UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICO

CUANTIZACIÓN DE LA ELECTRODINÁMICA DE MAXWELL EN LA TEORÍA NO-CONMUTATIVA

TESIS

PRESENTADA POR:

SONCCO APAZA, YURI

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICO

PUNO - PERÚ

2019

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICO

TESIS

CUANTIZACIÓN DE LA ELECTRODINÁMICA DE MAXWELL EN LA TEORÍA NO-CONMUTATIVA

PRESENTADA POR:

YURI SONCCO APAZA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICO

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN
PILAR
FICA

APROBADO POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

Presidente: Lic. Julio Pedro Quispe Aymachoque

Primer miembro: Lic. Fabiola loayza Torreblanca

Segundo miembro: Lic. Natalio Miranda Rivera

Director: Lic. Matias Huilca Arbieto

Tema: Electrodinámica en espacio-tiempo no-conmutativo
Área: Física
Línea de Investigación: Física teórica

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 21 DE OCTUBRE DEL 2019

Para mi Madre

AGRADECIMIENTOS

A mi madre que en paz descanse por su inmenso apoyo que ha hecho posible que culmine mis estudios universitarios y a mi padre por darme permanente apoyo tanto moral y económicamente, como también a mi hermana Yobana por su constante apoyo, a mi profesor Matias por ser comprensible por mis irresponsabilidades, a todos mis profesores de la maestría y amigos.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

En este trabajo usamos el método lógico deductivo para encontrar algunos aspectos de la electrodinámica de Maxwell en la teoría no-conmutativa, como las ecuaciones de movimiento perturbadas por la presencia del término no-conmutativo. Como también utilizamos el método de Dirac para encontrar las constricciones del sistema y con ellas las reglas de cuantización. Así, haciendo uso de la solución en el vacío de gauge Coulomb, encontramos el campo eléctrico y magnético en función de los operadores de creación, aniquilación y con esto, deducimos el Hamiltoniano asociado a la teoría en función de estos operadores.

Palabras claves: No-conmutatividad, Modelo de electromagnetismo de Maxwell, fijación de gauge, violación de simetría de Lorentz y método de Dirac, Hamiltoniano, operador creación y aniquilación.

ABSTRACT

In this work we use the logical deductive method to find some aspects of Maxwell's electrodynamics in non-commutative theory, such as the equations of motion disturbed by the presence of the non-commutative term. As we also use the Dirac method to find the constraints of the system and with them the quantization rules. Thus, using the vacuum gauge Coulomb solution, we find the electric and magnetic field based on the creation, annihilation operators and with this, we deduce the Hamiltonian associated with the theory based on these operators.

Keywords: Non-commutability, Electromagnetism Model of Maxwell, gauge invariance, Lorentz symmetry violation, Dirac method, Hamiltonian, creation and annihilation operator.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La teoría de espacio-tiempo no-conmutativo tiene su importancia porque los estudios mas recientes demostraron que previene el colapso gravitacional de fluctuaciones del vacío cerca de la longitud de Planck [14]. Esto nos sugiere que el espacio-tiempo tiene que convertirse no-conmutativo cerca de la escala de Planck.

Estudios más recientes en el ámbito de supercuerdas que estudia las excitaciones de baja energía de D-bramas en un campo magnético [16], motivaron a los investigadores sobre las versiones no conmutativas de las teorías de campo de calibre y sobre el comportamiento de sus equivalentes cuantificados como la teoría de Maxwell. Sin embargo, surgen dos problemas principales cuando se intenta implementar en una geometría no-conmutativa (NC) [9]. La pérdida de causalidad debido a la aparición términos adicionales en el Lagrangiano y la violación de la invarianza de Lorentz exhibida en las soluciones de onda plana [12]. Pero estos problemas pueden evitarse incluyendo el tiempo como una coordenada NC.

En este trabajo utilizamos el mapeamiento de Seiber-Witten (SW) [16], para garantizar la estabilidad de las transformaciones de calibre clásico para las teorías definidas en el espacio-tiempo NC. Este mapeamiento nos proporciona un método alternativo para estudiar teoría de Maxwell NC mediante la re-definición de esta teoría en términos de su equivalente conmutativo.

En el primer capítulo se introduce sobre la teoría no-conmutativa, así como también los objetivos, justificación y limitaciones. En el segundo capítulo se revisa la literatura y se fundamenta las definiciones necesarias sobre teoría no-conmutativa, así como también el método de cuantización por Dirac. En el capítulo tres se habla sobre el método de investigación a la que pertenece el trabajo. En el capítulo cuatro discutimos los resultados de las ecuaciones de Maxwell modificadas y las reglas de cuantización. Finalmente en el capitulo cinco se concluye el trabajo.

1.1.1. Problema general

En el presente trabajo se pretende responder la siguiente pregunta.

¿Es posible cuantizar la electrodinámica de Maxwell en la teoría no-conmutativa?

Problemas específicos

a) ¿Será posible deducir las ecuaciones de movimiento de la electrodinámica de Maxwell en la teoría no-conmutativa?

b) ¿Cómo se puede deducir las reglas de cuantización y el Hamiltoniano cuantizado de la electrodinámica de Maxwell en la teoría no-conmutativa.?

1.2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.2.1. Objetivos generales

Cuantizar la electrodinámica de Maxwell en la teoría no-conmutativa.

Objetivos específicos

a) Deducir las ecuaciones de movimiento de la electrodinámica de Maxwell en la teoría no-conmutativa.

b) Deducir las reglas de cuantización y el Hamiltoniano cuantizado de la electrodinámica de Maxwell en la teoría no-conmutativa.

1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Utilizando el mapeamiento de Seiberg-Witten podemos describir la densidad Lagrangiano de la teoría de modelo electrodinámico de Maxwell en función del parámetro no-conmutativo y con esta encontrar la ecuaciones de movimiento y encontrar las reglas de cuantización, para luego deducir el Hamiltoniano en función de operadores de creación y aniquilación de fotones.

1.4. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La teoría no-conmutativa emerge de los límites de la teoría M y de cuerdas para escribir los estados Hall cuántico. Por ello es importante estudiar el modelo de la electrodinámica de Maxwell en la teoría de no-conmutatividad, así como sus ecuaciones de movimiento, las constricciones y encontrar las reglas de cuantización y cuantizar el Hamiltoniano.

1.5. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

En este trabajo se limita a las caracterizaciones e implementación completa en la teoría no-conmutativa de la electrodinámica de Maxwell, puesto que solo estudiamos algunas propiedades de las ecuaciones de Maxwell en espacio-tiempo no-conmutativo, las reglas de cuantización utilizando el método de Dirac y la cuantización de su Hamiltoniano.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ANTECEDENTES DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Michael R. Douglas y Nikita A. Nekrasov (2001) [21]. En su trabajo de revisión titulada *"Nonconmutative Field Theory"*, revisa la generalización de la teoría de campo al espacio-tiempo en coordenadas no-conmutativa.

M. Carroll, A. Hervey, at el. (2001) [15]. En su trabajo de investigación *"Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation"*, Consideran la simetría de Lorentz en la teoría de campos de espacio-tiempo no-conmutativo y deducen que cualquier teoría no-conmutativa es físicamente equivalente a un subconjunto campos ordinarios que es una extensión del modelo estándar que viola la simetría de Lorentz.

Branislav Jurco, Peter Schupp y Julius Wess (2001)[5]. En este trabajo de investigación *"Nonabelian noncommutative gauge theory via noncommutative extra dimensions"* definen el concepto de coordenadas covariantes en espacios no-conmutativos que conduce directamente a teorías de gauge con campos de gauge no conmutativos generalizados del tipo que surge en la teoría de cuerdas con campo magnético de fondo. Usando dimensiones extra no-conmutativas, extiende la construcción a la teoría de gauge no-conmutativa para grupos de gauge arbitrarios.

G. Berrino, L. Cacciatori, A. Celi, at. el. (2003) [9]. Ellos en su trabajo de investigación *"Noncommutative Electrodynamics"*, definen la covariante de Lorentz para electrodinámica clásica en no-conmutatividad y obtienen una relación explícita de la teoría no-conmutativa al resolver el mapeo de Seiberg-Witten. Con este mapeo,deducen que la acción es polinomial en el campo de fuerzas, lo que permite preservar la causalidad y covariante de Lorentz.

I. Kruglov (2005) [13]. En su trajo de investigación *"Maxwell's theory on non-commutative spaces and quaternions"*, Demostró que la onda electromagnética plana es solución del sistema de ecuaciones de onda no-lineal de segundo orden para los campos de inducción eléctrica y magnética.

Herbert Balasin, Daniel N. Blaschke, at el. (2015) [3]. En este trabajo de investigación *"On the energy-momentum tensor in Moyal space"*, estudian las propiedades del tensor energía momentum de los campos de gauge acoplados a la materia en el espacio-tiempo no-conmutativo.

V.M. Vasyuta y V.M. Tkachuk (2016)[22]. En este trabajo de investigación *"Classical electrodynamics in a space with spin noncommutativity of coordinates"* propusieron un nuevo álgebra relativista de spin-no conmutativo invariante de Lorentz. Usando el operador Weyl de operadores de posición no conmutativos. Construyeron la función de Lagrange de un campo electromagnético en el espacio con spin no-conmutativo. También obtienen una ley de transformación de gauge de ese campo. Las ecuaciones de campo no lineales exactas del campo electromagnético no conmutativo se derivan del principio de mínima acción. Se encuentra una solución exacta de propagación de ondas planas en campos magnéticos y eléctricos constantes.

2.2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.2.1. Producto Moyal

El producto Moyal lleva el nombre de José Enrique Moyal. La cual indica que en el espacio-tiempo NC, el álgebra usual es sustituida por otro adecuado a ese espacio-tiempo. Por ello haremos una breve presentación de este álgebra y sus principales propiedades, vía producto Moyal o producto estrella ($\star$) como otros autores lo denominan.

sea un álgebra conmutativa de funciones en $\mathbb{R}^D$ o producto usual que es dado por:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x). \tag{2.2.1}$$

Si, los campos definidos en $\mathbb{R}^D$ poseen decrecimiento rápido en el infinito, entonces pueden ser descrito por su transformada de Fourier

$$\widetilde{\phi}(k) = \int d^D x e^{ik_i x^i} \phi(x), \tag{2.2.2}$$

donde, $\widetilde{\phi}(-k) = \overline{\widetilde{\phi}(k)}$ si ϕ fuera real.

Para una construcción de un espacio-tiempo NC sustituimos las coordenadas locales $x^i \in \mathbb{R}^D$ por operadores Hermitianos $\widehat{x}^i$ que obedecen las relaciones de conmutación. La cuantización de Weyl proporciona una relación de correspondencia entre un álgebra de los campos definida en $\mathbb{R}^D$ y esta álgebra de operadores. Así, cada función $\phi(x)$ posee su respectivo coeficiente de Fourier, siendo el símbolo de Weyl definida como [11, 17, 4].

$$\widehat{W}[\phi] \equiv \widehat{\Phi} = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k \widetilde{\phi}(k) e^{ik_i \widehat{x}^i}, \tag{2.2.3}$$

donde los $k_i^{\prime s}$ son $C-$ números, o el operador de Weyl es Hermitiano y $f(x)$ es una función real.

Con el fin de definir el producto Moyal, vamos introducir el siguiente operador

$$\widehat{T}(k) \equiv e^{ik_ix^i}, \tag{2.2.4}$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \widehat{T}^{\dagger}(k) &= \widehat{T}(-k) \\ \widehat{T}(k)\widehat{k'} &= \widehat{T}(k-k')e^{-\frac{i}{2}k_ik'^j\theta^{ij}} \\ Tr\widehat{T}(k) &= (2\pi)^D \prod_{i=0} \delta(k_i). \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Si introducimos la ecuación (2.2.4) en la ecuación (2.2.3), obtenemos

$$\widehat{\Phi} = \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk\widehat{T}(k)\widetilde{\phi}(k) \tag{2.2.6}$$

ahora, utilizando las propiedades (2.2.5), llegamos a

$$\widetilde{\phi}(k) = (2\pi)^D Tr\{\widehat{\Phi}\widehat{T}^{\dagger}(k)\}. \tag{2.2.7}$$

esta expresión es la motivación para introducir el producto Moyal.

Si, sustituimos $\widehat{\Phi}$ por el producto $\widehat{\Phi}_1\widehat{\Phi}_2$, el campo $\widetilde{\phi}(k)$ estará relacionado a $\widetilde{\phi}_1$ y $\widetilde{\phi}_2$ a través de un producto diferente de lo usualmente conocido, es decir

$$(\widetilde{\phi_1 \star \phi_2})(k) \equiv (2\pi)^D Tr\{\widehat{\Phi}_1\widehat{\Phi}_2\widehat{T}^{\dagger}(k)\} \tag{2.2.8}$$

utilizando las ecuaciones (2.2.5) y (2.2.6) podemos encontrar:

$$(\widetilde{\phi_1 \star \phi_2})(k) = \int d^{k'} \widetilde{\Phi}_1 \widetilde{\Phi}_2(k - k') e^{-\frac{i}{2} k'_i k_j \theta^{ij}} \tag{2.2.9}$$

el producto $(\widetilde{\phi_1 \star \phi_2})(k)$ indica una transformada de Fourier de $(\phi_1 \star \phi_2(k)$.

También tenemos que:

$$\begin{aligned}
\widehat{k}_i \, |k\rangle &= k_i \, |k\rangle \\
\widehat{x}_i \, |x\rangle &= x_i \, |x\rangle \\
\langle k|\phi\rangle &= \widetilde{\phi}(k) \\
\langle x|\phi\rangle &= \phi(k) \\
\langle k|x\rangle &= \frac{e^{ik_i x^i}}{(2\pi)^{D/2}}.
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Ahora, utilizando la ecuación (2.2.10), podemos escribir, después de un tedioso trabajo algebraico, el producto $(\widetilde{\phi_1 \star \phi_2})(x)$, como definición de producto Moyal

$$(\widehat{\phi}_1 \star \widehat{\phi}_2)(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^x \partial_j^y \widehat{\phi}_1(x)\widehat{\phi}_1(y)} \Big|_{x=y} \tag{2.2.11}$$

o también

$$(\widehat{\phi}_1 \star \widehat{\phi}_2)(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\nu\mu}\partial_\nu^x \partial_\mu^y \widehat{\phi}_1(x)\widehat{\phi}_1(y)} \Big|_{x=y}. \tag{2.2.12}$$

La definición (2.2.12) de producto Moyal puede ser reescrita como:

$$(\widehat{\phi}_1 \star \widehat{\phi}_2)(x) \equiv \widehat{\phi}_1(x) \star \widehat{\phi}_1(x) \tag{2.2.13}$$

o también

$$\widehat{\phi}_1(x) \star \widehat{\phi}_2(x) = \widehat{\phi}_1(x) exp\left(\frac{i}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\mu}}\theta^{\mu\nu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^{\nu}}\right)\widehat{\phi}_2(x). \tag{2.2.14}$$

el cual presenta la no-localidad del producto Moyal, donde la ecuación (2.2.14) presenta un número infinito de derivadas.

Propiedades de producto Moyal

Con la idea de tomar el significado del producto Moyal en las teorías físicas mas familiares, vamos a mencionar algunas de sus propiedades.

a) Desenvolviendo la ecuación (2.2.14), tenemos la siguiente expresión

$$\widehat{\phi}_1(x) \star \widehat{\phi}_2(x) = \widehat{\phi}_1(x)\widehat{\phi}_1(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\widehat{\phi}_1(x)\partial_{\nu}\widehat{\phi}_2(x) + \frac{1}{2!}\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{i}{2}\theta^{\rho\lambda}\partial_{\mu}\partial_{\rho}\widehat{\phi}_1(x)\partial_{\nu}\partial_{\lambda}\widehat{\phi}_2(x) + O(\theta^3) \tag{2.2.15}$$

b) De la expresión (2.2.14), podemos obtener una regla de derivación para el producto Moyal, como:

$$\partial_{\mu}(\widehat{\phi}_1 \star \widehat{\phi}_2) = \partial_{\mu}\widehat{\phi}_1 \star \widehat{\phi}_2 + \widehat{\phi}_1 \star \partial_{\mu}\widehat{\phi}_2 \tag{2.2.16}$$

Como también, si dos campos son iguales, entonces los términos impares en θ son nulos.

c) Como existe un número infinito de derivadas por definición (2.2.14), el producto Moyal es no lineal. Por lo tanto, esta no localidad no aparece en términos cuadráticos de la acción. Por tanto

$$\int d^D \widehat{\phi}_1(x) \star \widehat{\phi}_2(x) = \int d^D \widehat{\phi}_1(x)\widehat{\phi}_2(x) = \int d^D \widehat{\phi}_2(x) \star \widehat{\phi}_1(x) \tag{2.2.17}$$

también

$$\int d^D \partial_\mu \widehat{\phi}_1(x) \star \partial^\mu \widehat{\phi}_2(x) = \int d^D \partial_\mu \widehat{\phi}_1(x) \partial^\mu \widehat{\phi}_2(x) \tag{2.2.18}$$

en esta ecuación admitimos el buen comportamiento de los campos en el infinito, y que también los términos de superficies son nulos. Así, la influencia de no-conmutatividad en la teoría de campos aparece en los términos de interacción.

d) El conmutador Moyal de $\widehat{x}^\mu$ con $\widehat{x}^\nu$ es

$$[\widehat{x}^\mu, \widehat{x}^\nu]_\star = i\theta^{\mu\nu} \tag{2.2.19}$$

e) Función delta con producto Moyal

$$\widehat{F}(x) \star \delta(x-y) = \delta(x-y) \star \widehat{F}(y) \tag{2.2.20}$$

f)

$$\int d^D x \widehat{\phi}_1 \star [\widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_3]_\star = \int d^D x [\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2]_\star \star \widehat{\phi}_3 \tag{2.2.21}$$

g)

$$[\widehat{\phi}_1, [\widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_3]_\star]_\star + [\widehat{\phi}_2, [\widehat{\phi}_3, \widehat{\phi}_1]_\star]_\star + [\widehat{\phi}_3, [\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2]_\star]_\star = 0 \tag{2.2.22}$$

h)

$$[\widehat{\phi}_1, [\widehat{\phi}_2, \delta(x-y)]_\star]_\star = [\widehat{\phi}_2, [\widehat{\phi}_1, \delta(x-y)]_\star]_\star \tag{2.2.23}$$

i) Ahora veremos algunas propiedades que involucra derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$

$$D_\mu \star (\widehat{\phi}_1 \star \widehat{\phi}_2) = (D_\mu \star \widehat{\phi}_1) \star \widehat{\phi}_2 + \widehat{\phi}_1 \star (D_\mu \star \widehat{\phi}_2) \tag{2.2.24}$$

j)

$$D^x_\mu \star \delta(x-y) = -D^y_\mu \delta(x-y) \tag{2.2.25}$$

k)

$$D_\mu(\widehat{F} \star \widehat{G}) = \partial_\mu(\widehat{F} \star \widehat{G}) - ie[\widehat{A}_\mu, \widehat{F} \star \widehat{G}]_\star \tag{2.2.26}$$

2.2.2. Mapa de Seiberg-Witten

En esta sección haremos una breve presentación de mapa Seiberg-Witten [16] aplicados al campo escalar y vectorial. Estos campos en el espacio-tiempo NC expresados en términos de espacio-tiempo conmutativo. Presentaremos a continuación las relaciones de los campos no-conmutativo y conmutativo, pero sin considerar términos de mayor o igual orden en $O(\theta^2)$, por que θ tiene su valor en la escala de

Plank:

$$\widehat{\phi} = \phi - \theta^{\rho\sigma} A_\rho \partial_\sigma \phi \tag{2.2.27}$$

$$\widehat{\varphi} = \varphi - \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma} A_\rho \partial_\sigma \varphi \tag{2.2.28}$$

$$\widehat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma} A_\rho (\partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}) \tag{2.2.29}$$

$$\widehat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \theta^{\rho\sigma}(F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} - A_\rho \partial_\sigma F_{\mu\nu}) \tag{2.2.30}$$

donde $\widehat{\phi}$, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{A}_\mu$ y $\widehat{F}_{\mu\nu}$ son los campos en el espacio-tiempo NC, mientras ϕ, φ, A_μ y $F_{\mu\nu}$ son los campos en espacio-tiempo conmutativo, siendo ϕ campo escalar, φ campo escalar complejo, A_μ tensor potencial electromagnético y $F_{\mu\nu}$ tensor electromagnético.

2.2.3. cuantización de sistemas vinculados por el método de Dirac

En esta sección realizaremos un breve estudio del formalismo de cuantización por Dirac ([7],[8]) y que es utilizado para cuantizar sistemas con constricción. Antes, haremos una referencia sobre sistemas con constricción y el tratamiento especial que se debe dar al cuantizar por el método llamado cuantización canónica.

Sea una teoría clásica que posee constricción en función de coordenadas q_i y momentos p_i con $i = 1, 2, ..., N$, como

$$\Gamma(q_i, p_i) = 0. \tag{2.2.31}$$

Como vemos la constricción (2.2.31) posee valor nulo. Pero esto no es cierto al evaluar en paréntesis de Poisson para esta constricción con otra cantidad de teoría donde puede que no sea nulo, lo que es incoherente. Por eso, utilizamos la siguiente notación

$$\Gamma(q_i, p_i) \approx 0 \tag{2.2.32}$$

donde $\approx$, significa que la relación no vale necesariamente dentro de los paréntesis de Poisson.

Consideremos entonces que una cierta cantidad dinámica $A(p,q)$, cuyo paréntesis de Poisson con $\Gamma(q_i, p_i)$ es

$$\{A, \Gamma\} \neq 0, \tag{2.2.33}$$

si queremos pasar a la teoría de la mecánica cuántica tenemos que transformar A, Γ en operadores $\widehat{A}$, $\widehat{\Gamma}$. Si sabemos que $\Gamma = 0$, entonces $\widehat{\Gamma} = 0$, porque en mecánica cuántica no tiene sentido hablar de igualdad débil, por tanto

$$[\widehat{A}, \widehat{\Gamma}] = 0, \tag{2.2.34}$$

debimos obtener un resultado diferente de cero en (2.2.34), pues

$$\{A, B\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\widehat{A}, \widehat{B}]. \tag{2.2.35}$$

Entonces, la regla general de cuantización canónica lleva a una inconsistencia si hay presencia de constricciones. Por tal motivo, Dirac descubrió la manera correcta de proceder en cuanto a cuantización canónica de sistemas con constricción.

Para encontrar las correcciones encontradas por Dirac a la cuantización canónica, tenemos que encontrar el Hamiltoniano de un sistema que contenga constricciones. Para ello, tomamos un sistema descrito por el Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i)$ en espacio de configuraciones N-dimensional, con $i = 1, 2, ..., N$ siendo q_i las coordenadas y $\dot{q}_i$

las velocidades generalizadas. La transformación de Legendre del Lagrangiano o Hamiltoniano se hace introduciendo los momentos canónicos p_i, que están relacionados con el Lagrangiano, por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.2.36}$$

En el caso de un sistema con constricción, q_i y p_i no necesariamente son independientes y la relación (2.2.36) puede resultar una constricción. A esto, surge directamente de las relaciones de momentos canónicos, son llamados constricciones primarios y se expresa como

$$\Omega_m = \approx 0, \qquad m = 1, 2, ..., M, \qquad M \leq N \tag{2.2.37}$$

Es decir, una constricción relaciona p_i y q_i. Si hubiera $\dot{q}_i$ no es una constricción.

Por otro lado, para pasar del formalismo Lagrangiano a Hamiltoniano, tenemos que realizar transformaciones entre el espacio de configuraciones $(q_i, \dot{q}_i)$ y el espacio de fase q_i, p_i. El Jacobiano para esa transformación esta dado por [2].

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \tag{2.2.38}$$

donde W_{ij} es la matriz Hesiana. Si esta matriz posee determinante diferente de cero, el sistema no posee restricciones, por lo que la transformación de tipo $q_i, \dot{q}_i \to (q, p)$ son siempre posibles, en este caso, la ecuación (2.2.36) puede ser resuelta para las velocidades generalizadas. En cambio, si la matriz Hesiana es singular, no todos los $\dot{q}_i$ puede ser unicamente determinado en términos de p_i y q_i, puesto que existen M constricciones en la teoría y habrá M velocidades en esas condiciones.

El método de Dirac consiste en mantener las restricciones que surgen en la teoría e incorporarlos al Hamiltoniano. Con el fin de describir el método de cuantización, vamos desarrollar aquí de manera resumida lo que fue desarrollado en su libro de Dirac titulada “Lectures on Quantum Mechanics”.

Primeramente, siguiendo el Método de Dirac vamos a definir el Hamiltoniano canónico, como

$$H_c(q,p) = p_i\dot{q}_i - L(q,p) \tag{2.2.39}$$

Luego, definamos la variación de la acción del Lagrangiano utilizando la relación (2.2.39), que nos resulta

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(p_i\dot{q}_i - H)dt = 0 \tag{2.2.40}$$

Desarrollando esta relación y utilizando

$$\delta H_c = \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\delta p_i \tag{2.2.41}$$

se tiene

$$\int_{t_1}^{t_1}\left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\right)\delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]dt = 0 \tag{2.2.42}$$

como δq_i y δp_i son funciones arbitrarias de tiempo, entonces deben satisfacer

$$\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta p_i = 0. \tag{2.2.43}$$

Por otro lado, realizando una variación a la ecuación (2.2.37), encontramos

$$\frac{\partial\Omega_m}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\Omega_m}{\partial p_i}\delta p_i \approx 0. \tag{2.2.44}$$

Si existen M constricciones, habrá igual número de ecuaciones de ese tipo. Multiplicando (2.2.44) por λ_m y sumando este con (2.2.43), obtenemos

$$\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial q_i}\right) \delta q_i - \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} - \frac{\partial \Omega_m}{\partial p_i}\right) \delta p_i \approx 0 \tag{2.2.45}$$

Osea, tenemos M funciones arbitrarias $\lambda_m(p, q)$ que son llamados multiplicadores de Lagrange. Por lo tanto, la relación (2.2.45) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &\approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &\approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial p_i} \end{aligned} \tag{2.2.46}$$

que son las ecuaciones de Hamilton para sistemas vinculados. por otro lado, el nuevo Hamiltoniano estará dado por

$$H_T = H_c + \lambda_m \Omega_m \tag{2.2.47}$$

por lo que, la evolución temporal de los coordenadas y momentos está dado en términos de paréntesis de Poisson, como

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &\approx \{q_i, H_T\} \\ \dot{p}_i &\approx \{p_i, H_T\} \end{aligned} \tag{2.2.48}$$

Conforme desarrollamos, podemos encontrar mas constricciones secundarios, terciarios, etc. En este caso es fácil percibir que, ellos son incorporados a la teoría semejante a lo anterior. por ejemplo, supongamos que existen K constricciones secundarios que cumple $K + M \leq N$, entonces

$$H = H_c + \lambda_a \Omega_a, \qquad a = 1, 2, ..., K + M \tag{2.2.49}$$

Veamos ahora como las restricciones secundarios son determinados utilizando condición de consistencia $\dot{\Omega}_m = 0$

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_m &= \{\Omega, H_T\} \\ &= \{\Omega_m, H_c\} + \lambda_n \{\Omega_m, \Omega_n\} \end{aligned} \tag{2.2.50}$$

por lo que, de acuerdo con los paréntesis de Poisson entre las constricciones Ω_m y Ω_n, puede acontecer:

a) Si $\{\Omega_m, \Omega_n\} = 0$, entonces $H_T = H_c$, por lo que (2.2.50) se convierte en $\dot{\Omega}_m = \{\Omega_m, H_c\} = 0$, que es una constricción. Este puede ser uno nuevo o ya conocido. este procedimiento puede ser repetido hasta que la teoría no genere más constricciones.

b) Si $\{\Omega_m, \Omega_n\} \neq 0$, en este caso no obtenemos una constricción, pero si una relación con los multiplicadores de Lagrange.

Una clasificación importante con la relación a los paréntesis de Poisson entre las constricciones son:

a) Si, una restricción posee paréntesis de Poisson nulo con todas las otras constricciones de la teoría se denominan de primera clase. Significa que la teoría posee invariancia por transformación de calibre. En este caso hay dos caminos que se pueden seguir. Fijar calibre, lo que también implica que las constricciones de primera clase pasan a ser de segunda clase. El otro camino es trabajar covariante-mente, técnica que no aplicaremos en este trabajo.

b) Si, por lo menos una constricción posee paréntesis de Poisson no nulo con cualquier otra constricción de la teoría, ellos son denominados de segunda clase.

Paréntesis de Dirac

Dirac generalizó los paréntesis de Poisson para teorías que contienen constricciones, en una expansión denominada paréntesis de Dirac, que desempeña las mismas relaciones que los paréntesis de Poisson para teorías sin constricción. Así, el paréntesis de Dirac [8] es

$$\{A, H_c\}_D = \{A, H_c\} - \{A, \Omega_a\}C_{ab}^{-1}\{\Omega_b, H_c\} \tag{2.2.51}$$

donde la matriz C_{ab} esta representada como

$$C_{ab} = \{\Omega_a, \Omega_b\}, \qquad a = 1, 2, ..., M + K \tag{2.2.52}$$

esta matriz C_{ab} solo será nula, si las constricciones fueran de segunda clase. Osea, si las constricciones fueran de primera clase los paréntesis de Dirac serán los paréntesis de Poisson. Luego la cuantización puede ser realizada de manera canónica a través de los paréntesis de Dirac [6, 19].

$$\{A, B\}_D \to \frac{1}{i\hbar}[\widehat{A}, \widehat{B}]. \tag{2.2.53}$$

Es importante mencionar que ahora las restricciones valen fuertemente en el paréntesis de Dirac, osea

$$\{A, \Omega_a\}_D = 0 \tag{2.2.54}$$

así, no hay mas inconsistencias en la relación (2.2.53).

Paréntesis de Poisson en teoría de campos

Es algo directo pasar de un número finito a infinito grados de libertad, lo cual requerimos para una teoría de campos. Sabemos que la dinámica de un sistema con número finito de grados de libertad está dado por la función de tiempo $q_i(t)$ que son las coordenadas (i es un índice discreto), mientras para un número infinito de grados de libertad esta dado por una función $\varphi(x)$ de espacio-tiempo que es denominada campo. El paso de discreto a continuo podemos expresarlo de manera simbólica como la transformación [18, 1]

$$q_i(t) = q(i,t) \rightarrow q(\vec{x},t) = \varphi(x) \tag{2.2.55}$$

$x = (\vec{x},t) = (x^1, x^2, ..., x^n, x^0) = (x^\mu)$, $\nu = 0, 1, 2, ..., n$.

En teoría de campos debemos considerar que existe cantidades equivalentes al caso discreto, como la densidad Lagrangiana, Hamiltoniana y también como las sumatorias son sustituidas por integrales y las derivadas ordinarias por derivadas funcionales [18].

Un Lagrangiano en la teoría de campo es una funcional de los campos y sus derivadas, si consideramos solo la primera derivada temporal, entonces

$$L = L(\varphi, \dot{\varphi}) \tag{2.2.56}$$

De manera más general, si consideramos teorías locales donde L puede ser expresado como

$$L = \int d^3 \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \tag{2.2.57}$$

donde $\mathcal{L}$ es la densidad Lagrangiana.

La acción S es también una funcional expresado de forma análoga al caso discreto, como

$$S[\varphi] = \int L dt = \int dt \int d^3\mathcal{L} = \int d^4\mathcal{L} \tag{2.2.58}$$

de la relación (2.2.58), S puede ser expresado también como

$$S[\varphi] = \int d^4\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \tag{2.2.59}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para teoría de campos es

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi \mu(x)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^\mu(x)} = 0 \tag{2.2.60}$$

o también puede ser escrito la ecuación (2.2.60) como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\nu(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^\nu(x))} = 0 \tag{2.2.61}$$

que pueden ser demostradas usando la ecuación (2.2.59), donde se aplica la misma condición $\delta S[\varphi] = 0$ de caso discreto. Donde la relación entre L y $\mathcal{L}$ es

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi^\mu)} \right) \tag{2.2.62}$$

Ahora definimos los canónicamente conjugados al campo φ como

$$\pi_\mu(x) \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^\mu(x)} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\mu(x)} \tag{2.2.63}$$

de forma que la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}$ es dada por

$$\mathcal{H} = \pi_\mu(x)\dot{\varphi}(x) - \mathcal{L} \tag{2.2.64}$$

donde el Hamiltoniano H está dado por

$$H = \int d^3x\mathcal{H} \tag{2.2.65}$$

usando la ecuación (2.2.64), se tiene

$$H = \int dx^3(\pi_\mu(x)\dot{\varphi}^\mu(x) - \mathcal{L}) \tag{2.2.66}$$

Las ecuaciones canónicas de Hamilton pueden ser escritas como:

$$\dot{\varphi}^\mu(x) = \frac{\delta H}{\delta \pi_\mu(x)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi^\mu(x)} \tag{2.2.67}$$

$$\pi_\mu(x) = -\frac{\delta H}{\delta \varphi^\mu(x)} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi^\mu(x)} \tag{2.2.68}$$

Si tomamos dos funciones $A(\varphi(x), \pi(x))$ y $A(\varphi(y), \pi(y))$ sus paréntesis de Poisson estará dado por

$$\{A(x), B(y)\}_{x^0=y^0} = \int d^3 \left(\frac{\delta A(x)}{\delta \varphi^\mu(z)}\frac{\delta B(x)}{\delta \pi_\mu(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta \pi_\mu(z)}\frac{\delta B(x)}{\delta \varphi^\mu(z)}\right) \tag{2.2.69}$$

solamente estando definido para tiempo iguales x^0 y y^0. Con (2.2.69) las ecuaciones de Hamilton pueden ser escritas como

$$\dot{\varphi}_\mu = \{\varphi_\mu, H\} \tag{2.2.70}$$

$$\dot{\pi}_\mu = \{\pi_\mu, H\} \tag{2.2.71}$$

$$\tag{2.2.72}$$

y los paréntesis de Poisson fundamentales entre los campos y momentos son:

$$\{\varphi^\mu(x), \varphi^\nu(y)\} = 0 \tag{2.2.73}$$

$$\{\pi_\mu(x), \pi_\nu(y)\} = 0 \tag{2.2.74}$$

$$\{\varphi^\mu(x), \pi_\nu(y)\} = \delta^\mu_\nu(x - y) \tag{2.2.75}$$

que están definidos a tiempos iguales x^0 y y^0.

Debemos observar que las notaciones $\varphi^\mu(x)$ y $\pi_\mu(x)$ está indicando que el campo y momento canónico tienen infinitos grados de libertad indicado por el índice continuo x, lo mismo acontece con otras cantidades que aparecen en teoría de campos [18, 10]

CAPÍTULO III

MÉTODOS DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. No-experimental

Esta investigación es **no-experimental**, puesto que en este trabajo no se realizan mediciones ni observaciones de los fenómenos naturales. Esta investigación, se sustenta en base a las leyes ya existentes y verificadas experimentalmente en donde se intenta implementar una nueva teoría.

3.2. Método lógico deductivo

Esta investigación es de **método lógico deductivo**, puesto que consiste en encontrar principios desconocidos a partir de los conocidos. En otras palabras, encontramos una manera más general de estudiar el electromagnetismo a partir de principios ya estudiados y verificados experimentalmente en una geometría diferente.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIONES

4.1. RESULTADOS Y DISCUSIONES

4.1.1. Cuantización del campo electromagnético NC

Para describir la evolución temporal del estado de movimiento de un campo electromagnético, la integral de acción estará dado por

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.1.1}$$

que es invariante bajo transformaciones de Lorentz y gauge. Una transformación de gauge es una transformación de algún grado de libertad interno que no modifica ninguna propiedad observable Física.

Habiendo introducido la acción para el campo electromagnética en la teoría conmutativa, ahora esa teoría transformaremos en una de espacio-tiempo no conmutativo, para ello utilizaremos las propiedades y las definiciones descritas en el capítulo 2, con la que podemos definir la acción NC

$$\widehat{S} = -\frac{1}{4}\int d^4x \widehat{F}_{\mu\nu} \star \widehat{F}^{\mu\nu} \tag{4.1.2}$$

que viola la simetría de Lorentz. Donde $\widehat{F}_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético en el espacio-tiempo NC.

Utilizando la propiedad de no linealidad de producto Moyal, podemos escribir (4.1.2) como producto usual o conmutativo

$$\widehat{S} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}\widehat{F}_{\mu\nu}\widehat{F}^{\mu\nu}\right) = \int d^4x \widehat{\mathcal{L}}(x) \tag{4.1.3}$$

luego, haciendo uso de mapeamiento SW para la expresión anterior

$$\begin{aligned}
\widehat{S} &= -\frac{1}{4}\int d^4x \left(\left[F^{\mu\nu} - \theta^{\gamma\delta}\left(A_\gamma \partial_\delta F^{\mu\nu} + F_{\mu\gamma}F^{\delta\nu}\right)\right]\left[F_{\mu\nu} - \theta^{\alpha\beta}\left(A_\alpha \partial_\beta F_{\mu\nu} + F_{\mu\alpha}F^{\beta\nu}\right)\right]\right) \\
&= -\frac{1}{4}\int d^4x \left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \theta^{\alpha\beta}A_\alpha F_{\mu\nu}(\partial_\beta F^{\mu\nu}) - \theta^{\alpha\beta}A_\alpha F^{\mu\nu}\partial_\beta F_{\mu\nu} - 2\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\beta\nu}F^{\mu\nu}\right)
\end{aligned}$$

integrando por partes la expresión

$$\begin{aligned}
-\theta^{\alpha\beta}A_\alpha F_{\mu\nu}(\partial_\beta F^{\mu\nu}) &= \theta^{\alpha\beta}\partial_\beta(A_\alpha F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} \\
&= \theta^{\alpha\beta}\partial_\beta(A_\alpha)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \theta^{\alpha\beta}A_\alpha F^{\mu\nu}\partial_\beta F_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

reemplazando esto en $\widehat{S}$ y ordenando de manera adecuada, tenemos

$$\widehat{S} = -\frac{1}{4}\int d^4x \left(F^2 - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F^2 + 2\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}F^{\mu\nu}\right) \tag{4.1.4}$$

de donde el Lagrangiano o densidad Lagrangiana NC es

$$\widehat{\mathcal{L}}(x) = -\frac{1}{4}\left(F^2 - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F^2 + 2\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}F^{\mu\nu}\right) \tag{4.1.5}$$

Con el Lagrangiano NC podemos estudiar las ecuaciones de Lagrange o también conocidos como ecuaciones de Euler-Lagrange que nos permite contar con un sistema analítico para llegar a las ecuaciones que describen al comportamiento físico del campo y esta ecuación está definida como

$$\partial^{\tau}\left(\frac{\partial\widehat{\mathcal{L}}}{\partial^{\tau}A^{\eta}}\right)-\frac{\partial\widehat{\mathcal{L}}}{\partial A^{\eta}}=0 \tag{4.1.6}$$

como $\widehat{\mathcal{L}}$ no depende explícitamente de los A^{η}, se tiene

$$\frac{\partial\widehat{\mathcal{L}}}{\partial A^{\eta}}=0$$

como también

$$\begin{aligned}\partial^{\tau}\left(\frac{\partial\widehat{\mathcal{L}}}{\partial^{\tau}A^{\eta}}\right)&=-\frac{1}{4}\partial^{\tau}\frac{\partial}{\partial^{\tau}A^{\eta}}\left(F^{2}-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F^{2}+2\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}F^{\mu\nu}\right)\\&=-\frac{1}{4}\partial^{\tau}\left(4F_{\tau\eta}-2\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F_{\tau\eta}-\theta_{\tau\eta}F^{2}+4\theta^{\alpha\beta}F_{\tau\alpha}F_{\eta\beta}+4\theta_{\alpha\eta}F^{\mu\alpha}F_{\mu\tau}-4\theta_{\alpha\tau}F^{\mu\alpha}F_{\mu\eta}\right)\\&=-\partial^{\tau}F_{\tau\eta}+\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial^{\tau}(F_{\alpha\beta}F_{\tau\eta})+\frac{1}{4}\theta_{\tau\eta}\partial^{\tau}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})-\theta^{\alpha\beta}\partial^{\tau}(F_{\tau\alpha}F_{\eta\beta})-\theta_{\alpha\eta}\partial^{\tau}(F^{\mu\alpha}F_{\mu\tau})\\&\quad+\theta_{\alpha\tau}\partial^{\tau}(F^{\mu\alpha}F_{\mu\tau})\end{aligned}$$

donde tenemos las ecuaciones de movimiento del campo electromagnético

$$\partial^{\tau}F_{\tau\eta}-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial^{\tau}(F_{\alpha\beta}F_{\tau\eta})-\frac{1}{4}\theta_{\tau\eta}\partial^{\tau}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})+\theta^{\alpha\beta}\partial^{\tau}(F_{\tau\alpha}F_{\eta\beta})+\theta_{\alpha\eta}\partial^{\tau}(F^{\mu\alpha}F_{\mu\tau})-\theta_{\alpha\tau}\partial^{\tau}(F^{\mu\alpha}F_{\mu\tau})=0 \tag{4.1.7}$$

se nota claramente cuando $\theta\to 0$ obtener $\partial^{\tau}F_{\tau\eta}=0$ que son la ley de Gauss y la ley de Faraday cuando no interactúa con la materia o esta en el vacío

$$\nabla\cdot\vec{E}=0$$
$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

El momento canónico conjugado π puede ser encontrado a partir del desarrollo de (4.1.6) puesto que $\pi_\mu = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}^\mu$ y nos resulta para nuestro caso

$$\pi_\eta = -F_{0\eta} + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F_{0\eta} - \theta^{\alpha\beta}F_{0\alpha}F_{\eta\beta} - \theta_{\alpha\eta}F^{\mu\alpha}F_{\mu 0} \tag{4.1.8}$$

Ahora usaremos el formalismo $3+1$ que en términos formales, es la descripción de un espacio-tiempo cuadridimensional, en términos de una foliación dada por hiper-superficies tridimensionales tiempo espacio, de modo que la métrica inducida sobre este, sea Riemanniana [20].

Utilizaremos la métrica $diag(g) = (1, -1, -1, -1)$, las relaciones provenientes del tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$ y no-conmutativo $\theta_{\mu\nu}$. Para la separación $3+1$ siguientes, en este trabajo

$$\begin{cases} F^{0j} = -E^j \\ \\ F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k \end{cases} \qquad i, j \text{ y } k = 1, 2, 3 \tag{4.1.9}$$

$$\begin{cases} \theta^{0j} = 0 \\ \\ \theta^{ij} = -\varepsilon^{ijk}\theta^k \end{cases} \qquad i, j \text{ y } k = 1, 2, 3 \tag{4.1.10}$$

La definición de potencial vector está dado por

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \tag{4.1.11}$$

donde el campo magnético $\vec{B}$ y campo eléctrico $\vec{E}$ están definidos como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi \tag{4.1.12}$$

Utilizando la separación $3+1$ y las definiciones de campo magnético y eléctrico, podemos escribir el Lagrangiano encontrado para esta teoría en (4.1.5), como

$$\widehat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}(1+\theta\cdot B)(E^2 - B^2) - (\theta\cdot E)(E\cdot B) \tag{4.1.13}$$

También el momento canónico conjugado separado en $3+1$ estaría etá dado por

$$\pi^0 = 0 \tag{4.1.14}$$

y

$$\begin{aligned}\pi_i &= -F_{0i} + \frac{1}{2}\theta^{kl}F_{kl}F_{0i} - \theta^{kl}F_{0k}F_{il} - \theta_{ki}F^{lk}F_{l0} \\ &= -E^i + \frac{1}{2}\varepsilon^{klm}\varepsilon_{kls}\theta^m B^s E^i - \varepsilon^{klm}\varepsilon_{ils}\theta^m E^k B^s + \varepsilon^{kim}\varepsilon_{lks}\theta^m B^s E^l \\ &= -(1+\theta\cdot B)E^i + (E\cdot B)\theta^i + (\theta\cdot E)B^i \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

de este último podemos encontrar los siguientes equivalentes:

$$\begin{aligned}(\theta\cdot B)E^i &= (\theta\cdot B)\pi^i \\ (E\cdot B)\theta^i &= (\pi\cdot B)\theta^i \\ (\theta\cdot E)B^i &= (\theta\cdot\pi)B^i\end{aligned}$$

con estos equivalentes sustituyendo en (4.1.15) podemos encontrar el campo eléctrico relacionado con el momento canónico conjugado

$$E^i = (1-\theta\cdot B)\pi^i + (\pi\cdot B)\theta^i + (\theta\cdot\pi)B^i \tag{4.1.16}$$

también tenemos $\dot{A}_i$ de $E^i = F^{i0} = -\partial_i A_0 + \dot{A}_i$

$$\dot{A}_i = \partial_i A_0 + (1 - \theta \cdot B)\pi^i + (\pi \cdot B)\theta^i + (\theta \cdot \pi)B^i \tag{4.1.17}$$

El Hamiltoniano en mecánica clásica es una función escalar definida sobre el espacio de fase del sistema del cual podemos obtener las ecuaciones de movimiento. Como también bajo ciertas condiciones relacionadas con las características del sistema y las coordenadas, el Hamiltoniano puede identificarse con la energía mecánica del sistema.

para nuestra teoría, el Hamiltoniano $H = \int d^3\vec{x}\widehat{\mathcal{H}}_C$ lo podemos encontrar utilizando el Lagrangiano $\widehat{\mathcal{L}}$ y las ecuaciones (4.1.16) y (4.1.17). Donde el Hamiltoniano canónico esta dado por

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}_C &= \pi^i \dot{A}_i - \widehat{\mathcal{L}} \\ &= \pi^i(\partial_i A_0) + \pi^2(1 - \theta \cdot B) + (\pi \cdot B)(\theta \cdot \pi) + 2(\theta \cdot \pi)(\pi \cdot B) \\ &- \frac{1}{2}(1 + \theta \cdot B)\left[\pi^2 - 2(\theta \cdot B)\pi^2 + 4(\theta \cdot \pi)(\pi \cdot B) - B^2\right] \\ &= \pi^i(\partial_i A_0) + \frac{1}{2}(1 - \theta \cdot B)\pi^2 + \frac{1}{2}(1 + \theta \cdot B)B^2 + (\theta \cdot \pi)(\pi \cdot B) \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

La relación en (4.1.14) es una constricción, puesto que esta surgió directamente de la relación de momento canónico conjugado. A esta constricción se la denomina constricción primaria y la definimos como

$$\pi^0 \approx 0 \tag{4.1.19}$$

Las constricciones secundarias son obtenidas a través de condición de consistencia, considerando de que la constricción no evoluciona con el tiempo. Para tal caso necesitamos construir un Hamiltoniano añadiendo la constricción primaria al

Hamiltoniano canónico. Esto es

$$
\begin{aligned}
\widetilde{H} &= H_C + \int d^3\vec{x}\lambda_1\pi^0 = \int d^3\vec{x}(\mathcal{H}_C + \lambda_1\pi^0) \\
&= \int d^3\vec{x}\left[\pi^i(\partial_i A_0) + \frac{1}{2}(1-\theta\cdot B)\pi^2 + \frac{1}{2}(\theta\cdot B)B^2 + (\theta\cdot\pi)(\pi\cdot B) + \lambda_1\pi^0\right]
\end{aligned}
$$

Usando la condición de consistencia para π^0, tenemos

$$
\begin{aligned}
\{\pi^0(x'), \widetilde{H}\} &\approx \int d^3\vec{x}\pi^i(x)\{\pi^0(x'), \partial_i A^0(x)\}_{x_0'=x_0} \\
&\approx \int d^3\vec{x}\pi^i(x)\partial_i^x\{\pi^0(x'), A^0(x)\}_{x_0'=x_0} \\
&\approx \int d^3\vec{x}\pi^i(x)\partial_i^x\delta^3(x'-x) \\
&\approx -\nabla\cdot\vec{\pi}
\end{aligned} \tag{4.1.20}
$$

hemos obtenido otra constricción $\nabla\cdot\vec{\pi}$. En donde se ve claramente cuando $\theta\to 0$, esta constricción es la ley de Gauss $\nabla\cdot\vec{E}=0$.

Vamos buscar otra constricción secundaria, para ello escribimos un nuevo Hamiltoniano que incluya a $\nabla\cdot\vec{\pi}$, como

$$
H = \int d^3\vec{x}\left(\mathcal{H}_C + \lambda_1\pi^0 + \lambda_2\nabla\cdot\vec{\pi}\right)
$$

y por condición de consistencia para $\nabla\cdot\vec{\pi}$, podemos encontrar siguiendo el procedimiento anterior de condición la siguiente relación

$$
\{\nabla\cdot\vec{\pi}(x'), H\} = 0
$$

lo que significa que no existe mas constricciones y por tanto el procedimiento termina aquí para la teoría.

Es fácil notar que las constricciones $\pi^0\approx 0$ y $\nabla\cdot\vec{\pi}\approx 0$ son de primera clase.

La presencia de constricciones de primera clase en la teoría electromagnética ya era esperada, pues ella es una teoría de gauge.

Tenemos dos constricciones de primera clase, eso significa que en la fijación de gauge, tendremos dos grados de libertad para el campo de fotones y esto puede ser asociado a sus estados de polarización.

El hecho de que existan dos constricciones de primera clase significa que debemos encontrar dos constricciones debido a fijación de gauge. Esto es un poco extraño, pues recordando la transformación de gauge para A_μ es

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \tag{4.1.21}$$

Vemos que solo disponemos de la libertad de escoger una cierta función $\Lambda(x)$. Escogemos la fijación de gauge llamado fijación de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, a la que llamaremos constricción por fijación de gauge

$$\partial_k A^k \approx 0, \qquad k = 1, 2, 3 \tag{4.1.22}$$

como tenemos que encontrar otra constricción por fijación de gauge, aplicamos condición de consistencia para $\partial_k A^k$

$$\begin{aligned} \{\partial_k A^k(x'), H\}_{x'_0 = x_0} &= \int d^3\vec{x} \left\{\partial_k A^k(x'), \mathcal{H}_C + \lambda_1 \pi^0 + \lambda_2 \partial_l \pi^l\right\}_{x'_0 = x_0} \\ &= \nabla^2 A^0 - \pi^k \partial_k(\theta \cdot B) + B^k \partial_k(\theta \cdot \pi) + \theta^k \partial_k(B \cdot \pi) - \nabla^2 \lambda_2 \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

Esta claro que no sabemos cual es el valor de $\nabla^2 \lambda_2$, para encontrar esto, evaluamos la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} -\dot{A}^k &= \{A^k(x'), H\} \\ &= \partial_k A^0 + \pi^k - (\theta \cdot B)\pi^k + (\theta \cdot \pi)B^k + (B \cdot \pi)\theta^k - \partial_k \lambda_2 \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} F^{k0} &= \pi^k - (\theta \cdot B)\pi^k + (\theta \cdot \pi)B^k + (B \cdot \pi)\theta^k \\ -\dot{A}^k &= \partial_k A^0 + \pi^k - (\theta \cdot B)\pi^k + (\theta \cdot \pi)B^k + (B \cdot \pi)\theta^k \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

luego, comparando las relaciones (4.1.24) y (4.1.25) podemos deducir solo puede satisface la igualdad cuando $\partial_k \lambda_2 = 0$, por lo que λ_2 debe de ser algún función escalar. Por tanto hemos encontrado la otra constricción por fijación de gauge

$$\nabla^2 A^0 - \pi^k \partial_k(\theta \cdot B) + B^k \partial_k(\theta \cdot \pi) + \theta^k \partial_k(B \cdot \pi) \approx 0 \tag{4.1.26}$$

Las constricciones de la teoría son de segunda clase y estos son:

$$\phi_1 = \nabla^2 A^0 - \pi^k \partial_k(\theta \cdot B) + B^k \partial_k(\theta \cdot \pi) + \theta^k \partial_k(B \cdot \pi) \tag{4.1.27}$$

$$\phi_2 = \pi^0 \tag{4.1.28}$$

$$\phi_3 = \partial_k A^k \tag{4.1.29}$$

$$\phi_4 = \partial_k \pi^k \tag{4.1.30}$$

Los paréntesis de Dirac son una generalización del corchete de Poisson, Desarrollado por Paul Dirac para tratar de manera correcta a sistemas con constricciones de segunda clase en mecánica Hamiltoniana y en cuantización canónica.

Para evaluar los paréntesis de Dirac se requiere construir una matriz de la forma

$C_{ab}(x',x) = \{\phi_a, \phi_b\}$ con $a,b = 1,2,3,4$. Para nuestro caso, utilizando nuestras constricciones encontramos para la matriz para la teoría

$$C(x',x) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla^2 & -\nabla^2(\theta\cdot B) & 0 \\ -\nabla^2 & 0 & 0 & 0 \\ \nabla^2(\theta\cdot B) & 0 & 0 & -\nabla^2 \\ 0 & 0 & \nabla^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x'-x) \tag{4.1.31}$$

cuya inversa de la matriz C es

$$C^{-1}(x',x) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 & \frac{(\theta\cdot B)}{\nabla^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\nabla^2} \\ 0 & -\frac{(\theta\cdot B)}{\nabla^2} & -\frac{1}{\nabla^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x'-x) \tag{4.1.32}$$

con este matriz y las constricciones podemos evaluar los paréntesis de Dirac con nuestros constricciones

$$\{A^\mu(x'), \pi_\nu(x)\}^D_{x'_0=x_0} = \{A^\mu(x'), \pi_\nu(x)\}_{x'_0=x_0} - \int d^3y d^3z \{A^\mu(x'), \phi_a(y)\}_{x'_0=y_0} C^{-1}_{ab}(y,z)\{\phi_b(z), \pi_\nu(x)\}_{z_0=x_0} \tag{4.1.33}$$

evaluando con las constricciones obtenidas para la teoría

$$\begin{aligned} \{A^\mu(x'), \pi_\nu(x)\}^D_{x'_0=x_0} = \; & \{A^\mu(x'), \pi_\nu(x)\}_{x'_0=x_0} - \int d^3y d^3z \{A^\mu(x'), \phi_2(y)\}_{x'_0=y_0} C^{-1}_{21}(y,z)\{\phi_1(z), \pi_\nu(x)\}_{z_0=x_0} \\ & - \int d^3y d^3z \{A^\mu(x'), \phi_4(y)\}_{x'_0=y_0} C^{-1}_{43}(y,z)\{\phi_3(z), \pi_\nu(x)\}_{z_0=x_0} \end{aligned} \tag{4.1.34}$$

luego

$$\{A^\mu(x'), \pi_\nu(x)\}^D_{x_0'=x_0} = \left[(\delta^\mu_\nu - \delta^\mu_0\delta^0_\nu) - \frac{\partial_\mu\partial^\nu}{\nabla^2}\right]\delta^3(x'-x) \tag{4.1.35}$$

$$\{A^\mu(x'), A_\nu(x)\}^D_{x_0'=x_0} = 0 \tag{4.1.36}$$

$$\{\pi^\mu(x'), \pi_\nu(x)\}^D_{x_0'=x_0} = 0 \tag{4.1.37}$$

Los conmutadores son obtenidas a partir de los paréntesis de Dirac evaluados para la teoría. Como estos paréntesis son igualdades fuertes para las constricciones podemos relacionar $\{A, B\} \to \frac{1}{i}[\widehat{A}, \widehat{B}]$ con los paréntesis de Dirac y nos resulta lo siguiente:

$$[A^i(x'), \pi_j(x)]_{x_0'=x_0} = i\left(\delta^i_j - \frac{\partial_i\partial^j}{\nabla^2}\right)\delta^3(x'-x) \tag{4.1.38}$$

$$[A^i(x'), A_j(x)]_{x_0'=x_0} = 0 \tag{4.1.39}$$

$$[\pi^i(x'), \pi_j(x)]_{x_0'=x_0} = 0 \tag{4.1.40}$$

Se observa que las reglas de cuantización para el electromagnetismo NC implementados coinciden exactamente con las reglas de cuantización del electromagnetismo en el espacio-tiempo conmutativo. Estas reglas de conmutación también pueden ser escritas en función de potencial vector y campo eléctrico, como:

$$[A^i(x), E_j(x')] = i\left(\delta^i_j - \frac{\partial_i\partial^j}{\nabla^2}\right)\delta^3(x'-x) \tag{4.1.41}$$

$$[A^i(x), A'^j(x)] = [E^i(x), E^j(x')] = 0 \tag{4.1.42}$$

El potencial se puede expandir en series de Fourier tridimensional, de modo que la solución $\Box^2 A^i = 0$ puede escribirse como

$$\mathbf{A}(x) = \int \frac{d^3}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon^{(\lambda)}(k) \left[a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)*}(k) e^{ikx} \right] \tag{4.1.43}$$

donde k es momentum, $\varepsilon^{(\lambda)}(k)$ es vector de polarización, $k^2 = 0$, $k_0 = |\mathbf{k}|$, dado que la condición de radiación de gauge es $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, resulta

$$\mathbf{k} \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(k) = 0 \tag{4.1.44}$$

Entonces, para una dirección de propagación $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, los $\varepsilon^{(\lambda)}(k)$ son transversales. Esta claro que también podemos elegir que estos sean ortogonales

$$\varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \varepsilon^{(\lambda')}(k) = \delta_{\lambda\lambda'} \tag{4.1.45}$$

Ahora podemos calcular la relación de conmutación de los operadores $a^{(\lambda)}(k)e^{ikx}$ y $a^{(\lambda)*}(k)e^{-ikx}$, en términos de la función

$$f_k(x) = \frac{1}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}} e^{-ikx} \tag{4.1.46}$$

obtenemos

$$\mathbf{A}(x) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}} \sum_{\lambda} \varepsilon^{(\lambda)}(k) \left[f_k(x) a^{(\lambda)}(k) + f_k^*(x) a^{(\lambda)*}(k) \right] \tag{4.1.47}$$

dado que $f_k(x)$ y $f_k^*(x)$ forman un conjunto orto-normal, se puede deducir que

$$a^{(\lambda)}(k) = \int d^3x [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2} f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \mathbf{A}(x) \tag{4.1.48}$$

$$a^{(\lambda)*}(k) = -\int d^3x [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2} f_k(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \mathbf{A}(x) \tag{4.1.49}$$

$$\tag{4.1.50}$$

Luego, usando las ecuaciones (4.1.41), (4.1.44) y (4.1.45) obtenemos

$$\left[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')*}(k')\right] = 2k_0(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(k-k') \tag{4.1.51}$$

$$\left[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')}(k')\right] = \left[a^{(\lambda)*}(k), a^{(\lambda')*}(k')\right] = 0 \tag{4.1.52}$$

Estas relaciones de conmutación tienen la misma forma que las del campo escalar y tienen la misma interpretación de que los operadores de aniquilación y creación de fotones.

Volviendo al tema del Hamiltoniano encontrado para la teoría de la electrodinámica en espacio-tiempo no-conmutativo, podemos expresarlo aquel Hamiltoniano en función de operadores de aniquilación y creación, para ello expresamos la densidad Hamiltoniana en función de campo eléctrico, magnético, y usando la condición de Lorentz, tenemos

$$\widehat{H}_C = \frac{1}{2}\int d^3x \left[(1+\theta\cdot B)(E^2+B^2) - 2(E\cdot B)(\theta\cdot E)\right] \tag{4.1.53}$$

Utilizando gauge de Coulomb para calcular los campos eléctricos y magnéticos de la forma $E = -\frac{\partial A}{\partial t}$ y $B = \nabla\times A$ en función de operadores de aniquilación y creación, utilizando (4.1.43) obtenemos

$$\mathbf{E}(x) = \int \frac{d^3}{(2\pi)^3 2k_0} i\sum_{\lambda}\varepsilon^{(\lambda)}(k)k_0\left[a^{(\lambda)}(k)e^{-ikx} - a^{(\lambda)*}(k)e^{ikx}\right] \tag{4.1.54}$$

elevando al cuadrado el campo eléctrico, obtenemos

$$\mathbf{E}^2(x) = \sum_{\lambda}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{4}\left[-a^{(\lambda)}(k)a^{(\lambda)}(k) + a^{(\lambda)*}(k)a^{(\lambda)}(k) + a^{(\lambda)}(k)a^{(\lambda)*}(k) - a^{(\lambda)*}(k)a^{(\lambda)*}(k)\right] \tag{4.1.55}$$

De forma similar para el campo magnético

$$\mathbf{B}(x) = \int \frac{d^3}{(2\pi)^3 2k_0} i \sum_{\lambda} (\varepsilon^{(\lambda)}(k) \times k) \left[-a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)*}(k) e^{ikx} \right] \tag{4.1.56}$$

teniendo en cuenta que $(\varepsilon^{(\lambda)}(k) \times k) \cdot (\varepsilon^{(\lambda')}(k') \times k') = k \cdot k' \delta_{\lambda\lambda'}$, podemos encontrar el cuadrado del campo magnético

$$\mathbf{B}^2(x) = \sum_{\lambda} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \left[a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)}(k) + a^{(\lambda)*}(k) a^{(\lambda)}(k) + a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)*}(k) + a^{(\lambda)*}(k) a^{(\lambda)*}(k) \right] \tag{4.1.57}$$

Con las igualdades (4.1.54), (4.1.55), (4.1.56) y (4.1.57) el Hamiltoniano para el modelo de la electrodinámica de Maxwell en espacio-tiempo no-conmutativo quedaría en función de operadores de creación y aniquilación. Como por ejemplo, cuando $\theta \to 0$, tenemos el operador Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \\ &= \sum_{\lambda} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \left[a^{(\lambda)*}(k) a^{(\lambda)}(k) + a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)*}(k) \right] \\ &= \sum_{\lambda} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left[a^{(\lambda)*}(k) a^{(\lambda)}(k) \right]. \end{aligned} \tag{4.1.58}$$

Esto es la energía total de un conjunto de fotones con polarización transversal $\lambda = 1, 2$ y esta definido positivamente que representa la teoría cuántica del campo electromagnético.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos formulado una relación explicita de las perturbaciones en la implementación de la electrodinámica en la teoría NC sin interacción externa, mediante el uso de mapa SW, pero sin embargo, se debe aclarar que no se han considerado los términos de orden superior a $O(\theta)$, puesto que el valor del parámetro NC en orden mayor o igual a dos no tiene significado físico considerable por estar en la escala de Planck. Además, la densidad Lagrangiana nos resulta invariante de gauge y viola la simetría de Lorentz. Como también las ecuaciones de movimiento en esta teoría se ven perturbadas explícitamente con la presencia del término NC, Así, cuando $\theta \to 0$ estas ecuaciones resultan ser las leyes de Gauss y Faraday que son conocidas como ecuaciones de Maxwell.

Para el proceso de cuantización de la teoría de Maxwell en la teoría NC, se ha utilizado el método de Dirac. En donde se ha obtenido dos constricciones de primera clase y dos debido a fijación de gauge para el campo de fotones que pueden ser asociados con sus dos estados de polarización, y con estas constricciones se han determinado las reglas de cuantización o reglas de conmutación de la electrodinámica de Maxwell en espacio-tiempo NC y se obtuvieron exactamente lo mismo que de la teoría de Maxwell para la electrodinámica en un espacio-tiempo conmutativo, eso significa que no se ve afectado las reglas de cuantización con la presencia del término NC. Finalmente haciendo uso de las reglas de cuantización encontradas y la solución de gauge de Coulomb en el vacío, se pudo determinar el potencial vector, campos magnético y eléctrico en función de operadores de creación y aniquilación, y con ello el Hamiltoniano de la teoría queda cuantizado.

RECOMENDACIONES

Otros aspectos que puedan ser estudiados en trabajos futuros son las soluciones de ecuaciones de movimiento, implementación de las ecuaciones provenientes del tensor dual electromagnético en NC. Como también estudiar los propagadores de Feynman, espacio de momentos, y otros relacionados al operador Hamiltoniano.

REFERENCIAS

[1] J. Walecka A. Fetter, *Theoretical mechanics of particles and continua*, Cambridge University Press, 1980.

[2] M. Jerrold; T. Anthony, *Cálculo vectorial*, Pearson Educación S.A., 2002.

[3] Herbert Balasin, Daniel N. Blaschke at. el., *On the energy-momentum tensor in moyal space*, Eur. Phys. **C75** (2015), 284, `arXiv:1502.03765`.

[4] F. A. Berezin, *Some remarks about the associated envelope of a lie algebra*, Funct. Anal. Appl. (1967), 1–91.

[5] Peter Schupp y Julius Wess Branislav Jurco, *Nonabelian noncommutative gauge theory via noncommutative extra dimensions*, Nucl.Phys. B **604** (2001), 148–180, `arXiv:hep-th/0102129`.

[6] Marc Claudio, Henneaux and Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, Princeton University Press, 1992.

[7] P. A. M. Dirac, *Generalized hamiltonian dynamics*, Royal Society **246** (1958), 326–332, `https://www.jstor.org/stable/100496`.

[8] Paul A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, vol. 2, New York.

[9] G. Berrino, S. Cacciatori, A. Celi et. al., *Noncommutative electrodynamics*, Phys.Rev.D **67** (2003), 265021, `arXiv:hep-th/0210171`.

[10] G. Sardanashvily G. Giachetta, L. Mangiarotti, *Covariant hamiltonian equations for field theory*, J. Phys. **A32** (1999), 6629, arXiv:hep-th/9904062.

[11] H. J. Groenewold, *On the principles of elementary quantum mechanics*, Physica **12** (1946), 405–460.

[12] R. Jackiw, *Physical instances of noncommuting coordinates*, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **108** (2002), 30–36, arXiv:hep-th/0110057.

[13] S.I. Kruglov, *Maxwell's theory on non-commutative spaces and quaternions*, High Energy Physics **27** (2002), 343–358, arXiv:hep-th/0110059.

[14] J. E. Roberts S. Doplicher, K. Fredenhagen, *The quantum structure of spacetime at the planck scale and quantum fields*, Commun.Math.Phys. **172** (1995), 187–220, arXiv:hep-th/0303037.

[15] at. el. Sean M. Carroll, Jeffrey A. Harvey, *Noncommutative field theory and lorentz violation*, Phys.Rev.Lett. **87** (2001), 141601, arXiv:hep-th/0105082.

[16] N. Seiberg and E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, JHEP **9909** (1999), 032, arXiv:hep-th/9908142.

[17] C. K. Zachos T. L. Curtright, *Quantum mechanics in phase space*, Asia Pacific Physics Newsletter **37** (2012), arXiv:1104.5269.

[18] J. Reinhardt W. Greiner, *The field quantization*, Springer, 1996.

[19] Steven Weinberg, *The quantum theory of fields*, vol. 1, Cambridge University Press.

[20] T. Miramontes y D. Sudarsky, *El formalismo 3+1 en relatividad general y la descomposición tensorial completa*, Revista Mexicana de Física E **64** (2018), 108–126, https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.64.108.

[21] Michael R. Douglas y Nikita A. Nekrasov, *Noncommutative field theory*, Rev. Mod. Phys. **73** (2001), 977–1029, arXiv:hep-th/0106048.

[22] V.M.Vasyuta y V.M.Tkachuk, *Classical electrodynamics in a space with spin noncommutativity of coordinates*, Physics Letters B **761** (2016), 462–468, https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.09.001.