# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

## ESCUELA DE POSGRADO

## DOCTORADO EN EDUCACIÓN

**TESIS**

# EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO Y SU RELACIÓN CON LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LOS DOCENTES DEL V CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR DE LA CIUDAD DE PUNO - 2016

**PRESENTADA POR:**

**JUANA VIOLETA CHAYÑA APAZA**

**PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:**

**DOCTORIS SCIENTIAE EN EDUCACIÓN**

**PUNO, PERÚ**

**2019**

# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

## ESCUELA DE POSGRADO

## DOCTORADO EN EDUCACIÓN

## TESIS

# EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO Y SU RELACIÓN CON LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LOS DOCENTES DEL V CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR DE LA CIUDAD DE PUNO – 2016

**PRESENTADA POR:**

**JUANA VIOLETA CHAYÑA APAZA**

**PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:**

**DOCTORIS SCIENTIAE EN EDUCACIÓN**

APROBADA POR EL SIGUIENTE JURADO:

PRESIDENTE
..........................................
Dr. FELIPE GUTIERREZ OSCO

PRIMER MIEMBRO
..........................................
Dr. ESTANISLAO EDGAR MANCHA PINEDA

SEGUNDO MIEMBRO
..........................................
Dr. ALFREDO CARLOS CASTRO QUISPE

ASESOR DE TESIS
..........................................
Dr. WENCESLAO QUISPE YAPO

Puno, 04 de julio del 2019

**ÁREA:** Educación
**LÍNEA:** Sistematización de experiencias educativas.
**TEMA:** Razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica de docentes de la ciudad de Puno.

**DEDICATORIA**

A mi familia que son y serán siempre mi mayor motivo de mejora profesional y personal.

## AGRADECIMIENTOS

El proceso de mis estudios del doctorado, tiene ahora un momento importante al presentar esta investigación, motivo por el cual, debo agradecer a quienes alentaron en todo momento mi decisión de concluirla.

A la Universidad Nacional del Altiplano por brindarme la posibilidad de continuar con mi desarrollo profesional y personal.

A los docentes del programa de doctorado en educación, por su buena disposición, aportes y tiempo dedicados a la asesoría de esta investigación.

# ÍNDICE GENERAL

## CAPÍTULO II

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA



## CAPÍTULO III

## MATERIALES Y MÉTODOS



## CAPÍTULO IV

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

# ÍNDICE DE TABLAS

Pág.

## ÍNDICE DE FIGURAS

Pág.

# ÍNDICE DE ANEXOS

# RESUMEN

La continua transformación de la que es objeto la sociedad del conocimiento, constituye un reto permanente para los sistemas educativos, los cuales deben adaptar periódicamente sus estructuras curriculares, así como exigir, preparar y actualizar a los profesores para que asuman los retos que establezca la educación en su proceso de modernización. Es por ello que se realiza este trabajo de investigación sobre el conocimiento y la enseñanza del álgebra temprana en la educación básica, cuyo objetivo es; establecer la naturaleza de la relación entre la capacidad de razonamiento algebraico, con la idoneidad didáctica que ostentan los docentes del V ciclo del nivel Educación Básica Regular de la ciudad de Puno -2016, todo ello en base al enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, propuesta por Godino, cuyo análisis se hizo a través de evaluaciones desarrolladas en los talleres con 44 docentes entre varones y mujeres, principalmente sobre la capacidad de razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica para la enseñanza del álgebra. El presente trabajo de investigación tiene el propósito de aportar al desarrollo de la implementación del álgebra elemental para con los niños de educación básica regular, debido a su importancia se busca también con esta investigación la introducción de aspectos del razonamiento algebraico en educación primaria, el cual implica cambiar la manera de concebir el álgebra como tal, para poder incluirlo en este nivel educativo con la finalidad de estimular el desarrollo de dicho pensamiento en los niños.

**Palabras clave:** aprendizaje, enseñanza, docente, idoneidad didáctica y razonamiento algebraico.

# ABSTRACT

The continuous transformation that the knowledge society is subject to constitutes a permanent challenge for educational systems, which must periodically adapt their curricular structures, as well as require, prepare and update teachers to assume the challenges established by education in its modernization process. That is why this research work is carried out on the knowledge and teaching of early algebra in basic education, whose objective is; establish the nature of the relationship between the capacity of algebraic reasoning, with the didactic suitability of the teachers of the 5th cycle of the Regular Basic Education level of the city of Puno -2016, all this based on the ontosemiotic approach to knowledge and mathematical instruction, proposed by Godino, whose analysis was made through evaluations carried out in the workshops with 44 teachers between men and women, mainly on the capacity of algebraic reasoning and didactic suitability for Algebra teaching. The present research work has the purpose of contributing to the development of the implementation of elementary algebra towards the children of regular basic education, due to its importance the introduction of aspects of algebraic reasoning in primary education is also sought with this research, which It implies changing the way of conceiving algebra as such, to be able to include it in this educational level in order to stimulate the development of such thinking in children.

**Keywords**: algebraic reasoning, didactic suitability, teacher, teaching and learning.

# INTRODUCCIÓN

El álgebra y la posibilidad de ser introducida en la enseñanza desde la escuela primaria es el tema en torno al cual se desarrolla este trabajo.

En diversas propuestas curriculares e investigaciones resaltan el interés de desarrollar el razonamiento algebraico desde los primeros niveles de educación primaria. Por su parte, la National Council of Teachers of Mathematics en diversas directrices curriculares (NCTM, 2000; NTCM, 2006) propone introducir ideas y modos de pensar propias del álgebra desde los primeros grados de la educación primaria. Estas propuestas surgen ante la necesidad de soslayar las dificultades que presentan los estudiantes al momento de transitar de la aritmética al álgebra, así como también de eliminar su tardía y abrupta introducción en la escuela secundaria (Carpenter et al., 2003; Kaput, 1998). Lo que requiere la formación didáctico-matemática de los docentes en dicho tema. En este trabajo de investigación presentamos una experiencia formativa con docentes de educación primaria centrada en desarrollar su conocimiento de las características del razonamiento algebraico y su competencia para discriminar niveles de algebrización en la resolución de tareas matemáticas escolares. La experiencia se realizó en un curso taller sobre "didáctica del algebra temprana" en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Altiplano Puno en el año 2017.

Introducir el álgebra en la Etapa de Educación Primaria, es el diseño que se fundamenta en el modelo previo de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) (Godino, Castro, Aké, Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Molina, 2009) y su implementación y evaluación se inscribe en las investigaciones orientadas al diseño instruccional (Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer y Schauble, 2003; Cobb y Gravemeijer, 2008; Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi, 2013) apoyado en herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Mostramos en este trabajo las posibilidades ofrecidas por el mencionado marco teórico en el campo de la didáctica de la matemática, entendida en sentido generalizado (Godino et al., 2013). Considerando que el conocimiento de ello podría favorecer el desarrollo del razonamiento algebraico, evitando en parte, las dificultades encontradas.

En este sentido este trabajo busca incentivar al inicio con el razonamiento algebraico, desde los primeros niveles de la educación primaria, para que los docentes y estudiantes profundicen en el entendimiento de las matemáticas elementales para fomentar en ellos habilidades de generalización, expresión y justificación sistemática de generalizaciones matemáticas (Kaput & Blanton, 2001), así como también proporcionar las oportunidades para comenzar con sus propias representaciones intuitivas y poco a poco adoptar las representaciones convencionales como herramientas para representar y para entender las relaciones matemáticas en álgebra (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008)

Esta contribución teórica se complementará con la elaboración de unas actividades matemáticas para los docentes de Educación Primaria, que tratarán de plasmar algunas de las ideas principales de esta investigación en la labor diaria con sus estudiantes, diseñando actividades que posibiliten el desarrollo del razonamiento algebraico, por lo mismo que ya a finales de los sesenta, Kieran (1989) advirtió que “un área muy necesitada de la investigación matemática es el razonamiento algebraico”.

Además de que según la teoría piagetiana, este fracaso se debía a que los estudiantes de Educación Primaria no están capacitados para pasar del pensamiento operacional concreto al pensamiento operacional formal, por lo que recomendaba posponer las tareas algebraicas a la Educación Secundaria. Sin embargo, Mason (1991) observó que los estudiantes llegaban a la escuela con capacidades naturales de generalización y que potenciando estas capacidades se podía desarrollar el razonamiento algebraico.

Por su parte, otros investigadores también observaron que los estudiantes de los primeros cursos podían considerar las operaciones aritméticas como funciones, elaborar y simbolizar algebraicamente conjeturas sobre relaciones aritméticas básicas, usar representaciones algebraicas para resolver problemas, utilizar letras para representar cantidades y propusieron introducir además de fomentar el pensamiento algebraico desde los primeros años de escolarización con tareas que “incluyan las relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción” (Kieran, 2004). Esta forma de pensar, caracterizada como algebraica, es el corazón de las matemáticas (Mason, 1999) y puede ser desarrollada por niños de temprana edad (Kaput y Blanton, 2001; Carpenter, Franke y Levi, 2003).

Los Principios y Estándares del NCTM (2000) recogieron estas ideas al establecer que una de las formas de desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes es la formalización de patrones, funciones y generalizaciones. Para ello proponen que los programas de matemáticas en los primeros años de escolarización se orienten a capacitar a los estudiantes para comprender patrones, relaciones y funciones.

Siguiendo estas indicaciones, se ha revisado el currículo nacional de educación básica regular del Perú, específicamente el área de matemáticas donde se introduce el pensamiento algebraico en torno algebra en la competencia de "resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio" donde el estudiante de EBR debe lograr traducir datos y condiciones a expresiones algebraicas, comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas, usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales, argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.

Por tanto, la competencia de "resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio" está considerada como una forma eficaz para introducir el pensamiento algebraico en la escuela, por lo que las matemáticas en la Educación Primaria e Infantil deben incluir la exploración del algebra para que los estudiantes sean capaces de descubrir, extender y analizar las regularidades y expresarlas de forma verbal o simbólica (NCTM, 2000; Molina, 2006; Radford, 2014; Zapatera, 2015).

En cuanto a su estructura, la investigación está conformada por cuatro capítulos. En el capítulo 1, damos a conocer la revisión de literatura sobre los principales modelos y algunas propuestas teóricas sobre razonamiento algebraico y el enfoque ontosemiótico.

En el capítulo 2, presentamos el problema de investigación, En la descripción del problema abordamos elementos de su justificación y puntualizamos las hipótesis, preguntas de investigación y objetivos del estudio.

En el capítulo 3, presentamos la metodología, describiendo su aplicación en las diferentes fases de la investigación; y en la descripción de la metodología damos cuenta del tipo de investigación y profundizamos en la metodología, técnicas e instrumentos aplicados en cada estudio.

En el capítulo 4, se presenta la descripción y análisis del proceso de estudio implementado y se realiza el análisis retrospectivo del diseño, también se presenta una síntesis con las principales conclusiones obtenidas tras la realización del presente trabajo.

# CAPÍTULO I

# REVISIÓN DE LITERATURA

## 1.1. Marco teórico

### 1.1.1. Razonamiento algebraico

El razonamiento algebraico se plantea desde diversas investigaciones en el ámbito de la educación matemática y ha sido concebido como factor fundamental en el desarrollo de habilidades matemáticas que facilitan la constitución de nuevos conocimientos, en procesos en los cuales los objetos matemáticos sean dotados de sentido y usados en la interacción con el mundo real. Para Godino y Font (2003) el Razonamiento Algebraico (RA).

> Implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central (p. 774).

En este sentido, el Razonamiento Algebraico está compuesto por un conjunto de procesos, en los cuales el estudiante va refinando conocimientos y habilidades de forma gradual, acercándose cada vez más a construcciones formales. Mora (2012) al igual que Godino y Font (2003), conciben el razonamiento algebraico como el proceso que conlleva a representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas, la cual ha llegado a ser conocida como “la ciencia de los patrones y el orden” y en la que es necesario el desarrollo del lenguaje y simbolismo para que como lo menciona Kaput (1999), los estudiantes establezcan generalizaciones sobre datos o relaciones matemáticas, las argumenten y las expresen formalmente.

El Razonamiento Algebraico es un proceso en el que los sujetos se ven en la necesidad de establecer conjeturas, justificar, argumentar y caracterizar comportamientos o variaciones, entre otras operaciones mentales; encaminados hacia la generalización y a su vez a la formalización de las producciones matemáticas.

En este punto es necesario aclarar que aunque este trabajo está enfocado al razonamiento algebraico, se alude tanto al pensamiento algebraico como al Pensamiento Variacional, los cuales no se desconocen, ni se contradicen, sino que se articulan de manera dinámica en lo conceptual y en lo práctico, por esta razón se explica a continuación las características de cada uno con el fin de establecer las coincidencias.

El pensamiento algebraico, está asociado al proceso de algebrización que supone un trabajo cada vez más explícito de generalización (Bolea et al., 2001), el cual está ligado con la noción de variabilidad y estructura algebraica, y donde la simbolización es preponderante en dichas construcciones conceptuales y prácticas. Mora (2012) hace énfasis en la importancia de incluir la enseñanza del álgebra en primaria a través de tareas que posibiliten a los estudiantes de primaria el desarrollo del pensamiento algebraico. Por esta razón destaca el "Early Algebra" (Kaput, 1998) como una propuesta, la cual tiene dentro de sus pretensiones desarrollar simultáneamente el pensamiento numérico y el algebraico en primaria a través de: secuencias, patrones (núcleo o unidad de patrón), representaciones, gráficos, símbolos, y otros.

Este enfoque "[…] abarca el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y la modelización [...]" ( Socas, 2011).

Dicha propuesta ha influenciado diversos proyectos curriculares como el de Molina (2009) los cuales buscan construir estrategias que permitan desarrollar el pensamiento algebraico tanto en la educación primaria como en la secundaria. La autora establece que es posible enseñar álgebra en primaria para facilitar la transición e integración de la aritmética con el álgebra, debido a que estos pensamientos han sido separados, lo cual acentúa y prolonga las dificultades de los estudiantes cuando se enfrentan a procesos algebraicos de mayor complejidad.

El pensamiento algebraico se encuentra en relación con otros pensamientos que ponen su atención en el estudio de la variación y el cambio, que a pesar de que son estudiados con mayor profundidad por medio de sistemas algebraicos y analíticos, se encuentran en estrecha relación con conceptos y procedimientos referidos a lo numérico, geométrico, métrico y aleatorio; mediados por actividades de visualización, exploración y manipulación, las cuales conllevan a la generalización de patrones, leyes y reglas, que pueden expresarse no solo con representaciones en el sistema algebraico, sino también las gestuales, del lenguaje natural, técnico, las numéricas, las gráficas y las icónicas que tienen como función ayudar en la construcción y reproducción de procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen un patrón (Mora, 2012).

De acuerdo con lo anterior, se encuentran similitudes entre el razonamiento algebraico y el pensamiento algebraico, en cuanto al proceso de generalización; "las expresiones razonamiento algebraico y pensamiento algebraico se toman como equivalentes, aunque algunos autores establecen distinciones entre las nociones cognitivas correspondientes" (Godino,Castro, Aké y Wilhelmi, 2012).

Por otro lado, el MINEDU (2017) considera que el Pensamiento Variacional involucra conceptos, procedimientos y métodos relacionados con:

> (...) se desarrolla en este ciclo a través de problemas donde los estudiantes identifican relaciones de proporcionalidad entre magnitudes. Por ejemplo, analizan la relación entre el dinero que se paga y la cantidad de kilogramos que se compran de producto, entonces a mayor cantidad de kilogramos más se pagará. En estas situaciones identifican como cambian las magnitudes una con respecto a la otra, los datos se organizan en tablas simples y describen esta relación utilizando lenguaje matemático. Asimismo se presentan problemas de equivalencia, en estas, se expresan igualdades y términos desconocidos utilizando iconos y el signo igual (=).

Por ejemplo los problemas en los que se busca uno o más valores desconocidos o de encontrar varias equivalencias para una misma cantidad (MINEDU, 2015).

Procesos que llevan a los estudiantes a consolidar el desarrollo y aplicación de competencias matemáticas del entorno. Por esta razón es necesario que en los primeros grados escolares se dé lugar al estudio de regularidades (entendidas como unidades de repetición) y criterios para que los estudiantes identifiquen con mayor facilidad el patrón que se repite de manera periódica.

De igual manera, se establece en los lineamientos curriculares de matemáticas que el desarrollo de dicho pensamiento le permite al estudiante "lograr caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto de otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno. Para ello plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas. Así también razona de manera inductiva y deductiva, para determinar leyes generales mediante varios ejemplos, propiedades y contraejemplos" (MINEDU, 2017). En otras palabras lo que se pretende es que los estudiantes desarrollen procesos de pensamiento que le permitan identificar, interpretar, describir, modelar y transformar situaciones o fenómenos de variación y cambio con los que puedan llevar a cabo procesos de pensamiento matemático.

Al respecto, en los estándares básicos de competencias matemáticas, se presentan sugerencias para el estudio del Pensamiento Variacional, donde el estudiante deba:

Resuelve problemas de equivalencias, regularidades o relaciones de cambio entre dos magnitudes o entre expresiones; traduciéndolas a ecuaciones que combinan las cuatro operaciones, a expresiones de desigualdad o a relaciones de proporcionalidad directa, y patrones de repetición que combinan criterios geométricos y cuya regla de formación se asocia a la posición de sus elementos. Expresa su comprensión del término general de un patrón, las condiciones de desigualdad expresadas con los signos > y <, así como de la relación proporcional como un cambio constante; usando lenguaje matemático y diversas representaciones. Emplea recursos, estrategias y propiedades de las igualdades para resolver ecuaciones o hallar valores que cumplen una condición de desigualdad o proporcionalidad; así como procedimientos para crear, continuar o completar patrones. Realiza afirmaciones a partir de sus experiencias concretas, sobre patrones y sus elementos no inmediatos; las justifica con ejemplos, procedimientos, y propiedades de la igualdad y desigualdad. (MINEDU, 2017).

Aunque dichas actividades se lleven a cabo en la primaria, se debe tener presente que el desarrollo es lento y complejo, inicialmente los estudiantes generalizan patrones aritméticos y luego el álgebra sirve de base para modelar situaciones en las que hay aspectos de la variación que cambian o que permanecen constantes, por ello no solo debe estar claro en qué momento hacer uso de ciertas variables de acuerdo a los diferentes significados e interpretaciones, sino también conceptos, procesos y estructuras algebraicas que ayuden en la representación y constitución de modelos claves para la resolución de problemas en diversos contextos.

> Es decir, el pensamiento variacional "[...] busca que el estudiante avance en el camino de la generalización propia del algebra, al encontrar reglas de formación de patrones numéricos o gráficos que dependa de la posición." (MINEDU, 2015).

Por consiguiente, también se encuentran similitudes entre el Pensamiento Variacional y el Razonamiento Algebraico, principalmente en el trabajo del álgebra a partir de la primaria con el estudio de patrones o regularidades presentados en diferentes contextos y simbologías; la aproximación a la generalización y la estimulación para el desarrollo de habilidades lógico matemáticas que permitan que el estudiante llegue a un nivel más avanzado con bases firmes para responder a las necesidades propias de la realidad en cuanto a la variación y el cambio.

A manera de conclusión como se ha mostrado en las tres concepciones teóricas: Razonamiento Algebraico, Pensamiento Algebraico y Pensamiento Variacional, se entrevé que son coincidentes en los aspectos correspondientes a esta investigación y que se pueden observar en la figura 1.

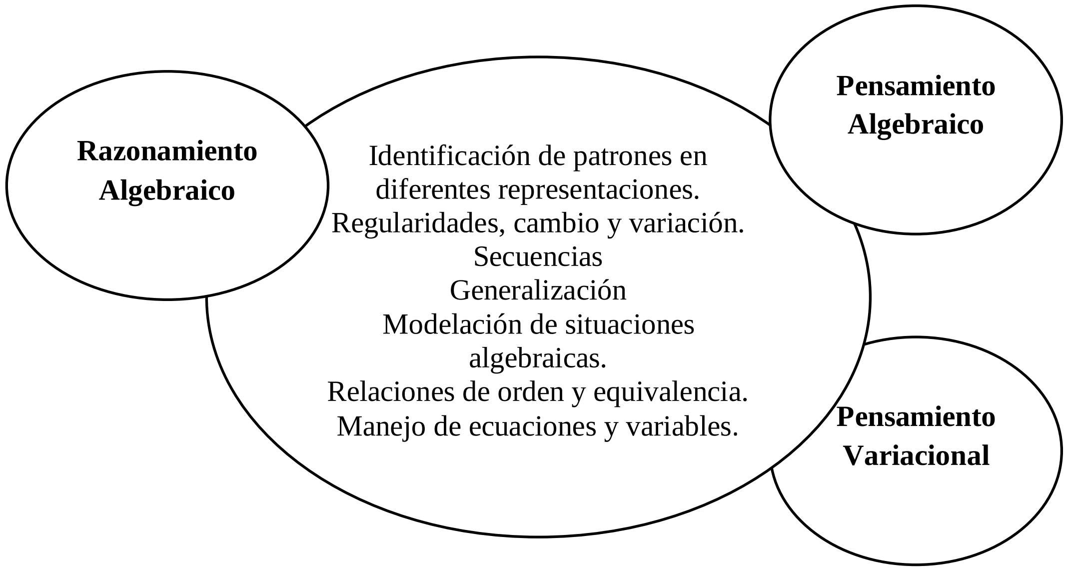



*Figura 1*. Relaciones coincidentes entre el Razonamiento Algebraico Pensamiento Variacional y Pensamiento Algebraico.

Dadas las coincidencias identificadas en las tres concepciones teóricas, en este proyecto se adopta el término de razonamiento algebraico en relación con el proceso de resolución de problemas, los cuales se entretejen en el proceso de generalización en cuanto a la constitución de objetos matemáticos como los patrones, las secuencias y las relaciones de orden y de equivalencia, como se muestra en la figura 2.

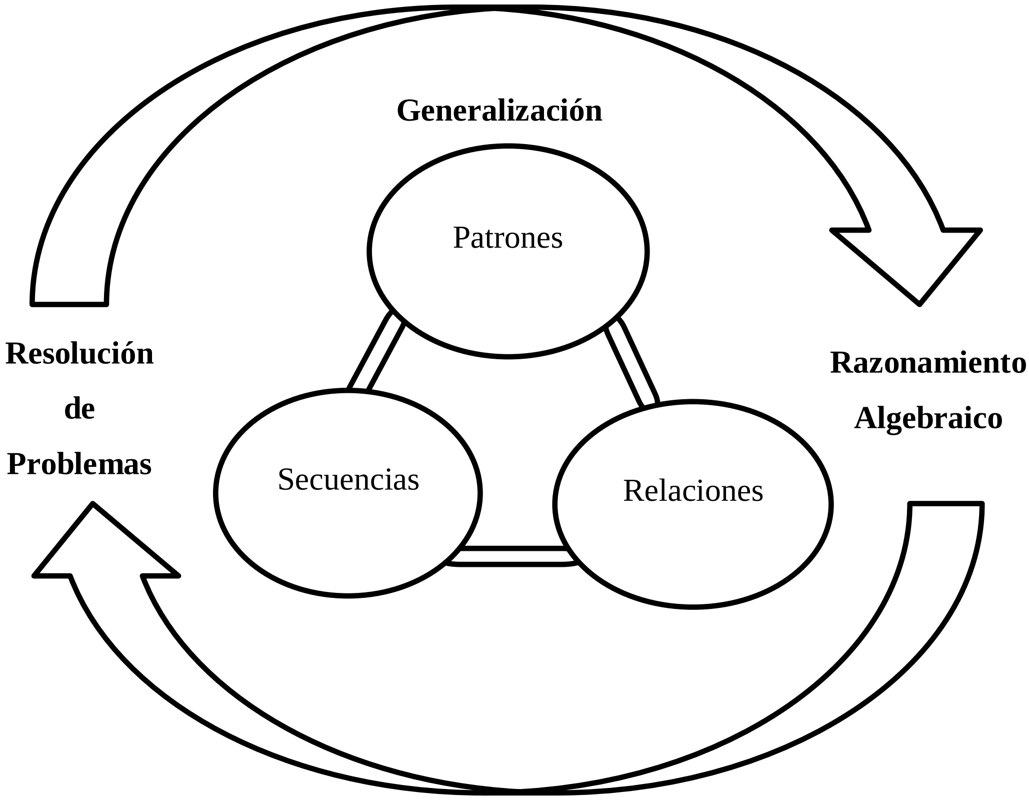



*Figura 2*. La generalización como componente del R.A asociado a la resolución de problemas.

**Generalización.** proceso que se encuentra en el centro del razonamiento algebraico, dado que al realizar una operación de manera reiterativa se hace necesario recurrir al álgebra, la cual brinda un lenguaje sencillo para describir la acción que se está realizando (Aké, 2013). Se concibe entonces, como objeto y medio de pensamiento y comunicación (Dörfler, 1991; Zaskis y Liljedahl, 2002) que comprende la unión y representación de ideas en las cuales se expresan relaciones matemáticas importantes.

Para Dreyfus, 1991, "Generalizar es inducir de casos particulares, identificar aspectos en común, para expandir dominios de validez" para ello, se llevan a cabo procesos propios de la actividad matemática; debido a la importancia que ésta representa en la producción de conocimiento matemático, Aké (2013) retoma autores como Carraher, Shliemann & Martínez (2008) quienes proponen que una generalización matemática se da cuando se establece una propiedad válida para un conjunto de objetos matemáticos o condiciones, en el momento en que dicho conjunto se amplíe, la propiedad sigue siendo válida para esos nuevos elementos que lo conforman, es decir se generaliza; sin embargo, los autores excluyen procesos de la generalización si éstos no están expresados en lenguaje matemático. En este orden de ideas, la generalización juega un papel importante en el razonamiento algebraico y por lo tanto en el desarrollo del pensamiento matemático.

> La generalización es un rasgo característico del razonamiento algebraico, así como los medios para simbolizar, tanto las situaciones de generalización, como las de indeterminación (uso de incógnitas y ecuaciones para modelizar situaciones). Así mismo, las nociones de relación, operación y estructura son propias del álgebra (Godino et al., 2012).

Al respecto, Mora (2012) expone que existe una serie de fases que se deben dar en el proceso de la generalización, la primera de ellas es la percepción de un patrón, que consiste básicamente en visualizar, identificar patrones, regularidades, semejanzas y diferencias entre los términos de la secuencia. La etapa siguiente es denominada la expresión de la regularidad, en la cual los estudiantes pasan de visualizar a expresar o comunicar lo que observan e identifican en cierta secuencia. Si bien es cierto que pasar de una a otra fase es complicado para los estudiantes, a los docentes les corresponde orientarlos formulando algunas preguntas que los lleven a realizar estas acciones con mayor facilidad. La tercera etapa se trata del registro de la regularidad, es decir, escribir el patrón, sin necesidad de que sea en lenguaje matemático; en ésta los estudiantes tendrán mayor claridad en las ideas que crearon en las fases anteriores. La última etapa se basa en probar la validez de la regla hallada mediante la búsqueda, la argumentación, la explicación del patrón hallado y el establecimiento de relaciones entre diferentes expresiones.

En este sentido, “la generalización no se estudia exclusivamente de manera algebraica, ni todas las actividades algebraicas involucran generalización” (Godino et al., 2012) por lo que es necesario poner especial atención en los procesos algebraicos desarrollados, tener rutas y tareas claras que permitan orientar un camino en el que los estudiantes se vean en la necesidad de retomar elementos matemáticos, que a la vez, impliquen una generalización para interactuar con situaciones y problemas del entorno, además de diversificar los conocimientos. En este sentido, Stacey (1989) establece dos tipos de generalización de acuerdo a cómo se resuelven algunas situaciones; la generalización cercana, se da cuando la situación requiere ser desarrollada paso a paso por medio de un dibujo o contando, y la generalización lejana, tiene lugar cuando dichas situaciones difícilmente se pueden solucionar paso a paso.

La generalización cercana demanda identificar un esquema numérico que es el patrón de crecimiento de la sucesión numérica, mientras que la generalización lejana implica la coordinación de dos esquemas, el numérico, o identificación del número de elementos de cada figura de acuerdo con el patrón de la sucesión, y el espacial, o distribución de los elementos de cada figura de acuerdo con el patrón de la sucesión (Radford, 2014).

**Patrones**. Los patrones considerados como una sucesión de signos orales, gestuales, gráficos, etc., que se construyen siguiendo una regla ya sea de repetición (el núcleo se repite de forma periódica) o de recurrencia (cada termino puede ser expresado en función de las anteriores). En todo patrón se aprecia una estructura de base o un núcleo el da origen a la regla o ley de formación (MINEDU, 2015).

Patrones o secuencias se pueden usar indistintamente. Otros autores usan el termino patrón para designar estrictamente el núcleo de las secuencia (Bressan y Bogisic, 1996).

Al respecto se considera que "el núcleo o unidad de un patrón de repetición es la cadena más corta de elementos que se repiten" (Godino y Font, 2003). Este objeto matemático hace parte indiscutible del razonamiento algebraico, el cual se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente.

Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de las sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición del mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula.

Se presentan dos tipos de patrones; los patrones de repetición, que se presentan de forma periódica; y los patrones por recurrencia, en los que el núcleo cambia según alguna regularidad determinada por los términos de la secuencia; es decir, cada uno de los términos de la secuencia se puede representar con base en los términos anteriores (Bressan y Gallego, 2010).

**Secuencias.** "las secuencias son un conjunto de signos (orales, gestuales, físicos, comportamentales, gráficos, numéricos, etc.) ordenados, llamados términos que se constituyen a partir de una regla de repetición de un patrón" (Mora, 2012). Así mismo, señala que existen diferentes tipos de secuencias:

- Secuencias con el cuerpo, se utilizan movimientos corporales, ritmos o sonidos.
- Secuencias manipulativas, se recurre al uso de materiales concretos para manipular, como tapas, fichas de colores, de formas, palillos, dominós, entre otros.

- Secuencias figurativas o icónicas, son figuras que pueden constituir la representación gráfica de las secuencias manipulativas previamente presentadas o simplemente imágenes.
- Secuencias gráficas numéricas, se presentan en gráficos y que se pueden representar con números.
- Secuencias numéricas, se representan básicamente con números.
- Secuencias por recurrencia, cuyos términos se pueden hallar con base en el anterior.
- Secuencias tabulares, se presentan en tablas.

**Relaciones de orden y equivalencia**. El estudio de las relaciones de orden y equivalencia así como las propiedades son importantes en el estudio del álgebra, y han sido consideradas específicamente en la investigación del álgebra temprana, la cual centra la atención en la comprensión que tienen los estudiantes del signo igual y el significado operacional y relacional, es decir la diferenciación entre el uso del signo igual para señalar el resultado de las operaciones o la equivalencia de dos expresiones (Godino et al., 2012).

En este punto cabe mencionar que se han establecido dos tipos de relaciones: las relaciones de equivalencia, que conducen más a clasificaciones y las relaciones orden, que conducen a las ordenaciones y seriaciones.

Con respecto a lo anterior, una relación de equivalencia dirige de forma natural a una clasificación, la cual consiste en la partición de la agrupación de elementos en una serie de clases, de manera que dentro de una clase todos los elementos estén relacionados entre sí; es decir, se establece una clase de equivalencia.

En este proceso de clasificación es necesario que se formen subconjuntos o agrupaciones ya sean de objetos, símbolos u otros elementos que lo permitan, de acuerdo a un criterio de igualdad como el color, tamaño, forma, entre otros. Estos elementos que se relacionan mediante un criterio de igualdad ya sea descriptivo, constructivo o funcional y que constituyen una 'clase', y los que no se relacionan con éstos se encuentran en otras clases diferentes. Se debe tener en cuenta que en una clase puede existir un único elemento, si no hay otros elementos que se relacionen con él.

Mientras que una relación de orden es una relación definida en un conjunto que verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva, en la cual se establecen relaciones comparativas entre los elementos de un conjunto y se ordenan ya sea de forma creciente (de menor a mayor) o decreciente (de mayor a menor), de esta manera, los órdenes más comunes son las relaciones $<$ *y* $>$ en *z* y en *r*.

Existen dos tipos de relaciones de orden, total y parcial, se dice que es total cuando todos los elementos del conjunto sobre el que está definida son comparables por dicha relación, y parcial, si por el contrario existen elementos no comparables.

### 1.1.2. Conocimiento Disciplinar

En los principios y estándares para las matemáticas escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) se propone el álgebra como uno de los cinco bloques de contenido, junto con números y operaciones, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad, con la particularidad de que este bloque se debe desarrollar, no sólo en los niveles de enseñanza secundaria, sino incluso desde preescolar.

Ciertamente no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato (grados k-12). En el “álgebra escolar” se incluye el estudio de los patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos.

El concepto de función es una de las principales ideas de las matemáticas. Por ello se considera que es necesario, y posible, iniciar su utilización y estudio en el tercer ciclo de primaria, formando parte de la nueva visión del razonamiento algebraico, en lugar de retrasarla a los niveles de secundaria. Pero el estudio de las funciones deberá centrarse en indagar relaciones en contextos significativos para los alumnos y usando diversos métodos de representación para analizar dichas relaciones. Se debe descartar el énfasis en notaciones, terminologías como rango, dominio, y realización de gráficas sin ningún propósito.

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central.

En consecuencia, los maestros en formación tienen que construir esta visión del papel central de las ideas algebraicas en la actividad matemática, y sobre cómo desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles. Esto nos ha llevado a tenerlo en cuenta en la formación de los maestros y a reflexionar sobre las razones de esta elección, así como sobre la orientación y justificación de dicho estándar del NCTM.

Como hemos visto en los problemas incluidos en la sección a de contextualización profesional, en los libros de texto usados en primaria se proponen actividades que podemos calificar de algebraicas (uso de símbolos para designar objetos, ecuaciones, fórmulas y patrones). Incluso encontramos elementos teóricos que suponen el inicio de una reflexión sobre la estructura algebraica de los conjuntos y operaciones con números. Tal es el caso de los enunciados generales de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de las operaciones aritméticas y su aplicación en la solución de problemas.

Algunas características del razonamiento algebraico que son sencillas de adquirir por los niños, y por tanto deben conocer los maestros en formación, son:

1. Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados. el mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
2. Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos.
3. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números.

4. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.

### 1.1.3. Resolución de Problemas

Según García Jiménez (2002) la resolución de problemas puede contemplarse como: objetivo, contenido o metodología. Como objetivo porque la enseñanza de las matemáticas va dirigida a que el estudiante aprenda a resolver problemas; como parte del contenido referido a técnicas; heurísticos y estrategias para lograrla, y como metodología porque se la considera uno de los mejores caminos para aprender matemáticas, forma de aprendizaje.

La resolución de problemas es considerada como “el corazón de las matemáticas” (Halmos, 1980), dota a estas de unas peculiaridades y proporciona un sentido propio al proceso estudio.

Si un estudiante no se plantea y no resuelve diversos problemas no hace matemáticas; este es un proceso que enmarca la construcción, la apropiación y aplicación del conocimiento matemático, el cual lo consolida como una competencia fundamental que todo ser humano debe desarrollar en y para la sociedad (Brousseau, 1983).

La resolución de problemas le permite tomar posición y enfrentar múltiples situaciones que se presentan en la vida diaria, de esta manera podrá aprender y aplicar los conocimientos al indagar, analizar, aplicar y evaluar posibles soluciones.

Es así como en los estándares básicos de competencias en matemáticas se establece que la resolución de problemas es una competencia que requiere de flexibilidad y apertura a nuevas alternativas no necesariamente conocidas, que posibiliten un aprendizaje permanente mediante la búsqueda de un procedimiento adecuado; es decir, el establecimiento de una metodología para la acción y el desarrollo de unas habilidades y actitudes que permitan enfrentar de forma crítica y organizada la realidad para encontrar soluciones con sentido.

Hablar de problemas implica considerar aquellas situaciones que demandan reflexión, búsqueda, investigación y donde para responder hay que pensar en las soluciones y definir una estrategia de resolución que no conduce, precisamente, a una respuesta rápida e inmediata. La aparición del enfoque de resolución de problemas como preocupación didáctica surge como consecuencia de considerar el aprendizaje como una construcción social que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones con base en un proceso creativo y generativo (Coronel y Curotto, 2008).

No se debe obligar a los estudiantes a usar un método u otro, "más bien se instara a probar diversos métodos para sacar información y así planificar la resolución" (Alsina, et al., 1996).

Para el MINEDU (2013) la resolución de problemas requiere una serie de herramientas y procedimientos, como interpretar, comprender, analizar, explicar, relacionar, entre otros. Se apela a todos ellos desde el inicio de la tarea matemática, es decir, desde la identificación de la situación problemática hasta su solución. Es necesario ayudar a los estudiantes a identificar las fases que se requieren hasta la solución, generar un ambiente de confianza y participación en clase, y hacer una evaluación sistemática de sus esfuerzos. No perder de vista que lo principal no es llegar a la "solución correcta", sino posibilitar el desarrollo de sus propias capacidades matemáticas para resolver problemas. El MINEDU a través de las rutas del aprendizaje propone las siguientes fases de resolución de problemas.

1. comprender el problema.
2. diseñar y adaptar una estrategia.
3. ejecutar la estrategia.
4. reflexionar sobre el proceso.

Dewey (1910) propuso una lista de fases o etapas que se siguen para la solución de problemas, no elaborada para los de matemáticas, sino para cualquier cosa que en la vida cotidiana se llama "problema".

1. Identificación de la situación problemática

2. Definición precisa del problema
3. Análisis medios – fines. plan de solución.
4. Ejecución del plan.
5. Asunción de las consecuencias.
6. Evaluación de la solución. supervisión. generalización.

Dewey comienza con una "situación" que el sujeto siente como problema, ya que pretende construir un modelo de resolución, en la más amplia acepción del término problema.

Ausubel, Novak y Hanesian (1978): definen la resolución de problemas matemáticos como "descripción formal de las sucesivas etapas temporales del pensamiento, el planteamiento de 1910 de Dewey no ha sido mejorado apreciablemente en los pasados sesenta años".

Entre las descripciones de estrategias para resolver, problemas, una de las más conocidas es la debida a Polya (1945) que incluye: utilizar diagramas, buscar patrones, considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar marcha atrás, tantear y comprobar, crear un problema equivalente y crear uno más sencillo, estrategias de las agrupa en las siguientes cuatro fases:

1. Comprender el problema
2. Concebir un plan
3. Ejecución del plan
4. Examinar la solución obtenida.

Esta división en fases está hecha desde el punto de vista del "resolutor ideal", que las recorre linealmente pasando de una a otra solo cuando la anterior ha concluido y sin necesidad de abandonar o de rehacer el camino iniciado, sujeto cuyo supuesto comportamiento determino por introspección. Polya acompaña la descripción de cada una de estas fases con una serie de preguntas de naturaleza heurística útiles para el resolutor, que puede hacerse a sí mismo o que le puede hacer un profesor que pretenda guiarle mientras resuelve el problema. de esta manera, el modelo no es estrictamente hablando un modelo "descriptivo", porque las sugerencias heurísticas que incluye pretenden a la vez marcar pautas, indicar caminos y hacer posible que el resolutor tome conciencia de lo que necesita hacer y el lugar del proceso en el que se encuentra para actuar en consecuencia. El modelo tiene, por tanto, también un carácter de guía para la acción.

Muchos autores han exportado estas fases a otras áreas (proceso general de investigación (Dewey. 1910; Bunge, 1967) o gestión de calidad (Deming, 1982)) hasta el punto que ha quedado instituido como un modelo general de solución de problemas.

Mason, Burton y Stacey (1982) definen tres fases, llamadas abordaje, ataque y revisión, en función de los que llaman sentimientos del resolutor: los estados efectivos, de ánimo, emocionales,… en la descripción hacen referencia a unos procesos (particularización, generalización, conjeturación), a las fases y a unos estados, y no es tanto un modelo descriptivo o analítico sino un modelo de ayuda en la instrucción a los estudiantes.

A diferencia de Polya, los trabajos de Schoenfeld, resumidos en su libro de 1985, pueden verse como la búsqueda inacabable de fuentes de explicación de la conducta de los resolutores reales, que conduce a la categorización de lo que Schoenfeld llama los componentes del conocimiento y la conducta para explicar la actuación de los sujetos al resolver problemas de matemáticas, con lo que elabora un modelo de actuación y no un modelo de competencia.

Afirma Schoenfeld (1987) que no existen fases perfectas y que etiquetas como exploración o análisis describen mejor lo que el resolutor hace que las otras de comprensión y elaboración del plan de Polya, añadiendo, los resolutores expertos se caracterizan más por un rápido zigzagueo entre episodios o fases que por un recorrido secuencial por ellos.

Schoenfeld plantea el siguiente esquema:

1. Análisis y comprensión
2. Diseño y planificación
3. Exploración
4. Verificación

Schoenfeld (1992) ya no habla de componentes del conocimiento y la conducta sino de aspectos de la cognición, ha cambiado los nombres de tales aspectos – ahora son el conocimiento de base, estrategias de resolución de problemas, gestión y control, creencias y afectos – y ha introducido un quinto que con el nombre de prácticas pretende servir como fuente de explicación de las creencias.

Si restringimos el mundo de los problemas a los Problemas Aritméticos Elementales (PAE) que aparecen en el contexto escolar, tenemos el modelo de Puig y Cerdán (1988) con las fases siguientes:

1. Lectura
2. Comprensión
3. Traducción
4. Calculo
5. Solución
6. Revisión
7. Comprobación

Aclarando sus autores que, como en el contexto escolar se empieza con un “problema enunciado” a diferencia de comenzar por una “situación” en el mundo real, hace que en este modelo – como en ele de Polya – no aparezcan las fases 1 y 2 de Dewey. En las metodologías de enseñanza en las que las situaciones escolares simulan situaciones del mundo real, se comienza por fases similares a las dos primeras del modelo de Dewey, pero es difícil que la fase de revisión, comprobación se transforme en algo similar a las dos últimas fases de Dewey – en particular, que aparezca la fase asunción de las consecuencias-. En las tendencias pedagógicas que conciben el aprendizaje escolar como un aprendizaje de la vida, la resolución de problemas se transforma en el trabajo en situaciones reales representadas en el aula, como por ejemplo una tienda, lo que hace que todos los problemas aritméticos en el contexto de la compra-venta dejen de aparecer “enunciados”, para ser “situaciones”, con lo que puede que aparezcan todas las fases del modelo de Dewey, incluida la asunción de las consecuencias.

Por su parte Carrillo (1998) propone la consideración de las siguientes fases en el proceso general de resolución de problemas:

0. identificación
1. comprensión
2. planificación y exploración
3. ejecución
4. verificación

Dice el autor que asigna el numero 0 a la fase de identificación debido a que los problemas presentados en el ámbito escolar suelen ser enunciados.

La comprensión de un problema o de una situación no tiene por qué darse de manera global; en muchos casos, después de un primer acercamiento al problema, el resolutor atraviesa por otras fases, como planificación y ejecución, e incluso verificación, teniendo posteriormente que volver a profundizar en la comprensión del problema.(Carrillo, 1998).

Es decir, concibe las fases como estados por los que se pasa a los que se puede volver a lo largo del proceso de resolución.

Por otro lado, la resolución de problemas es considerado como "el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones (…) de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas" (Lesh y Zawojewski, 2007), dado que los problemas hacen parte de la vida diaria de los sujetos, lo que implica realizar todo un análisis y constitución de los conocimientos para darle solución; en este sentido, resolver un problema es una actividad que:

> [...] va más allá de hacer una operación y encontrar su resultado, es algo más que ejecutar un algoritmo, tiene que ver más con hacer preguntas relacionadas con la matematización de un problema real o bien con la construcción de nuevos objetos matemáticos y responder a esas preguntas (Chamorro y Vecino, 2003).

En los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencia en matemáticas, la resolución de problemas se considera como uno de los procesos generales de la educación matemática que proporciona el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se presenten estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los estudiantes y a la vez se convierten en ricas redes de interdisciplinariedad (MINEDU, 2017).

Por lo tanto, la resolución de problemas estimula habilidades del pensamiento analítico, crítico y reflexivo respecto a la toma de decisiones e interpretaciones de la situación presentada, a fin de constituir sus propios conocimientos basados en el contexto.

En esta misma línea, la resolución de problemas se asume "como una forma de pensar donde una comunidad de aprendizaje (los estudiantes y el profesor) buscan diversas maneras de resolver la situación y reconocen la relevancia de justificar respuestas con distintos tipos de argumentos" (Santos, 2008). Estos argumentos pueden ser verbales, icónicos, algebraicos, entre otros; y la implementación posibilita toda una movilización de conocimientos en el estudiante al unir lo que sabe con nuevos aprendizajes, con el objetivo de hallar una solución.

En el presente trabajo se adopta la postura de Santos (2008) en cuanto a considerar la resolución de problemas como una forma, un proceso o una actividad en la cual los estudiantes y el profesor buscan estrategias para resolver situaciones mediante el uso de conceptos propios de la matemática; en este caso, se toman particularmente el estudio del cambio, la variación, la identificación de regularidades, las relaciones de orden y de equivalencia, operaciones, entre otros; y de esta manera lograr el desarrollo del razonamiento algebraico, proceso que implica acciones cognitivas de reflexión, análisis, verificación, generalización e interpretación; por lo cual se hace necesario idear un modelo que proporcione una estructura general para resolver diversas tareas y el estudiante logre constituir un conocimiento significativo que le ayude a enfrentar los desafíos de la cotidianidad.

La enseñanza de las matemáticas desde esta perspectiva, pretende poner el acento en actividades que plantean situaciones problemáticas cuya resolución requiere de analizar, descubrir, elaborar hipótesis, confrontar, reflexionar, argumentar y comunicar ideas. Por tal razón, es necesario que los estudiantes hayan constituido conocimientos declarativos y procedimentales requeridos como indispensables para resolver el problema que se le ha planteado. Esto señala la búsqueda consciente de un modelo que potencie el desarrollo de un estudiante independiente, que en interacción con el conocimiento y el mundo que lo rodea, aprende y organiza el saber cómo parte de su propia construcción.

Se considera que los elementos expuestos configuran la red conceptual que fundamenta la propuesta investigativa y el análisis de los procesos llevados a cabo con los estudiantes, en lo relacionado con la resolución de problemas asociados al razonamiento algebraico desde el enfoque ontosemiótico.

#### 1.1.3.1. Comprensión del problema

En esta etapa se supone que el estudiante se da cuenta de cuál es el problema a enfrentar o resolver. Debe comprender de qué se está hablando, de cuál es el grado de dificultad y que datos o información realmente le ayudarán a encontrar la solución. (Polya, 1957).

Implica entender tanto el texto como la situación que nos presenta el problema, diferenciar los distintos tipos de información que nos ofrece el enunciado y comprender que debe hacerse con la información que nos es aportada.

Podríamos considerar el texto de los enunciados matemáticos como una tipología particular en la que se expresa la situación a resolver pero no el modo de llevarla a cabo. Su descubrimiento forma parte del trabajo del resolutor, el cual debe decodificar el mensaje contenido en el enunciado y trasladarlo a un lenguaje matemático que le permita avanzar en el proceso de resolución. De aquí se deduce que las dificultades que pueden aparecer en la comprensión del enunciado de un problema son diferentes de las que surgen en la comprensión de un texto de otra índole.

Aunque resulte redundante e inoficiosos sobre todo en el contexto de la enseñanza, conviene señalar que este aspecto es de vital importancia, sobre todo cuando los problemas a resolver son exclusivamente matemáticos. Esto no es menor considerado por ejemplo, cuando se intenciona que los estudiantes realicen análisis de textos o se les pide que profundicen en la información. Para ello deben acotar el problema que van a abordar. Se sugiere que el estudiante:

- Lea el enunciado despacio.
- Señale cuales son los elementos que debe investigar, profundizar. debe reconocer las incógnitas.
- Escriba o trate de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.
- Elabore un mapa conceptual o un esquema de la situación.

Para MINEDU (2013) esta fase está enfocada en la comprensión de la situación planteada. El estudiante debe leer atentamente el problema y ser capaz de expresarlo en sus propias palabras (así utilice un lenguaje poco convencional). Una buena estrategia es hacer que explique a otro compañero de que trata el problema y que está solicitando. O que lo explique sin mencionar números.

El docente debe indicar al estudiante que lea el problema con tranquilidad, sin presiones ni apresuramientos; que juegue con la situación; que ponga ejemplos concretos de cada una de las relaciones que presenta, y que pierda el miedo inicial. También debe tener presente la necesidad de que el alumno llegue a una comprensión profunda (inferencial) de la situación y de lo inútil que para la comprensión resulta repetir el problema, copiarlo o tratar de memorizarlo.

En esta fase el docente puede realizar preguntas que ayuden al estudiante a:

- Identificar las condiciones del problema, si las tuviera.
- Reconocer qué es lo que se pide encontrar.
- Identificar qué información necesita para resolver el problema y si hay información necesaria.
- Comprender qué relación hay entre datos y lo que se pide encontrar.

#### 1.1.3.2. Concepción del problema

Comprende la búsqueda de una estrategia para la solución del problema en este caso, debe relacionar los datos que posee con la información que se desea obtener, con la pregunta que se necesita responder. También debe escoger cuales son las herramientas matemáticas que se K1 SQ pueden usar. (Polya, 1957).

Es la parte fundamental del proceso de resolución de problemas. Una vez comprendida la situación planteada y teniendo clara cuál es la meta a la que se quiere llegar, es el momento de planificar las acciones que llevaran a ella. Es necesario abordar cuestiones como para que sirven los datos que aparecen en el enunciado, que puede calcularse a partir de ellos, que operaciones utilizar y en qué orden se debe proceder.

Es muy importante enunciar la planificación por escrito, de forma clara, simplificada y secuenciada. Servirá, además de para controlar el proceso de resolución por parte del estudiante, para que el profesor conozca el pensamiento matemático desarrollado durante la ejecución de la tarea.

En esta fase puede ser útil el uso de esquemas que ayuden a clarificar la situación de resolver, así como el proceso a seguir. Del mismo modo puede ser práctico recordar si se han abordado con anterioridad problemas similares y que metodología se siguió.

Esto invita a generar caminos diversos, flexibles y circulares, por tanto, queda fuera todo reduccionismo o mecanicismo. Las siguientes interrogantes pueden orientar este punto:

- ¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos?
- ¿Se puede plantear el problema de otra forma?
- Imaginar un problema parecido pero más sencillo
- Suponer que el problema ya está resuelto. ¿Cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?
- ¿Se utilizan todos los datos cuando se hace el plan?

Para el MINEDU (2013) en esta fase el estudiante comienza a explorar que caminos puede seguir para resolver el problema. Diseñar una estrategia de solución es pensar en que razonamientos, cálculos, construcciones o métodos le pueden ayudar para hallar la solución del problema. Dependiendo de la estructura del problema y del estilo de aprendizaje de los estudiantes, podrán elegir la estrategia más conveniente.

- Los estudiantes decidirán libremente que estrategia usaran para resolver el problema.

- El docente no debe decirles a los estudiantes lo que tienen que hacer para resolver el problema, sino propiciar que exploren varias posibilidades antes de que elijan su estrategia.

Esta es una de las fases más importantes en el proceso de resolución, en la que el estudiante activa sus saberes previos y los relaciona con los elementos del problema para diseñar una estrategia que lo lleve a resolver con éxito el problema. Contar con un buen conjunto de estrategias potencia los conocimientos con los que cuenta e estudiante, por ello debemos asegurarnos de que identifique por lo menos una estrategia de solución.

Entre estas tenemos:

**Hacer la simulación.** Consiste en representar el problema de forma vivencial mediante una dramatización o con material concreto y de esa manera hallar la solución.

**Organizar la información.** Mediante diagramas, gráficos, esquemas, tablas, figuras, croquis, para visualizar la situación. En estos diagramas, se deben incorporar los datos relevantes y eliminar la información innecesaria. De esta forma el estudiante podrá visualizar las relaciones entre los elementos que intervienen en un problema.

**Buscar problemas relacionados o parecidos que haya resultado antes.** El niño puede buscar semejanzas con otros problemas, casos, juegos, etc., que haya resuelto anteriormente. Se pueden realizar preguntas como: "¿a qué nos recuerda este problema?" o "¿es como aquella otra situación?".

**Buscar patrones.** Consiste en encontrar regularidades en los datos del problema y usarlas en la solución de problemas.

**Ensayo y error.** Consiste en seleccionar algunos valores y probar si alguno puede ser la solución del problema. Si se comprueba que un valor cumple con todas las condiciones del problema, se habrá hallado la solución; de otra forma, se continua con el proceso.

**Usar analogías.** Implica comparar o relacionar los datos o elementos de un problema, generando razonamientos para encontrar la solución de semejanzas.

**Empezar por el final.** Esta estrategia su puede aplicar en la resolución de problemas en los que conocemos el resultado final del cual se partirá para hallar el valor inicial.

**Plantear directamente una operación**. Esta estrategia se puede aplicar en la resolución de problemas cuya estructura aritmética sea clara o de fácil comprensión para el estudiante.

Los niños no solo aprenden a usar estas estrategias, sino que tienen que aprender a adaptar, combinar o crear nuevas estrategias de solución.

#### 1.1.3.3. Ejecución del plan de resolución

Consiste en llevar a cabo las operaciones matemáticas en pos del resultado o respuesta que se busca. Es esta etapa son muy importantes los conocimientos previos acerca del tema y las habilidades y dominio de las herramientas matemáticas que posea. (Polya, 1957).

Consiste en la puesta en práctica de cada uno de los pasos diseñados en la planificación. Es necesaria una comunicación y una justificación de las acciones seguidas: primero calculo…, después…, por ultimo… hasta llegar a la solución. Esta fase concluye con una expresión clara y contextualizada de la respuesta obtenida.

Esta etapa también hay que plantearla de una manera flexible, alejada de todo mecanismo. Se debe tener presente que el pensamiento no es lineal que necesariamente se van a producir saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica. En esta fase se recomienda:

- Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de os pasos
- ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?
- Antes de hacer algo se debe pensar ¿qué se consigue con esto?

- Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para que se hace.
- Cuando tropezamos con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

Para el MINEDU (2013) dentro de un clima de tranquilidad, los estudiantes aplicaran las estrategias o las operaciones aritméticas que decidieron utilizar.

Es esta fase el docente debe asegurar que el estudiante:

- Lleve a cabo las mejores ideas que se le han ocurrido en la fase anterior.
- Dé su respuesta en una oración completa y no descontextualizada de la situación.
- Use las unidades correctas (metros, nuevos soles, manzanas, etc.).
- Revise y reflexione si su estrategia es adecuada y si tiene lógica.
- Actúe con flexibilidad para cambiar de estrategia cuando sea necesario y sin rendirse fácilmente.
- En esta fase los estudiantes ponen en práctica la estrategia que eligieron.
- El docente estará pendiente del proceso de resolución del problema que siguen los estudiantes y orientará, sobre todo, a quienes lo necesiten.
- Es posible que, al aplicar la estrategia, se dé cuenta de que no es la más adecuada, por lo que tendrá que regresar a la fase anterior y diseñar o adaptar una nueva.

#### 1.1.3.4. Evaluación de la solución

Es la revisión analítica de todas las etapas anteriores, verificando si se ha elegido el camino correcto. Se analiza si las herramientas se han aplicado adecuadamente y si los métodos de solución han sido los apropiados, tratando de proyectarlos a otros momentos de la vida real, a situaciones no matemáticas. En esta etapa, más que el resultado mismo, lo que importa es el camino que se ha seguido para llegar a él. (Polya, 1957).

Un problema no termina cuando se ha hallado la solución. La finalidad de la resolución de problemas es prender durante el desarrollo del proceso, y este termina cuando el resolutor siente que ya no puede aprender más de esa situación.

Desde este punto de vista, es conveniente realizar una revisión del proceso seguido, para analizar si es o no correcto el modo como se ha llevado a cabo la resolución. Es preciso:

- Contrastar el resultado obtenido para saber si efectivamente da una respuesta válida a la situación planteada.
- Reflexionar sobre si se podía haber llegado a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos.
- Decir si durante el proceso se han producido bloqueos y como se ha logrado avanzar a partir de ellos.
- Pensar si el camino que se ha seguido en la resolución podría hacerse extensible a otras situaciones.

Comprobar los resultados supone comparar con el contexto el resultado obtenido a partir del modelo del problema utilizado, y su diferencia con la realidad que se desea resolver. Esto supone:

- Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado
- Se debe poner atención en la solución, ¿parece lógicamente posible?
- ¿Es posible comprobar la solución?
- ¿Hay alguna otra forma de resolver el problema?
- ¿Es posible encontrar alguna otra solución?
- Se debe acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha encontrado.
- ¿Es posible utilizar el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear nuevos problemas?

Para el MINEDU (2013) esta etapa es muy importante, pues permite a los estudiantes reflexionar sobre el trabajo realizado y acerca de todo lo que han venido pensando.

El docente debe propiciar que el estudiante:

- Analice el camino o la estrategia que ha seguido.
- Explique cómo ha llegado a la respuesta
- Intente resolver el problema de otros modos y reflexione sobre qué estrategias le resultaron más sencillas.
- Formule nuevas preguntas a partir de la solución planteada.
- Pida a otros niños que le expliquen cómo lo resolvieron.
- Cambie la información de la pregunta o que la modifique completamente para ver si la forma de resolver el problema cambia.

Esta fase es propicia para desarrollar las capacidades de comunicar y justificar sus procedimientos y respuestas.

Resolver problemas invita a movilizar recursos, a situarse en un nivel metacognitivo, nivel que diferencia a quienes resuelven bien problemas de aquellos que aún no lo logran. Por tanto hay que enseñar a los estudiantes a utilizar los instrumentos que conocen, para situarlos en un nivel metacognitivo.

Todos estos aspectos, que normalmente no se trabajan en el aula con los estudiantes, sistematizan los procedimientos para la resolución de problemas de forma activa. es necesario verbalizar los procesos que se dan interiormente. de esta manera, podremos conocer, por un lado, la forma de razonar y proceder, actuar… de los estudiantes y, por otro, tener acceso a una serie de lagunas o malas interpretaciones referidas a contenidos conceptuales y procedimentales, que a veces es difícil detectar.

### 1.1.4. Enfoque Ontosemiótico

El soporte teórico para el presente trabajo es fundamentalmente el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) que ha sido desarrollado, entre otros, por Godino, Batanero y Font (2009).

Godino, Batanero y Font (2007), los postulados o supuestos básicos del EOS se relacionan principalmente con la antropología, la ontología y la semiótica, pero también se articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos. La matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de situaciones-problema, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas; dicha actividad está mediatizada y apoyada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles.

El EOS es considerado como una metateoría amplia y articulada que sirve de referente para múltiples investigaciones en didáctica de las matemáticas. Este enfoque está formado por cinco componentes particulares e interrelacionados, que describen partes complementarias de los procesos de enseñar y aprender matemáticas. Estos componentes se consideran, a menudo, como “niveles” en el análisis progresivo de los procesos de estudio matemático y han sido descritos ampliamente en numerosos escritos (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras & Font, 2006; Godino, Batanero & Font, 2007; D’amore & Godino, 2007; Font, Godino & D’amore, 2007; Font & Contreras, 2008; Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2009).

En esencia, el EOS resulta ser una herramienta teórica muy valiosa porque nos permite enmarcar nuestras acciones en esos modelos para mejorar aquellas situaciones problemáticas que se pueden identificar en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. los cinco componentes se pueden identificar de la siguiente manera: (1) sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas, (2) configuración de objetos y procesos matemáticos, (3) configuraciones y trayectorias didácticas (4) dimensión normativa, (5) valoración de la idoneidad didáctica como criterio de adecuación y pertinencia de todos los componentes anteriores.

#### 1.1.4.1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas

Este componente del EOS incluye toda la praxis relacionada con el proceso de resolver, validar y generalizar problemas matemáticos, así como comunicar (con las representaciones semióticas adecuadas) todos estos procesos y la solución, o soluciones, a cada problema planteado. Se distinguen, como grupos complementarios en este componente, los sistemas de prácticas personales y los de prácticas institucionales. Los primeros incluyen los significados que desarrolla el aprendiz como resultado de su interacción con el núcleo social, los lenguajes y el diseño didáctico al que está expuesto mientras aprende. De otra parte, las prácticas institucionales son aquellas que se consideran compartidas por una institución, o colectivo de personas, que tienen características particulares.

En esta noción del significado institucional subyacen premisas de tipo socioepistémico que son comunes en el EOS. Para cada uno de estos dos sistemas de prácticas, se definen tipologías con el fin de aclarar sus relaciones en el proceso de enseñar y aprender matemáticas. Los autores utilizan, hábilmente, los diagramas de Venn para destacar las relaciones entre los diferentes tipos de prácticas (figura 3). En la tipología de los sistemas de prácticas personales, por ejemplo, se definen las prácticas logradas como aquellas manifestadas de forma progresiva por el estudiante. Se infiere del modelo que algunas de estas pueden no ser parte de las prácticas declaradas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas. De esta manera, se reconoce que algunos estudiantes son capaces de lograr exitosamente prácticas que, tal vez, no fueron formalmente declaradas en un principio. Así, vemos un ejemplo de cómo la ontología desarrollada en el EOS es suficientemente flexible para reconocer la complejidad de aquello que trata de describir. Algo parecido ocurre en la descripción de la tipología para los significados institucionales cuando se admite que algunas prácticas implementadas por el docente pueden no haber sido, en un inicio, parte del grupo de prácticas pretendidas (o previamente planificadas).

En la figura 3 se presenta un esquema de los tipos de significados y sus relaciones mutuas. Donde en la parte central de la figura se indican las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.


*Figura 3*. Tipos de significados Institucionales y Personales
*Fuente:* Godino, Batanero y Font, 2007

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico lleva a introducir la siguiente tipología de significados institucionales (Godino, Batanero y Font, 2007):

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el

origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Respecto de los significados personales se introducen los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales, que tiene lugar en un proceso de estudio, interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

Además, este componente del EOS destaca cómo se interrelacionan, a lo largo del tiempo, los significados personales e institucionales en función de las relaciones dialécticas entre la enseñanza y el aprendizaje. Se argumenta que “la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados” (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

La noción de relaciones sistémicas es un aspecto central de la teoría de sistemas y también de la construcción de procesos reflexivos en un “todo integrado” que cambia constantemente de acuerdo a reglas, a menudo no lineales. En el libro escuelas que aprenden (2000), Senge y sus colaboradores describen los constructos y las estrategias que se han utilizado con éxito para reconocer y desarrollar colectivos escolares como organizaciones que aprenden. Usando como referencia su marco conceptual de las cinco disciplinas, estos traen a los escenarios educativos las teorías sobre sistemas formales y el aprendizaje “institucional”, que con mucho éxito se han usado en disciplinas científicas y en el mundo empresarial. Es evidente que las prácticas denominadas institucionales no necesariamente se dan por consenso entre las personas o por decreto de un grupo, sino como resultado de interrelaciones altamente complejas, con ciclos de retroalimentación positiva y, a veces, como resultados no planificados de interacciones entre las partes del sistema. Por lo tanto, al replantear la dimensión institucional del EOS en el marco de la teoría general de sistemas, podremos utilizar sus métodos de representación, así como características importantes ya estudiadas en esta teoría, como la auto-organización y la capacidad de emerger que tienen algunos sistemas.

#### 1.1.4.2. Configuración de objetos y procesos matemáticos

En el EOS, los “objetos matemáticos no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo” (Godino y Font, 2002).Los objetos matemáticos son para ser “comprendidos”, y, en el EOS, esto se describe por medio de la función semiótica, la cual se define como aquella en la que el objeto (como significante) tiene significados en función de un sistema de prácticas (personales o institucionales) ante cierta clase de situaciones-problemas. Con este enfoque ontológico se trasciende la visión superficial de objetos matemáticos que se reducen a sus definiciones y relaciones lógicas con otros objetos. Es decir, “los objetos no son sólo los conceptos, sino cualquier entidad a la que nos referimos (real o imaginaria) que intervienen, y los que emergen, de algún modo en la actividad matemática” (Godino et al., 2009).

El EOS define seis objetos primarios, cuyas interrelaciones se ilustran en la (figura 4). con puntos de partida en la teoría antropológica y las diferentes versiones del triángulo epistemológico, los creadores del EOS formulan la siguiente ontología de objetos: (1) el lenguaje matemático (términos, expresiones, gráficos, etc.),(2) los conceptos (mediante definiciones o descripciones), (3) las proposiciones (enunciados sobre conceptos), (4) los procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas, etc.), (5) las situaciones (problemas, tareas, ejercicios, etc.) y (6) los argumentos (validan las proposiciones y procedimientos). la unión de (2), (3) y (4) describe, en cierto sentido, lo que se denominan las “ideas” del triángulo epistemológico, que, a su vez, se relacionan con los símbolos (1) del lenguaje (significantes).

Finalmente, la combinación de (5) y (6) se puede entender como los contextos u objetos de referencia.

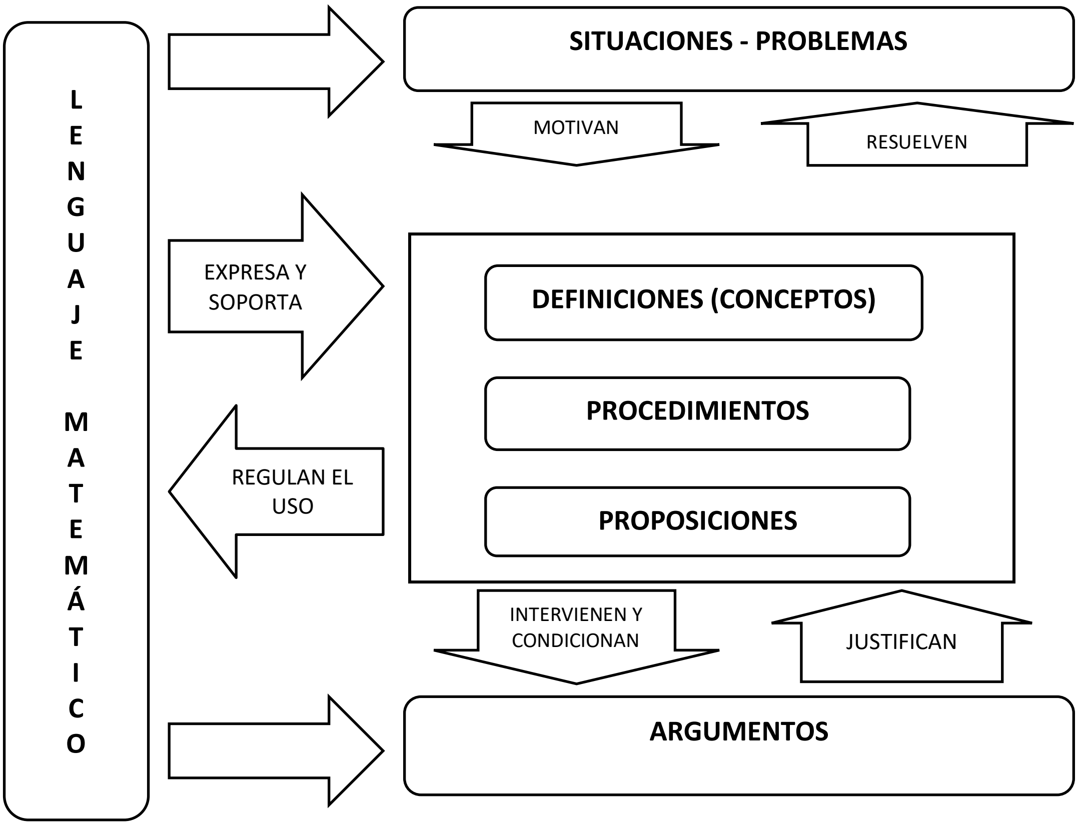



*Figura 4*. Configuración de los seis objetos primarios
*Fuente*: Font, 2006, p.69

Debemos señalar que este segundo componente del EOS es el más abarcador de todos, y que cada tipo de objeto es descrito con detalle por medio de una serie de atributos o “dimensiones duales” que se aplican de manera dialéctica y nos permiten profundizar en las nociones cognitivas atribuidas a cada objeto. Los seis objetos primarios, y todos los que se derivan de ellos, también son descritos en función de los procesos importantes en la actividad matemática. Estos son esencialmente procesos cognitivos que nos llevan a profundizar en la naturaleza de los objetos de una manera dinámica y pragmática, pues establecen vínculos entre ellos y sus atributos complementarios. Se completa, así, una ontología de objetos amplia, articulada e integradora con la cual se puede describir una parte importante del conocimiento matemático.

En correspondencia con los fundamentos socioconstructivistas y antropológicos del EOS, la noción más amplia de “acciones”, de parte del que aprende, no debe limitarse a operaciones matemáticas solamente. Un objeto relevante en esta ontología debe ser el cúmulo de acciones y reacciones que abarcan nociones socioculturales y semióticas consustanciales con la práctica operativa de las matemáticas. Se vislumbra aquí una línea de investigación, o, al menos, de reflexión teórica, que tenga como propósito enriquecer la ontología primaria de objetos matemáticos.

Para Godino (2009), en el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso" ya que hay muchas clases diferentes de procesos; se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, de procesos cognitivos, metacognitivos, procesos de instrucción, procesos de cambio, procesos sociales, etc. se trata de procesos muy diferentes en los que la única característica común a muchos de ellos puede ser la consideración del factor "tiempo" y, en menor medida, el de "secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente". por tanto, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (los incluidos en la figura 08), sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización) más que procesos son hiper o mega procesos, puesto que implican procesos más elementales: representación, argumentación, idealización, generalización, etc. La configuración de objetos y procesos se muestran en la figura 5.

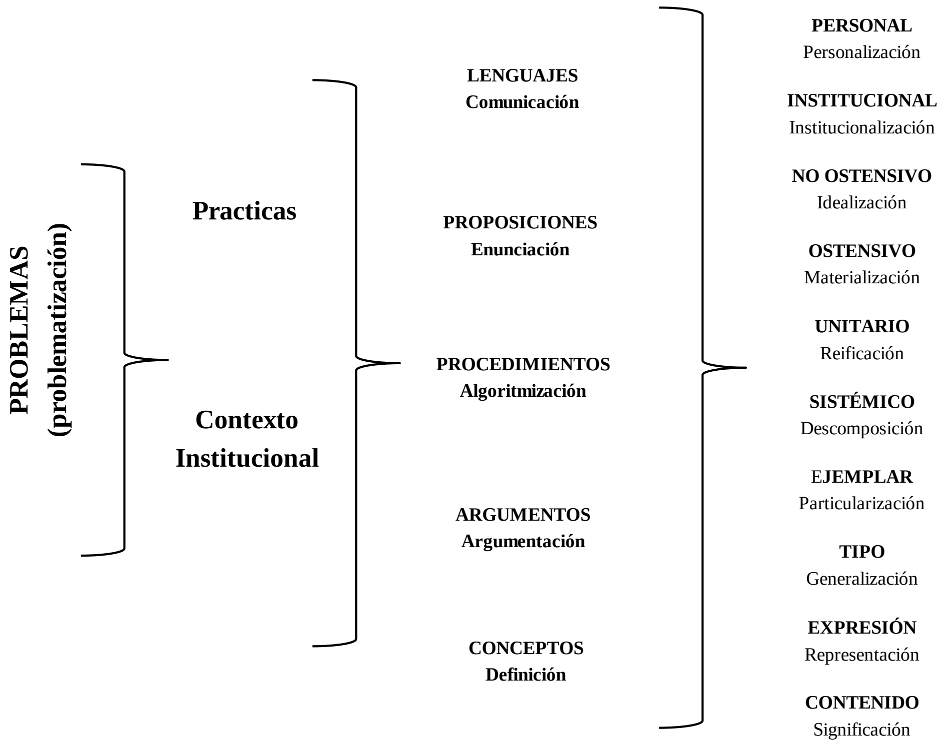



*Figura 5.* Configuración de objetos y procesos

*Fuente:* Godino, 2014, p, 23

### 1.1.4.3. Configuraciones y trayectorias didácticas

Este componente describe con detalle los roles entre los sujetos (docentes y estudiantes) y de estos con los objetos matemáticos como un sistema integrado y complejo vinculado a una o más situaciones-problemas. Es un trabajo que tiene como punto de partida la teoría de configuraciones didácticas (Godino, Contreras & Font, 2006) y es de mucha utilidad para describir y analizar la relación entre los procesos de enseñar y aprender matemáticas. En una configuración didáctica se definen varios subprocesos que, integrados, modelan las relaciones sujetos-objetos: (1) epistémico, (2) cognitivo-afectivo, (3) instrucciones. En este último se articulan las relaciones estudiantes-docente-medios. Debe estar claro que las configuraciones no son conjuntos de relaciones lineales simples, sino una compleja red de interrelaciones que abarcan todos los subprocesos mencionados. Cada configuración constituye, en sentido metafórico, un “retrato” particular de lo que es un continuo de relaciones que progresa en el tiempo conformando lo que comúnmente se conoce como una trayectoria didáctica (ver figura 6).

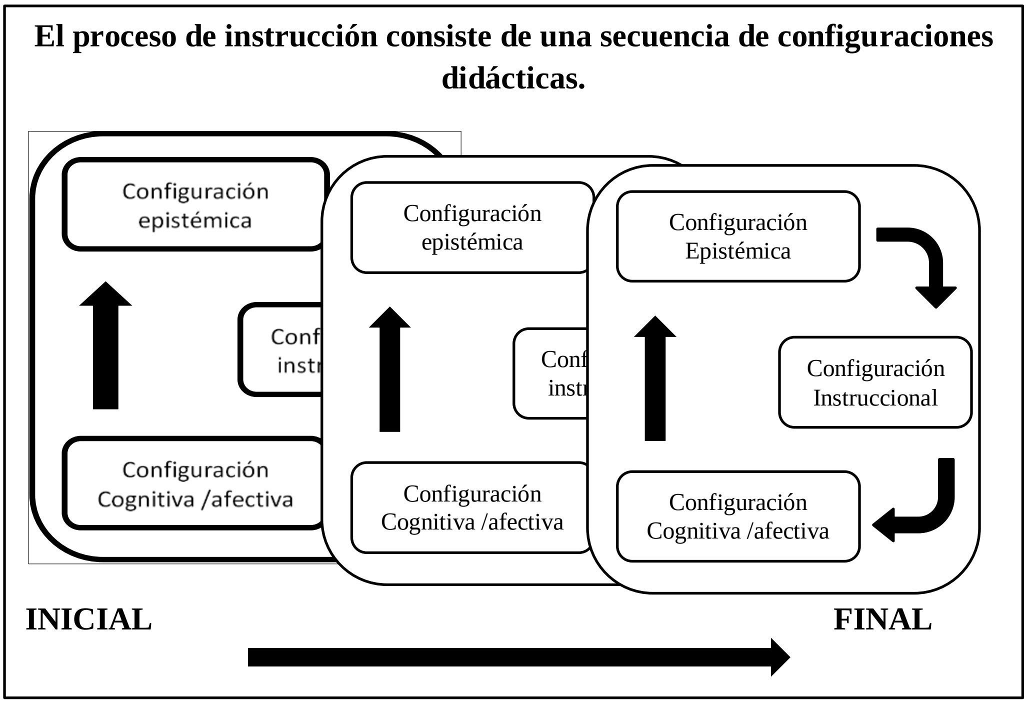



*Figura 6.* Trayectorias y configuraciones didácticas

Este componente se enfoca principalmente en la descripción de los patrones de interacción y su relación con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas). Estos resultados pueden ser de mucha utilidad para los docentes en su proceso de planificación de la enseñanza en el aula, además de sus ventajas como referente teórico para investigaciones sobre la efectividad de los procesos didácticos en las clases de matemáticas. Entendemos que, en este componente, se puede clarificar aún más la noción de "trayectoria didáctica" para trascender la noción común de "secuencia de configuraciones" que tiene connotaciones predominantemente lineales, (epistémica, cognitiva-afectiva, instruccional) según progresan en el tiempo, como en una red.

#### 1.1.4.4. Dimensión normativa

Se consideran, en este componente, todas las normas sociales y socio matemáticas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio. Estas normas, implícitas o explícitas, existen para dar sostén y sentido a las configuraciones y trayectorias didácticas planificadas. Las normas son importantes referentes para todos los demás componentes del sistema didáctico, pues permiten establecer pautas de acción a lo largo de cada trayectoria. El EOS propone cuatro tipologías para clasificar todas las normas.

Estas son: (1) según su faceta, (2) según su origen, (3) según su momento, (4) según grado de coerción. La tipología que clasifica las normas en seis diferentes facetas es la más amplia y de mayor pertinencia didáctica, de entre todas las tipologías. La figura 7 presenta las cuatro tipologías.

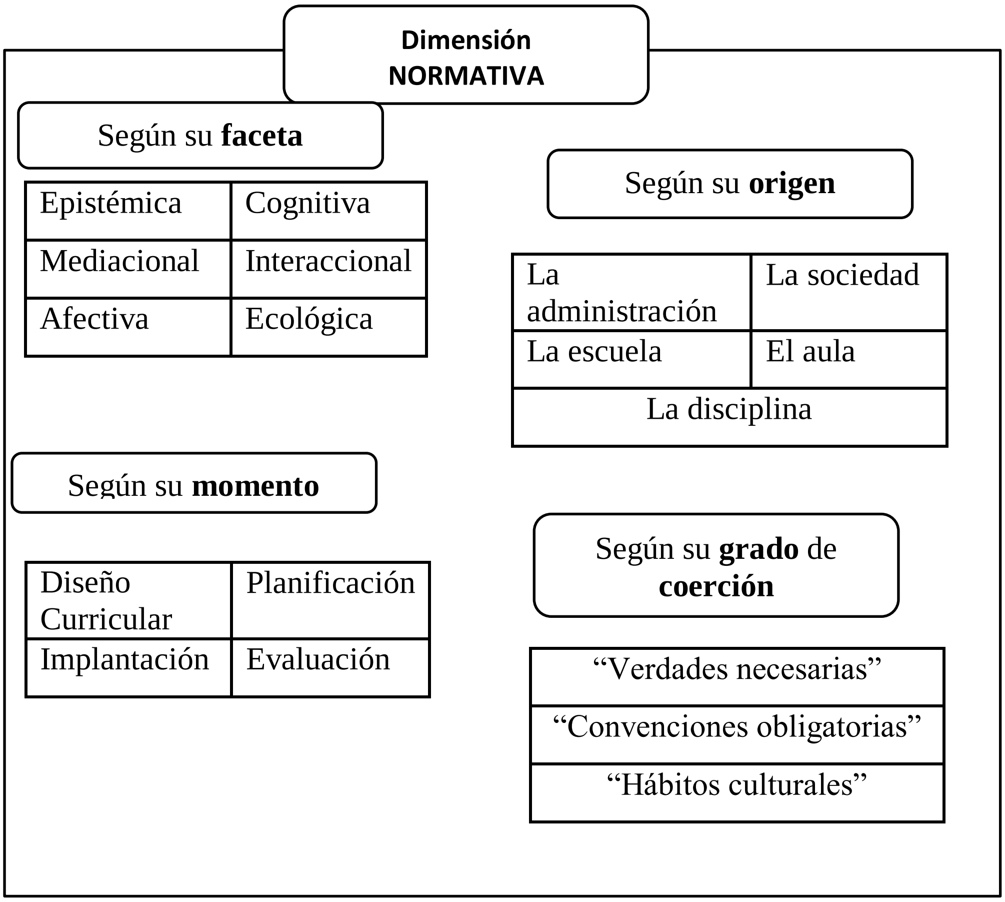



*Figura 7.* Tipologías de la dimensión normativa del EOS.

En principio, podemos tomar cualquier grupo de normas y clasificarlas de alguna (o de todas) estas cuatro maneras diferentes. O sea, cada tipología forma un conjunto de conjuntos que son mutuamente excluyentes (dentro de esa tipología) y, en principio, cualquier grupo de normas puede clasificarse en cualquiera de los conjuntos que componen cada tipología.

Cualquier combinación de diferentes clasificaciones es posible en las tipologías definidas. Sin embargo, el asunto medular es si algunas de esta combinaciones no resultan en obstáculos específicos para el desarrollo de las trayectorias didácticas planificadas, y si pueden minimizar las posibilidades reales de que los alumnos se apropien efectivamente del conocimiento pretendido.

No se quiere reclamar que el EOS deba abordar estos aspectos valorativos, sino que quienes lo utilicen investiguen las implicaciones reales que tienen las clasificaciones de normas al momento de ejercer su función reguladora del aprendizaje. Una línea de investigación abierta parece ser la de identificar criterios epistémicos que nos permitan reconocer las implicaciones didácticas de aplicar ciertas normas en el contexto de alguna de las tipologías del EOS.

#### 1.1.4.5. Criterios de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción

En este último componente del EOS, el propósito principal es el de guiar las acciones específicas que los investigadores pueden proponer como resultado de la comprensión y el grado de idoneidad que se deriva de lo descrito en los componentes anteriores. O sea, es aquí que se evalúan los resultados de los demás componentes y se aportan herramientas para analizar y justificar la elección de los objetos, procesos, secuencias y normas. En este componente, se definen seis criterios de idoneidad, que corresponden a los seis tipos de sistemas de normas de acuerdo a su enfoque y que pretenden valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje que se hayan realizado. La meta es simple y específica: guiar el mejoramiento de estos procesos. Los seis criterios deben aplicarse de manera integrada reconociendo sus múltiples interacciones y su naturaleza sistémica, y la idoneidad se debe entender de acuerdo al contexto y al momento particular en que se estudia (Godino, 2009).

Estos criterios se deben aplicar según el momento del proceso de instrucción que se considere, sea en el diseño, la implementación o la planificación. En Godino y colaboradores (2006) se detallan los componentes y descriptores de las idoneidades parciales que se aplican en la definición de idoneidad didáctica.

Este componente es de gran importancia siendo un enfoque moderno como el descrito en la teoría general de sistemas, pues se pretende que el principal indicador empírico de esta idoneidad pueda ser “la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos / implementados” (Godino et al., 2009). La referida “adaptación” es, necesariamente, el resultado de una intrincada red de relaciones, ciclos y otras trayectorias no lineales por la que progresan los significados a través del proceso de instrucción.

#### 1.1.4.5.1. Idoneidad epistémica

Un programa formativo o un proceso de estudio matemático, tienen mayor idoneidad epistémica en la medida en que los contenidos implementados (o pretendidos) representan bien a los contenidos de referencia. En la tabla 1 incluimos los componentes y algunos indicadores relevantes que permiten hacer operativa dicha noción. Seguidamente mencionamos algunas concordancias de estos componentes e indicadores con los propuestos por diversas teorías, y en particular los principios y estándares para la enseñanza de las matemáticas formulados por el NCTM (2000).

Tabla 1

*Componentes e indicadores de idoneidad epistémica*

| Componentes | Indicadores |
|---|---|
| **Situaciones-Problemas** | - Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación<br>- Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización) |
| **Lenguajes** | - Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas.<br>- Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige<br>- Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación |
| **Reglas** | - Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen<br>- Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado<br>- Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos |
| **Argumentos** | -Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen<br>-Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar |
| **Relaciones** | -Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.<br>- Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas. |

Fuente: Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, p.335.

En el marco del EOS se atribuye a las situaciones problemas un papel central, ya que se asume una concepción antropológica de la matemática, de modo que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinados problemas. Esta posición es concordante con la “teoría de situaciones didácticas” (Brousseu, 1997) y también con la “educación matemática realista” (EMR) (Van Den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005), basada en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983; 1991). En estas teorías, y en diversas propuestas curriculares, se propone el uso de situaciones - problemas como medio de contextualizar las ideas matemáticas y generarlas a partir de la actividad de resolución, comunicación y generalización de las soluciones. “la resolución de problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacer matemáticas. Esta es una parte integral de las matemáticas, no una pieza aislada del programa de matemáticas. Los estudiantes necesitan tener oportunidades frecuentes para formular, enfrentar y resolver problemas complejos que requieren mucho esfuerzo” (NCTM, 2000).

Los principios de actividad y de realidad de la EMR apoyan la consideración de los indicadores recogidos en la tabla 1 como indicadores de idoneidad epistémica. Para Freudenthal (1991) las matemáticas son una actividad humana. “no hay matemáticas sin matematización”, actividad que puede ser de aplicación a resolver problemas del entorno, o problemas de reorganización del propio conocimiento matemático.

Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas. Sin embargo, aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención, como propone el EOS, a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones.

También se debe prestar atención a las conexiones entre las distintas partes del contenido matemático. Las matemáticas son un campo de estudio integrado. “en un currículum coherente, las ideas matemáticas están relacionadas y se construyen unas sobre otras. (NCTM, 2000). Esta posición concuerda con el “principio de interconexión” de la “educación matemática realista”: los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría,…) no pueden ser tratados como entidades separadas. Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados. Además, la resolución de problemas de contexto ricos con frecuencia significa que tienes que aplicar un amplio rango de herramientas y comprensiones matemáticas.

#### 1.1.4.5.2. Idoneidad cognitiva

Definimos la idoneidad cognitiva como el grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos. La tabla 2 incluye los componentes e indicadores seleccionados.

Tabla 2
*Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva*

| Componentes | Indicadores |
|---|---|
| **Conocimientos previos** | -Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio)<br>-Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes |
| **Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales** | -Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo<br>-Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes |
| **Aprendizaje** | - Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas:<br>-Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva<br>-La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia<br>-Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.- se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado<br>-Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos |

Fuente: Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

En el marco del EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en la comunidad de prácticas generada en la clase. Supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados. Los significados son entendidos en términos de prácticas operativas y discursivas y supone además el reconocimiento e interrelación de los objetos que intervienen en dichas prácticas.

Tres de los seis principios formulados por el NCTM (2000) sobre la enseñanza de las matemáticas tienen relación con la idoneidad cognitiva. El principio de igualdad indica, “la excelencia en la educación matemática requiere igualdad, grandes expectativas y un fuerte apoyo para todos los estudiantes”. Se exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas, y que sean incluidos contenidos motivadores para promover el acceso y el logro de todos los estudiantes. El principio de aprendizaje requiere que “los estudiantes deben aprender las matemáticas entendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de sus experiencias y conocimientos previos”. Así mismo, el principio de evaluación afirma que, “la evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas relevantes y proveer de información útil tanto a profesores como estudiantes”.

#### 1.1.4.5.3. Idoneidad interaccional

Es el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado, favorecen la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas. En el cuadro 3 incluimos algunos indicadores de idoneidad referidos a las interacciones entre el profesor y los estudiantes y entre los propios estudiantes. Teniendo en cuenta principios de aprendizaje socio-constructivista ampliamente asumidos se valora positivamente la presencia de momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad del aprendizaje. La aceptación de este principio de autonomía en el aprendizaje es un rasgo esencial de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997), en la que las situaciones de acción, comunicación y validación se conciben como momentos a didácticos de los procesos de estudio, esto es, situaciones en las que los alumnos son protagonistas en la construcción de los conocimientos pretendidos.

La toma de decisiones sobre la progresión del estudio, tanto por parte del docente como de los estudiantes, requiere la puesta en práctica de procedimientos de observación y encuesta para una evaluación formativa de los aprendizajes.

Tabla 3
*Componentes e indicadores de idoneidad interaccional.*

| Componentes | Indicadores |
|---|---|
| **Interacción docente-discente** | -El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.)<br>-Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.)<br>-Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento<br>-Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.<br>-Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase |
| **Interacción entre discentes** | -Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes<br>-Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos<br>-Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión |
| **Autonomía** | -Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos) |
| **Evaluación formativa** | -Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos |

Fuente: Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

La importancia del discurso, el diálogo, la conversación en la clase es resaltada por diversos autores: “la naturaleza del discurso matemático es una característica central de la práctica de la clase. Si aceptamos seriamente que los profesores necesitan oportunidades para aprender a partir de su práctica, el desarrollo de conversaciones matemáticas permite a los profesores aprender continuamente de sus estudiantes. Las conversaciones matemáticas que se centran sobre las ideas de los estudiantes pueden proporcionar a los profesores una ventana sobre el pensamiento de los estudiantes en modos que el trabajo individual de los estudiantes no lo permite” (Frankle, Kazemi y Battey (2007).

En el marco de la educación matemática realista se asume un principio de interacción, según el cual, la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión. los estudiantes, en lugar de ser receptores de una matemática ya elaborada, son considerados como participantes activos del proceso de enseñanza - aprendizaje, en el que ellos mismos desarrollan herramientas y comprensiones, y comparten sus experiencias unos con otros. la negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los métodos formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar (Van Den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005).

Uno de los principios fundamentales de Freudenthal (1991) para la educación matemática es que se debe dar a los estudiantes una “oportunidad guiada” de "reinventar" las matemáticas. Esto implica que, en la EMR, tanto los profesores como los programas educativos tienen un papel fundamental en cómo los estudiantes adquieren los conocimientos. Ellos dirigen el proceso de aprendizaje, pero no de una manera fija mostrando lo que los estudiantes tienen que aprender. Esto estaría en contradicción con el principio de actividad y daría lugar a comprensiones falsas.

Por el contrario, los estudiantes necesitan espacio y herramientas para la construcción de conocimientos matemáticos por sí mismos. Con el fin de alcanzar este estado deseado, los profesores tienen que proporcionar a los alumnos un ambiente de aprendizaje en el que el proceso de construcción pueda surgir. Uno de los requisitos es que los profesores deben ser capaces de predecir dónde y cómo se pueden anticipar las comprensiones y habilidades de los estudiantes que están emergiendo.

**1.1.4.5.4. Idoneidad mediacional**

Se entiende la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El uso apropiado de la tecnología es uno de los principios formulados por el NCTM (2000, p.24), indicándose, “la tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este medio puede influenciar positivamente en lo que se enseña y, a su vez, incrementar el aprendizaje de los estudiantes”. Esta organización profesional sostiene que la tecnología es una herramienta esencial para el aprendizaje matemático en el siglo 21, y todas las escuelas deben asegurar que todos sus estudiantes tienen acceso a la tecnología. Los profesores efectivos maximizan el potencial de la tecnología para desarrollar la comprensión de los estudiantes, estimular su interés, e incrementar su proficiencia en matemáticas. Cuando la tecnología se usa estratégicamente, puede proporcionar acceso a las matemáticas para todos los estudiantes. Se considera, así mismo, que las calculadoras y demás herramientas tecnológicas, como sistemas de cálculo algebraico, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo y dispositivos de presentación interactiva, son componentes vitales de una educación matemática de alta calidad.

En la tabla 4 incluimos algunos componentes e indicadores de idoneidad en el uso de recursos tecnológicos, incluyendo artefactos manipulativos. También se debe considerar como factor determinante de la idoneidad mediacional las condiciones ambientales de la clase, la ratio profesor/alumnos y el tiempo asignado a la enseñanza y el aprendizaje.

Tabla 4
*Componentes e indicadores de idoneidad mediacional*

| *Componentes* | *Indicadores* |
|---|---|
| **Recursos materiales** | - Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido<br>- Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones |
| **Número de alumnos, horario y condiciones del aula** | - El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida<br>- El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora)<br>- El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido |
| **Tiempo** | - El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida<br>- Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema<br>- Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión |

Fuente: Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

#### 1.1.4.5.5. Idoneidad afectiva

La emisión de un juicio sobre la mayor o menor idoneidad afectiva del proceso en cuestión se basa en el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes. La tabla 5 incluye los componentes e indicadores seleccionados.

Tabla 5

*Componentes e indicadores de idoneidad afectiva*

| Componentes | Indicadores |
|---|---|
| **Intereses y necesidades** | - las tareas tienen interés para los alumnos<br>- se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional |
| **Actitudes** | - se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.<br>- se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice. |
| **Emociones** | - se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.<br>- se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas. |

Fuente: Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

La resolución de cualquier problema matemático lleva asociada una situación afectiva para el sujeto implicado, quien pone en juego no solamente prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino también moviliza creencias, actitudes, emociones o valores que condicionan en mayor o menor grado y diferente sentido la respuesta cognitiva requerida.

Los objetos y procesos afectivos son usualmente considerados como entidades psicológicas, que refieren a estados o rasgos mentales más o menos estables, o a disposiciones para la acción de los sujetos individuales. Pero desde el punto de vista educativo el logro de unos estados afectivos que interaccionen positivamente con el dominio cognitivo tienen que ser objeto de consideración por parte de las instituciones educativas, y, en particular, por el profesor. El dominio afectivo conlleva, por tanto, una faceta institucional y se concreta en normas de índole afectivo que condicionan el trabajo del profesor.

#### 1.1.4.5.6. Idoneidad ecológica

La idoneidad ecológica se refiere al grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza. Por entorno entendemos todo lo que está fuera del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en la misma. Así, nos podemos referir a todo lo que viene en general determinado por la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas. El proceso de estudio tiene lugar en un contexto educativo que fija unos fines y valores para la educación de los ciudadanos y profesionales que se deben respetar. Dichos fines y valores son interpretados y especificados dentro del proyecto educativo del centro o departamento que coordina la acción de los distintos profesores implicados. El docente forma parte de una comunidad de estudio e indagación que aporta conocimientos útiles sobre prácticas matemáticas y didácticas idóneas que se deberán conocer y aplicar.

La educación matemática crítica (Skovsmose, 1994) aporta ideas para lograr que la educación matemática permita a los ciudadanos ser parte activa de una sociedad democrática. Más allá del aprendizaje matemático individual de cada persona, se hace necesario formular reflexiones sobre las consecuencias colectivas de este aprendizaje en la sociedad actual. En la escuela, la práctica matemática puede ejercer una enorme influencia en dos sentidos totalmente opuestos: por un lado, la matemática reducida a meros cálculos rutinarios puede reforzar actitudes pasivas y complacientes y, por otro lado, la matemática en su sentido más amplio puede desarrollar el pensamiento crítico y alternativo.

Otros componentes e indicadores de idoneidad ecológica se incluyen en la tabla 6, en particular las conexiones del contenido matemático con otras áreas curriculares, y entre distintas áreas temáticas dentro de la propia matemática.

Tabla 6 .
*Componentes e indicadores de idoneidad ecológica*

| Componentes | Indicadores |
| --- | --- |
| **Adaptación al currículo** | - Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares |
| **Apertura hacia la innovación didáctica** | - Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva<br>- Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, tic, etc.) en el proyecto educativo |
| **Adaptación socio-profesional y cultural educación en valores** | - Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes<br>- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico |
| **Conexiones intra e interdisciplinares** | - Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares |

Fuente: Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

## 1.2. Antecedentes

De las indagaciones hechas en distintas instituciones académicas relacionados con la pedagogía, no se logró encontrar en al ámbito regional, pero si se logró encontrar trabajos de investigación nacionales e internacional.

Aké P., López M. y Ramos B. (2015) resaltaron que en el contexto mexicano la introducción del pensamiento algebraico ha cobrado interés en los últimos años, sin embargo, las consideraciones de su introducción tanto en el currículo de primaria como en el currículo de formación de maestros aún no están claramente definidas.

Castro W. (2012), concluyó que las creencias sobre el razonamiento algebraico elemental manifestadas por un maestro en formación mientras valora una tarea algebraica resuelta por dos niños de sexto grado de escuela elemental. A la pregunta formulada por Carraher y Schlieman (2007): "¿pueden los maestros de primaria enseñar álgebra?" tiene en ese caso una respuesta intermedia: el maestro en formación podría enseñar álgebra en la escuela elemental, sin embargo requiere ampliar su concepción acerca de lo que es el razonamiento algebraico en la escuela primaria.

Solera M. (2015) se ha centrado en la valoración y consiguiente propuesta de mejora, de la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza sometido a una serie de condicionantes relativos a todas las facetas del conocimiento matemático. Se ha hecho la distinción de dos partes fundamentales. Una primera tiene que ver con la selección y análisis de los conocimientos didáctico-matemáticos relevantes para generar una propuesta de valoración y mejora del diseño e implementación de la instrucción acerca del simbolismo algebraico y la resolución de las ecuaciones de primer grado en 1º de eso. La segunda parte, tiene que ver con la valoración de una serie de indicadores que permitan juzgar la idoneidad didáctica de las facetas del conocimiento matemático del referido diseño e implementación del tópico elegido para ser tratado con un grupo concreto. Esto ha servido de punto de partida para la propuesta fundamentada de mejoras basadas en la primera parte descrita.

Castro W. (2011) cuyo objetivo general en esta investigación es la evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental. Así mismo se indaga sobre las concepciones sobre el razonamiento algebraico elemental manifestadas por maestros en formación en la especialidad de maestro de primaria, en tanto que diseñan una unidad didáctica. Este objetivo se logró en tanto que se investigó sobre las competencias de análisis didáctico que los estudiantes pusieron en acto durante la realización de una unidad didáctica. Las competencias de los maestros fueron estudiadas en el contexto de realización de una unidad didáctica, con la ayuda de una guía de identificación de objetos y significados, y el marco de la aproximación al análisis didáctico ofrecido por el marco teórico EOS.

Gonzato. M. (2013) buscó fundamentar a través del objetivo general el cual es realizar un estudio de evaluación del conocimiento didáctico- matemático de los profesores de primaria en formación sobre la Visualización de Objetos Tridimensionales (VOT) el cual debe reflejar el valor que los estudiantes le dan al conocimiento didáctico-matemático para abordar la enseñanza del tema e identificar posibles carencias en diferentes aspectos de dichos conocimientos, llegando a la conclusión de que el interés por indagar la VOT en el campo de la formación de profesores de educación primaria la llevó a explorar y clasificar de manera sistemática las investigaciones referidas a los aspectos epistémicos (significados institucionales), cognitivos (errores, dificultades en el aprendizaje por parte de niños y adolescentes) e instruccionales (experiencias de enseñanza, uso de recursos). Consideramos que la síntesis realizada de las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la VOT es una primera aportación de nuestra investigación. La recopilación y clasificación, en relación con los diferentes aspectos del tema, de los ítems usados en investigaciones anteriores, es un material potencialmente útil para otros investigadores que quieren abordar el tema de la VOT, tanto en el ámbito de evaluación como instruccional. La aplicación del marco teórico del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática ha permitido sintetizar los resultados de las investigaciones y analizar la complejidad de los objetos y procesos intervinientes, argumentando la pertinencia del estudio de determinados conocimientos para la enseñanza del tema. Dicho análisis ha llevado al planteamiento de una visión ontosemiótica de la visualización espacial, que consideramos otra aportación del trabajo.

Pino L. (2013) tuvo como objetivo investigación es verificar si las configuraciones cognitivas evidenciadas en las prácticas de los futuros profesores, categorizadas y descritas mediante nuestra metodología de análisis, eran coincidentes, con las obtenidas en el estudio piloto del cuestionario el cual trata de la exploración de una de las dimensiones del Conocimiento Didáctico-Matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial: la faceta epistémica. Para ello se diseñó y aplicó un cuestionario, con base en los supuestos teóricos y metodológicos del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de Godino (2009) que se describió en el primer artículo de este compendio, para explorar aspectos relevantes del conocimiento del conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y características del conocimiento del contenido especializado, de profesores en formación inicial. Así, en el primer artículo presentamos todo lo que refiere a la fase de diseño del cuestionario. Y los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes evidencian tanto una desconexión entre los distintos significados parciales de la derivada como la necesidad de potenciar el conocimiento del contenido especializado. Este aprendizaje puede hacerse mediante actividades que favorezcan el uso e identificación de objetos matemáticos, sus significados y los procesos involucrados en la solución de tareas matemáticas.

Posadas P. (2012/2013) enfocado en el trabajo de fin de máster hacia una reflexión sistemática sobre la experiencia de enseñanza vivida en la fase de prácticas, en la que he tenido la oportunidad de asumir la responsabilidad de la enseñanza de un tema, bajo la supervisión de la profesora tutora, concretamente la enseñanza de la ecuación cuadrática. Esta reflexión sistemática estará apoyada en el uso de la noción de idoneidad didáctica y el sistema de indicadores de idoneidad desarrollados por Godino y colaboradores en diversos trabajos (Godino, 2011). La finalidad es obtener criterios para el rediseño de la unidad didáctica que permitan introducir cambios fundamentados en la enseñanza del tema correspondiente, llegando a la conclusión de que la formación inicial y permanente de profesores es un factor esencial para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esa formación debe orientarse al desarrollo profesional de los profesores, y ello supone que éstos adquieran y pongan en práctica un profundo conocimiento especializado del contenido en sus diversas facetas: Epistémica, Ecológica, Cognitiva, Afectiva, Interaccional y Mediacional (Godino, 2009). En mi caso, la estrategia formativa adoptada por mi supervisor de prácticas y director del TFM la considero como positiva ya que permite motivar y dar sentido a la búsqueda sistemática del conocimiento especializado del contenido, guiada por la pregunta, ¿cómo mejorar mi práctica profesional?.

Konic P. (2011) tuvo como objetivo general, estructurar un modelo de referencia didáctico global para la enseñanza y aprendizaje de los números decimales. A partir de ello podemos derivar en un referente local adecuado a nuestros fines. Por tal razón, el primer objetivo se plantea del siguiente modo: OG1: elaborar un modelo didáctico de referencia local, para evaluar conocimientos sobre los números decimales. Dado que los libros de textos son un referente importante para los docentes, y existen pocas investigaciones vinculadas a los números decimales, es que se tratará de explorar si el modo en que se introducen los números decimales en los textos escolares toma en cuenta las problemáticas detectadas por las investigaciones. Por ello, nos proponemos: OG2: analizar trayectorias de enseñanza de los números decimales, en algunos libros de textos escolares. Por último, interesa analizar conocimientos que poseen los futuros profesores respecto a aspectos relevantes para la enseñanza y aprendizaje de los números decimales. en tal sentido, nos proponemos: OG3: evaluar significados personales que, sobre los números decimales, poseen futuros profesores para la enseñanza primaria, que además llega a la conclusión de que desde el punto de vista de los marcos teóricos usados en la investigación considera que la articulación realizada entre el modelo de “conocimiento matemático para la enseñanza” (modelo MKT, de Ball y Cols.) y las “Categorías de Conocimiento Didáctico – Matemático” (modelo basado en el EOS, propuesto por Godino, 2009) es también una aportación de esta investigación. Los tipos de objetos y procesos matemáticos, componentes de las configuraciones epistémicas y cognitivas que propone el EOS, y que hemos aplicado en el análisis a priori de las tareas, aportan un desglose operativo de los tipos de conocimientos del modelo MKT.

Las competencias de análisis didáctico se estudiaron en el contexto de diseño de una unidad didáctica. Se recuerda que la competencia de análisis didáctico se define en términos del conocimiento y de la comprensión que supone que el maestro sea capaz de resolver una tarea de enseñanza. Las competencias de análisis didáctico exhibidas por los maestros fueron motivo del sexto capítulo. En la sección algunas implicaciones para la formación de maestros se efectúan algunos comentarios.

Igualmente se identificaron las concepciones tanto sobre la inclusión del razonamiento algebraico elemental como con los tipos de ejercicios que promueven el razonamiento algebraico elemental. Esto fue consignado en la sección análisis realizados por los maestros en formación del quinto capítulo de la tesis doctoral.

## 1.3. Marco conceptual

**Problema.** Una transacción persona-ambiente en la cual hay una discrepancia o desequilibrio percibido entre las exigencias y la disponibilidad de respuesta. La persona en dicha situación percibe una discrepancia entre "lo que es" y "lo que debería ser" en condiciones donde los medios para reducir la discrepancia no están inmediatamente patentes o disponibles.

**Resolución de problemas.** Un proceso cognitivo-afectivo-conductual mediante el cual una persona intenta identificar o descubrir una solución o respuesta de afrontamiento eficaz para un problema particular.

**Razonamiento.** El Razonamiento es la capacidad del ser humano de que con un ordenamiento de sus pensamientos pueda generar una idea lógica. Con esta idea lógica se obtienen respuestas y resoluciones a los problemas de cualquier índole. Quien razona tiene en su poder la herramienta más importante para definirse en sociedad como parte de esta. El razonamiento es actividad mental y todo lo relacionado con el pensamiento que se pueda conseguir una respuesta es llamado como tal. El razonamiento también es una herramienta conductora de la persona por el camino que decida tomar, de hecho es un complemento de las decisiones.

**Razonamiento algebraico.** Implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central.

**Idoneidad.** La idoneidad de un asunto comunica que tiene las condiciones precisas para cumplir una determinada función. El concepto de idoneidad trasmite el cumplimiento de unas condiciones mínimas a partir de los cuales es posible optar a algo. Se podría decir que la idoneidad establece una frontera que delimita lo adecuado o inadecuado de algo.

**Idoneidad didáctica.** La idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza aprendizaje se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como optimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Es una herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva a otra prescriptiva al proporcionar un sistema de criterios de intervención sobre los cuales existe un consenso en la comunidad de educación matemática. En los siguientes artículos se describe y ejemplifica el uso de esta herramienta.

# CAPÍTULO II

# PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 2.1 Identificación del Problema

La labor educativa es un eje esencial alrededor del cual se mueve un sin número de variables, que de uno u otro modo, son un reflejo del sistema educativo nacional. Por esta razón, el conocimiento del algebra por los profesores del V ciclo de educación básica regular representa un factor fundamental en la labor educativa.

En este trabajo de investigación se analiza sobre la capacidad de razonamiento algebraico e idoneidad didáctica para la enseñanza del álgebra, adicionalmente como parte de este proceso también se verifica sobre la preparación, desarrollo y evaluación de sesiones de aprendizaje y el uso adecuado de los procesos didácticos de las matemáticas, los cuales se describe desde cuando estos están puestos en juego durante la resolución de problemas de contenido algebraico. El tema matemático sobre el que se investiga es específicamente el de razonamiento algebraico elemental para los grados superiores del nivel primario de la educación básica regular.

Es así como en este trabajo examinamos sobre el conocimiento del algebra y didáctica en un grupo de docentes de aula que tienen a cargo el v ciclo del nivel de educación primaria, además teniendo en cuenta y tomando como referencia diversos trabajos de investigación a nivel internacional, donde también se pone en manifiesto las dificultades relacionadas con el aprendizaje y enseñanza del álgebra en la escuela, con resultados se advierten que los maestros no están igualmente preparados para reconocer y promover el razonamiento algebraico en los escolares.

Por lo tanto, en el contexto de la investigación surge la siguiente interrogante

## 2.2 Enunciados del Problema

### 2.2.1 Problema General

¿Cómo se relaciona la capacidad de razonamiento algebraico, con la idoneidad didáctica que ostentan los docentes del V ciclo de nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno -2016?

### 2.2.2 Problemas Específicos

- ¿Qué modelo de regresión simple evalúa la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno?
- ¿Qué grado de relación existe entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno?
- ¿Si existe una relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es lo bastante grande como para afirmar que la relación es significativa?
- ¿Dada la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es realmente de naturaleza lineal?

## 2.3 Justificación

Para la mayoría de los docentes es complicado aprender y enseñar las funciones reales específicamente las matemáticas de manera general, muchos intentan encontrar respuesta a la interrogante ¿cómo mejorar la calidad de la educación de nuestro país? como resultado se ha logrado avances en las concepciones de carácter teórico, así como en el planteamiento de propuestas que buscan cambiar y transformar principalmente la tarea del docente y que luego de ser llevadas a la práctica, merecerían ser evaluadas en el contexto real a fin de determinar su pertinencia e impacto.

Se presenta el proyecto con el propósito de evaluar y conocer el nivel de desarrollo de la capacidad de razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica de los docentes del nivel primario de la ciudad de Puno. Conociendo que el álgebra tiene una gran presencia como contenido matemático en diferentes etapas en el sistema educativo, especialmente en los grados superiores del nivel de educación primaria. en este trabajo vamos a referirnos a tomar en consideración, tanto los aspectos del lenguaje algebraico como: las letras con significado algebraico, las expresiones algebraicas, las ecuaciones lineales, los procesos de pensamiento algebraico y la resolución de problemas, como ciertos aspectos del conocimiento numérico que constituyen la base para la aritmética generalizada, es decir aquellos conocimientos que facilitan la transición del pensamiento numérico al algebraico y que tienen que ver con ideas acerca de los distintos tipos de números y de las relaciones numéricas, en particular las ideas de estructuras y procesos numéricos.

## 2.4 Objetivos

### 2.4.1 Objetivo General

Establecer la naturaleza de la relación entre la capacidad de razonamiento algebraico, con la idoneidad didáctica que ostentan los docentes del V ciclo del nivel Educación Básica Regular de la ciudad de Puno -2016

### 2.4.2 Objetivos Específicos

- Determinar el modelo de regresión simple que evalúa la forma que guarda relación el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno.
- Determinar el grado de asociación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno.
- Probar que el grado de relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es lo bastante grande como para afirmar que la relación es significativa.
- Determinar si la relación existente entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es realmente de naturaleza lineal.

## 2.5 Hipótesis

### 2.5.1 Hipótesis General

A mayor capacidad de razonamiento algebraico corresponde mayor idoneidad didáctica de los profesores del V ciclo de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno-2016.

### 2.5.2 Hipótesis Especificas

- El modelo de regresión que evalúa la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es lineal simple y directa.
- El grado de relación que existe entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es relativamente alta.
- La relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es lo bastante grande como para afirmar que la relación es significativa.
- La relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es de naturaleza lineal.

## 2.6 Operacionalización de Variables

| Variables | Dimensiones | Indicadores | Categorías | Instrumentos |
|---|---|---|---|---|
| Niveles de conocimiento sobre razonamiento algebraico | Conocimiento disciplinar del contenido | Resolución de problemas | Comprensión del problema.<br>Concepción de un plan de resolución.<br>ejecución del plan de resolución<br>evaluación de la solución | Prueba de conocimientos sobre álgebra escolar. |
| idoneidad didáctica del álgebra | Categorías de idoneidad didáctica | Epistémica | **situaciones-problemas**<br>Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones-problemas que permitan contextualizar, ejercitar, aplicar y generalizar el conocimiento matemático, los cuales proceden de la propia matemática y de otros contextos.<br>**lenguajes**<br>Se usa un amplio repertorio de representaciones para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas.<br>**reglas**<br>Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen | ficha de observación de la idoneidad didáctica |

| | |
|---|---|
| | **argumentos**<br>Se favorece el razonamiento y la prueba de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba.<br>**relaciones**<br>Se favorece el establecimiento y el uso de conexiones entre las ideas matemáticas. |
| Ecológica | **adaptación al currículo**<br>Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares<br>**apertura hacia la innovación didáctica**<br>se realizan y promueven procesos de innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva<br>**adaptación socio- profesional y cultural**<br>los contenidos contribuyen a la formación matemática de los estudiantes<br>**educación en valores**<br>Se contempla la formación en valores democráticos y se dan oportunidades para que los estudiantes realicen cuestionamientos a lo aparentemente evidente o dado como natural.<br>**conexiones intra e interdisciplinares**<br>Los contenidos (conceptos, procedimientos, …) se relacionan entre sí mostrando las estructuras que los organizan. |
| Cognitiva | **conocimientos previos**<br>Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema.<br>los contenidos pretendidos se pueden alcanzar en sus diversas componente<br>**adaptaciones curriculares a las diferencias individuales**<br>se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo<br>se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes<br>**aprendizaje**<br>Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos. |
| Afectiva | **Intereses y necesidades:**<br>Las tareas tienen interés para los estudiantes.<br>**actitudes:**<br>Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad en el trabajo en equipo.<br>**emociones:**<br>se promueve la autoestima y seguridad en sí mismo para realizar tareas matemáticas. |
| Interaccional | **interacción docente-discente**<br>El profesor hace una presentación adecuada del tema.<br>**interacción entre discentes**<br>se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes<br>**autonomía**<br>Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio.<br>**evaluación formativa**<br>Se realiza una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos usando técnicas variadas y pertinentes. |
| Mediacional | **recursos materiales** (manipulativos, calculadoras, ordenadores)<br>**número de alumnos, horario y condiciones del aula** |

# CAPÍTULO III

# MATERIALES Y MÉTODOS

## 3.1 Lugar de estudio

Puno es uno de los veinticuatro departamentos que, junto a la Provincia Constitucional del Callao, forman la República del Perú. Su capital es Puno. Está ubicado al sur del país, limitando al norte con Madre de Dios, al este con Bolivia y el lago Titicaca, al sur con Tacna, al suroeste con Moquegua y al oeste con Arequipa y Cuzco. Con 66 997 km² es el quinto departamento más extenso, por detrás de Loreto, Ucayali, Madre de Dios y Cuzco. La ciudad de Puno según el Instituto Nacional de Estadística e Informática es la vigésima segunda ciudad más poblada del Perú y albergaba en el año 2017 una población de 135.288 habitantes aproximadamente.

El espacio físico de la ciudad de Puno está comprendido desde la orilla oeste del lago Titicaca, en la bahía interior de Puno (antes Paucarcolla), sobre una superficie ligeramente ondulada (la parte céntrica), rodeada por cerros. La parte alta de la ciudad tiene una superficie semiplana (Comunidad Mi Perú, Yanamayo). Oscilando entre los 3810 a 4050 msnm (entre las orillas del lago y las partes más altas). Puno es una de las ciudades más altas del Perú y la quinta del mundo. Actualmente tiene una extensión de 1566,64 ha, la cual representa el 0,24 % del territorio de la provincia de Puno.

## 3.2 Población

La población de estudio en este proyecto son los docentes de aula de Educación Primaria específicamente del v ciclo de las Instituciones del nivel primario de la ciudad de Puno. Son docentes con un conocimiento múltiple sobre matemáticas y concepciones sesgadas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas elementales.

### 3.3 Muestra

La selección de la muestra es intencional y suficientemente representativa para asegurar que los resultados empíricos sean útiles para desprender recomendaciones didácticas y los resultados teóricos gocen de cierta validez, y está constituida por 44 docentes profesores (30 mujeres, 14 varones) para efecto de evaluación.

Tabla 7

*Docentes del nivel primario de acuerdo a su escala magisterial de la UGEL Puno*

| **Docentes** | **Escala magisterial** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | TOTAL |
| **Mujeres** | 12 | 8 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 30 |
| **Varones** | 5 | 4 | 2 | 1 | - | - | - | - | 14 |
| **TOTAL** | 17 | 12 | 6 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 44 |

Fuente: registro de asistencia a los talleres

### 3.4 Método de investigación

La investigación está dentro del enfoque cuantitativo, su alcance o tipo es correlacional y su diseño es transeccional o transversal correlacional. Un estudio correlacional determina si dos variables están correlacionadas o no. Esto significa analizar si un aumento o disminución en una variable coincide con un aumento o disminución en la otra variable. "la investigación correlacional es un tipo de estudio que tiene como propósito evaluar la relación que exista entre dos o más conceptos, categorías o variables (en un contexto en particular). Los estudios cuantitativos correlaciónales miden el grado de relación entre esas dos o más variables (cuantifican relaciones). Es decir, miden cada variable presuntamente relacionada y después también miden y analizan la correlación. Tales correlaciones se expresan en hipótesis sometidas a prueba" (Hernández, et al (2003).

Este estudio a su vez fue de tipo transeccional, ya que la recolección de información se hizo en un solo momento y en un tiempo único; además de que en este tipo de diseño no experimental, el propósito es describir las variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado.

## 3.5 descripción detallada de métodos por objetivos específicos

### 3.5.1 Formulación de Hipótesis Estadística

La relación del razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, por su complejidad necesitan caracterizar el tipo de relación que existe entre ellas. El modelo de regresión que se ajusta al fenómeno de estudio es la lineal múltiple (Silva, 1992).

La forma del modelo de regresión para 2 variables independientes está dado por:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \xi_i$$

Donde $y_i$ es el valor general de la variable de respuesta y, $\beta_0$ y $\beta_1$ son los parámetros de la población, $x_i$ *es* una constante conocida o valor *i* de la variable independiente x, y $\xi_i$ es un término aleatorio de error (Wayne 1985). En la ecuación *i* como subíndice toma valores desde *1* hasta *n*, número de valore de x. se llama al parámetro $\beta_0$*constante de regresión* y a $\beta_1$ *coeficiente de regresión*. En el estudio la ecuación de la recta de regresión será:

$$y^* = a + bx$$

El término independiente *a* y el coeficiente *b* se calculan con ayuda de siguiente sistema de ecuaciones normales:

$$\sum Y_i = na + b\sum X_i$$
$$\sum X_i Y_i = a\sum X_i + b\sum X_i^{\,2}$$

Cuestiones como si ¿la recta de regresión ayuda a predecir los valores de y y en qué medida lo hace? ¿Cuál es grado de confianza de estas predicciones? Estas y otras interrogantes nos planteamos al momento de hacer el análisis de los resultados estadísticos en una investigación de la naturaleza correlacional.

Un índice que ayuda a evaluar la ecuación es el error de predicción definido de la siguiente manera:

$$SC_e = (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

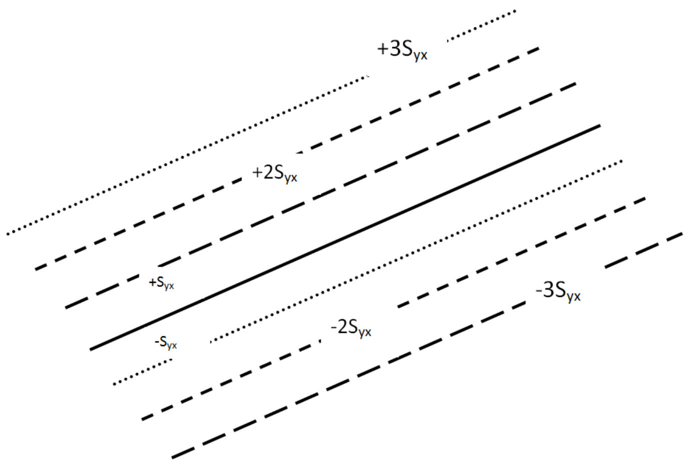
Si el error de predicción es 0 la recta de regresión se ajusta perfectamente al modelo es decir $Y_i = \hat{Y}_i$. y si $Y_i \neq \hat{Y}_i$, la diferencia es muy grande para todos los *i*, entonces los puntos se desvían mucho de la línea de mínimos cuadrados; en consecuencia el error de predicción será grande.

El error estándar de estimación o desviación estándar de regresión, es una medida de esparcimiento alrededor de la línea de regresión y se calcula con la siguiente ecuación:

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}} \text{ o } S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum Y_i^2 - a\sum Y_i - b\sum X_i Y_i}{n}}$$

Y la varianza residual es igual al error estándar al cuadrado, es decir: $s_{yx}^2$.

El error estándar de estimación o de regresión cumple las mismas propiedades de la desviación estándar, la diferencia está en que el error estándar de regresión mide las dispersiones de los valores alrededor de la línea de regresión y la desviación estándar alrededor de la media aritmética. Ahora, suponiendo que y se distribuye normalmente, al construir rectas paralelas a ambos lados de la línea de regresión a una distancia proporcional a $s_{yx}$ se define franjas o intervalos, como se aprecia en el gráfico siguiente:




En los intervalos:

$\hat{Y} \pm S_{yx}$, se encuentra el 68.3% de los valores reales y

$\hat{Y} \pm 2S_{yx}$, se encuentra el 95.5% de los valores reales y

$\hat{Y} \pm 3S_{yx}$ , se encuentra el 99.7% de los valores reales y

El coeficiente de correlación, es el estadígrafo que expresa o mide el grado de asociación o afinidad entre las variables relacionadas, s denota por "*r*" y de define como:

$$r = \sqrt{1 - \frac{S_{yx}{}^2}{S_y{}^2}}$$

Donde $S_y{}^2 = \frac{\sum Y_i^2}{n} - (\frac{\sum Y_i}{n})^2$

Este coeficiente de correlación rectilínea, es el estadígrafo que expresa el grado de afinidad o asociación entre dos variables cuando ellas están relacionadas mediante una línea recta.

Las propiedades de *r*: como $r^2$ es siempre positivo, entonces $r^2$=+-1, luego la propiedad fundamental de coeficiente de correlación r es : $-1 \leq r \leq +1$

De donde se deduce que:

a) si *r*> 0, entonces existe "correlación directa positiva.

b) si *r*<0, se trata de una correlación inversa negativa.

c) si $r^2$ =1, los datos forman una línea recta, en el caso de la correlación rectilínea.

d) si *r* =+1, hay una correlación perfecta positiva.

e) si *r*=-1, hay una correlación perfecta negativa.

f) si *r*=0, los datos son correlacionados.

## 3.6 Técnicas e instrumentos de investigación

### 3.6.1 Instrumentos de investigación

En este numeral se presenta los instrumentos de recolección de datos. El propósito es recoger información sobre los conocimientos de álgebra que poseen los docentes, para lo cual se diseñó la **Prueba de conocimientos de razonamiento algebraico.** Se diseñará una prueba de razonamiento algebraico con base en los libros de texto que distribuye el ministerio de educación a las instituciones educativas de educación primaria. A continuación se expone los instrumentos. De la misma forma para valorar la idoneidad didáctica se diseñó la **Ficha de observación de idoneidad didáctica:** Se diseñará una ficha de observación para valorar la idoneidad didáctica de los docentes, el mismo que se fundamenta en la teoría desarrollada por Godino (2014).

# CAPÍTULO IV

# RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se presenta los resultados más relevantes del estudio que permiten aportar evidencias empíricas para demostrar la consecución de los objetivos de investigación. En ese sentido se desarrolla el estudio correlacional entre el razonamiento algebraico y cada uno de los criterios de idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica.

Para la consecución de los objetivos se realiza, primero, un estudio de presentación del modelo de regresión que evalúa la forma que guarda la relación entre las variables razonamiento algebraico e idoneidad didáctica, segundo, determinación del coeficiente de correlación de Pearson y tercero, el análisis de varianza para determinar lo adecuado del modelo de regresión lineal.

## 4.1 Relación entre razonamiento algebraico y la idoneidad epistémica o matemática

En este numeral se presenta los resultados del estudio correlacional entre el razonamiento algebraico y la idoneidad epistémica o matemática.

### 4.1.1 Modelo de regresión que modela la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad epistémica o Matemática

Se parte del supuesto que el modelo que describe la relación entre las variables es la regresión lineal, para demostrar tal supuesto primero, se estima los parámetros del modelo y segundo, se evalúa el modelo a través del coeficiente de determinación. La tabla muestra los parámetros del modelo, el coeficiente 5,23 representa la intercepción de la recta de regresión con el eje $y$, en tanto que 2,98 es la pendiente de la recta, de esta manera queda determinado el modelo lineal:

$$y = 2{,}98x + 5{,}23$$

Tabla 8

*Parámetros del modelo de regresión lineal de las variables razonamiento algebraico e idoneidad epistémica.*

| | Coeficientes | Error típico | Estadístico t |
|---|---|---|---|
| Intercepción | 5,23 | 2,52 | 2,08 |
| Variable X 1 | 2,98 | 0,12 | 24,30 |

Fuente. Anexos 4 y 5.

Elaboración: la investigadora

La figura 8 muestra efectivamente la linealidad del modelo que describe la relación directa y lineal de las variables razonamiento algebraico e idoneidad epistémica.

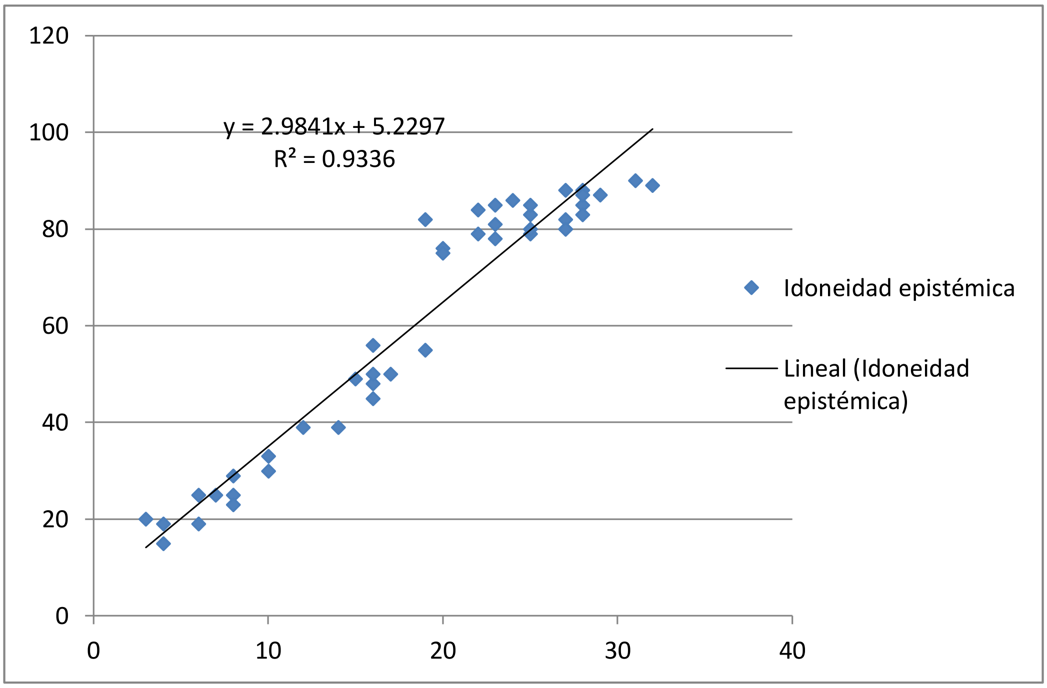



*Figura 8.* Diagrama de dispersión y recta de regresión de las variables razonamiento algebraico e idoneidad epistémica.

**Coeficiente de determinación**

El valor del coeficiente de determinación $r^2$ para el estudio es 0,93 (tabla 8), lo que significa que aproximadamente el 93% de la variación total de la idoneidad epistémica o matemática se explica por la ecuación de regresión. En tanto, que el coeficiente de determinación está dado por la proporción entre suma de cuadrados explicada y la suma de cuadrados total, esta permite establecer que “cuanto mayor sea la proporción de variabilidad total que se explica por el modelo de regresión, mayor certeza se tendrá de que la ecuación de regresión lineal describe adecuadamente la relación entre las variables" (Silva, 1992, p.495) razonamiento algebraico e idoneidad epistémica.

Tabla 9
*Resumen de las estadísticas de la regresión entre el razonamiento algebraico y la idoneidad epistémica.*

| **Estadísticas de la regresión** | **Total** |
|---|---|
| Coeficiente de correlación | 0,97 |
| Coeficiente de determinación R^2 | 0,93 |
| R^2 ajustado | 0,93 |
| Error típico | 6,80 |
| Número de observaciones | 44 |

Fuente: Anexos 4 y 5.

### 4.1.2 Coeficiente de correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson que analiza la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad epistémica o matemática es $r = 0{,}97$ (tabla 9) lo que significa una correlación positiva muy fuerte.

**Prueba t para demostrar la significatividad de la relación**

Ahora se debe verificar si este valor de r es lo bastante grande como para indicar que las variables razonamiento algebraico e idoneidad epistémica están relacionadas significativamente, es necesario probar la hipótesis:

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho \neq 0$$

El valores críticos de la distribución $t$ de student (tabulada) para $\alpha$=0,05 con grados de libertad 44-2=42 es 2,021, y como éste es menor que el valor observado de $t = 24{,}30$ (tabla 8), se rechaza la hipótesis nula y se concluye que las puntuaciones obtenidas por los profesores en el razonamiento algebraico y la idoneidad epistémica se encuentra significativamente correlacionada.

**Análisis de Varianza**

Se sostiene que la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad epistémica se modela a través de un modelo de regresión lineal, para demostrar esta aseveración se utiliza el análisis de varianza, porque es necesario establecer la linealidad del modelo para desestimar otras opciones como por ejemplo el exponencial.

Para probar directamente la existencia de linealidad entre las variables se usa el análisis de varianza. Sean las hipótesis:

$H_0$: El razonamiento algebraico y la idoneidad epistémica no se relacionan linealmente.

$H_1$: El razonamiento algebraico y la idoneidad epistémica están relacionados linealmente.

Con $\alpha$=0,05

En vista que 590,46 es mayor que 4,08, valor crítico de *F* para uno y 42 grados de libertad, entonces, se concluye que existe evidencias significativas de que las puntuaciones en el razonamiento algebraico y la idoneidad epistémica se relacionan linealmente.

Tabla 10
*Resultados del análisis de varianza para la regresión lineal simple de las variables el razonamiento algebraico y la idoneidad epistémica.*

| | Grados de libertad | Suma de cuadrados | Promedio de los cuadrados | F | Valor crítico de F |
|---|---|---|---|---|---|
| **Regresión** | 1 | 27329,89 | 27329,89 | 590,45 | 2,3365E-26 |
| **Residuos** | 42 | 1944,02 | 46,29 | | |
| **Total** | 43 | 29273,91 | | | |

Fuente: Anexos 4 y 5.

**Discusión de resultados**

Como hemos indicado entendemos que un programa formativo, o un proceso de estudio matemático, tienen mayor idoneidad epistémica en la medida en que los contenidos implementados (o pretendidos) representan bien a los contenidos de referencia. Seguidamente mencionamos algunas concordancias de estos componentes e indicadores con los propuestos por diversas teorías, y en particular los Principios y Estándares para la Enseñanza de las Matemáticas formulados por el NCTM (2000).

Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas. Sin embargo, aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención, como propone el EOS, a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones.

También se debe prestar atención a las conexiones entre las distintas partes del contenido matemático. Las matemáticas son un campo de estudio integrado. "En un currículum coherente, las ideas matemáticas están relacionadas y se construyen unas sobre otras. (NCTM, 2000, p.14). Esta posición concuerda con el "Principio de interconexión" de la "Educación matemática realista": Los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría, …) no pueden ser tratados como entidades separadas. Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados.

Además, la resolución de problemas de contexto ricos con frecuencia significa que tienes que aplicar un amplio rango de herramientas y comprensiones matemáticas.

### 4.2. Relación entre Razonamiento Algebraico y la Idoneidad Ecológica

En este numeral se presenta los resultados del estudio correlacional entre el razonamiento algebraico y la idoneidad ecológica.

### 4.2.1. Modelo de regresión que modela la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad ecológica

Se parte del supuesto que el modelo que describe la relación entre las variables es la regresión lineal, para demostrar tal supuesto primero, se estima los parámetros del modelo y segundo, se evalúa el modelo a través del coeficiente de determinación. La tabla muestra los parámetros del modelo, el coeficiente 26,77 representa la intercepción de la recta de regresión con el eje *y*, en tanto que -0,01 es la pendiente de la recta, de esta manera queda determinado el modelo lineal:

$$y = -0{,}01x + 26{,}77$$

Tabla 11

*Parámetros del modelo de regresión lineal de las variables razonamiento algebraico e idoneidad ecológica.*

| | *Coeficientes* | *Error típico* | *Estadístico t* |
|---|---|---|---|
| Intercepción | 26,77 | 3,53 | 7,58 |
| Variable X 1 | -0,013 | 0,18 | -0,076 |

Fuente: Anexos 4 y 5.

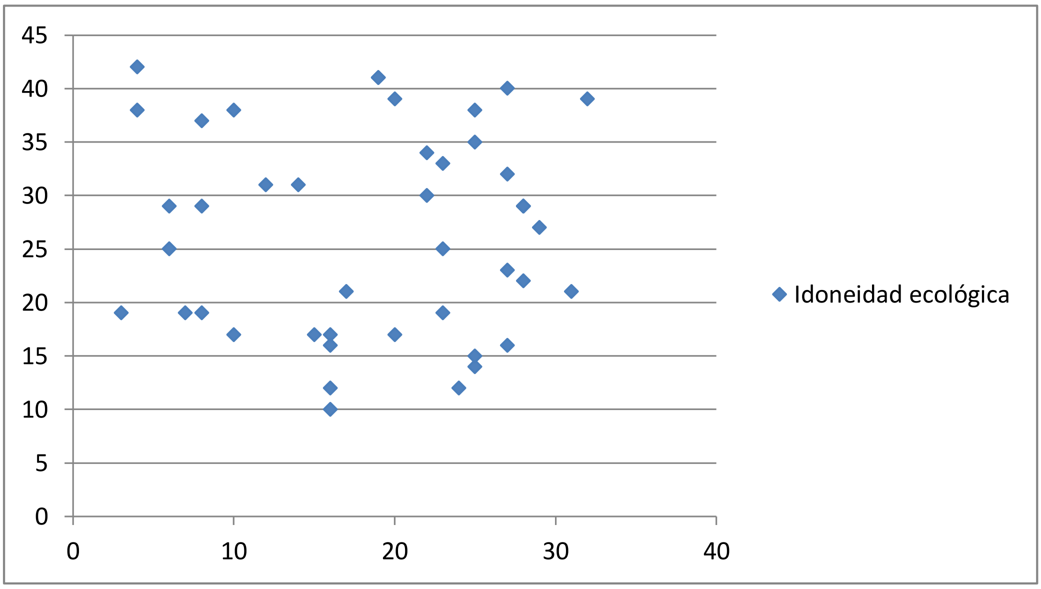



*Figura 9.* Diagrama de dispersión y recta de regresión de las variables razonamiento algebraico e idoneidad ecológica.

**Coeficiente de determinación**

El valor del coeficiente de determinación $r^2$ para el estudio es 0,0001, lo que significa que aproximadamente solo el 0% de la variación total de la idoneidad ecológica se explica por la ecuación de regresión.

Tabla 12.
*Resumen de las estadísticas de la regresión entre el razonamiento algebraico y la idoneidad ecológica.*

| **Estadísticas de la regresión** | **Total** |
|---|---|
| Coeficiente de correlación | 0,01 |
| Coeficiente de determinación R^2 | 0,00013 |
| R^2  ajustado | -0,024 |
| Error típico | 9,55 |
| Observaciones | 44 |

Fuente: Anexos 4 y 5.

### 4.2.2. Coeficiente de correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson que analiza la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad ecológica es $r = 0{,}012$ lo que significa una correlación positiva muy débil.

**Prueba t para demostrar la significatividad de la relación**

Ahora se debe verificar si este valor de r es lo bastante grande como para indicar que las variables razonamiento algebraico y idoneidad ecológica están relacionadas significativamente, es necesario probar la hipótesis:

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho \neq 0$$

El valores críticos de la distribución t de student (tabulada) para α=0,05 con grados de libertad 44-2=42 es 2,021, y como éste es mayor que el valor observado de $t = -0{,}076$se puede rechaza la hipótesis nula y se concluye que las puntuaciones obtenidas por los profesores en el razonamiento algebraico y la idoneidad ecológica no se encuentran correlacionadas.

**Análisis de Varianza**

Para probar directamente la existencia de linealidad entre las variables se usa el análisis de varianza. Sean las hipótesis:

$H_0$: El razonamiento algebraico y la idoneidad ecológica no se relacionan linealmente.

$H_1$: El razonamiento algebraico y la idoneidad ecológica están relacionados linealmente.

Con $\alpha$=0,05

En vista que 0,0058 es menor que 4,08, valor crítico de F para uno y 42 grados de libertad, entonces, se concluye que no existe evidencias significativas de que las puntuaciones en el razonamiento algebraico y la idoneidad ecológica se relacionen linealmente.

Tabla 13.

*Resultados del análisis de varianza para la regresión lineal simple de las variables el razonamiento algebraico y la idoneidad ecológica.*

| | **Grados de libertad** | **Suma de cuadrados** | **Promedio de los cuadrados** | **F** | **Valor crítico de F** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Regresión** | 1 | 0,53 | 0,53 | 0,0058 | 0,94 |
| **Residuos** | 42 | 3832,45 | 91,25 | | |
| **Total** | 43 | 3832,98 | | | |

Fuente: Anexos 4 y 5.

**Discusión de resultados**

La idoneidad ecológica se refiere al grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza. Por entorno entendemos todo lo que está fuera del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en la misma. Así, nos podemos referir a todo lo que viene en general determinado por la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas. El proceso de estudio tiene lugar en un contexto educativo que fija unos fines y valores para la educación de los ciudadanos y profesionales que se deben respetar. Dichos fines y valores son interpretados y especificados dentro del proyecto educativo del centro o departamento que coordina la acción de los distintos profesores implicados. El docente forma parte de una comunidad de estudio e indagación que aporta conocimientos útiles sobre prácticas matemáticas y didácticas idóneas que se deberán conocer y aplicar.

La educación matemática crítica (Skovsmose, 1994) aporta ideas para lograr que la educación matemática permita a los ciudadanos ser parte activa de una sociedad democrática. Más allá del aprendizaje matemático individual de cada persona, se hace necesario formular reflexiones sobre las consecuencias colectivas de este aprendizaje en la sociedad actual. En la escuela, la práctica matemática puede ejercer una enorme influencia en dos sentidos totalmente opuestos: por un lado, la matemática reducida a meros cálculos rutinarios puede reforzar actitudes pasivas y complacientes y, por otro lado, la matemática en su sentido más amplio puede desarrollar el pensamiento crítico y alternativo.

Otros componentes e indicadores de idoneidad ecológica se incluyen en la tabla 6, en particular las conexiones del contenido matemático con otras áreas curriculares, y entre distintas áreas temáticas dentro de la propia matemática.

## 4.3. Relación entre Razonamiento Algebraico y la Idoneidad Cognitiva

En este numeral se presenta los resultados del estudio correlacional entre el razonamiento algebraico y la idoneidad cognitiva.

### 4.3.1. Modelo de regresión que modela la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad cognitiva

Dada la dispersión de los datos que se visualiza en la figura 10, permite intuir que el modelo de regresión lineal que se intenta aplicar para demostrar la relación entre las variables es posible, tal como se ha demostrado con la interpretación del coeficiente de determinación, así mismo, los parámetros del modelo nos dejan percibir que si existe una relación directa tal como lo evidencia la ecuación:

$$y = 0{,}92x + 11{,}03$$

Tabla 14

*Parámetros del modelo de regresión lineal de las variables razonamiento algebraico e idoneidad cognitiva.*

| | Coeficientes | Error típico | Estadístico t |
|---|---|---|---|
| Intercepción | 11,03 | 1,73 | 6,36 |
| Variable X 1 | 0,92 | 0,08 | 10,91 |

Fuente: Anexos 4 y 5.

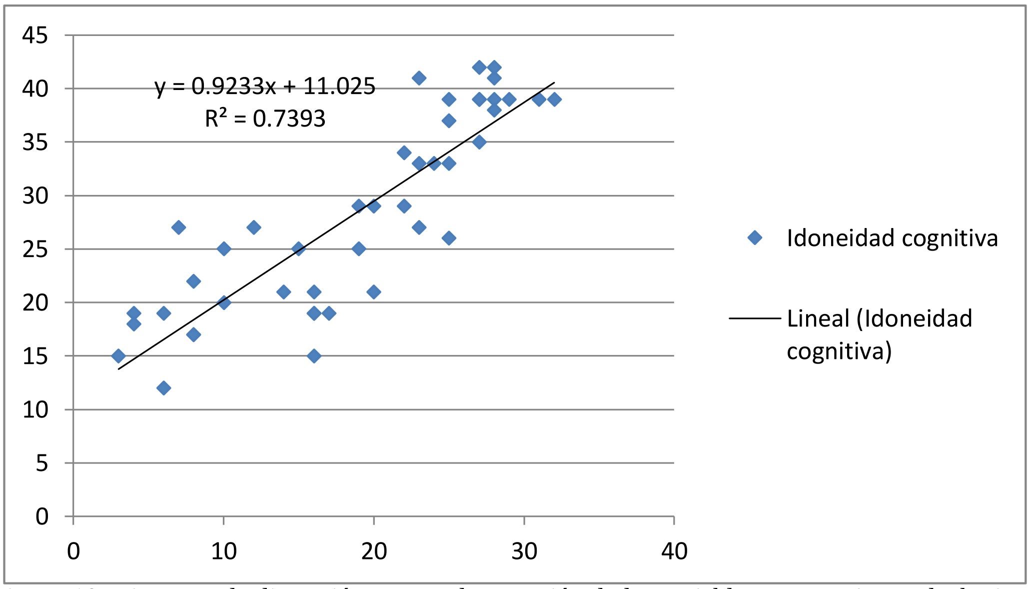



*Figura 10.* Diagrama de dispersión y recta de regresión de las variables razonamiento algebraico e idoneidad cognitiva.

### Coeficiente de determinación

El valor del coeficiente de determinación $r^2$ para el estudio es 0,74, lo que significa que aproximadamente el 74% de la variación total de la idoneidad cognitiva se explica por la ecuación de regresión.

Tabla 15

*Resumen de las estadísticas de la regresión entre el razonamiento algebraico y la idoneidad cognitiva.*

| Estadísticas de la regresión | Total |
|---|---|
| Coeficiente de correlación | 0,86 |
| Coeficiente de determinación R^2 | 0,74 |
| R^2 ajustado | 0,73 |
| Error típico | 4,69 |
| Observaciones | 44 |

Fuente: Anexos 4 y 5.

### 4.3.2. Coeficiente de correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson que analiza la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad cognitiva es $r = 0{,}86$ lo que significa una correlación positiva fuerte.

**Prueba t para demostrar la significatividad de la relación**

Ahora se debe verificar si este valor de r es lo bastante grande como para indicar que las variables razonamiento algebraico e idoneidad cognitiva están relacionadas significativamente, es necesario probar la hipótesis:

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho \neq 0$$

El valores críticos de la distribución t de student (tabulada) para $\alpha$=0,05 con grados de libertad 44-2=42 es 2,021, y como éste es menor que el valor observado de $t = 10{,}91$, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que las puntuaciones obtenidas por los profesores en el razonamiento algebraico y la idoneidad cognitiva se encuentran significativamente correlacionadas.

**Análisis de Varianza**

Para probar directamente la existencia de linealidad entre las variables se usa el análisis de varianza. Sean las hipótesis:

$H_0$: El razonamiento algebraico y la idoneidad cognitiva no se relacionan linealmente.

$H_1$: El razonamiento algebraico y la idoneidad cognitiva están relacionados linealmente.

Con $\alpha$=0,05

En vista que 119,12es mayor que 4,08, valor crítico de F para uno y 42 grados de libertad, entonces, se concluye que existe evidencia significativas de que las puntuaciones en el razonamiento algebraico y la idoneidad cognitiva se relacionan linealmente.

Tabla 16

*Resultados del análisis de varianza para la regresión lineal simple de las variables el razonamiento algebraico y la idoneidad cognitiva.*

| | Grados de libertad | Suma de cuadrados | Promedio de los cuadrados | F | Valor crítico de F |
|---|---|---|---|---|---|
| **Regresión** | 1 | 2616,57 | 2616,57 | 119,12 | 7,73E-14 |
| **Residuos** | 42 | 922,59 | 21,97 | | |
| **Total** | 43 | 3539,16 | | | |

Fuente: Anexos 4 y 5.

**Discusión de resultados**

En el marco del EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en la comunidad de prácticas generada en la clase. Supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados. Los significados son entendidos en términos de prácticas operativas y discursivas y supone además el reconocimiento e interrelación de los objetos que intervienen en dichas prácticas.

Tres de los seis principios formulados por el NCTM (2000) sobre la enseñanza de las matemáticas tienen relación con la idoneidad cognitiva. El principio de igualdad indica, “La excelencia en la educación matemática requiere igualdad, grandes expectativas y un fuerte apoyo para todos los estudiantes”. Se exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas, y que sean incluidos contenidos motivadores para promover el acceso y el logro de todos los estudiantes. El principio de aprendizaje requiere que “Los estudiantes deben aprender las matemáticas entendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de sus experiencias y conocimientos previos”. Así mismo, el principio de evaluación afirma que, “La evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas relevantes y proveer de información útil tanto a profesores como estudiantes”.

## 4.4. Relación entre Razonamiento Algebraico y la Idoneidad Afectiva

En este numeral se presenta los resultados del estudio correlacional entre el razonamiento algebraico y la idoneidad afectiva.

### 4.4.1. Modelo de regresión que modela la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad afectiva

Dada la dispersión de los datos que se visualiza en la figura 11, permite intuir que el modelo de regresión lineal que se intenta aplicar para demostrar la relación entre las variables no es posible, tal como se ha demostrado con la interpretación del coeficiente de determinación, así mismo, los parámetros del modelo nos dejan percibir que si existiera una relación sería indirecta tal como lo evidencia la ecuación:

$$y = -0{,}23x + 25{,}77$$

Tabla 17

*Parámetros del modelo de regresión lineal de las variables razonamiento algebraico e idoneidad afectiva.*

| | Coeficientes | Error típico | Estadístico t |
|---|---|---|---|
| Intercepción | 25,77 | 1,72 | 15,02 |
| Variable X 1 | -0,23 | 0,08 | -2,70 |

Fuente: Anexos 4 y 5.

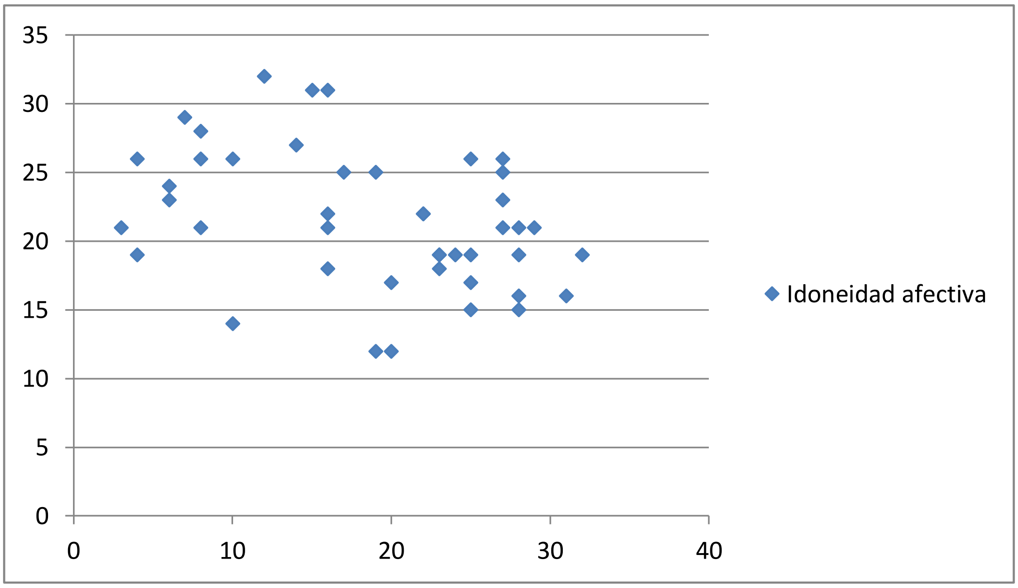



*Figura 11*. Diagrama de dispersión y recta de regresión de las variables razonamiento algebraico e idoneidad afectiva.

**Coeficiente de determinación**

El valor del coeficiente de determinación $r^2$ para el estudio es 0,15, lo que significa que aproximadamente el 15% de la variación total de la idoneidad afectiva se explica por la ecuación de regresión.

Tabla 18
*Resumen de las estadísticas de la regresión entre el razonamiento algebraico y la idoneidad afectiva.*

| Estadísticas de la regresión | Total |
|---|---|
| Coeficiente de correlación | 0,38 |
| Coeficiente de determinación R^2 | 0,15 |
| R^2 ajustado | 0,13 |
| Error típico | 4,64 |
| Observaciones | 44 |

Fuente: Anexos 4 y 5.

### 4.4.2. Coeficiente de correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson que analiza la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad afectiva es $r = 0{,}38$ lo que significa una correlación positiva cuasi media.

**Prueba t para demostrar la significatividad de la relación**

Ahora se debe verificar si este valor de r es lo bastante grande como para indicar que las variables razonamiento algebraico e idoneidad afectiva están relacionadas significativamente, es necesario probar la hipótesis:

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho \neq 0$$

El valores críticos de la distribución t de student (tabulada) para α=0,05 con grados de libertad 44-2=42 es 2,021, y como éste es menor que el valor observado de $t = 2{,}70$, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que las puntuaciones obtenidas por los profesores sobre el razonamiento algebraico y la idoneidad afectiva se encuentra significativamente correlacionada.

**Análisis de Varianza**

Para probar directamente la existencia de linealidad entre las variables se usa el análisis de varianza. Sean las hipótesis:

$H_0$: El razonamiento algebraico y la idoneidad afectiva no se relacionan linealmente.

$H_1$: El razonamiento algebraico y la idoneidad afectiva están relacionados linealmente.

Con $\alpha$=0,05

En vista que 7,29 es mayor que 4,08, valor crítico de F para uno y 42 grados de libertad, entonces, se concluye que existe evidencia significativas de que las puntuaciones en el razonamiento algebraico y la idoneidad afectiva se relacionan linealmente.

Tabla 19

*Resultados del análisis de varianza para la regresión lineal simple de las variables el razonamiento algebraico y la idoneidad afectiva.*

| | Grados de libertad | Suma de cuadrados | Promedio de los cuadrados | F | Valor crítico de F |
|---|---|---|---|---|---|
| **Regresión** | 1 | 156,89 | 156,89 | 7,29 | 0,01 |
| **Residuos** | 42 | 904,02 | 21,52 | | |
| **Total** | 43 | 1060,91 | | | |

Fuente: Anexos 4 y 5.

**Discusión de resultados**

La resolución de cualquier problema matemático lleva asociada una situación afectiva para el sujeto implicado, quien pone en juego no solamente prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino también moviliza creencias, actitudes, emociones o valores que condicionan en mayor o menor grado y diferente sentido la respuesta cognitiva requerida.

Los objetos y procesos afectivos son usualmente considerados como entidades psicológicas, que refieren a estados o rasgos mentales más o menos estables, o a disposiciones para la acción de los sujetos individuales. Pero desde el punto de vista educativo el logro de unos estados afectivos que interaccionen positivamente con el dominio cognitivo tienen que ser objeto de consideración por parte de las instituciones educativas, y, en particular, por el profesor. El dominio afectivo conlleva, por tanto, una faceta institucional y se concreta en normas de índole afectivo que condicionan el trabajo del profesor.

## 4.5. Relación entre Razonamiento Algebraico y la Idoneidad Interaccional

En este numeral se presenta los resultados del estudio correlacional entre el razonamiento algebraico y la idoneidad interaccional.

### 4.5.1. Modelo de regresión que modela la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad interaccional

Dada la dispersión de los datos que se visualiza en la figura 12, permite intuir que el modelo de regresión lineal que se intenta aplicar para demostrar la relación entre las variables es posible, tal como se ha demostrado con la interpretación del coeficiente de determinación, así mismo, los parámetros del modelo nos dejan percibir que si existe una relación directa tal como lo evidencia la ecuación:

$$y = 0{,}77x + 15{,}42$$

Tabla 20
*Parámetros del modelo de regresión lineal de las variables razonamiento algebraico e idoneidad interaccional.*

| | Coeficientes | Error típico | Estadístico t |
|---|---|---|---|
| Intercepción | 15,42 | 2,79 | 5,53 |
| Variable X 1 | 0,77 | 0,14 | 5,69 |

Fuente: Anexos 4 y 5

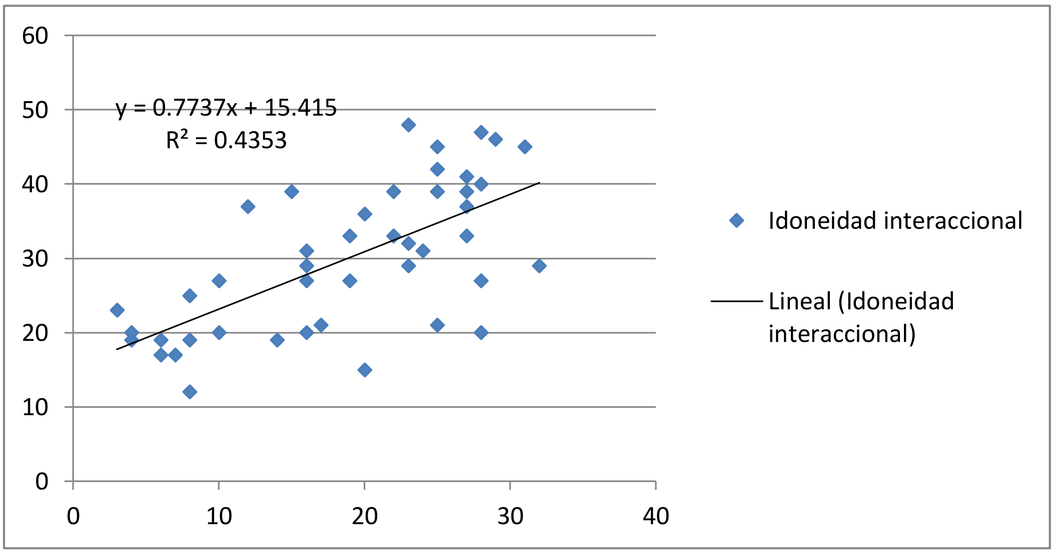



*Figura 12.* Diagrama de dispersión y recta de regresión de las variables razonamiento algebraico e idoneidad interaccional.

**Coeficiente de determinación**

El valor del coeficiente de determinación $r^2$ para el estudio es 0,44, lo que significa que aproximadamente el 44% de la variación total de la idoneidad interaccional se explica por la ecuación de regresión.

Tabla 21
*Resumen de las estadísticas de la regresión entre el razonamiento algebraico y la idoneidad interaccional.*

| Estadísticas de la regresión | Total |
|---|---|
| Coeficiente de correlación | 0,66 |
| Coeficiente de determinación R^2 | 0,44 |
| R^2 ajustado | 0,42 |
| Error típico | 7,53 |
| Observaciones | 44 |

Fuente: Anexos 4 y 5.

### 4.5.2. Coeficiente de correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson que analiza la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad interaccional es $r = 0{,}66$ lo que significa una correlación positiva considerable.

**Prueba t para demostrar la significatividad de la relación**

Ahora se debe verificar si este valor de r es lo bastante grande como para indicar que las variables razonamiento algebraico e idoneidad interaccional están relacionadas significativamente, es necesario probar la hipótesis:

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho \neq 0$$

El valores críticos de la distribución t de student (tabulada) para α=0,05 con grados de libertad 44-2=42 es 2,021, y como éste es menor que el valor observado de $t = 5{,}69$, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que las puntuaciones obtenidas por los profesores en el razonamiento algebraico y la idoneidad interaccional se encuentra significativamente correlacionada.

**Análisis de Varianza**

Para probar directamente la existencia de linealidad entre las variables se usa el análisis de varianza. Sean las hipótesis:

$H_0$: El razonamiento algebraico y la idoneidad interaccional no se relacionan linealmente.

$H_1$:El razonamiento algebraico y la idoneidad interaccional están relacionados linealmente.

Con $\alpha$=0,05

En vista que 32,37es mayor que 4,08, valor crítico de F para uno y 42 grados de libertad, entonces, se concluye que existe evidencias significativas de que las puntuaciones en el razonamiento algebraico y la idoneidad interaccional se relacionan linealmente.

Tabla 22
*Resultados del análisis de varianza para la regresión lineal simple de las variables el razonamiento algebraico y la idoneidad interaccional.*

| | Grados de libertad | Suma de cuadrados | Promedio de los cuadrados | F | Valor crítico de F |
|---|---|---|---|---|---|
| **Regresión** | 1 | 1837,10 | 1837,10 | 32,37 | 1,1E-06 |
| **Residuos** | 42 | 2383,33 | 56,75 | | |
| **Total** | 43 | 4220,43 | | | |

Fuente: Anexos 4 y 5.

**Discusión de resultados**

La importancia del discurso, el diálogo, la conversación en la clase es resaltada por diversos autores: “La naturaleza del discurso matemático es una característica central de la práctica de la clase. Si aceptamos seriamente que los profesores necesitan oportunidades para aprender a partir de su práctica, el desarrollo de conversaciones matemáticas permite a los profesores aprender continuamente de sus estudiantes. Las conversaciones matemáticas que se centran sobre las ideas de los estudiantes pueden proporcionar a los profesores una ventana sobre el pensamiento de los estudiantes en modos que el trabajo individual de los estudiantes no lo permite” (Frankle, Kazemi y Battey (2007, p. 237).

En el marco de la Educación Matemática Realista se asume un principio de interacción, según el cual, la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión. Los estudiantes, en lugar de ser receptores de una matemática ya elaborada, son considerados como participantes activos del proceso de enseñanza - aprendizaje, en el que ellos mismos desarrollan herramientas y comprensiones, y comparten sus experiencias unos con otros. La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los métodos formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005, p. 290).

Uno de los principios fundamentales de Freudenthal (1991) para la educación matemática es que se debe dar a los estudiantes una “oportunidad guiada” de "reinventar" las matemáticas. Esto implica que, en la EMR, tanto los profesores como los programas educativos tienen un papel fundamental en cómo los estudiantes adquieren los conocimientos. Ellos dirigen el proceso de aprendizaje, pero no de una manera fija mostrando lo que los estudiantes tienen que aprender. Esto estaría en contradicción con el principio de actividad y daría lugar a comprensiones falsas.

Por el contrario, los estudiantes necesitan espacio y herramientas para la construcción de conocimientos matemáticos por sí mismos. Con el fin de alcanzar este estado deseado, los profesores tienen que proporcionar a los alumnos un ambiente de aprendizaje en el que el proceso de construcción pueda surgir. Uno de los requisitos es que los profesores deben ser capaces de predecir dónde y cómo se pueden anticipar las comprensiones y habilidades de los estudiantes que están emergiendo.

### 4.6. Relación entre Razonamiento Algebraico y la Idoneidad Mediacional

En este apartado se discute la existencia de la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad mediacional, esta última, entendida como el manejo de los recursos materiales y la organización de los alumnos y el manejo del tiempo. Como era de suponerse, no se visualiza relación alguna entre las variables. A continuación se presenta los resultados del análisis estadístico que confirma estas aseveraciones.

#### 4.6.1. Modelo de regresión que modela la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad mediacional

Dada la dispersión de los datos que se visualiza en la figura 13, permite intuir que el modelo de regresión lineal que se intenta aplicar para demostrar la relación entre las variables no es posible, tal como se ha demostrado con la interpretación del coeficiente de determinación, así mismo, los parámetros del modelo nos dejan percibir que si existiera una relación sería indirecta tal como lo evidencia la ecuación:

$$y = -0{,}13x + 37$$

Tabla 23

*Parámetros del modelo de regresión lineal de las variables razonamiento algebraico e idoneidad mediacional.*

| | Coeficientes | Error típico | Estadístico t |
|---|---|---|---|
| Intercepción | 37,00 | 3,77 | 9,83 |
| Variable X 1 | -0,13 | 0,18 | -0,71 |

Fuente: Anexos 4 y 5.

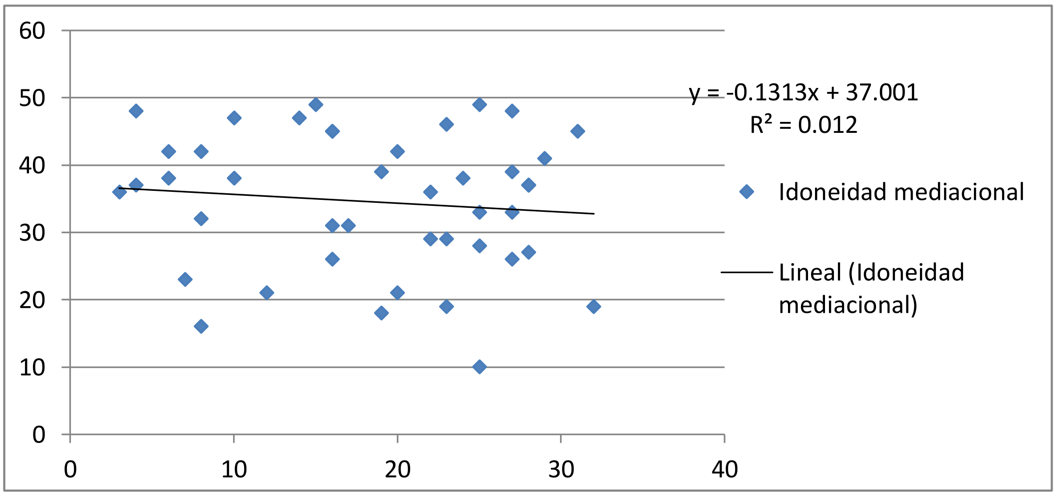



*Figura 13*. Diagrama de dispersión y recta de regresión de las variables razonamiento algebraico e idoneidad mediacional.

**Coeficiente de determinación**

De acuerdo con la información de la tabla 4.17 el valor del coeficiente de determinación $r^2$ para el estudio es 0,012 lo que significa que **apenas** aproximadamente el 1,2% de la variación total de la idoneidad mediacional se explica por la ecuación de regresión.

Tabla 24
*Resumen de las estadísticas de la regresión entre el razonamiento algebraico y la idoneidad mediacional.*

| **Estadísticas de la regresión** | **Total** |
|---|---|
| Coeficiente de correlación | 0,11 |
| Coeficiente de determinación R^2 | 0,012 |
| R^2  ajustado | -0,01 |
| Error típico | 10,18 |
| Observaciones | 44 |

Fuente: Anexos 4 y 5.

### 4.6.2. Coeficiente de correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson que analiza la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad mediacional es $r = 0{,}11$ lo que significa una correlación muy débil casi inexistente. Eso significa que, el razonamiento algebraico de docente de educación primaria no está determinado o relacionado con su capacidad para organizar los medios y recursos didácticos y la organización de los estudiantes en el aula.

**Prueba t para demostrar la significatividad de la relación**

Ahora se debe verificar si este valor de $r$ es lo bastante grande, en nuestro caso, lo bastante suficiente como para indicar que las variables razonamiento algebraico e idoneidad mediacional están relacionadas significativamente, para tal efecto es necesario probar la hipótesis:

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho \neq 0$$

El valores críticos de la distribución $t$ de student (tabulada) para α=0,05 con grados de libertad 44-2=42 es 2,021, y como éste es mayor (no es menor) que el valor observado de $t = 0{,}71$, no se puede rechaza la hipótesis nula y se concluye que las puntuaciones obtenidas por los profesores en el razonamiento algebraico y la idoneidad mediacional no se encuentra significativamente correlacionada.

**Análisis de Varianza**

Para probar directamente la existencia de linealidad entre las variables se usa el análisis de varianza. Sean las hipótesis:

$H_0$: El razonamiento algebraico y la idoneidad mediacional no se relacionan linealmente.

$H_1$: El razonamiento algebraico y la idoneidad mediacional están relacionados linealmente.

Con α=0,05

En vista que 0,51(tabla 4.18) es menor que 4,08, valor crítico de $F$ para uno y 42 grados de libertad, entonces, se concluye que no existe evidencia significativas de que las puntuaciones en el razonamiento algebraico y la idoneidad mediacional se relacionan linealmente.

Tabla 25

*Resultados del análisis de varianza para la regresión lineal simple de las variables el razonamiento algebraico y la idoneidad mediacional.*

| | Grados de libertad | Suma de cuadrados | Promedio de los cuadrados | F | Valor crítico de F |
|---|---|---|---|---|---|
| **Regresión** | 1 | 52,89 | 52,89 | 0,51 | 0,48 |
| **Residuos** | 42 | 4356,02 | 103,71 | | |
| **Total** | 43 | 4408,91 | | | |

Fuente: Anexos 4 y 5.

**Discusión de resultados**

Se entiende la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El uso apropiado de la tecnología es uno de los principios formulados por el NCTM (2000, p.24), indicándose, “La tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este medio puede influenciar positivamente en lo que se enseña y, a su vez, incrementar el aprendizaje de los estudiantes”. Esta organización profesional sostiene que la tecnología es una herramienta esencial para el aprendizaje matemático en el siglo 21, y todas las escuelas deben asegurar que todos sus estudiantes tienen acceso a la tecnología. Los profesores efectivos maximizan el potencial de la tecnología para desarrollar la comprensión de los estudiantes, estimular su interés, e incrementar su proficiencia en matemáticas. Cuando la tecnología se usa estratégicamente, puede proporcionar acceso a las matemáticas para todos los estudiantes”. Se considera, así mismo, que las calculadoras y demás herramientas tecnológicas, como sistemas de cálculo algebraico, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo y dispositivos de presentación interactiva, son componentes vitales de una educación matemática de alta calidad.

## CONCLUSIONES

- Las consideraciones finales de esta investigación se presentan a partir del objetivo general de la investigación el cual es "establecer la naturaleza de la relación entre la capacidad de razonamiento algebraico, con la idoneidad didáctica que ostentan los docentes del V ciclo del nivel de educación básica regular de la ciudad de Puno -2016, y finalmente una apreciación personal como maestra en actividad sobre el proceso mismo de la investigación.
- Se ha podido establecer a través del modelo de regresión simple que hay una relación positiva entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, todo esto en razón a los datos y/o resultados obtenidos en el transcurso de la tabulación de datos recogidos durante la investigación, los mismos que se puede visualizar en los gráficos y tablas presentados en la parte de resultados del trabajo de investigación.
- Se ha podido determinar la relación existente entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, el cual es realmente de naturaleza lineal, siendo importante considerar que esta investigación permitió conocer a través de los datos obtenidos durante el trabajo de investigación de la población de docentes participantes, donde además a través de la tabulación se tiene un alto grado de relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica.
- Finalmente cabe añadir que esta investigación nos deja las puertas abiertas para profundizar en estudios acerca del estado de la formación de maestros en el campo del Razonamiento Algebraico y la Idoneidad Didáctica de Enfoque Ontosemiotico siendo este una propuesta validada y demostrada a través muchos trabajos de

investigación, logrando así fomentar transformaciones en las prácticas de enseñanza y aprendizaje del algebra elemental en Educación Primaria.

**RECOMENDACIONES**

- Dentro de un trabajo de investigación tan ambicioso como lo fue este, siempre se desea que haya una mejora continua del mismo; por lo tanto se recomienda a futuros profesionales que tengan interés en el proyecto, hacer tal vez el mismo trabajo u otro similar para poder hacer comparaciones entre los resultados obtenidos por estas, con el único objetivo de lograr mejores aprendizajes, y desarrollo de capacidades matemáticas en los estudiantes de la Región Puno, y porque no a nivel Nacional.
- A las autoridades educativas y docentes poner mayor interés en difundir a través de capacitaciones con profesionales conocedores del tema, específicamente sobre la propuesta de las idoneidades didácticas del enfoque ontosemiotico para el desarrollo adecuado del razonamiento algebraico en educación básica regular, adaptando el sistema a las necesidades matemáticas relacionadas con el álgebra, es entonces que se recomienda que los planes anuales de trabajo, el proyecto de desarrollo institucional, y la planificación curricular anual de las instituciones educativas del nivel primario estén orientadas al desarrollo del razonamiento algebraico y respondan a un álgebra introductoria o de iniciación que preparen a los estudiantes para el estudio formal del álgebra en el V ciclo de educación básica regular, con docentes que manejen de manera adecuada las 6 idoneidades didácticas del enfoque ontosemiotico.
- De los resultados se puede desprender la necesidad de los docentes por conocer amplia y necesariamente sobre las idoneidades didácticas de enfoque ontosemiotico, para lo cual se debe diseñar programas para docentes que posean alta predisposición por aprender y/o conocer sobre el tema, y ser entrenados en el

manejo y uso adecuado en una sesión de aprendizaje para con los estudiantes de educación básica regular.

- Continuar desarrollando investigaciones dirigidas a conocer las diferentes variables de la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, fomentando y haciéndolas propias a su desarrollo con el único objetivo de lograr mejores desempeños en aula para con sus estudiantes.

## BIBLIOGRAFÍA

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del Razonamiento Algebraico elemental en maestros en formación* (Tesis doctoral). Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf.

Aké, L. Godino, J. y Gonzato, M. (2013, Marzo). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. *Unión Revista iberoamericana de Educación Matemática*, (33), 39-52. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/eos/Ake_Godino_Gonzato%20UNION_2013.pdf

Aké, L., Godino, J., Neto, T. & Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*. 25-48. 10.35763/aiem.v1i5.70.

Behr, M. y Harel, G. (1990) Understanding the Multiplicative Structure In G. Booker, P. Cobb, & T.N. de Merldicutti (Eds.) *Proceedings of the PME XIV Conference (27-34*). México: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Gobierno del Estado de Morelos. Recuperable en: http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/90_1.html.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21* (3), 247- 304.

Bressan, A. y Gallego, M. F. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. *Correo del maestro*, (168), 5-21.

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Matbémetiques*, *4*(2) ,165-198.

Camacho, M. & Santos, M. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas. *Números*,(58), 45-60.

Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/58/Articulo03.pdf

Callejo, M. L., Fernández, C., Sánchez, G., Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.

Callejo, M. L., Camacho, M., Cantoral, R., Carrillo, J., García, G.; Godino, J. D., Santos-Trigo, M. (2015). *Avances y realidades de la educación matemática.* Barcelona, España.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Carraher, D.W., Martinez, M. V. y Schliemann. A.D. (2008). *Early algebra and mathematic algeneralization*. ZDM,(40),3-22.

Carrillo, J., (1998). *La resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Ejemplificaciones del para qué*. En: Epsilon. San Fernando (Cádiz, España). No. (40), 15-26.

Chamorro M. y Vecino, F. (2003). El tratamiento y la resolución de problemas. En: M. Chamorro. (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. (pp. 273-299). Madrid: Pearson Educación.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Desing experiment in Educational Research. *Educational Researcher,* 32(1), 9-13.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, en Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds.). Handbook of design research methods in education. *Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, 68-95. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Coronel, M. y Curotto, M. (2008).La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*,7 (2), 463-479.

Dörfler, W. (1991). 'Forms and means of generalization in mathematics'. In A.J. Bishop (Ed.), *Mathematical Knowledge: Its Growth through Teaching* (63–85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (1991). Advanted Mathematical Thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (25-41). Netherlands: Kluwer.

Franke, Kazemi, & Battey (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics*

*Teaching and Learning*. Recuperable en http://www.infoagepub.com/products/Second-Handbook-Research-Mathematics-Teaching-Learning

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Kluver Academia Publishers. Netherlands.

Godino, J. D. (2002). *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.(61)1,8 (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/*)*

Godino J., Batanero C. y Font V. (2007). *The ontosemiotic approach to research in mathematics education*. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico elemental. *BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.

Godino, J., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). *Didactic engineering as design-based research in mathematics education*. Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8, WG 16). Turkey, 2013. (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/Godino_CERME_2013.pdf).

Godino, J., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). *Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas.* REVEMAT, 8, (1), 46-74.

Godino, J. (2014). *Síntesis del enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Universidad de Granada.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. *Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias*, 32 (1), 199 – 219.

Halmos, R. (1980). The heart of mathematics. *American mathematical monthly*, (87), 519-524.

Hernandez, R., Fernandez, C., & Baptista, P.(2010). Metodología de la investigación (5a ed.). México: Mc Graw Hill.

Kaput, J. (1998). Teaching and Learning a new algebra with understanding. Dartmouth, Massachusetts: *National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.*

Kaput, J. (1999). 'Teaching and learning a new algebra'. En E. Fennema and T. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (133–155). Erlbaum, Mahwah, NJ.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput. J., Blanton, M. (2001). Student Achievement in Algebraic Thinking: *A Comparison of 3rd Graders' Performance on a State 4th Grade Assessment.* 99-107.

Kieran, C. (1989). A Perspective on Algebraic Thinking. In G Vernand, J., Rogalski, & M. Artigue (Eds). *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (2)163-171. Paris.

Kilpatrick J. (1981). *"The Reasonable Ineffectiveness of Research in Mathematics Education",* For the Learning of Mathematics, 2(2) 22- 29.

Kilpatrick, J. (1987). *What constructivism might be in mathematics education?* Proc. 11th Conference PME. Montreal, 3-23.

Mason J, Burton L. & Stacey K. (1982). *Pensar matemáticamente.* España: Labor S.A

Mason, J. (1991). Supporting primary mathematics: Algebra. Milton Keynes, UK: Open University Press.

Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. Revista EMA, 4(3), 232-246

Ministerio de Educación. (2017). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Currículo Nacional de Educación Básica, Perú.

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas*. Perú.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. (Tesis doctoral). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/544/>.

Molina, M. (2009). *Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria.* PNA. Recuperado de http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Molina2009PNA3(3)Unapropuesta.pdf.

Mora, L. (2012). *Álgebra en primaria*. Programa de Transformación de la Calidad Educativa del MEN en convenio con la Universidad Pedagógica Nacional.

NCTM (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Primera edición en castellano. Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Thales. Sevilla.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester , Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (763-804). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Radford, L. (2014). *The progressive development of early embodied algebraic thinking*. Mathematics Education Research Journal, (26) 257-277.

Santos, M. (2008). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica*. Investigação em educação matemática XII. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportes de la Investigación. *NÚMEROS, 77(Julio), 5-34.*

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20(2), 147-164.*

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 37, 287–307.

Zaskis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49(3), 379-402.*

# ANEXOS

**Anexo 1.** Ficha de auto percepción de la idoneidad didáctica.

<table>
<tr><th colspan="4">FICHA DE AUTO PERCEPCIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA</th></tr>
<tr><th colspan="2">NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA</th><th>GRADO</th><th>SECCIÓN</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th rowspan="2">DOCENTE OBSERVADO</th><th>NOMBRES</th><th colspan="2">APELLIDOS</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

**Definición de Idoneidad Didáctica**

La idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza aprendizaje se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Es una herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva a otra prescriptiva al proporcionar un sistema de criterios de intervención sobre los cuales existe un consenso en la comunidad de educación matemática.

1. **Idoneidad epistémica:** se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
2. **Idoneidad ecológica,** grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.
3. **Idoneidad cognitiva,** expresa el grado en que los significados pretendidos e implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
4. **Idoneidad afectiva:** grado de implicación (intereses, emociones, actitudes y creencias) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
5. **Idoneidad interaccional**: Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de enseñanza aprendizaje.
6. **Idoneidad mediacional,** grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.

**Anexo 2.** Ficha de evaluación de la idoneidad didáctica.

| N° | Idoneidad Epistémica o Matemática | ESCALA DE VALORACIÓN | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *1* | **Situaciones-problemas**<br>Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones-problemas que permitan contextualizar, ejercitar, aplicar y generalizar el conocimiento matemático, los cuales proceden de la propia matemática y de otros contextos. | | | | | |
| *2* | Se proponen situaciones de generación de problemas | | | | | |
| *3* | **Lenguajes**<br>Se usa un amplio repertorio de representaciones (materiales, icónicas y simbólicas) para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas. | | | | | |
| *4* | Se favorece que los estudiantes construyan, perfeccionen y usen sus propias representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas. | | | | | |
| *5* | El nivel del lenguaje usado es adecuado a los estudiantes a que se dirige. | | | | | |
| *6* | **Reglas** (Definiciones, propiedades, procedimientos)<br>Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen | | | | | |
| *7* | Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado | | | | | |
| *8* | Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar y generalizar definiciones, propiedades y procedimientos | | | | | |
| *9* | **Argumentos**<br>Se favorece el razonamiento y la prueba de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba. | | | | | |
| *10* | Logra que los estudiantes formulen con frecuencia conjeturas sobre relaciones matemáticas, las investigan y justifican. | | | | | |
| *11* | Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen. | | | | | |
| *12* | **Relaciones**<br>Se favorece el establecimiento y el uso de conexiones entre las ideas matemáticas (problemas, representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos) | | | | | |
| *13* | Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas. | | | | | |
| *14* | Los contenidos matemáticos se aplican y relacionan con los contenidos de otras disciplinas. | | | | | |
| *15* | Los contenidos matemáticos se presentan y estudian como un todo organizado | | | | | |
| | TOTAL | | | | | |

| N° | IDONEIDAD COGNITIVA | ESCALA DE VALORACIÓN | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *1* | **Conocimientos previos** (Se tienen en cuenta los mismos elementos que en la idoneidad epistémica)<br>Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) | | | | | |
| *2* | Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar en sus diversas componentes (tienen una dificultad manejable) | | | | | |
| *3* | **Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales**<br>Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo | | | | | |
| *4* | Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes | | | | | |
| *5* | **Aprendizaje** (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos)<br>Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia): | | | | | |
| *6* | Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y<br>argumentativa; fluencia procedimental; competencia metacognitiva (planificación, control, evaluación, análisis-síntesis) | | | | | |
| *7* | La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia | | | | | |
| *8* | Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones. | | | | | |
| | *TOTAL* | | | | | |

| N° | IDONEIDAD INTERACCIONAL | ESCALA DE VALORACIÓN | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *1* | **Interacción docente-discente**<br>El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) | | | | | |
| *2* | Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) | | | | | |
| *3* | Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento | | | | | |
| *4* | Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. | | | | | |
| *5* | Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase | | | | | |
| *6* | **Interacción entre discentes**<br>Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes | | | | | |
| 7 | Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos | | | | | |
| 8 | Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión | | | | | |
| 9 | **Autonomía**<br>Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos) | | | | | |
| 10 | **Evaluación formativa**<br>Se realiza una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos usando técnicas variadas y pertinentes. | | | | | |
| | TOTAL | | | | | |

| N° | IDONEIDAD MEDIACIONAL | ESCALA DE VALORACIÓN | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *1* | **Recursos materiales** (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)<br>Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido | | | | | |
| *2* | Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones | | | | | |
| *3* | **Número de alumnos, horario y condiciones del aula**<br>El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida | | | | | |
| *4* | El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora) | | | | | |
| *5* | El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido | | | | | |
| | TOTAL | | | | | |

| N° | IDONEIDAD AFECTIVA | ESCALA DE VALORACIÓN | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *1* | Intereses y necesidades:<br>Las tareas tienen interés para los estudiantes. | | | | | |
| *2* | Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional | | | | | |
| *3* | **Actitudes:**<br>Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad en el trabajo en equipo. | | | | | |
| *4* | Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice. | | | | | |
| *5* | Se incentiva la perseverancia y el trabajo sistemático. | | | | | |
| *6* | **Emociones:**<br>Se promueve la autoestima y seguridad en sí mismo para realizar tareas matemáticas (evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas). | | | | | |
| *7* | Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas. | | | | | |
| | *TOTAL* | | | | | |

| N° | Idoneidad Ecológica | ESCALA DE VALORACIÓN | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *1* | **Adaptación al currículo**<br>Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares | | | | | |
| *2* | **Apertura hacia la innovación didáctica**<br>Se realizan y promueven procesos de innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva | | | | | |
| *3* | Se integra el uso de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo | | | | | |
| *4* | **Adaptación socio- profesional y cultural**<br>Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes | | | | | |
| *5* | **Educación en valores**<br>Se contempla la formación en valores democráticos (respeto por la diversidad, tolerancia, integración, cooperación...) y se dan oportunidades para que los estudiantes realicen cuestionamientos a lo aparentemente evidente o dado como natural ( pensamiento crítico) | | | | | |
| *6* | **Conexiones intra e interdisciplinares**<br>Los contenidos (conceptos, procedimientos, …) se relacionan entre sí mostrando las estructuras que los organizan. | | | | | |
| *7* | Se reconocen y aplican las ideas matemáticas en contextos no matemáticos de la vida cotidiana. | | | | | |
| | *TOTAL* | | | | | |

**Anexo 3.** Ficha de prueba sobre el álgebra escolar (educación primaria)

| PRUEBA SOBRE EL ÁLGEBRA ESCOLAR (EDUCACIÓN PRIMARIA) | | | |
|---|---|---|---|
| **NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA** | | **GRADO** | **SECCIÓN** |
| | | | |
| **DOCENTE EVALUADO** | **NOMBRES** | **APELLIDOS** | |
| | | | |

Señor docente mediante esta prueba se pretende valorar sus conocimientos para resolver problemas de álgebra escolar de educación primaria. Se recomienda que todos los cálculos y procesos de resolución se desarrollen en los espacios designados para ese fin. Los animo a resolver las situaciones, con la certeza que tendrá éxito. ¡Adelante!

1) Una fábrica modificó sus procedimientos de producción. Después de eso, el costo de fabricar un producto fue de 37,40 soles, que es 15% inferior al costo antes de que los procedimientos de producción fueran modificados. ¿Cuál fue el costo de fabricar el mismo producto antes de modificar los procedimientos de producción? (30)

2) Raúl y Sandra compartieron S/. 410 entre ellos. Raúl recibió S/. 100 más que Sandra. ¿Cuánto dinero recibió Sandra? (33)

3) Encontrar los números que falta en la relación establecida

| | | |
|---|---|---|
| 1 | → | 97 |
| 2 | → | 199 |
| 3 | → | 2101 |
| 4 | → | 3103 |
| 5 | → | 4105 |
| 6 | → | $\boxed{\phantom{0000}}$ |
| 7 | → | 6109 |
| 8 | → | 7111 |
| 9 | → | $\boxed{\phantom{0000}}$ |

4) Problema de muebles: En una compra, la señora Tania gastó S/. 530 en una mesa, una silla y una plancha. La silla costó S/. 60 más que la plancha. La mesa costó S/. 80 más que la silla. ¿Cuánto costó la silla? (36)

5) Si pongo m = 2 en esta primera expresión: [13 × m - 7 - 8 × 4 + m], encontrar el valor correspondiente.

6) Y luego pongo m = 2 en la expresión siguiente [13 × m - 7 - 8 × m + 4], encontrar el valor correspondiente. (104)

7) Sally tiene una fiesta. (37)
La primera vez que suena el timbre, entra 1 invitado.
La segunda vez que suena el timbre, entran 3 invitados.
La tercera vez que suena el timbre, entran 5 invitados.
La cuarta vez que suena el timbre, entran 7 invitados.
Los invitados siguen llegando de la misma manera. La siguiente vez que tocan el timbre, entra un grupo que tiene 2 personas más que el grupo que entró la vez anterior.

a. ¿Cuántos invitados entrarán cuando el timbre suene 10 veces? Explique o muestre cómo encontró su respuesta.
b. 99 invitados entraron en la ocasión final. ¿Qué anillo era? Explique o muestre cómo encontró su respuesta.
c. Escribir una regla o describir con palabras cómo encontrar el número de invitados que entran cada vez que tocan el timbre.

8) Resolver las ecuaciones: (105)

$$8\times x + 12 + 6\times x = 24 + 12\times x - 2 + 6$$

9) El área de un rectángulo es 120 centímetros cuadrados, y un lado es 16 centímetros. ¿Cuánto mide el otro lado? (127)

10) Algunos alumnos reunieron 1800 kilogramos de semillas de papa y de camote. Había cinco veces más semillas de camote recolectadas que semillas de papa. ¿Cuántos kilogramos de semillas de cada tipo se recolectaron? (128)

11) Completar los siguientes espacios en blanco de los dos ejercicios: (156)

Tarea 1:

$7 + \square = 9 + \square$

$52 + \square = 54 + \square$

$1.9 + \square = 2 + \square$

$5 + n = 2 + \square$

$\square + 28 = n + 30$

$50 + (n + 2) = \square + n$

$x + 9 = (x - 3) + \square$

Tarea 2:

$55 - 34 = 56 - \square$

$40 - \square = 38 - 21$

$\square - 5 = 43 - 3$

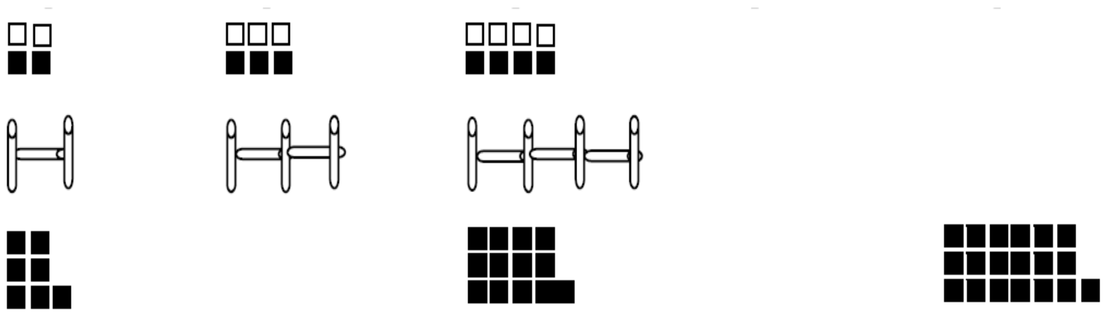
$n - 67 = (\quad\quad) - 70$

$40 - p = 50 - (\quad\quad)$

$14 - n = 15 - (\quad\quad)$

$20 - (\quad\quad) = 15 - m$

12) Patrones típicos de crecimiento: Completar los espacios vacíos que completan la sucesión. (197)

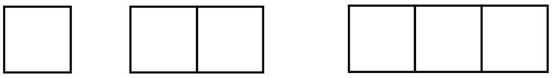


13) Una tienda con muchas ofertas permite a cualquier cliente que compre mercancía que cuesta más de $ 30 a pagar en un plan de cuotas. El cliente paga $ 30 al inicio y luego paga $ 15 al mes hasta que el artículo se paga. Supongamos que usted compra un Televisor de 195 dólares en un plan de cuotas, ¿Cuántos meses tardará en pagar por el Televisor? Describa cómo encontró su respuesta. (167)

14) Antony se unió a un club de libros en el que recibió 5 libros por 1 soles. Después de eso, recibió 2 libros al mes, por lo que tuvo que pagar 89.5 soles cada mes. Hasta el momento, ha pagado al club de libros $ 1969.1. ¿Cuántos libros ha recibido? (248)

15) ¿El número que va en el □ mismo número en las siguientes dos ecuaciones? Explique su razonamiento. (263) × □ +15 = 31     2× □ +15− 9 = 31−9

Considere la siguiente sucesión;



a. ¿Cuántos palillos de fósforos tendrán la quinta posición? Dibujar y explicar.

b. ¿Cuántos palillos tendrá el patrón 15? Explique.

c. Encuentre una fórmula directa para el número total de palitos T en cualquier número de posición, es decir, en la posición *n-ésima*. Explica cómo obtuviste tu respuesta.

d. Si obtuvo su fórmula numéricamente, ¿qué podría significar si piensas en términos de la posición anterior?

e. Si la sucesión de palitos de fósforos se extiende sobre varios casos más, un término de la sucesión se forma utiliza 76 palitos en total. ¿Qué número de posición es? Explica cómo obtuviste tu respuesta.

**f.** La fórmula Diana es la siguiente: $T = 4 \cdot n - (n - 1)$. ¿Su fórmula es correcta? ¿Por qué si o por qué no? Si su fórmula es correcta, ¿cómo habrá razonado ella? ¿Quién tiene la fórmula más correcta, la fórmula de Diana o la fórmula que usted obtuvo anterior? Explique.

**Anexo 4.** Matriz de Consistencia de la Investigación Propuesta

*El razonamiento algebraico y su relación con la idoneidad didáctica de los docentes del v ciclo de educación básica regular de la ciudad de Puno-* **2016**

| Planteamiento del problema | Hipótesis | Objetivos | Variables | Métodos | Estadística |
|---|---|---|---|---|---|
| **Problema General**<br>¿Cómo se relaciona la capacidad de razonamiento algebraico, con la idoneidad didáctica que ostentan los docentes del V ciclo de nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno -2016?<br>**Problemas Específicos**<br>- ¿Qué modelo de regresión simple evalúa la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno?<br>- ¿Qué grado de relación existe entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno?<br>- ¿Si existe una relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es lo bastante grande como para afirmar que la relación es significativa?<br>- ¿Dada la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es realmente de naturaleza lineal? | **Hipótesis General**<br>A mayor capacidad de razonamiento algebraico corresponde mayor idoneidad didáctica de los profesores del V ciclo de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno-2016.<br>**Hipótesis Específicas.**<br>- El modelo de regresión que evalúa la relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es lineal simple y directa.<br>- El grado de relación que existe entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es relativamente alta.<br>- La relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es lo bastante grande como para afirmar que la relación es significativa.<br>- La relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es de naturaleza lineal. | **Objetivo General**<br>Establecer la naturaleza de la relación entre la capacidad de razonamiento algebraico, con la idoneidad didáctica que ostentan los docentes del V ciclo del nivel Educación Básica Regular de la ciudad de Puno -2016<br>**Objetivos Específicos**<br>- Determinar el modelo de regresión simple que evalúa la forma que guarda relación el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno.<br>- Determinar el grado de asociación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno.<br>- Probar que el grado de relación entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es lo bastante grande como para afirmar que la relación es significativa.<br>- Determinar si la relación existente entre el razonamiento algebraico y la idoneidad didáctica, de los profesores del V ciclo del nivel de Educación Básica Regular de la ciudad de Puno, es realmente de naturaleza lineal | Conocimiento disciplinar de razonamiento algebraico.<br><br>Idoneidad didáctica. | Enfoque: mixto.<br>alcance o tipo: Correlacional<br>Diseño: transversal Correlacional descriptivo.<br>Estudio cualitativo.<br>a) estudio preliminar.<br>b) diseño del experimento.<br>c) implementación del experimento.<br>d) evaluación o análisis retrospectivo. | población profesores de la ciudad de Puno que ejercen la docencia en el v ciclo de educación básica regular |

**Anexo 5**. Resultado de la Prueba de Razonamiento Algebraico.

| Nº | Código | Institución Educativa Primaria | Sexo | Problemas de la Prueba de Razonamiento Algebraico | | | | | | | | | | | | | | | Total Razonamiento Algebraico |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | |
| 1 | Prof 1 | 70009 | F | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 23 |
| 2 | Prof 2 | 70116 | F | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 31 |
| 3 | Prof 3 | 70024 | F | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 27 |
| 4 | Prof 4 | 70009 | F | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 7 |
| 5 | Prof 5 | 70038 | F | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 6 | Prof 6 | 70003 | F | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 27 |
| 7 | Prof 7 | 70038 | M | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 16 |
| 8 | Prof 8 | 70003 | M | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 25 |
| 9 | Prof 9 | 70117 | M | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| 10 | Prof 10 | 70009 | F | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 28 |
| 11 | Prof 11 | 70009 | F | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 28 |
| 12 | Prof 12 | 70166 | M | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 24 |
| 13 | Prof 13 | 70003 | F | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 23 |
| 14 | Prof 14 | 70117 | F | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 25 |
| 15 | Prof 15 | 70064 | F | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 16 | Prof 16 | 70133 | F | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 4 |
| 17 | Prof 17 | 70117 | M | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 15 |
| 18 | Prof 18 | 70009 | M | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 12 |
| 19 | Prof 19 | 70009 | F | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 28 |
| 20 | Prof 20 | 70091 | F | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 8 |
| 21 | Prof 21 | 70009 | F | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 16 |
| 22 | Prof 22 | 70803 | F | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 28 |
| 23 | Prof 23 | 70117 | M | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 16 |
| 24 | Prof 24 | 70009 | F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 25 | Prof 25 | 71001 | F | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 25 |
| 26 | Prof 26 | 70009 | F | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 6 |
| 27 | Prof 27 | 70091 | F | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 10 |
| 28 | Prof 28 | 70142 | F | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 32 |
| 29 | Prof 29 | 70091 | F | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 14 |
| 30 | Prof 30 | 70142 | F | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 27 |
| 31 | Prof 31 | 70117 | F | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 22 |
| 32 | Prof 32 | 70119 | M | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 4 | 17 |
| 33 | Prof 33 | 71001 | F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 20 |
| 34 | Prof 34 | 71003 | F | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 10 |
| 35 | Prof 35 | 70117 | F | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 3 | 16 |
| 36 | Prof 36 | 70081 | F | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 20 |
| 37 | Prof 37 | 70757 | M | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 8 |
| 38 | Prof 38 | 70136 | F | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 22 |
| 39 | Prof 39 | 70117 | F | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 19 |
| 40 | Prof 40 | 70038 | M | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 25 |
| 41 | Prof 41 | 70009 | F | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 29 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 42 | Prof 42 | 71001 | M | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 23 |
| 43 | Prof 43 | 71003 | M | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 19 |
| 44 | Prof 44 | 71004 | M | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 27 |

**Anexo 6**. Resultado de la Valoración de la Idoneidad Didáctica en sus Seis Facetas.

| Nº | Código | Institución Educativa Primaria | Sexo | Facetas de la Idoneidad Didáctica | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Epistémica | Ecológica | Cognitiva | Afectiva | Interaccional | Mediaccional |
| 1 | Prof 1 | 70009 | F | 85 | 33 | 33 | 19 | 32 | 29 |
| 2 | Prof 2 | 70116 | F | 90 | 21 | 21 | 16 | 45 | 45 |
| 3 | Prof 3 | 70024 | F | 80 | 16 | 16 | 23 | 41 | 33 |
| 4 | Prof 4 | 70009 | F | 25 | 19 | 19 | 29 | 17 | 23 |
| 5 | Prof 5 | 70038 | F | 19 | 25 | 25 | 24 | 19 | 38 |
| 6 | Prof 6 | 70003 | F | 82 | 23 | 23 | 21 | 39 | 48 |
| 7 | Prof 7 | 70038 | M | 56 | 17 | 17 | 18 | 20 | 45 |
| 8 | Prof 8 | 70003 | M | 83 | 14 | 14 | 15 | 42 | 10 |
| 9 | Prof 9 | 70117 | M | 29 | 37 | 37 | 28 | 12 | 32 |
| 10 | Prof 10 | 70009 | F | 85 | 22 | 22 | 21 | 27 | 27 |
| 11 | Prof 11 | 70009 | F | 83 | 29 | 29 | 19 | 20 | 37 |
| 12 | Prof 12 | 70166 | M | 86 | 12 | 12 | 19 | 31 | 38 |
| 13 | Prof 13 | 70003 | F | 81 | 19 | 19 | 18 | 29 | 19 |
| 14 | Prof 14 | 70117 | F | 85 | 35 | 35 | 26 | 21 | 28 |
| 15 | Prof 15 | 70064 | F | 19 | 42 | 42 | 19 | 19 | 37 |
| 16 | Prof 16 | 70133 | F | 15 | 38 | 38 | 26 | 20 | 48 |
| 17 | Prof 17 | 70117 | M | 49 | 17 | 17 | 31 | 39 | 49 |
| 18 | Prof 18 | 70009 | M | 39 | 31 | 31 | 32 | 37 | 21 |
| 19 | Prof 19 | 70009 | F | 88 | 29 | 29 | 16 | 47 | 37 |
| 20 | Prof 20 | 70091 | F | 25 | 19 | 19 | 26 | 25 | 42 |
| 21 | Prof 21 | 70009 | F | 45 | 16 | 16 | 21 | 31 | 45 |
| 22 | Prof 22 | 70803 | F | 87 | 29 | 29 | 15 | 40 | 37 |
| 23 | Prof 23 | 70117 | M | 48 | 12 | 12 | 22 | 27 | 26 |
| 24 | Prof 24 | 70009 | F | 20 | 19 | 19 | 21 | 23 | 36 |
| 25 | Prof 25 | 71001 | F | 79 | 15 | 15 | 19 | 45 | 33 |
| 26 | Prof 26 | 70009 | F | 25 | 29 | 29 | 23 | 17 | 42 |
| 27 | Prof 27 | 70091 | F | 30 | 38 | 38 | 14 | 27 | 47 |
| 28 | Prof 28 | 70142 | F | 89 | 39 | 39 | 19 | 29 | 19 |
| 29 | Prof 29 | 70091 | F | 39 | 31 | 31 | 27 | 19 | 47 |
| 30 | Prof 30 | 70142 | F | 88 | 32 | 32 | 26 | 37 | 26 |
| 31 | Prof 31 | 70117 | F | 79 | 30 | 30 | 22 | 39 | 36 |
| 32 | Prof 32 | 70119 | M | 50 | 21 | 21 | 25 | 21 | 31 |
| 33 | Prof 33 | 71001 | F | 76 | 39 | 39 | 12 | 36 | 42 |
| 34 | Prof 34 | 71003 | F | 33 | 17 | 17 | 26 | 20 | 38 |
| 35 | Prof 35 | 70117 | F | 50 | 10 | 10 | 31 | 29 | 31 |
| 36 | Prof 36 | 70081 | F | 75 | 17 | 17 | 17 | 15 | 21 |
| 37 | Prof 37 | 70757 | M | 23 | 29 | 29 | 21 | 19 | 16 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | Prof 38 | 70136 | F | 84 | 34 | 34 | 22 | 33 | 29 |
| 39 | Prof 39 | 70117 | F | 82 | 41 | 41 | 25 | 33 | 39 |
| 40 | Prof 40 | 70038 | M | 80 | 38 | 38 | 17 | 39 | 49 |
| 41 | Prof 41 | 70009 | F | 87 | 27 | 27 | 21 | 46 | 41 |
| 42 | Prof 42 | 71001 | M | 78 | 25 | 25 | 19 | 48 | 46 |
| 43 | Prof 43 | 71003 | M | 55 | 41 | 41 | 12 | 27 | 18 |
| 44 | Prof 44 | 71004 | M | 80 | 40 | 40 | 25 | 33 | 39 |