intervalo finito para  $t \geq 0$ . Entonces la transformada de Laplace de  $f^{(n)}(t)$  existe cuando  $s > c$  y es dada por [24] :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{n-2}(0) - s^0 f^{n-1}(0) \quad (2.18)$$

### Demostración

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \{f^{(n)}(t)\} &= \mathcal{L} \{[f^{(n-1)}(t)]'\} \\
 &= s \mathcal{L} \{[f^{(n-1)}(t)]\} - f^{(n-1)}(0), \text{ por 2.17.} \\
 &= s \mathcal{L} \{[f^{(n-2)}(t)]'\} - f^{(n-1)}(0) \\
 &= s[s \mathcal{L} \{[f^{(n-2)}(t)]\} - f^{(n-2)}(0)] - f^{(n-1)}(0) \\
 &= s^2 \mathcal{L} \{[f^{(n-2)}(t)]\} - s f^{(n-2)}(0) - s^0 f^{(n-1)}(0)
 \end{aligned}$$

Continuando el proceso hasta llegar a las derivadas del menor orden.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \{f^{(n)}(t)\} &= s^{n-2} \mathcal{L} \{[f'(t)]'\} - \dots - s f^{(n-2)}(0) - s^0 f^{(n-1)}(0) \\
 &= s^{n-2} [s \mathcal{L} \{[f'(t)]\} - f'(0)] - \dots - \\
 &\quad s f^{(n-2)}(0) - s^0 f^{(n-1)}(0) \\
 &= s^{n-1} \{s F(s) - f(0)\} - \dots - s f^{(n-2)}(0) - s^0 f^{(n-1)}(0) \\
 &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - \\
 &\quad s f^{(n-2)}(0) - s^0 f^{(n-1)}(0)
 \end{aligned}$$

■

#### 4. Propiedad de la Transformadas de Laplace de la Integral.

Si  $\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s)$ , entonces.

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(u) du \right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{2.19}$$

### Demostración

Sea  $H(t) = \int_0^t f(u) du$ , entonces  $H'(t) = f(t)$  y  $H(0) = 0$

Aplicando la Transformada de Laplace  $H'(t)$  usando la condición  $H(0) =$

0.



$$\mathcal{L}\{H'(t)\} = s\mathcal{L}\{H(t)\} - H(0)$$

$$= s\mathcal{L}\{H(t)\} - 0$$

$$\mathcal{L}\{H'(t)\} = s\mathcal{L}\{H(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{H'(t)\}}{s}$$

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

### Observación 2.3.

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, \quad s > 0 \quad (2.20)$$

#### 2.2.10 Convolución de Funciones.

Sea las funciones  $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente continuas de orden exponencial con sus respectivas Transformadas de Laplace en parámetro  $s$ : dadas por  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  y  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ . Se dice que  $(f * g)(t)$  es la convolución de  $f$  y  $g$  si y sólo si:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (2.21)$$

Su Transformada de Laplace esta dado por [7]:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$$

### 2.2.11 Transformada de Laplace de la Funcion Mittag-Leffler.

La Transformada de Laplace de la función Mittag Leffler (2.7) y la primera derivada con respecto a  $t$  son [30]:

$$\mathcal{L}\{E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \lambda} \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}\{E'_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})\} = \frac{\lambda}{s^{\alpha} - \lambda} \quad (2.23)$$

**Proposición 2.2.** *Dados  $s, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $Re(\alpha) > 0$ ,  $Re(\beta) > 0$ , se cumple para todo  $t \geq 0$ ,  $Re(\lambda) > 1$  [13].*

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - \lambda} \quad (2.24)$$

#### Demostración

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\right\} &= \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-ts} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-st} t^{\beta-1+\alpha k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \mathcal{L}\{t^{\beta+\alpha k-1}\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{s^{\beta+\alpha k}}, \text{ por la observación 2.3} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{s^{\beta+\alpha k}} \\ &= \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right)^k \\ &= \frac{1}{s^{\beta}} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{s^{\alpha}}}; \text{ si, } \left|\frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right| < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{s^\beta} \frac{s^\alpha}{s^\alpha - \lambda} \\ \mathcal{L} \{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\} &= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 2.2.12 Derivada fraccionaria de Caputo.

Cuando se intenta crear representaciones matemáticas de fenómenos físicos reales utilizando ecuaciones diferenciales fraccionarias, surge un desafío relacionado con las condiciones iniciales de orden fraccionaria, las cuales aún carecen de una interpretación física clara.

El operador diferencial de Caputo resuelve este problema al revertir el orden de derivación establecido por la definición de Riemann-Liouville. Esto implica que las condiciones iniciales se expresan en términos de derivadas de orden entero, representando así un avance significativo en la investigación de fenómenos físicos.

**Definición 2.11.** *La derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha > 0$  de  $f$  se define como [28]:*

$${}^C D_x^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt; \quad (x > a) \quad (2.25)$$

Donde  $n = [\alpha] + 1 \in \mathbb{N}$ , esto es,  $n$  es la parte entera de  $\alpha$  más uno.

A diferencia de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, que implica una integración seguida de una derivación, la derivada de Caputo sigue un proceso inverso: primero se realiza la derivación y luego se lleva a cabo la integración.

Eso implica que  $f(t)$  sea integrable y  $f \in (AC)^n[a, b]$  lo cual es una condición suficiente para la derivada fraccionaria de Caputo de cualquier orden  $\alpha$ .

La derivada fraccionaria de Caputo satisface las siguientes igualdades para  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  [15]:

$${}_a^C D_x^\alpha [c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)] = c_1 [{}_a^C D_x^\alpha f(x)] + c_2 [{}_a^C D_x^\alpha g(x)] \quad (2.26)$$

### Demostración

Usando la ecuación 2.25, se tiene.

$$\begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha [c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)] &= I^{n-\alpha} D^n [c_1 f(x) + c_2 g(x)] \\ &= I^{n-\alpha} \left[ \frac{c_1 d^n}{dx^n} f(x) + \frac{c_2 d^n}{dx^n} g(x) \right] dx \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} f(t) dt \\ &\quad + \frac{c_2}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} g(t) dt, \end{aligned}$$

por la igualdad 2.11.

$$= c_1 [{}_a^C D_x^\alpha f(x)] + c_2 [{}_a^C D_x^\alpha g(x)] \quad \blacksquare$$

**Proposición 2.3.** Sean  $\alpha \notin \mathbb{N}$  ( $Re(\alpha) > 0$ ),  $n = [Re(\alpha)] + 1$  y  $f \in L_1(a, b)$  función tal que existe la derivada fraccionaria de Caputo  ${}_a^C D_x^\alpha f(x)$  y Riemann-Liouville  ${}_a D_x^\alpha f(x)$ , entonces se verifica [15, 28]:

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha}, (x > a) \quad (2.27)$$

Especialmente cuando se trata de órdenes de derivación fraccionarias, las derivadas de Caputo y Riemann-Liouville serán idénticas si se cumple cierta condición.

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{n-1}(a) = 0 \quad (2.28)$$

La demostración de la proposición 2.3 se encuentra en [17].

**Definición 2.12.** Sean  $k, \alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n < \alpha < n + 1$ , una función  $f \in (AC)^n[a, b]$ , el espacio de funciones que tienen enésimas derivadas absolutamente continuas, entonces, la  $k$ -derivada fraccionaria alternativa de Caputo de  $f$  de orden  $\alpha$  esta dado por [34].

$${}_a^C D_k^\alpha f(x) = k^n (I_k^{nk-\alpha} f^{(n)})(x) = \frac{k^{n-1}}{\Gamma_k(nk-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{nk-\alpha}{k}-1} f^{(n)}(t) dt \quad (2.29)$$

Cuando  $k \rightarrow 1$ , entonces  ${}_a^C D_k^\alpha f(x) \rightarrow {}_a^C D^\alpha f(x)$  se recupera la clásica derivada de Caputo.

**Proposición 2.4.** Sean  $f \in L_1(a, b)$ ,  $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{N}/n < \alpha < n + 1$  y  $Re(\alpha) > 0$  entonces si  $f(x) \in (AC)^n[a, b]$  ó  $f \in C^n[a, b]$ , se tiene [33, 34].

$${}_a I_k^\alpha ({}_a^C D_k^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(x-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) \quad (2.30)$$

### Demostración

Por la proposición 2.1, se tiene  $I_k^\alpha I_k^\beta = I_k^{\alpha+\beta}$ .

$$\begin{aligned}
 {}_a I_k^\alpha ({}^C D_k^\alpha f(x)) &= {}_a I_k^\alpha [k^n ({}_a I_k^{n-k-\alpha})] f^{(n)}(x) \\
 &= k^n ({}_a I_k^\alpha {}_a I_k^{n-k-\alpha}) f^{(n)}(x) \\
 &= k^n {}_a I_k^n f^{(n)}(x)
 \end{aligned}$$

El desarrollo de la integral es:

$$\begin{aligned}
 k^n {}_a I_k^n f^{(n)}(x) &= \frac{k^{n-1}}{\Gamma_k(nk)} \int_a^x (x-t)^{\frac{nk}{k}-1} f^{(n)}(t) dt \\
 &= \frac{k^{n-1}}{k^{\frac{nk}{k}-1} \Gamma(\frac{nk}{k})} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt = {}_a I_k^n f^{(n)}(x) \\
 &= f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(x-a)^m}{m!} f^m(a) \\
 &= f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x^m}{m!} f^m(0^+); (a=0) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Donde  $n = [Re(\alpha)] + 1$  para  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , y para  $n = \alpha \in \mathbb{N}$  se llega a

$${}_a I_x^\alpha ({}^C D_x^\alpha f(x)) = f(x) + c_0 + c_1 x^{\alpha-1} + c_2 x^{\alpha-2} + c_3 x^{\alpha-3} + \dots + c_{n-1} x^{\alpha-n} \quad (2.31)$$

donde  $c_i \in \mathbb{C}; \forall i = 1, 2, 3, \dots, n-1$  [33].

**Proposición 2.5.** Sean  $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}/n < \alpha < n+1$ , una función  $f(x) \in (AC)^n[a, b]$  [34].

$${}^C D_k^\alpha ({}^C D_k^\beta f(x)) = {}^C D_k^{\alpha+\beta} f(x) \quad (2.32)$$

### Demostración

$$\begin{aligned} {}^C D_k^\alpha ({}^C D_k^\beta) f(x) &= k^{\frac{\alpha}{k}} {}^C D_k^{\frac{\alpha}{k}} [k^{\frac{\beta}{k}} {}^C D_k^{\frac{\beta}{k}} f(x)] \\ &= k^{\frac{\alpha}{k}} k^{\frac{\beta}{k}} {}^C D_k^{\frac{\alpha}{k}} [{}^C D_k^{\frac{\beta}{k}} f(x)] \\ &= k^{\frac{\alpha+\beta}{k}} [{}^C D_k^{\frac{\alpha+\beta}{k}} f(x)] \\ &= {}^C D^{\alpha+\beta} f(x); k \rightarrow 1, \text{ es la clásica derivada de Caputo. } \blacksquare \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.1.** Evalúe la derivada fraccionaria Caputo de la expresión  $e^{\lambda x}$ .

### Desarrollo

Por hipótesis del problema  $y = e^{\lambda x}$ , se tiene que:  $y' = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ , entonces.

$$\begin{aligned} {}^C D_x^\alpha e^{\lambda t} &= {}_a I_x^{n-\alpha} \left( \frac{d^n}{dx^n} e^{\lambda x} \right) \\ &= {}_a I_x^{n-\alpha} (\lambda^n e^{\lambda x}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (\lambda^n e^{\lambda t}) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \lambda^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dt, \quad e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^k dt \\ &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_a^x x^{n-\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} t^k dt \end{aligned}$$

Haciendo cambio de variable  $y = \frac{t}{x}$ , se tiene  $t = xy$  y  $dt = xdy$ , luego.

$$\begin{aligned}
 {}^C D_x^\alpha e^{\lambda x} &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{a/x}^1 x^{n-\alpha-1} (1-y)^{n-\alpha-1} (xy)^k x dy \\
 &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} x^{n-\alpha-1+k+1} \int_{(a/x) \rightarrow 0}^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^k dy \\
 &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} x^{n-\alpha-1+k+1} \int_{(a/x) \rightarrow 0}^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^k dy \\
 &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} x^{n-\alpha+k} \beta(k+1, n-\alpha) \text{ por 2.2.} \\
 &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} x^{n-\alpha+k} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \text{ por 2.3.} \\
 &= \lambda^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+k-\alpha} \lambda^k}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \\
 &= \lambda^n x^{n-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \\
 &= \lambda^n x^{n-\alpha} E_{(1, n-\alpha+1)}(\lambda x) \text{ por 2.8.}
 \end{aligned}$$

$$\therefore {}^C D_x^\alpha e^{\lambda x} = \lambda^n x^{n-\alpha} E_{(1, n-\alpha+1)}(\lambda x)$$

**Ejemplo 2.2.** Evalúe la derivada fraccionaria Caputo de la expresión  $\text{sen}(\lambda x)$ .

### Desarrollo

$$\begin{aligned}
 {}^C D_x^\alpha \text{sen}(\lambda x) &= {}^C D_x^\alpha \left\{ \frac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2i} \right\} \\
 &= \frac{1}{2i} [{}^C D_x^\alpha \{e^{i\lambda x}\} - {}^C D_x^\alpha \{e^{-i\lambda x}\}] \text{ por el ejemplo 2.1.} \\
 &= \frac{1}{2i} [(i\lambda)^n x^{n-\alpha} E_{(1, n-\alpha+1)}(i\lambda x) - \\
 &\quad (-i\lambda)^n x^{n-\alpha} E_{(1, n-\alpha+1)}(-i\lambda x)] \\
 &= -\frac{1}{2} i (i\lambda)^n [x^{n-\alpha} E_{(1, n-\alpha+1)}(i\lambda x) - \\
 &\quad (-1)^n x^{n-\alpha} E_{(1, n-\alpha+1)}(-i\lambda x)]
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.3.** Evalúe la derivada fraccionaria Caputo de la expresión  $\cos(\lambda x)$ .

Desarrollo

$$\begin{aligned}
 {}_0^C D_x^\alpha \cos(\lambda x) &= {}_0^C D_x^\alpha \left\{ \frac{e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} [{}_0^C D_x^\alpha \{e^{i\lambda x}\} + {}_0^C D_x^\alpha \{e^{-i\lambda x}\}] \text{ por el ejemplo 2.1.} \\
 &= \frac{1}{2} (i\lambda)^n [x^{n-\alpha} E_{(1, n-\alpha+1)}(i\lambda x) + \\
 &\quad (-1)^n x^{n-\alpha} E_{(1, n-\alpha+1)}(-i\lambda x)] \\
 {}_0^C D_x^\alpha \cos(\lambda x) &= \frac{1}{2} (i\lambda)^n x^{n-\alpha} [E_{(1, n-\alpha+1)}(i\lambda x) + (-1)^n E_{(1, n-\alpha+1)}(-i\lambda x)]
 \end{aligned}$$

**2.2.13 Transformada de Laplace de la derivada de Caputo.**

**Proposición 2.6.** Sea  $f \in L_1(a, b)$  y  $\alpha > 0$ , definimos la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo de la función  $f$  de orden  $\alpha$  como [28]:

$$\mathcal{L} \{ {}_a^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (2.33)$$

Donde  $F(s)$  es la transformada de Laplace de  $f(t)$  y  $n = [\alpha] + 1$ .

Demostración

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \{ {}_a^C D_t^\alpha f(t) \} &= \mathcal{L} \left\{ {}_a I_t^{n-\alpha} \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \right\} \\
 &= \frac{\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right\}}{s^{n-\alpha}}, \text{ por la ecuación 2.19.} \\
 &= \frac{1}{s^{n-\alpha}} \mathcal{L} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right\} \\
 &= \frac{1}{s^{n-\alpha}} \{ s^n \mathcal{L} \{ f(t) \} - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0) \}; \\
 &\text{por 2.18.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0) - s^{\alpha-2} f'(0) - \dots \\
 &\quad - s^{\alpha-n+1} f^{n-2}(0) - s^{\alpha-n} f^{n-1}(0) \\
 &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.4.** Calcule la transformada de Laplace de  $f$  de la siguiente expresión.

${}_0^C D_t^\alpha f(t) + af(t) = 0, t > 0$  con la condición inicial  $f(0) = c, (0 < \alpha < 1)$  para  $n = 1$ .

### Desarrollo

Aplicando la transformada de Laplace en el enunciado.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \{ {}_0^C D_t^\alpha f(t) \} + a\mathcal{L} \{ f(t) \} &= 0 \\
 \left\{ s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-n} f^{(k)}(0) \right\} + aF(s) &= 0
 \end{aligned}$$

Cuando  $n = 1$ .

$$s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^0 s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) + aF(s) = 0$$

$$s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0) + aF(s) = 0$$

$$(s^\alpha + a)F(s) - s^{\alpha-1} f(0) = 0$$

$$(s^\alpha + a)F(s) - s^{\alpha-1} c = 0$$

Por hipótesis  $f(0) = c$ .

$$(s^\alpha + a)F(s) - s^{\alpha-1} c = 0$$

$$(s^\alpha + a)F(s) = s^{\alpha-1} c$$

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + a)} c \quad (2.34)$$

**Ejemplo 2.5.** Evalúe la transformada de Laplace de  $f(t)$  en la expresión

${}_0^C D_t^\alpha f(t) + {}_0^C D_t^\beta f(t) = h(t), t > 0$  con la condición inicial  $f(0) = c, 0 < \alpha < \beta < 1$ .

## Desarrollo

Aplicando la transformada de Laplace en el enunciado.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ {}^C_0D_t^\alpha f(t) \} + \mathcal{L}\{ {}^C_0D_t^\beta f(t) \} &= \mathcal{L}\{ h(t) \} \\ s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) + s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\beta-k-1} f^{(k)}(0) &= H(s) \\ 0 < \alpha, \beta < 1 \quad n-1 < \alpha \leq n \end{aligned}$$

Cuando  $n = 1$ .

$$\begin{aligned} s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0) + s^\beta F(s) - s^{\beta-1} f(0) &= H(s) \\ (s^\alpha + s^\beta)F(s) &= H(s) + (s^{\alpha-1} + s^{\beta-1})c \\ F(s) &= \frac{H(s)}{s^\alpha + s^\beta} + \frac{(s^{\alpha-1} + s^{\beta-1})}{s^\alpha + s^\beta} c \\ F(s) &= H(s) \cdot \frac{1}{s^\alpha + s^\beta} + \frac{s^\alpha \cdot \frac{1}{s} + s^\beta \cdot \frac{1}{s}}{s^\alpha + s^\beta} c \\ F(s) &= H(s) \cdot \frac{1}{s^\alpha + s^\beta} + \frac{c}{s} \end{aligned} \tag{2.35}$$

**Definición 2.13.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  una función. La Transformada Inversa de Laplace de  $F$  denotado por  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ , se define en [21]:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} F(s) ds; \quad a = \text{Re}(s). \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.6.** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  de la ecuación (2.34) y evaluar cuando  $\alpha = 1$ .

Desarrollo

$$f(t) = c\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + a} \right\} \quad (2.36)$$

Usando la proposición 2.2, para  $(\beta = 1, \lambda = -a)$ ; Finalmente.

$$f(t) = c \{t^{1-1} E_{\alpha,1}(-at^{\alpha})\}$$

$$f(t) = c E_{\alpha,1}(-at^{\alpha})$$

Cuando  $\alpha = 1$ .

$$\begin{aligned} f(t) &= c E_{1,1}(-at) \\ &= c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-at)^k}{\Gamma(1 \cdot k + 1)} \\ &= c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-at)^k}{k!} \\ &= c e^{-at} \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.7.** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  de la ecuación (2.35).

Desarrollo

Se tiene.

$$F(s) = H(s) \cdot \underbrace{\frac{1}{s^{\alpha} + s^{\beta}}}_{G(s)} + \frac{c}{s}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s) \cdot H(s)\} + c \cdot 1$$

donde.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s^\alpha + s^\beta} \\ &= \frac{1}{s^\alpha \left(1 + \frac{s^\beta}{s^\alpha}\right)} \\ G(s) &= \frac{s^{-\alpha}}{s^{\beta-\alpha} + 1} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Usando la proposición 2.2.

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= -\alpha \\ \alpha &= \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

$$g(t) = t^{\beta-1} E_{\frac{\beta}{2}, \beta}(-1 \cdot t^{\frac{\beta}{2}})$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s) \cdot H(s)\} + c \quad (2.38)$$

Usando 2.21. en 2.38, se tiene.

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t) * h(t) + c \\ &= \int_0^t g(t-\tau)h(\tau)d\tau + c \\ &= \int_0^t g(t-\tau)^{\beta-1} E_{\frac{\beta}{2}, \beta}(-1 \cdot (t-\tau)^{\frac{\beta}{2}})h(\tau)d\tau + c \end{aligned}$$

#### 2.2.14 Derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio

La derivada fraccionaria de Caputo presenta una complejidad computacional; para evitar ese problema se propone la derivada de Caputo-Fabrizio; esta derivada Fraccionaria de Caputo-Fabrizio es obtenida a partir del cambio de Kernel.

En [22], Caputo-Fabrizio proponen una nueva definición de derivada fraccionaria. Esencialmente, para  $0 < \alpha < 1$ , proponen sustituir el núcleo integral  $(x - t)^{-\alpha}$  presente en la definición clásica de la derivada fraccionaria de Caputo, por la función  $\exp\left(\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)$  y la constante multiplicativa  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$  por  $M(\alpha) \in \mathbb{R}$ , donde  $M(\alpha)$  es un parámetro dependiente de  $\alpha$  de modo que  $M(0) = M(1) = 1$ . Se obtiene así, para una función  $f$ , la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio.

**Definición 2.14.** Sea  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $f(x) \in AC^m[a, b]$  para  $a < b$  se define la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio como [1]:

$${}^{\text{CF}}D_x^\alpha f(x) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt$$

Donde  $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$  es una función de normalización con la propiedad  $M(0) = M(1) = 1$ .

**Teorema 2.4.** Para  $\alpha \in [0, 1]$ , se tiene  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \{{}^{\text{CF}}D_t^\alpha f(x)\} = f'(x)$ .

#### Demostración

Sea

$$k_\alpha = \frac{e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}}}{1-\alpha} \quad (2.39)$$

Cuando  $x = t$ .

$$\begin{aligned} k_\alpha &= \frac{e^0}{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \\ \text{entonces } \lim_{\alpha \rightarrow 1} \{k_\alpha\} &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \right\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Cuando  $x > t$  entonces sucede que:  $x - t > 0$ , entonces.

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 1} \{k_\alpha\} &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} \right\} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1-\alpha}}{e^{\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}}} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{(1-\alpha)^2}}{e^{\left(\frac{\alpha(x-t)}{(1-\alpha)}\right)} \frac{(x-t)}{(1-\alpha)^2}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{(x-t)e^{\left(\frac{\alpha(x-t)}{(1-\alpha)}\right)}} \\ \therefore \lim_{\alpha \rightarrow 1} \{k_\alpha\} &= 0\end{aligned}$$

Entonces se tiene.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \{k_\alpha\} = \begin{cases} \infty & \text{si } x = t \\ 0 & \text{si } x > t \end{cases} = \delta(x-t), \text{ delta de dirac } \delta.$$

1) Desarrollo de la función delta de dirac  $\delta$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t) dt = 1 \quad (2.40)$$

2)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-t) dt \\ &= f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t) dt\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(x-t) dt = f(x) \quad (2.41)$$

Finalmente se tiene.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \{ {}_a^{CF} D_x^\alpha f(x) \} &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt \right\} \\
 &= \int_a^x \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} \right\} f'(t) dt, \quad M(\alpha) = 1 \\
 &= \int_a^x \lim_{\alpha \rightarrow 1} \{ k_\alpha \} f'(t) dt \text{ por 2.39} \\
 &= \int_a^x \delta(x-t) f'(t) dt \\
 &= f'(x), \text{ por 2.41.}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\alpha \rightarrow 1} \{ {}_a^{CF} D_x^\alpha f(x) \} = f'(x) \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.5.** Para  $\alpha \in [0, 1]$  se tiene:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{ {}_a^{CF} D_x^\alpha f(x) \} = f(x) - f(a)$$

### Demostración

$$\begin{aligned}
 {}_a^{CF} D_x^\alpha f(x) &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt \\
 &= \frac{1}{(1-\alpha)} \left[ e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f(t) \Big|_a^x - \int_a^x f(t) e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} \frac{\alpha}{1-\alpha} dt \right] \\
 &\quad , \quad M(0) = M(1) = 1 \\
 &= \frac{1}{(1-\alpha)} \left[ f(x) - e^{-\frac{\alpha(x-a)}{1-\alpha}} f(a) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f(t) dt \right] \\
 &= \frac{f(x)}{(1-\alpha)} - \frac{f(a)}{(1-\alpha)} e^{-\frac{\alpha(x-a)}{1-\alpha}} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f(t) dt + \\
 &\quad \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f(x) dt - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f(x) dt \\
 &= \left\{ \frac{f(x)}{(1-\alpha)} - \frac{f(a)}{(1-\alpha)} e^{-\frac{\alpha(x-a)}{1-\alpha}} - \frac{\alpha f(x)}{(1-\alpha)^2} \left[ e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\alpha} \Big|_a^x \right] + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} (f(x) - f(t)) dt \right\} \\
 &= \frac{f(x)}{1-\alpha} - \frac{f(a)}{(1-\alpha)} e^{-\frac{\alpha(x-a)}{1-\alpha}} - \frac{f(x)}{1-\alpha} + e^{-\frac{\alpha(x-a)}{1-\alpha}} \frac{f(x)}{1-\alpha} + \\
 &\quad \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} (f(x) - f(t)) dt
 \end{aligned}$$

$${}^CF D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{1-\alpha} (f(x) - f(a)) e^{\frac{-\alpha(x-a)}{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \int_a^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} (f(x) - f(t)) dt$$

Al aplicar limite cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , se tiene.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{ {}^CF D_t^\alpha f(t) \} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} (f(t) - f(a)) e^{\frac{-\alpha(t-s)}{1-\alpha}} \right\} + \\ &\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \int_a^t e^{\frac{-\alpha(t-s)}{1-\alpha}} (f(t) - f(s)) ds \right\} \\ &= f(t) - f(a) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{ {}^CF D_t^\alpha f(t) \} = f(t) - f(a) \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 2.8.** Evalúe la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio de la expresión de  $\text{sen } x$ .

### Desarrollo

$${}^CF D_x^\alpha f(x) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt$$

$$a = 0; M(\alpha) = 1; \quad f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(t) = \cos t$$

$$\begin{aligned} {}^CF D_x^\alpha \text{sen } x &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} \cos t dt \\ &= \frac{1}{1-\alpha} e^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}x} \int_0^x e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}t} \cos t dt, \end{aligned}$$

$$\text{como: } e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} = e^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}x} \cdot e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}t}$$

$$, \int e^{ax} \cos(bx) dt = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \{ a \cos(bt) + b \text{sen}(bt) \}$$

$$= \frac{e^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}x}}{1-\alpha} \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 + 1} \left\{ e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}t} \cdot \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \cos t + \text{sen } t \right) \right\}_{t=0}^{t=x}$$

$$= \frac{e^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}x}}{1-\alpha} \frac{1}{\frac{\alpha^2 + (1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}} \left\{ e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}x} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \cos x + \text{sen } x \right) - \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right\}$$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha^2 + (1-\alpha)^2} \left\{ \frac{\alpha}{1-\alpha} \cos x + \text{sen } x - \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}x} \right\}$$

$${}^CF D_x^\alpha \text{sen } x = \frac{\alpha \cos x + (1-\alpha) \text{sen } x - \alpha e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}x}}{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}$$

**Ejemplo 2.9.** Evalúe la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio de la expresión

de:  $e^{kx}$ .

Desarrollo

$$\begin{aligned} {}_a^{CF}D_x^\alpha e^{kx} &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt \\ \text{como: } f(x) = e^{kx} &\Rightarrow f'(t) = ke^{kx} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} ke^{kt} dt, a = 0; M(\alpha) = 1 \\ &= \frac{k}{1-\alpha} \int_0^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha} + kt} dt \\ &= \frac{k}{1-\alpha} \left\{ \frac{e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha} + kt}}{\frac{\alpha}{1-\alpha} + k} \right\}_{t=0}^{t=x} \\ &= \frac{k}{1-\alpha} \left\{ \frac{e^{kx} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}x}}{\frac{\alpha + k(1-\alpha)}{1-\alpha}} \right\} \\ {}_0^{CF}D_x^\alpha e^{kx} &= \frac{k}{\alpha + k(1-\alpha)} \{e^{kx} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}x}\} \end{aligned}$$

**2.2.15 Transformada de Laplace de la derivada de Caputo-Fabrizio.**

Como hemos visto en 2.2.13, 2.2.14; un enfoque de la derivada de orden fraccionaria es que.

$$\mathcal{L} \{ {}_0^{CF}D_t^\alpha f(t) \} = \frac{sF(s) - f(0)}{s + \alpha(1-s)} \quad (2.42)$$

Demostración

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ {}_0^{CF}D_t^\alpha f(t) \} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t e^{\frac{-\alpha(t-u)}{1-\alpha}} f'(u) du \right\}, M(\alpha) = 1 \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \int_0^t e^{\frac{-\alpha(t-u)}{1-\alpha}} f'(u) du \right\} \\ \mathcal{L} \{ {}_0^{CF}D_t^\alpha f(t) \} &= \frac{1}{1-\alpha} \mathcal{L} \left\{ e^{\frac{-\alpha t}{1-\alpha}} * f'(u) \right\}, \text{ por 2.21} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \mathcal{L} \left\{ e^{\frac{-\alpha t}{1-\alpha}} \right\} \cdot \mathcal{L} \left\{ f'(u) \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \frac{1}{s + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot s\mathcal{L}\{f(u)\} - f(0) \right\}, \text{ por tabla 1} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \frac{1-\alpha}{s(1-\alpha) + \alpha} \cdot (sF(s) - f(0)) \right\} \\ \mathcal{L}\{ {}_0^{CF}D_t^\alpha f(t) \} &= \frac{sF(s) - f(0)}{s + \alpha(1-s)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 2.2.16 Circuitos Eléctricos

Un circuito eléctrico es una asociación de componentes eléctricos conectados en un camino cerrado para permitir un flujo continuo de corriente eléctrica [3, 6].

#### Carga Eléctrica.

Carga eléctrica es una propiedad de la materia constituida por átomos, donde toda materia tiene carga eléctrica  $q$ , los cuales dentro de su estructura conforman el núcleo una capa. Se ha comprobado que el núcleo del átomo contiene dos tipos de partículas elementales, los protones (cargas positivas) y los neutrones (carga eléctrica neutra). En las capas de los átomos encontramos a los electrones (cargas negativas), las cuales balancean al átomo haciendo que este tenga sea eléctricamente neutro. La unidad con la que se mide la carga eléctrica es el Coulomb ( $C$ ). [14].

#### Intensidad de Corriente Eléctrica(Intensidad).

Es la presencia de cargas eléctricas que se desplazan en un circuito, denominado como corriente eléctrica y se mide en amperios ( $A$ ) [6, 16].

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (2.43)$$

## Diferencial Potencial(Voltaje).

Es la presencia de la variación de una fuente eléctrica que efectúa un trabajo alimentado de energía a un circuito y se mide en voltios ( $V$ ) [6, 11].

## Resistencia eléctrica

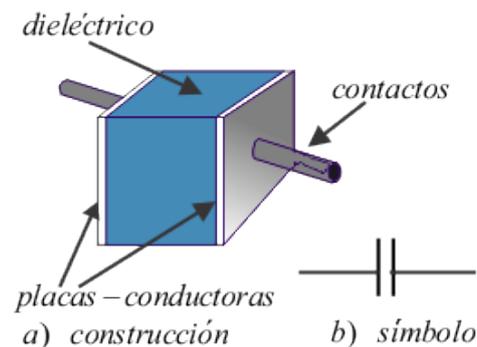
Se define como la oposición que encuentran los electrones al desplazarse por un conductor. La unidad es el ohmio  $\Omega$  y se denota por  $R$  [6].

## Capacitor

Es un dispositivo pasivo, capaz de almacenar y producir energía, ya que se opone a los cambios bruscos de voltaje [5], menciona que un capacitor es un dispositivo eléctrico que guarda energía eléctrica que consta de dos placas conductoras paralelas separadas por un material aislante llamado dieléctrico. Los conectores están unidos a las placas paralelas. Como se muestra en la Figura 1(a) y la figura 1(b) ilustra el símbolo esquemático.

### Figura 1

*Capacitor simple.*



La unidad del capacitor  $C$  se mide en Faradio ( $F$ ). La cantidad de carga que un capacitor puede almacenar por unidad de voltaje entre sus placas es voltaje

del capacitor  $V_C$ .

$$\begin{aligned}q(t) &= C \cdot V \\V_C(t) &= \frac{q(t)}{C}\end{aligned}\tag{2.44}$$

**Definición 2.15** (Ley de Ohm). *Relaciona el valor de el resistor con la intensidad de corriente que lo atraviesa y la diferencia de potencial entre sus extremos.*

$$V_R(t) = R i(t)\tag{2.45}$$

*Donde:  $i(t)$  es la corriente, medido en amperios (A),  $V_R(t)$  es voltaje del resistor medido en voltios V, y  $R$  es el resistor del conductor, medida en ohmios  $\Omega$ .*

### 2.2.17 Circuito Eléctrico RC.

Un circuito RC esta compuesto de resistencia  $R$  y capacitor  $C$  alimentados por una fuente eléctrica  $E$ (batería), entre las características de los circuitos RC está la propiedad de ser lineales invariantes en el tiempo, como se muestra en la Figura 2.

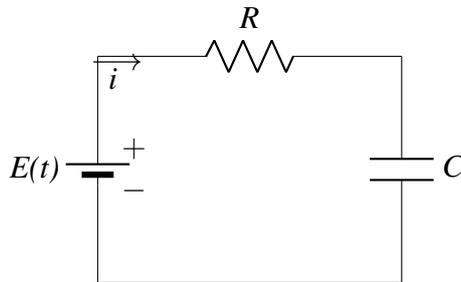
### 2.2.18 Ley del voltaje de Kirchhoff para un circuito RC.

La suma algebraica de los voltajes en torno a cualquier circuito cerrado en un circuito es idéntica a cero en todo momento [3].

$$V_R + V_C = E(t)\tag{2.46}$$

**Figura 2**

Circuito eléctrico RC.



### 2.2.19 Ecuación Diferencial del Circuito RC.

Al reemplazando las ecuaciones 2.43, 2.44 y 2.45 en la ecuación 2.46 se tiene:

$$\begin{aligned} R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} &= E(t) \\ \frac{d}{dt} V_c(t) + V_c(t) \frac{1}{RC} &= \frac{E(t)}{RC}, \text{ por 2.44.} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Donde 2.47 es una ecuación lineal de primer orden y está en su forma estándar:

$$P(t) = \frac{1}{s}, V_c(t) = \frac{E(t)}{RC} \quad (2.48)$$

Al multiplicar por su factor integrante  $e^{\frac{t}{RC}}$ , se tiene.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (V_c(t) e^{\frac{t}{RC}}) &= \frac{E(t) e^{\frac{t}{RC}}}{RC} \\ V_c(t) e^{\frac{t}{RC}} &= \frac{E(t)}{RC} \int e^{\frac{t}{RC}} dt \\ &= \frac{E(t) RC}{RC} \int e^u du \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$V_c(t) = E(t) e^{-\frac{t}{RC}} + k e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.50)$$

### Caso 1. Capacitor Descargado.

Considerando las condiciones iniciales  $E_0 = 20V$ ,  $V_0 = 0V$ ,  $R = 100\Omega$  y  $C = 4700\mu F$  para la ecuación 2.50.

$$V_c(t=0) = ke^{-\frac{1}{RC}0} + 20$$
$$V_0 = k + 20 \quad (2.51)$$

$$k = -20 \quad (2.52)$$

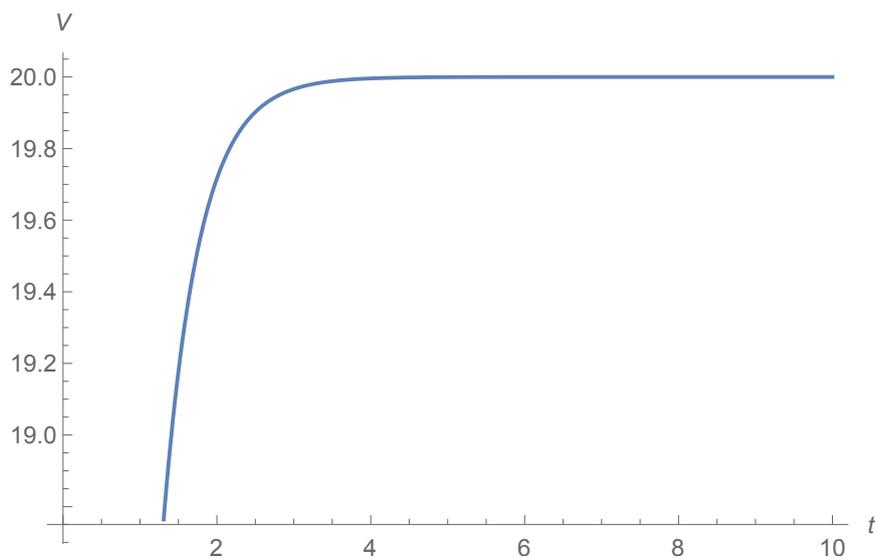
Finalmente se obtiene al reemplazar 2.52 en 2.50.

$$V_c(t) = 20(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (2.53)$$

La Figura 3. muestra la gráfica de la función 2.53, que es la solución de la ecuación diferencial 2.47 para un capacitor descargado.

### Figura 3

*Solución del circuito RC para un capacitor descargado.*



## Caso 2. Capacitor Cargado.

Considerando las condiciones iniciales  $E_0 = 0V$ ,  $V_0 = 20V$ ,  $R = 100\Omega$  y  $C = 4700\mu F$  Para la ecuación 2.50.

$$V_c(t = 0) = ke^{-\frac{1}{RC}0} + 0$$

$$V_0 = k$$

$$k = 20 \quad (2.54)$$

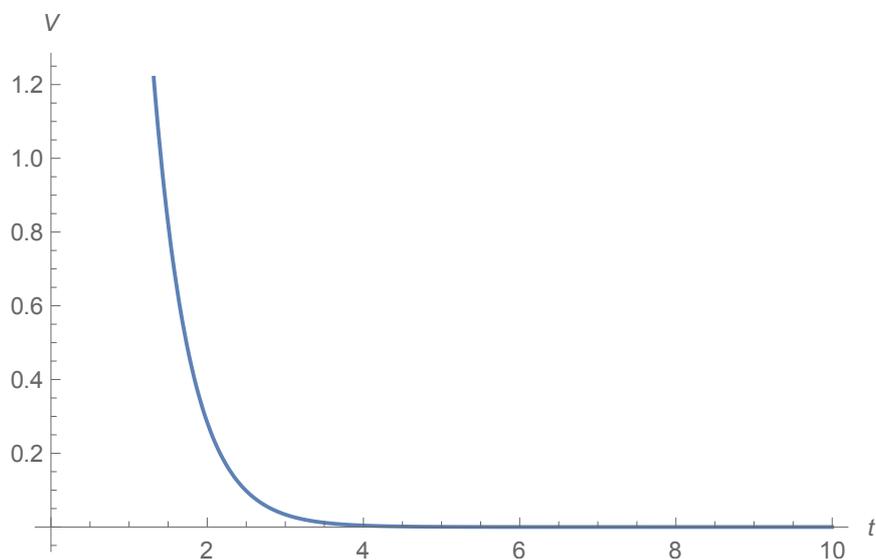
Finalmente se obtiene al reemplazar 2.54 en 2.50.

$$V_c(t) = 20e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.55)$$

La Figura 4. Muestra la gráfica de la función 2.55, que es la solución de la ecuación diferencial 2.47 para un capacitor cargado.

### Figura 4

*Solución del circuito RC para un capacitor cargado.*





## CAPÍTULO III

### MATERIALES Y MÉTODOS

#### 3.1 MATERIALES

En este trabajo de investigación los materiales que se utilizó fueron:

- Información de textos, papers online, artículos, revistas de los buscadores más reconocidos y tesis de repositorios nacional e internacional, estas últimas fueron obtenidas de las fuentes bibliográficas especializadas en Ecuaciones Diferenciales fraccionarias, Derivada Fraccionaria, y Circuito eléctrico RC, las mismas que pueden ser vistas en la revisión bibliográfica.
- Otros materiales que también fueron de gran utilidad: el internet, la laptop, software Wolfram Mathematica 10.4, hojas, pizarra, lapiceros y plumones.
- Wolfram Mathematica 10.4, creado por la compañía de software Wolfram Research, es una herramienta computacional de libre acceso en su plataforma digital para cualquier investigador involucrada en matemáticas y matemática aplicada. Con su amplia gama de capacidad, su interfaz es de fácil uso; proporciona una plataforma confiable para explorar el mundo de las matemáticas y la ciencia de una manera completamente nueva y emocionante.

#### 3.2 MÉTODOS

El presente trabajo de investigación “Análisis y Simulación del Modelo Circuito Eléctrico RC Mediante Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias”, según [26] corresponde a una investigación de tipo descriptivo-deductivo



utilizando sus estrategias de recojo información teórica para la construcción de la ecuación diferencial fraccionaria del circuito eléctrico RC, para esto se propuso la transición del operador derivado ordinario al operador fraccionario y técnicas de solución a través de la derivada fraccionaria de Caputo y Caputo-Fabrizio luego para la solución analítica se analiza por medio de la función especial de Mittag-Leffler, transformada de Laplace y su inversa de algunas funciones. Finalmente para simulación, de una fuente constante y fuente periódica del modelo circuito eléctrico RC.

Esta investigación se respalda con bibliografía especializada del texto [17], artículo [19] y en las revistas de la aplicación del cálculo de orden fraccionaria [12] y [20], el trabajo fue de analizar, Simular el modelo circuito eléctrico RC de orden fraccionaria para voltaje del capacitor en función del tiempo.

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### 4.1 Ecuación Diferencial Fraccionaria del Circuito RC

En esta sección se construye la ecuación diferencial fraccionaria para el circuito eléctrico RC en términos de la derivada fraccionaria de Caputo y Caputo-Fabrizio, para ambos casos el orden considerado de la derivada es  $0 < \alpha \leq 1$ , un primer análisis surge cuando  $\alpha = 1$  la ecuación diferencial fraccionaria se reduce al caso ordinario 2.47.

Para ambos casos se hace uso la transformada de Laplace para hallar la solución de la ecuación diferencial fraccionaria del circuito RC.

En la construcción de la ecuaciones diferenciales fraccionaria del circuito RC, en los trabajos [8, 10] el paso de la derivada ordinaria a la fraccionaria es directa, en [9] se ha propuesto una forma sistemática de construir ecuaciones diferenciales fraccionarias; para esto se propuso la transición del operador derivado ordinario al operador fraccionario de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \quad (4.1)$$

Donde  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$  y  $\sigma$  es un parámetro que representa los componentes de tiempo fraccionario en el sistema.

Reemplazando la ecuación 4.1 en el modelo del circuito RC (2.47) se tiene.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha V_c(t)}{dt^\alpha} + \frac{V_c(t)}{RC} &= \frac{E(t)}{RC} \\ \frac{d^\alpha V_c(t)}{dt^\alpha} + \frac{\sigma V_c(t)}{\sigma^\alpha RC} &= \frac{\sigma E(t)}{\sigma^\alpha RC} \\ \frac{d^\alpha V_c(t)}{dt^\alpha} + \frac{V_c(t)}{(RC)^\alpha} &= \frac{E(t)}{(RC)^\alpha}, \text{ por } \sigma = RC\end{aligned}$$

Es decir el modelo del circuito eléctrico RC se transforma; en un modelo circuito eléctrico RC de orden fraccionaria como sigue:

$${}_0D_t^\alpha V_c(t) + \frac{V_c(t)}{(RC)^\alpha} = \frac{E(t)}{(RC)^\alpha}, \alpha \in (0, 1] \quad (4.2)$$

#### 4.1.1 Solución del Circuito RC Fraccionaria a Través de la Derivada de Caputo.

**Caso 1.** Fuente constante.

Considerando  $\frac{1}{(RC)^\alpha} = \tau^\alpha$ ,  $E(t) = E_0$ ,  $V(0) = V_0$ ;  $V_0 \geq 0$  para la ecuación 4.2.

##### Desarrollo

Reemplazando las condiciones del problema en la ecuación 4.2 se tiene.

$${}_0^C D_t^\alpha V_c(t) = E_0 \tau^\alpha - V_c(t) \tau^\alpha \quad (4.3)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación 4.3.

$$\mathcal{L} \{ {}_0^C D_t^\alpha V_c(t) \} = \mathcal{L} \{ E_0 \tau^\alpha \} - \mathcal{L} \{ V_c(t) \tau^\alpha \} \quad (4.4)$$

Además.

$$\mathcal{L} \{ {}_0^C D_t^\alpha V_c(t) \} = s^\alpha V_c(s) - s^{\alpha-1} V_0, \text{ pues } V^m(0) = 0, m \geq 1 \quad (4.5)$$

Reemplazando la ecuación 4.5 en 4.4 y usando la tabla 1.

$$\begin{aligned}
 s^\alpha V_c(s) - s^{\alpha-1}V_0 &= \tau^\alpha \frac{E_0}{s} - \tau^\alpha V_c(s) \\
 V_c(s)(s^\alpha + \tau^\alpha) &= \tau^\alpha \frac{E_0}{s} + s^{\alpha-1}V_0, \text{ por la tabla 1} \\
 V_c(s) &= \frac{s^{\alpha-1}V_0}{s^\alpha + \tau^\alpha} + \frac{\tau^\alpha E_0}{s(s^\alpha + \tau^\alpha)} \\
 &= \frac{s^{\alpha-1}V_0}{s^\alpha + \tau^\alpha} + \frac{E_0(s^\alpha - s^\alpha + \tau^\alpha)}{s(s^\alpha + \tau^\alpha)} \\
 &= \frac{s^{\alpha-1}V_0}{s^\alpha + \tau^\alpha} - E_0 \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \tau^\alpha} - \frac{1}{s} \right\}
 \end{aligned}$$

$$V_c(s) = \frac{s^{\alpha-1}V_0}{s^\alpha + \tau^\alpha} - \frac{E_0 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \tau^\alpha} + \frac{E_0}{s} \quad (4.6)$$

Aplicando la Transformada inversa de Laplace en la ecuación 4.6 se tiene.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\{V_c(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^{\alpha-1}V_0}{s^\alpha + \tau^\alpha} - \frac{E_0 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \tau^\alpha} + \frac{E_0}{s} \right\} \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{E_0}{s} + (V_0 - E_0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \tau^\alpha} \right\} \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{E_0}{s} \right\} + (V_0 - E_0) \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \tau^\alpha} \right\} \\
 V_c(t) &= E_0 + (V_0 - E_0) E_{\alpha,1}(-\tau^\alpha \cdot t^\alpha), \text{ por 2.24. para } \beta = 1; \lambda = -\tau^\alpha
 \end{aligned}$$

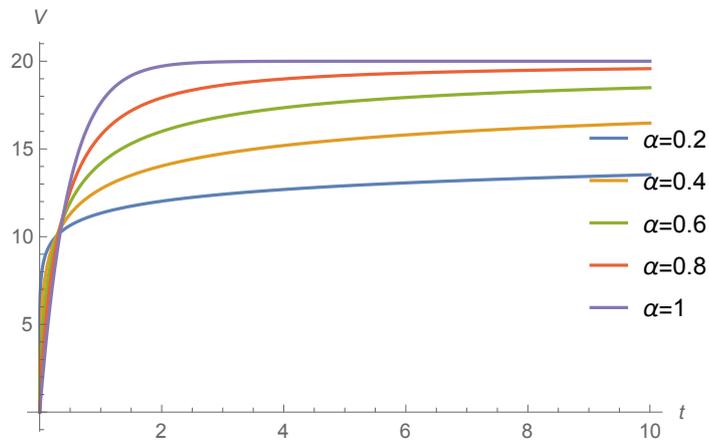
Por tanto.

$$V_c(t) = E_0 + (V_0 - E_0) E_{\alpha,1}(-\tau^\alpha \cdot t^\alpha) \quad (4.7)$$

La Figura 5. Muestra la gráfica de la función 4.7, para  $E_0 = 20V$ ,  $V_0 = V(0)$ ,  $R = 100\Omega$  y  $C = 4700\mu F$ .

**Figura 5**

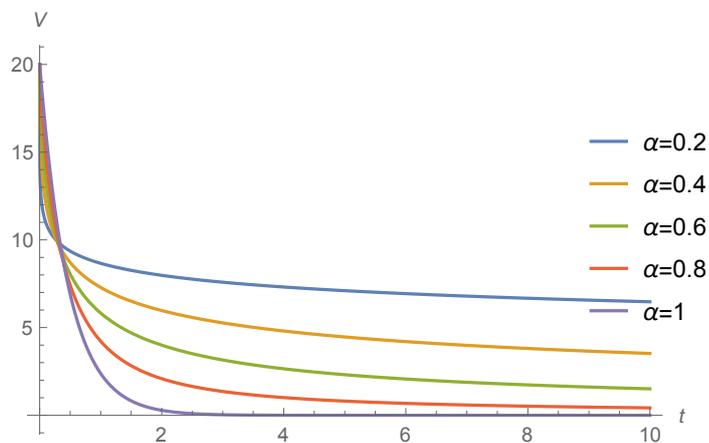
*Solución del circuito RC mediante caputo para fuente constante y capacitor descargado.*



La Figura 6. Muestra la gráfica de la función 4.7, para  $E_0 = V(0)$ ,  $V_0 = 20V$ ,  $R = 100\Omega$  y  $C = 4700\mu F$ .

**Figura 6**

*Solución del circuito RC mediante caputo para fuente constante y capacitor cargado.*



**Caso 2.** Fuente periódica.

Considerando  $E(t) = E_0 \text{sen}(\omega t)$ ,  $V(0) = V_0$ ;  $V_0 \geq 0$ ,  $\frac{1}{(RC)^\alpha} = \tau^\alpha$  para

la ecuación (4.2).

### Desarrollo

Reemplazando las condiciones del problema en la ecuación 4.2 se tiene.

$${}_0^C D_t^\alpha V_c(t) + V_c(t)\tau^\alpha = E_0\tau^\alpha \text{sen}(\omega t) \quad (4.8)$$

Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación 4.8.

$$\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^\alpha V_c(t)\} + \mathcal{L}\{V_c(t)\tau^\alpha\} = \mathcal{L}\{E_0\tau^\alpha \text{sen}(\omega t)\} \quad (4.9)$$

Además.

$$\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^\alpha V_c(t)\} = s^\alpha V_c(s) - s^{\alpha-1}V_0, \text{ pues } V^m(0) = 0, m \geq 1 \quad (4.10)$$

Reemplazando la ecuación 4.10 en 4.9.

$$s^\alpha V_c(s) - s^{\alpha-1}V_0 + \tau^\alpha V_c(s) = \mathcal{L}\{E_0\tau^\alpha \text{sen}(\omega t)\}$$

$$V_c(s)(s^\alpha + \tau^\alpha) = E_0\tau^\alpha \mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\} + s^{\alpha-1}V_0$$

$$V_c(s) = E_0\tau^\alpha \frac{\mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\}}{s^\alpha + \tau^\alpha} + V_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \tau^\alpha} \quad (4.11)$$

Aplicando la Transformada inversa de la Laplace en la ecuación 4.11.

$$V_c(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ E_0 \tau^\alpha \frac{\mathcal{L} \{ \text{sen}(\omega t) \}}{s^\alpha + \tau^\alpha} \right\} + V_0 E_\alpha \left( -\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right),$$

cuando  $\beta = 1$ ,  $\lambda = -\tau^\alpha$  al evaluar en 2.24.

$$\begin{aligned} &= V_0 E_\alpha \left( -\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right) + E_0 \tau^\alpha \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L} \{ \text{sen}(\omega t) \} \frac{1}{s^\alpha + \tau^\alpha} \right\} \\ V_c(t) &= V_0 E_\alpha \left( -\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right) + E_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L} \{ \text{sen}(\omega t) \} \frac{\tau^\alpha}{s^\alpha + \tau^\alpha} \right\} \\ &= V_0 E_\alpha \left( -\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right) + E_0 \text{sen}(\omega t) * \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{-\tau^\alpha}{s^\alpha - (-\tau^\alpha)} \right\} \\ &= V_0 E_\alpha \left( -\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right) - E_0 \text{sen}(\omega t) * E'_\alpha \left( -(\tau t)^\alpha \right), \text{ por 2.23 para } \lambda = -\tau^\alpha \\ &= V_0 E_\alpha \left( -\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right) - E_0 \int_0^t \text{sen} \omega(t-u) E'_\alpha \left( -(\tau u)^\alpha \right) du, \text{ por 2.21.} \end{aligned}$$

Por tanto.

$$V_c(t) = V_0 E_\alpha \left( -\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right) - E_0 \int_0^t \text{sen} \omega(t-u) E'_\alpha \left( -(\tau u)^\alpha \right) du \quad (4.12)$$

La gráfica de la función 4.12 para valores iniciales  $E_0 = 20V$ ,  $V_0 = V(0)$ ,  $R = 100\Omega$  y  $C = 4700\mu F$ . la cual no fue posible obtener con el software Mathematica 10.4 la misma se encuentra en [23].

La Figura 7. Muestra la gráfica de la función 4.12, para  $E_0 = V(0)$ ,  $V_0 = 20V$ ,  $R = 100\Omega$  y  $C = 4700\mu F$ .

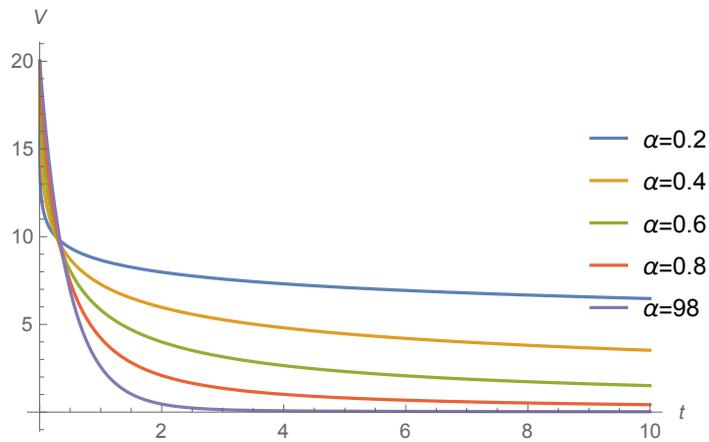
#### 4.1.2 Solución del Circuito RC Fraccionaria a Través de la Derivada de Caputo-Fabrizio.

**Caso 1.** Fuente constante.

Considerando  $\frac{1}{(RC)^\alpha} = \tau^\alpha$ ,  $E(t) = E_0$ ,  $V(0) = V_0$ ;  $V_0 \geq 0$  para la ecuación 4.2.

**Figura 7**

*Solución del circuito RC mediante caputo para fuente periódica y capacitor cargado.*



Desarrollo

Reemplazando las condiciones del problema en la ecuación 4.2 se tiene.

$${}_0^{CF}D_t^\alpha V_c(t) = \tau^\alpha E_0 - \tau^\alpha V_c(t) \quad (4.13)$$

Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación 4.13.

$$\mathcal{L}\{ {}_0^{CF}D_t^\alpha V_c(t) \} = \mathcal{L}\{ \tau^\alpha E_0 \} - \mathcal{L}\{ \tau^\alpha V_c(t) \} \quad (4.14)$$

Además.

$$\mathcal{L}\{ {}_0^{CF}D_t^\alpha V_c(t) \} = \frac{sV_c(s) - V_0}{s + \alpha(1-s)}, \text{ por 2.42.} \quad (4.15)$$

Reemplazando la ecuación 4.15 en 4.14 y usando el tabla 1.

$$\begin{aligned}
 \frac{sV_c(s) - V_0}{s + \alpha(1 - s)} &= \tau^\alpha \frac{E_0}{s} - \tau^\alpha V_c(s) \\
 sV_c(s) - V_0 &= \tau^\alpha \frac{E_0}{s} (s + \alpha(1 - s)) - \tau^\alpha V_c(s)(s + \alpha(1 - s)) \\
 V_c(s)(s + \tau^\alpha(s + \alpha(1 - s))) &= \tau^\alpha \frac{E_0}{s} (s + \alpha(1 - s)) + V_0 \\
 V_c(s) &= \frac{\frac{E_0}{s} (\tau^\alpha (s + \alpha(1 - s))) + V_0}{s + \tau^\alpha (s + \alpha(1 - s))} \\
 &= \frac{E_0}{s} \frac{s + \tau^\alpha (s + \alpha(1 - s)) - s}{s + \tau^\alpha (s + \alpha(1 - s))} + \frac{V_0}{s + \tau^\alpha (s + \alpha(1 - s))} \\
 &= \frac{E_0}{s} - \frac{E_0}{s + \tau^\alpha (s + \alpha(1 - s))} + \frac{V_0}{s + \tau^\alpha (s + \alpha(1 - s))} \\
 &= \frac{E_0}{s} - \frac{E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}} + \\
 &\quad \frac{V_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}}, \\
 &\text{donde } \frac{1}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}} = \frac{1}{s + \tau^\alpha (s + \alpha(1 - s))} \\
 V_c(s) &= \frac{E_0}{s} + \frac{V_0 - E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}} \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Transformada inversa de Laplace en 4.16 .

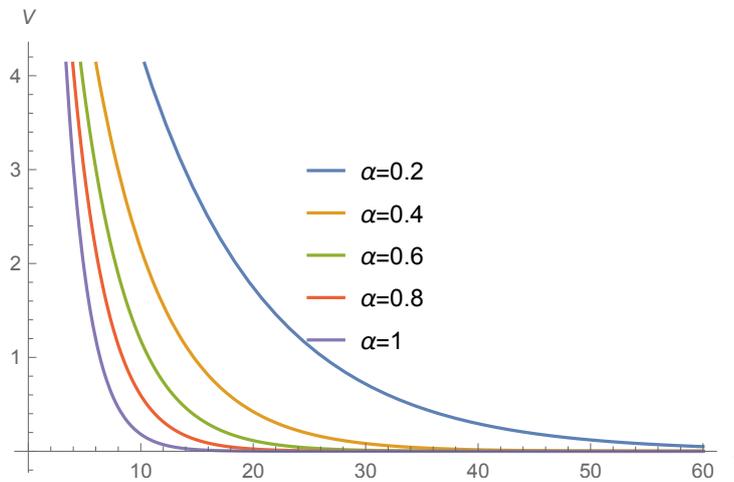
$$V_c(t) = E_0 + \frac{V_0 - E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \cdot e^{(-\Delta \cdot t)} \quad (4.17)$$

$$\text{donde } \Delta = \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}$$

La Figura 8. Muestra la gráfica de la función 4.17, para  $E_0 = V(0)$ ,  $V_0 = 20V$ ,  $R = 100\Omega$  y  $C = 4700\mu F$ .

**Figura 8**

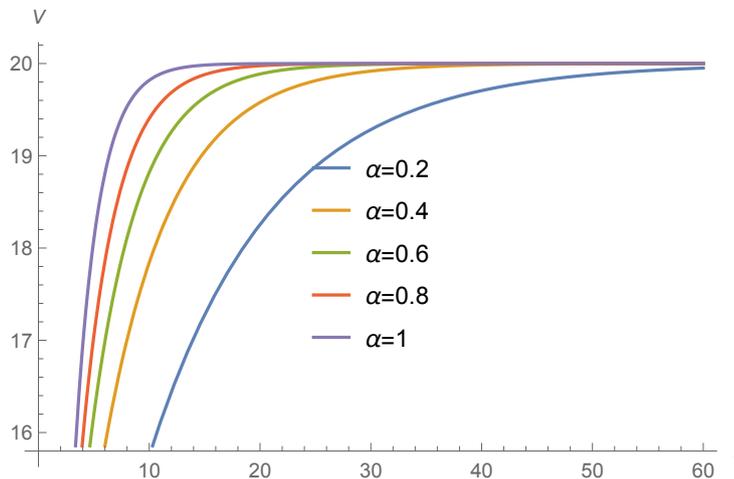
*Solución del circuito RC mediante caputo-fabrizio para fuente constante y capacitor cargado.*



La Figura 9. muestra la gráfica de la función 4.17, para  $E_0 = 20V$ ,  $V_0 = V(0)$ ,  $R = 100\Omega$  y  $C = 4700\mu F$ .

**Figura 9.**

*Solución del circuito RC mediante caputo-fabrizio para fuente constante y capacitor descargado.*



**Caso 2. Fuente periódica.**

Considerando  $\frac{1}{(RC)^\alpha} = \tau^\alpha$ ,  $E(t) = E_0 \text{sen}(\omega t)$ ,  $V(0) = V_0$ ;  $V_0 \geq 0$  para

la ecuación 4.2.

### Desarrollo

Reemplazando las condiciones del problema en la ecuación 4.2 se tiene.

$${}_0^{CF}D_t^\alpha V_c(t) = \tau^\alpha E_0 \sin(\omega t) - \tau^\alpha V_c(t) \quad (4.18)$$

Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación 4.18 se tiene.

$$\mathcal{L}\{{}_0^{CF}D_t^\alpha V_c(t)\} = \mathcal{L}\{\tau^\alpha E_0 \sin(\omega t)\} - \mathcal{L}\{\tau^\alpha V_c(t)\} \quad (4.19)$$

Además.

$$\mathcal{L}\{{}_0^{CF}D_t^\alpha V_c(t)\} = \frac{sV_c(s) - V_0}{s + \alpha(1 - s)}, \text{ por 2.42.} \quad (4.20)$$

Reemplazando la ecuación 4.20 en 4.19 y usando la tabla 1.

$$\begin{aligned} \frac{sV_c(s) - V_0}{s + \alpha(1 - s)} &= \tau^\alpha E_0 \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} - \tau^\alpha V_c(s) \\ sV_c(s) &= \tau^\alpha E_0 (\alpha + (1 - \alpha)s) \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} - \\ &\quad \tau^\alpha V_c(s) (\alpha + (1 - \alpha)s) + V_0 \\ V_c(s) (s + \tau^\alpha (s + \alpha(1 - s))) &= V_0 + \tau^\alpha E_0 (\alpha + (1 - \alpha)s) \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \\ V_c(s) &= \frac{V_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}} + \\ &\quad \frac{\tau^\alpha E_0 \omega}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \cdot \frac{\alpha + (1 - \alpha)s}{(s^2 + \omega^2) \left( s + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \right)} \end{aligned}$$

$$\text{Para } \Delta = \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}$$

$$V_c(s) = \frac{V_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \Delta} + \frac{\tau^\alpha E_0 \omega}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \cdot \frac{\alpha + (1 - \alpha)s}{(s^2 + \omega^2)(s + \Delta)} \quad (4.21)$$

Donde.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + (1 - \alpha)s}{(s^2 + \omega^2)(s + \Delta)} &= \frac{Xs + Y}{s^2 + \omega^2} + \frac{Z}{s + \Delta} \\ &= \frac{Xs^2 + \Delta Xs + Ys + Y\Delta + Zs^2 + Z\omega^2}{(s^2 + \omega^2)(s + \Delta)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\alpha + (1 - \alpha)s = (X + Z)s^2 + (\Delta X + Y)s + (Y\Delta + Z\omega^2)$$

Comparando los coeficientes del polinomio:

$$X + Z = 0 \quad (4.23)$$

$$\Delta X + Y = 1 - \alpha \quad (4.24)$$

$$Y\Delta + Z\omega^2 = \alpha \quad (4.25)$$

A partir de las ecuaciones 4.23, 4.24 y 4.25 encontremos los valores de  $X, Y, Z$ .

$$Z\omega^2 = \alpha - (1 - \alpha - \Delta X)\Delta, \text{ por 4.24.}$$

$$= \alpha - \Delta + \alpha\Delta - Z\Delta^2 \text{ por 4.23.}$$

$$Z(\omega^2 + \Delta^2) = \alpha(1 + \Delta) - \Delta$$

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{\alpha(1 + \Delta) - \Delta}{\omega^2 + \Delta^2} \\
 &= \frac{\alpha(1 + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}) - \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}}{\omega^2 + (\frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha})^2} \\
 &= \frac{\frac{\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)^2}{\omega^2(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)^2 + \alpha^2\tau^{2\alpha}} \\
 Z &= \frac{\alpha(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)}{\omega^2(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)^2 + \alpha^2\tau^{2\alpha}} \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

$$X = -\frac{\alpha(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)}{\omega^2(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)^2 + \alpha^2\tau^{2\alpha}}, \text{ por 4.23.} \quad (4.27)$$

Usando la ecuación 4.25 y 4.24 para despejar  $Z$  y  $X$  luego reemplazamos en 4.23 se tiene.

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - \alpha - Y}{\Delta} + \frac{\alpha - Y\Delta}{\omega^2} &= 0 \\
 Y(\omega^2 + \Delta^2) &= \omega^2 - \alpha\omega^2 + \alpha\Delta \\
 Y &= \frac{\omega^2 - \alpha\omega^2 + \alpha\Delta}{\omega^2 + \Delta^2} \\
 &= \frac{\omega^2 + \tau^\alpha\omega^2 - \alpha\omega^2\tau^\alpha - \alpha\omega^2 - \alpha\omega^2\tau^\alpha + \alpha^2\omega^2\tau^\alpha + \alpha^2\tau^\alpha}{\frac{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}{\omega^2(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)^2 + \alpha^2\tau^{2\alpha}}} \\
 Y &= \frac{(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)[\alpha^2\tau^\alpha + (1 - \alpha)\omega^2(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)]}{\omega^2(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)^2 + \alpha^2\tau^{2\alpha}} \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo ecuación 4.22 en 4.21.

$$\begin{aligned}
 V_c(s) &= \frac{\tau^\alpha\omega E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \left( \frac{Xs + Y}{s^2 + \omega^2} + \frac{Z}{s + \Delta} \right) + \frac{V_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \Delta} \\
 &= \frac{\tau^\alpha\omega Z E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \Delta} + \frac{V_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \Delta} + \\
 &\quad \frac{\tau^\alpha\omega X E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{\tau^\alpha Y E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

Aplicando la Transformada inversa de Laplace en 4.29 y usando la tabla 1.

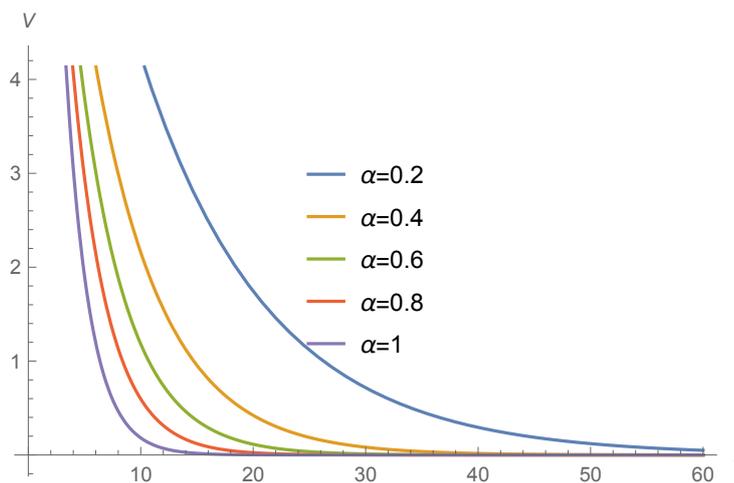
$$V_c(t) = \frac{\tau^\alpha \omega X E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha \tau^\alpha} \cos(\omega t) + \frac{\tau^\alpha Y E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha \tau^\alpha} \operatorname{sen}(\omega t) + e^{(-\Delta \cdot t)} \cdot \frac{\tau^\alpha \omega Z E_0 + V_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha \tau^\alpha} \quad (4.30)$$

La Figura 10. Muestra la gráfica de la función 4.30, para  $E_0 = V(0)$ ,

$V_0 = 20V$ ,  $R = 100\Omega$  y  $C = 4700\mu F$ .

### Figura 10

*Solución del circuito RC mediante caputo-fabrizio para fuente periódica y capacitor cargado.*

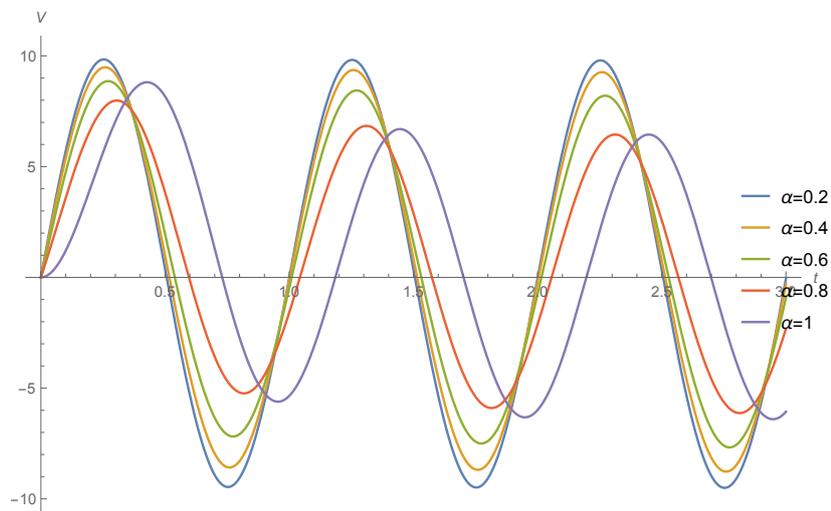


La Figura 11. Muestra la gráfica de la función 4.30, para  $E_0 = 20V$ ,  $V_0 =$

$V(0)$ ,  $R = 100\Omega$  y  $C = 4700\mu F$ .

### Figura 11

*Solución del circuito RC mediante caputo-fabrizio para fuente periódica y capacitor descargado.*





## V. CONCLUSIONES

Las conclusiones del presente trabajo de investigación son las siguientes:

- Se ha establecido una analogía entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales fraccionarias mediante los operadores fraccionarios de Caputo y Caputo-Fabrizio. La cual nos permite analizar y simular el comportamiento del circuito eléctricos RC.
- Se obtuvo el modelo del circuito RC fraccionario 4.2 utilizando las leyes físicas y la transición del operador derivado ordinario al operador fraccionario, luego para la solución analítica de  $V_c(t)$  con diferentes valores iniciales se analizó la función especial Mittag-Leffler, la transformada de Laplace y su inversa de algunas funciones.
- Considerando una fuente constante y fuente periódica del modelo circuitos eléctricos RC fraccionario, se realizaron las simulaciones Figuras del 5 al 11 utilizando el software Wolfram Mathematica 10.4. en los cuales se aprecia el desplazamiento de orden  $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$  respecto al tiempo  $t$  permitiendo así un análisis óptimo del comportamiento  $V_c(t)$ .



## VI. RECOMENDACIONES

Las recomendaciones del presente trabajo de investigación son las siguientes:

- En esta investigación se aplicó la derivada fraccionaria de Caputo y Caputo-Fabrizio para resolver el modelo RC de grado fraccionario. Se recomienda estudiar bajo el mismo análisis la derivada fraccionaria de Caputo y Caputo-Fabrizio para resolver el modelo circuito RL y modelo circuito RCL de grado fraccionario.
- Se recomienda estudiar ecuaciones diferenciales fraccionarias, la derivada fraccionaria de Caputo y Caputo-Fabrizio y sus aplicaciones en el avance y desarrollo de otras ramas de la ciencia y la ingeniería, ya que permite modelar con más precisión cualquier sistema complejo y dinámicos.
- Se recomienda al director de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas incluir el curso de Calculo Fraccionario en el próximo currículo flexible por competencias puesto que el cálculo fraccionario muestra estudios mucho más precisos y generales.



## VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AL-REFAI, M., AND SYAM, M. Analysis of multiterm initial value problems with caputo–fabrizio derivative. *Journal of Mathematics* 2021 (nov 2021), 1–6.
- [2] COHEN, A. M. *Numerical methods for Laplace transform inversion*, vol. 5. Springer Science & Business Media, 2007.
- [3] DORF, RICHARD Y SVOBODA, J. *Circuitos eléctricos*. Alpha Editorial, 2015.
- [4] FLORES FLORES, D. Una introducción a las ecuaciones diferenciales fraccionarias.
- [5] FLOYD, T. L., SALAS, R. N., GONZÁLEZ, L. M. O., AND LÓPEZ, G. P. *Principios de circuitos eléctricos*. Pearson Educación, 2007.
- [6] FREIRE LLIVE, D. D. Guía didáctica para la utilización del simulador estudio en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la ley de ohm en los estudiantes del segundo año de bgu en la unidad educativa municipal antonio josé de sucre, año lectivo 2022-2023. B.S. thesis, Quito: UCE, 2023.
- [7] FRÍAS, CORONEL Y MORENO CHAPOÑAN, M. T. Equivalencias entre las propiedades de las derivadas fraccionarias y las derivadas clásicas.
- [8] GÓMEZ-AGUILAR, J., RAZO-HERNÁNDEZ, R., AND GRANADOS-LIEBERMAN, D. A physical interpretation of fractional calculus in observable terms: analysis of the fractional time constant and the transitory response. *Revista mexicana de física* 60, 1 (2014), 32–38.



- [9] GÓMEZ-AGUILAR, J., ROSALES-GARCÍA, J., BERNAL-ALVARADO, J., CÓRDOVA-FRAGA, T., AND GUZMÁN-CABRERA, R. Fractional mechanical oscillators. *Revista mexicana de física* 58, 4 (2012), 348–352.
- [10] GÓMEZ-AGUILAR, J., YÉPEZ-MARTÍNEZ, H., ESCOBAR-JIMÉNEZ, R., ASTORGA-ZARAGOZA, C., AND REYES-REYES, J. Analytical and numerical solutions of electrical circuits described by fractional derivatives. *Applied Mathematical Modelling* 40, 21-22 (2016), 9079–9094.
- [11] HAYT, W. H., KEMMERLY, J. E., DURBIN, S. M., AND PHILIPS, J. D. *Análisis de circuitos en ingeniería*. McGraw Hill, 2012.
- [12] HERRERA, M. F. G., ET AL. Ecuaciones diferenciales fraccionarias y sus aplicaciones a la ingeniería.
- [13] INGA YOVERA, F. Ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales con coeficientes constantes.
- [14] IRWIN, J DAVID Y ALVARADO, E. V. *Análisis básico de circuitos en Ingeniería*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1997.
- [15] JAIMES SALLO, MARISOL Y SACATUMA CRUZ, M. Circuitos eléctricos modelado mediante ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.
- [16] JUÁREZ, A. R. R. Ley de ohm.
- [17] KILBAS, A. A. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, 2006.
- [18] KÜRT, C., FERNANDEZ, A., AND ÖZARSLAN, M. A. Two unified families of bivariate mittag-leffler functions. *Applied Mathematics and Computation*



443 (2023), 127785.

- [19] LIN, D., LIAO, X., DONG, L., YANG, R., YU, S. S., IU, H. H.-C., FERNANDO, T., AND LI, Z. Experimental study of fractional-order RC circuit model using the caputo and caputo-fabrizio derivatives. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 68, 3 (mar 2021), 1034–1044.
- [20] LÓPEZ, ALEXIS TADEO SILVAN Y GARCÍA, J. R. El circuito eléctrico rc de orden arbitrario. *Jóvenes en la Ciencia* 2, 1 (2016), 1541–1545.
- [21] LÓPEZ MAMANI, M. Ecuación de calor y de onda mediante una ecuación diferencial de orden fraccional.
- [22] LOSADA RODRÍGUEZ, J. Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y aplicaciones.
- [23] MORALES-DELGADO, V. F., GÓMEZ-AGUILAR, J. F., TANECOHERNÁNDEZ, M. A., AND ESCOBAR-JIMÉNEZ, R. F. Fractional operator without singular kernel: applications to linear electrical circuits. *International Journal of Circuit Theory and Applications* 46, 12 (2018), 2394–2419.
- [24] PACHECO, A., AND LUIZ, S. Transformada de laplace: algumas aplicações.
- [25] PODLUBNY, I., AND (EDS.), K. V. T. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, 1st ed. Mathematics in Science and Engineering 198. Academic Press, 1998.
- [26] QUEZADA LUCIO, N. Metodología de la investigación: Estadística aplicada en la investigación.



- [27] RODRIGUEZ, D. Cálculo fraccional: Un enfoque a la teoría de riemann-liouville. *Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Bogota* (2008).
- [28] RODRÍGUEZ MARTÍN, M. Introducción al cálculo fraccionario ya los modelos de crecimiento tumoral clásicos y fraccionarios.
- [29] SEGURA, RESTREPO Y PAULINA, M. Aplicación de la función mittag-leffler en la resolución de ecuaciones diferenciales de orden fraccional.
- [30] SEMARY, M. S., RADWAN, A. G., AND HASSAN, H. N. Fundamentals of fractional-order lti circuits and systems: number of poles, stability, time and frequency responses. *International Journal of Circuit Theory and Applications* 44, 12 (2016), 2114–2133.
- [31] SPIEGEL, M. R. *Transformadas de Laplace*. McGraw-Hill, 1998.
- [32] TEODORO, G. S., OLIVEIRA, D. S., AND DE OLIVEIRA, E. C. Sobre derivadas fracionárias. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 40, 2 (oct 2017).
- [33] VELÁSQUEZ AYMA, A. Modelos matemáticos del movimiento de un proyectil mediante la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineal.
- [34] VILLEGAS DÍAZ, MIGUEL Y OJEDA, N. R. Solución analítica de un k-laplaciano fraccionario radial.
- [35] ZAMBRANO-SERRANO, E., PLATAS-GARZA, M. A., LOYA-CABRERA, A. E., CEDILLO-GARZA, G. E., AND POSADAS-CASTILLO, C. Compor-



tamiento de orden fraccionario en la respuesta de un circuito rc mediante derivada de núcleo singular. *Ingenierías 24*, 91 (2021), 22–32.



## ANEXOS

Para la representación gráfica del comportamiento de las soluciones de las ecuaciones ordinarias y fraccionarias del circuito eléctrico RC se utilizó el programa Wolfram Matemática versión 10.4.

**Se escribe el siguiente código para obtener la figura 3.**

```
1 In[1]:=Plot[{20(1-Exp[-t/0.47])},{t,0,10},AxesLabel->{HoldForm[t], HoldForm[V]},  
PlotLegends->Placed[{"t"}, Center]]
```

**Se escribe el siguiente código para obtener la figura 4.**

```
1 In[1]:=Plot[{20(Exp[-t/0.47])},{t,0,10},AxesLabel->{HoldForm[t],  
2 HoldForm[V]},PlotLegends->Placed[{"t"}, Center]]
```

**Se escribe el siguiente código para obtener la figura 5.**

```
1 In[1]:=Plot[{20(1-MittagLefflerE[0.2,-(t/0.47)^0.2]),20(1-MittagLefflerE[0.4,-(t/0.47)  
^0.4]),  
2 20(1-MittagLefflerE[0.6,-(t/0.47)^0.6]),20(1-MittagLefflerE[0.8,-(t/0.47)^0.8]),  
3 20(1-MittagLefflerE[1,-(t/0.47)^1])},{t,0,10},AxesLabel->{HoldForm[t],HoldForm  
[V]},  
4 PlotLegends->Placed[{"\Alpha=0.2","\Alpha=0.4","\Alpha=0.6","\Alpha=0.8","\Alpha=1"  
},pos]]
```

**Se escribe el siguiente código para obtener la figura 6.**

```
1 In[1]:=Plot[{20 MittagLefflerE[0.2,-(t/0.47)^0.2],20 MittagLefflerE[0.4,-(t/0.47)  
^0.4],  
2 20 MittagLefflerE[0.6,-(t/0.47)^0.6],20 MittagLefflerE[0.8,-(t/0.47)^0.8],  
3 20 MittagLefflerE[1,-(t/0.47)^1]},{t,0,10},AxesLabel->{HoldForm[t],  
HoldForm[V]},  
4 PlotLegends->Placed[{"\Alpha=0.2","\Alpha=0.4","\Alpha=0.6","\Alpha=0.8","\Alpha  
=1"},Pos]]
```

Se escribe el siguiente código para obtener la figura 7.

```
1 In[1]:= Plot[{20 (MittagLefflerE [0.2, -(x/0.47)^0.2]), 20 (MittagLefflerE [0.4, -(x  
/0.47)^0.4]),  
2 20 (MittagLefflerE [0.6, -(x/0.47)^0.6]), 20 (MittagLefflerE [0.8, -(x/0.47)^0.8]),  
3 20 (MittagLefflerE [0.98, -(x/0.47)^0.98]) }, {x, 0, 10},  
4 AxesLabel -> {HoldForm[T], HoldForm[V]},  
5 PlotLegends->Placed[{"\Alpha=0.2", "\Alpha=0.4", "\Alpha=0.6", "\Alpha=0.8", "\Alpha  
=98"}, pos]]
```

Se escribe el siguiente código para obtener la figura 8.

```
1 In[1]:= Plot [{{20/(1+(1/0.47)^0.2-0.2(1/0.47)^0.2)  
2 Exp[-(0.2(0.47)^0.2)/(1+(1/0.47)^0.2-0.2(1/0.47)^0.2)] t ],  
3 (20/(1+(1/0.47)^0.4-0.4 (1/0.47)^0.4))  
4 Exp[-(0.4(0.47)^0.4)/(1 +(1/0.47)^0.4-0.4(1/0.47)^0.4)] t ],  
5 (20/(1 + (1/0.47)^0.6-0.6 (1/0.47)^0.6))  
6 Exp[-(0.6(0.47)^0.6)/(1 +(1/0.47)^0.6-0.6(1/0.47)^0.6)] t ],  
7 (20/(1 +(1/0.47)^0.8 -0.8 (1/0.47)^0.8))  
8 Exp[-(0.8(0.47)^0.8)/(1 +(1/0.47)^0.8-0.8(1/0.47)^0.8)] t ],  
9 (20/(1 +(1/0.47)^1-1(1/0.47)^1))  
10 Exp[-(1 (0.47)^1)/(1 + (1/0.47)^1-1(1/0.47)^1)] t ],  
11 }, {t, 0, 60}, AxesLabel->{HoldForm[t], HoldForm[V]},  
12 PlotLegends->Placed[{"\Alpha=0.2", "\Alpha=0.4", "\Alpha=0.6", "\Alpha=0.8", "\Alpha=1"},  
Center]]
```



Se escribe el siguiente código para obtener la figura 9.

```
1 In [1]:= Plot[{20(1-((Exp[-(0.2(0.47)^0.2)/(1+(1/0.47)^0.2-0.2(1/0.47)^0.2)]t) /
2 (1+(1/0.47)^0.2-0.2(1/0.47)^0.2)),
3 20(1-((Exp[-(0.4(0.47)^0.4)/(1+(1/0.47)^0.4-0.4(1/0.47)^0.4)]t) /
4 (1+(1/(0.47)^0.4-0.4(1/0.47)^0.4))),
5 20(1-((Exp[-(0.6(0.47)^0.6)/(1+(1/0.47)^0.6-0.6(1/0.47)^0.6)]t) /
6 (1+(1/0.47)^0.6-0.6(1/0.47)^0.6))),
7 20(1-((Exp[-(0.8(0.47)^0.8)/(1+(1/0.47)^0.8-0.8(1/0.47)^0.8)]t) /
8 (1+(1/0.47)^0.8-0.8(1/0.47)^0.8))),
9 20(1-((Exp[-(1(0.47)^1)/(1+(1/0.47)^1-1(1/0.47)^1)]t) / (1+(1/0.47)^1-1(1/0.47)^1)))
10 }, {t, 0, 60}, AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[V]},
11 PlotLegends -> Placed[{"Alpha=0.2", "Alpha=0.4", "Alpha=0.6", "Alpha=0.8", "Alpha=1"},
Center]]
```

Se escribe el siguiente código para obtener la figura 10.

```
1 In [1]:= Plot [{{{20( Exp[-((0.2(0.47)^0.2)/(1+(1/0.47)^0.2-0.2(1/0.47)^0.2)] t )} /
2 (1+(1/0.47)^0.2-0.2 (1/0.47)^0.2)),
3 ((20(Exp[-((0.4(0.47)^0.4)/(1+(1/0.47)^0.4-0.4(1/0.47)^0.4)] t )} /
4 (1+(1/0.47)^0.4-0.4(1/0.47)^0.4)),
5 ((20(Exp[-((0.6(0.47)^0.6)/(1+(1/0.47)^0.6-0.6(1/0.47)^ 0.6)] t )} /
6 (1+(1/0.47)^0.6-0.6(1/0.47)^0.6)),
7 ((20(Exp[-((0.8(0.47)^0.8)/(1+(1/0.47)^0.8-0.8(1/0.47)^0.8)] t )} /
8 (1+(1/0.47)^0.8-0.8 (1/0.47)^0.8)),
9 ((20(Exp[-((1(0.47)^1)/(1+(1/0.47)^1-1(1/0.47)^1)] t )} /
10 (1+(1/0.47)^1-1(1/0.47)^1))), {t, 0, 60}, AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[V]
11 ]},
PlotLegends -> Placed[{"Alpha=0.2", "Alpha=0.4", "Alpha=0.6", "Alpha=0.8", "Alpha=1"},
Center]]
```



Se escribe el siguiente código para obtener la figura 11.

```
1 m = Range[0.2, 1, 0.2]; % m= valor de alfa=desde 0.2 a 1
2 n = (1/0.47)^m;
3 d = (m n)/(1 + n - m n);
4 x = (-m(1+n-mn))/(((2 Pi)^2)(1+n-mn)^2+(m^2)((1/0.47)^2m));
5 y = ((1+n-mn)((m^2)n+(1-m)((2Pi)^2)(1+n-mn))/(((2Pi)^2)(1+n-mn)^2+(m^2)
      ((1/0.47)^2 m));
6 z = (m(1+n-mn))/(((2Pi)^2)(1+n-mn)^2+(m^2)((1/0.47)^2m));
7 In [1]:= Plot[(((20*n (2Pi) (x) (Cos[2Pi t]))/(1+n-mn))+((20(n)(y)(Sin[2Pi*t]))/(1+n-m n))
      +
8 ((20n(2Pi)(z) (Exp[-(d)t]))/((1+n-mn))))),{t ,0,3}, AxesLabel -> {HoldForm[t],
      HoldForm[V]},
9 PlotLegends->Placed[{"\Alpha=0.2", "\Alpha=0.4", "\Alpha=0.6", "\Alpha=0.8", "\Alpha=1"},
      pos]]
```



## DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo RAUL CHAMPL APAZA,  
identificado con DNI 73490893 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional,  Programa de Segunda Especialidad,  Programa de Maestría o Doctorado

CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

informo que he elaborado el/la  Tesis o  Trabajo de Investigación denominada:

“ ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DEL MODELO CIRCUITO  
ELÉCTRICO RC MEDIANTE ECUACIONES  
DIFERENCIALES FRACCIONARIAS ”

Es un tema original.

Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y **no existe plagio/copia** de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como tuyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno 15 de NOVIEMBRE del 20 23

FIRMA (obligatoria)



Huella



## AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo RAUL CHAMPL APAZA,  
identificado con DNI 73490893 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional,  Programa de Segunda Especialidad,  Programa de Maestría o Doctorado

CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS,  
informo que he elaborado el/la  Tesis o  Trabajo de Investigación denominada:

“ ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DEL MODELO CIRCUITO  
ELECTRICO RC MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES  
FRACCIONARIAS ”

para la obtención de  Grado,  Título Profesional o  Segunda Especialidad.

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los “Contenidos”) que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia:

Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno 15 de NOVIEMBRE del 20 23

FIRMA (obligatoria)



Huella