



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO DE PUNO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**COTA DE KLINGENBERG EN LA EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE  
LA ESFERA A VARIETADES RIEMANNIANAS**

**TESIS**

PRESENTADA POR:

**Bach. ELIZABETH QUISPE MACHACA**

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

**LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

PUNO – PERÚ

2019



## DEDICATORIA

¡Que nadie se quede afuera, se los dedico a todos!

Sobre todo, a mis pequeños sobrinos que son mi inspiración para seguir adelante.

“El resultado del pensamiento creativo de un matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba rigurosa, pero la prueba se descubre por medio del razonamiento plausible, adivinando”. (Polya 54, p.158)



## AGRADECIMIENTO

Agradezco a mi alma máter a la Universidad Nacional del Altiplano, gracias por haber permitido formarme y en ella, gracias a todas las personas que fueron partícipes de este proceso, especialmente a mi asesora de tesis, a la doctora Juana Idelza Zavaleta Gómez por su orientación y asesoramiento. Extiendo mi cordial agradecimiento a mis jurados evaluadores a las licenciadas Blanca, Fabiola y al licenciado Derly por tomarse el tiempo para servir en mi comité.



## ÍNDICE GENERAL

**DEDICATORIA**

**AGRADECIMIENTO**

**ÍNDICE GENERAL**

**ÍNDICE DE FIGURAS**

**ACRÓNIMOS**

**RESUMEN**

**9**

**ABSTRACT**

**10**

### **CAPÍTULO I**

#### **INTRODUCCIÓN**

1.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA . . . . .	13
1.2. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .	14
1.2.1. Hipótesis General . . . . .	14
1.2.2. Hipótesis Específicos . . . . .	14
1.3. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .	14
1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .	15
1.4.1. Objetivo General . . . . .	15
1.4.2. Objetivos Específicos . . . . .	15

### **CAPÍTULO II**

#### **REVISIÓN DE LITERATURA**

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .	16
2.2. MARCO TEÓRICO . . . . .	19
2.2.1. Métrica Riemanniana . . . . .	19
2.2.2. Teorema Fundamental de las Variedades Riemannianas . . . . .	21
2.2.3. Geodésicas y Aplicaciones Exponenciales . . . . .	25
2.2.4. Propiedades Minimizantes de las Geodésicas . . . . .	30
2.2.5. Curvatura Seccional . . . . .	32



2.2.6. Campos de Jacobi y Puntos Conjugados . . . . .	37
2.2.7. Variedades Completas . . . . .	43
2.2.8. Fórmulas de Variación de la Energía y Sus Aplicaciones . . . . .	44
2.2.9. Teoremas de la Comparación de Rauch . . . . .	48
<b>CAPÍTULO III</b>	
<b>MATERIALES Y MÉTODOS</b>	
3.1. MATERIALES . . . . .	50
3.2. MÉTODOS . . . . .	50
<b>CAPÍTULO IV</b>	
<b>RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	
4.1. Punto de Corte, Lugar de Corte y Radio de Inyectividad . . . . .	54
4.2. Teoremas de Estimación del Radio de Inyectividad y la Cota de Klingenberg . . . . .	71
4.3. Teorema de la Esfera en Variedades Riemannianas . . . . .	76
<b>V. CONCLUSIONES</b>	<b>100</b>
<b>VI. RECOMENDACIONES</b>	<b>101</b>
<b>VII. BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>103</b>
<b>ANEXO</b>	<b>104</b>

**TEMA:** Geometría Riemanniana

**ÁREA:** Matemática

**LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:** Matemática Pura

**FECHA DE SUSTENTACIÓN:** 30 de diciembre del 2019



## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>FIGURA II.1.</b> Geodésicas en la esfera. . . . .	27
<b>FIGURA II.2.</b> La aplicación exponencial . . . . .	29
<b>FIGURA II.3.</b> Curvatura seccional. . . . .	35
<b>FIGURA II.4.</b> La aplicación exponencial y los campos de Jacobi. . . . .	43
<b>FIGURA IV.1.</b> Punto de corte. . . . .	55
<b>FIGURA IV.2.</b> Lugar de corte. . . . .	56
<b>FIGURA IV.3.</b> Lugar de corte en la esfera. . . . .	57
<b>FIGURA IV.4.</b> Caracterización de los puntos conjugados en un entorno $U \subset T_p M$	60
<b>FIGURA IV.5.</b> $\tau$ : Es la única geodésica minimizante. . . . .	62
<b>FIGURA IV.6.</b> $p$ y $q$ son puntos de corte uno del otro. . . . .	62
<b>FIGURA IV.7.</b> Comparación de geodésicas. . . . .	69
<b>FIGURA IV.8.</b> La variación de las geodésicas. . . . .	74
<b>FIGURA IV.9.</b> Variación de geodésicas minimizantes en un entorno $U$ . . . . .	79
<b>FIGURA IV.10.</b> Puntos equidistantes sobre una geodésica. . . . .	89
<b>FIGURA IV.11.</b> Aplicación homeomórfica $\phi$ . . . . .	94



## ACRÓNIMOS

$\mathbb{N}$	:	Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{R}$	:	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}^n$	:	Espacio euclidiano.
$S^n$	:	Esfera unitaria $n$ -dimensional.
$M$	:	Variedad diferenciable $n$ -dimensional.
$g$	:	Métrica riemanniana.
$(M, g)$	:	Variedad Riemanniana de $n$ -dimensional.
$T_p M$	:	Espacio tangente a $M$ en el punto $p$ .
$\chi(M)$	:	Conjunto de campos vectoriales tangentes a la variedad.
$\chi(\gamma)$	:	Conjunto de campos vectoriales tangentes a lo largo de $\gamma$ .
$\nabla$	:	Conexión.
$\exp_p$	:	Aplicación exponencial en el punto $p$ .
$d(p, q)$	:	Distancia entre $p$ y $q$ .
$B_r(p)$	:	Bola geodésica de $r$ y centro $p$ .
$\partial B_r(p)$	:	Frontera de la bola centrada en $p$ .
$l(\gamma)$	:	Longitud de la curva $\gamma$ .
$diam(M)$	:	Diámetro de $M$ .
$T_1 M$	:	Fibrado tangente unitario de $M$ .
$R$	:	Operador curvatura de Riemann.
$K(\sigma)$	:	Curvatura seccional asociada a $\sigma$ .



- $Ric$  : Curvatura de Ricci.
- $S_p$  : Curvatura escalar.
- $C(p)$  : Lugar de los puntos conjugados de  $p$ .
- $C_m(p)$  : Lugar de corte de  $p$ .
- $i(M)$  : Radio de inyectividad de  $M$ .
- $i(p)$  : Radio de inyectividad en el punto  $p$ .
- $L(s)$  : Operador longitud.
- $E(s)$  : Función energía.
- $J$  : Campo de Jacobi a lo largo de una geodésica  $\gamma$ .
- $I$  : Isometría lineal.
- $K_{max}$  : Supremo de todas las curvaturas seccionales.
- $K_{min}$  : Ínfimo de todas las curvaturas seccionales.



## RESUMEN

La investigación planteó la extensión del teorema de la esfera a variedades riemannianas de dimensión  $n > 3$ . Fundamentalmente esta extensión se debe a Berger y Klingenberg, siendo este último quien desarrolló la estimación del radio de inyectividad para una variedad cuya característica es poseer curvatura seccional positiva y unitaria. El objetivo principal fue demostrar que con las condiciones de curvatura gaussiana positiva una superficie conexa y compacta no puede ser otra superficie más que la esfera, para lo cual se busca establecer un homeomorfismo entre una variedad  $M$  compacta y simplemente conexa que satisfaga determinadas condiciones sobre la curvatura seccional y la esfera unitaria  $\mathbb{S}^n$ ; dicha condición que se impuso es: trabajar con variedades riemannianas cuya curvatura seccional estén contenidas estrictamente en el intervalo  $(\frac{1}{4}, 1]$ , donde  $h = \frac{1}{4}$  es la cota de Klingenberg. Para ello se estudió los teoremas de estimación de Klingenberg con la finalidad de encontrar una cota óptima para el radio de inyectividad y con ello proporcionarle una estructura a la variedad para construir el homeomorfismo.

**Palabras clave:** Cota de Klingenberg, homeomorfismos, radio de inyectividad, teorema de la esfera, variedades riemannianas.



## ABSTRACT

The research proposed the extension of the sphere theorem to Riemannian varieties of dimension  $n > 3$ . Fundamentally, this extension is due to Berger and Klingenberg, the latter being the one who developed the estimation of the radius of injection for a variety whose characteristic is to have positive sectional curvature. and unitary. The main objective was to demonstrate that with positive Gaussian curvature conditions a connected and compact surface cannot be any other surface than the sphere, for which purpose it seeks to establish a homeomorphism between a compact and simply connected  $M$  variety that satisfies certain conditions on the sectional curvature and the unitary sphere  $\mathbb{S}^n$ ; This condition that was imposed is: work with Riemannian varieties whose sectional curvature is strictly contained in the interval  $(\frac{1}{4}; 1]$ , where  $h = \frac{1}{4}$  is the Klingenberg dimension. To do this, we studied the Klingenberg estimation theorems. in order to find an optimal height for the radius of injection and thereby provide the variety with a structure to build homeomorphism.

**Keywords:** Klingenberg level, homeomorphisms, sphere theorem, injectivity radius, riemannian varieties



# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

Dentro de la Geometría Diferencial Global se aborda una característica fundamental que forma parte de una clase especial de resultados que buscan establecer la relación entre geometría y topología, esta característica se aplica en un resultado relevante que es el teorema de la esfera. Este teorema tiene una larga historia, dentro de ello están las estimaciones del radio de inyectividad para las diferentes versiones de los teoremas de las esferas que vienen siendo desde siempre un tema central dentro de la Geometría Diferencial Global que busca definir invariantes isométricas. El estudio del teorema de la esfera da lugar a un gran número de incógnitas e interpretaciones geométricas, que orientan a la investigación en torno a extender y aplicar este teorema a otros ámbitos de la matemática (Martos, 2014).

La característica principal del teorema de la esfera en variedades riemannianas es la estructura que adopta una variedad riemanniana  $M$  sobre su curvatura seccional  $K$  de manera que sea homeomorfa a una esfera  $\mathbb{S}^n$  unitaria. La restricción dada en la curvatura seccional  $K$  de  $M$  es que sea positiva y se encuentre en el intervalo  $(h, 1]$ , donde  $h = 1/4$  llamada cota de Klingenberg (o pinzamiento), parte de ello están las estimaciones del radio de inyectividad de Klingenberg. Entonces el interés es explicar la función que cumple la cota de Klingenberg y las estimaciones de radio de inyectividad de Klingenberg en la prueba del teorema de la esfera en variedades riemannianas, para esto es necesario; estudiar principalmente geodésicas, aplicaciones exponenciales, campos de Jacobi, puntos conjugados, variedades completas, la primera y segunda fórmula de la



variación de energía, los resultados como: Teorema de Bonnet Meyers, corolario de Syng y los teoremas de comparación de Rauch.

El objetivo fundamental de la investigación es, explicar y demostrar una de las versiones del teorema de la esfera, la cual es la extensión del teorema de la esfera a variedades riemannianas mediante la estimación de la cota de Klingenberg, específicamente es necesario hacerlo en variedades riemannianas de dimensiones altas, sustentando de manera completa y con todas las herramientas que sean necesarias tanto técnicas como teóricas.

El trabajo de investigación se estructura de la siguiente manera:

En el capítulo 1 está la introducción, en ella se encuentran el contenido del plan de tesis de forma más amplia y elaborada en la que se mencionan los componentes del problema, la formulación del problema, las hipótesis, la justificación de la investigación y los objetivos, para el desarrollo de esta tesis.

En el capítulo 2 está la revisión literaria, en ella están los antecedentes que sustentan la investigación y se encuentra el marco teórico en el que se enuncia a detalle todos los conceptos y definiciones que serán de gran utilidad para lograr el objetivo de la investigación.

En el capítulo 3 se encuentran materiales y métodos, en ellas se mencionan las herramientas utilizadas, el tipo y la metodología aplicada a la investigación, que en este caso es de tipo cualitativo y método deductivo.



En el capítulo 4 se encuentran los resultados y discusión, en ellas se estudia propiedades de punto de corte, lugar de corte y radio de inyectividad de una variedad. Luego se establecen las estimaciones de Klingenberg y finalmente se presenta la demostración de la extensión del teorema de la esfera a variedades riemannianas, representada por el teorema de la esfera topológica obtenida por Klingenberg y Berger.

Finalmente, en los capítulos 5 y 6 se presentan las conclusiones y las recomendaciones, en ellas se comenta y se recomienda algunas aplicaciones y posibles trabajos a futuro.

## 1.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En la presente investigación titulada “cota de Klingenberg en la extensión del teorema de la esfera a variedades riemannianas”, se plantea lo siguiente:

Una variedad riemanniana  $M$  de dimensión  $n > 3$  compacta, simplemente conexa, cuya curvatura seccional  $K$  satisface:

$$0 < h < K \leq 1$$

si  $h = \frac{1}{4}$ , entonces  $M$  es homeomorfa a una esfera  $S^n$ .

La formulación del problema está representada con las siguientes interrogantes:

¿Cómo influye la cota de Klingenberg en la extensión del teorema de la esfera a variedades riemannianas?



¿Cuáles son las condiciones que permiten definir el homeomorfismo entre una variedad  $M$  determinada por su curvatura seccional y la esfera  $S^n$ ?

¿Cómo es que se pueden identificar propiedades como punto de corte y lugar de corte en una variedad  $M$ , de manera que sean fundamentales en la estimación de la cota de Klingenberg?

## 1.2. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

### 1.2.1. Hipótesis General

La cota de Klingenberg desempeña un papel fundamental en la demostración de la extensión del teorema de la esfera a variedades riemannianas de dimensión  $n > 3$ .

### 1.2.2. Hipótesis Específicos

- La restricción de la topología de las variedades sobre la curvatura seccional establecen un homeomorfismo entre una variedad compacta, simplemente conexa y la esfera unitaria.
- Los puntos conjugados y las singularidades de la aplicación exponencial identifican propiedades como punto de corte y lugar de corte.

## 1.3. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio de la extensión del teorema de la esfera a variedades riemannianas mediante la cota de Klingenberg es un resultado que en definiciones generales busca mostrar la relación que existe entre la topología y la geometría, esto nos lleva a los resultados es-



peciales de topología diferencial. La importancia de esta investigación es el aporte que se dará dentro de la geometría diferencial mediante un resultado relevante que es el teorema de la esfera, donde esta restringe fuertemente la topología de las variedades que admiten métricas con un límite de curvatura particular, es decir la curvatura seccional de una variedad  $M$  compacta y simplemente conexa debe estar contenida estrictamente en el intervalo  $(h, 1]$  donde  $h$  es el pinzamiento de la variedad conocida como la cota de Klingenberg. Y bajo esta condición sobre su curvatura seccional una variedad  $M$  compacta y simplemente conexa debe ser homeomorfa a una esfera unitaria, bajo estos criterios el propósito fundamental es demostrar la extensión del teorema de la esfera a variedades riemannianas con la cota de Klingenberg, esta última se encarga de darle una estructura a la variedad sobre su curvatura seccional.

## 1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

### 1.4.1. Objetivo General

Extender el teorema de la esfera a variedades riemannianas de dimensión  $n > 3$  utilizando la cota de Klingenberg.

### 1.4.2. Objetivos Específicos

- Restringir la topología de las variedades sobre su curvatura seccional para establecer un homeomorfismo entre una variedad compacta, simplemente conexa y la esfera unitaria.
- Definir el concepto de punto conjugado para identificar las propiedades como punto de corte y lugar de corte en una variedad  $M$ .



## CAPÍTULO II

### REVISIÓN DE LITERATURA

En este capítulo se presenta los antecedentes y el marco teórico de la investigación.

#### 2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Como un pequeño preámbulo a los antecedentes, se describe un poco de lo que viene a ser el proceso de la construcción del teorema de la esfera topológica, desde su origen hasta su versión original.

El teorema de la esfera es un resultado global cuyo origen surgió de manera natural mediante las diferentes definiciones, empezando de la esfera de rigidez hasta el teorema de Hadamard, en el que este demostró un resultado similar al teorema de la esfera. Específicamente, probó que cualquier superficie de  $\mathbb{R}^3$  compacta, orientada y con curvatura de Gauss positiva debía ser difeomorfa a una esfera (Do Carmo, 2016; Hadamard, 1898). Este hecho planteaba la extensión del resultado a estructuras más generales como las variedades Riemannianas. En 1951, en su artículo de investigación titulada "A contribution to differential geometry in the large", Rauch hizo la siguiente pregunta, de si una variedad Riemanniana  $M$  compacta y simplemente conexa, cuya curvatura seccional se encuentran en el intervalo  $(1, 4]$  es necesariamente homeomorfa a la esfera. Alrededor de 1960, Berger y Klingenberg dieron una respuesta afirmativa a esta cuestión. Es decir, afirmaron que  $M$  es homeomorfa a  $S^n$  (Brendle, 2009). Sobre la base del trabajo de Rauch y Berger. En 1961, Klingenberg obtuvo la versión final de este teorema y fue enunciado de la siguiente forma: Sea  $M$  una variedad riemanniana completa, simplemente conexa con una



curvatura seccional estrictamente  $1/4$  de pinzamiento, entonces  $M$  es homeomorfa a la esfera  $S^n$  y según el teorema de Meyers  $M$  es una variedad compacta (Abresch, 1997), por esta razón el teorema se puede establecer de manera equivalente para compactos en lugar de variedades completas. Este fue uno de los primeros resultados en la geometría riemanniana, donde el tipo topológico de una variedad  $M$  homeomorfa a la esfera unitaria  $S^n$  está determinado por las desigualdades de su curvatura seccional.

En base del párrafo anterior, se considera como antecedentes de la presente investigación los siguientes trabajos:

- Klingenberg (1959), en su artículo titulado, “*Contributions to Riemannian geometry in the large*”, introdujo la estimación de la distancia de un punto a su lugar de corte en la variedad de dimensión par y con dicha estimación demostró el teorema de la esfera en variedades riemannianas para  $h = 0.55$  utilizando el teorema de Toponogov y la estimación introducida. A partir de este resultado lo que se pretende es explicar el homeomorfismo entre una variedad de dimensiones altas y la esfera unitaria.
- Berger (1960), en su artículo titulado, “*les variétés riemanniennes (1/4)-pinçées*”, demostró el teorema de la esfera en dimensión par para  $h = 1/4$  utilizando el teorema de Toponogov y la estimación de Klingenberg. A partir de este aporte se pretende mostrar el teorema de la esfera sin el uso del teorema de Toponogov siendo esta innecesaria como se muestra en Tsukamoto (1961).
- Klingenberg (1961), en su artículo titulado, “*Über riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung*”, generalizó la estimación de radio de inyectividad para variedades de dimensión impar, para ello introdujo la teoría de Morse y junto



- con el trabajo de Berger (1960), demostró el teorema de la esfera en variedades riemannianas de dimensiones  $n > 3$ . En base a este trabajo, lo que se hará es describir la estimación del radio de inyectividad y especificar el momento crucial de su uso.
- Abresch (1997), realizó la investigación: “*Injectivity Radius Estimates and Sphere Theorems*”, en este artículo el autor desarrolló diferentes resultados sobre el radio de inyectividad y el teorema de la esfera, desde las primeras versiones del teorema de la esfera topológica hasta el más reciente del teorema con pinzamiento de  $\frac{1}{4}$ , el autor explica en cada etapa las nuevas ideas involucradas. A partir de estas ideas se pretende estudiar el teorema de la esfera topológica.
  - Martínez (2007), en su artículo titulada “*La Curvatura de Riemann a Través de la Historia*”, muestra tanto la evolución de su concepto a lo largo de la historia como algunas de sus posibles aplicaciones de la curvatura. Las evoluciones sobre los conceptos mostradas en este artículo serán utilizadas para entender de la mejor manera la relación que existe entre la curvatura de Gauss y Riemanniana.
  - Yu (2013), realizó la investigación: “*The Sphere Theorem in Riemannian Geometry*”, en este artículo el autor demostró el teorema de la esfera en variedades riemannianas utilizando el teorema de Toponogov y las estimaciones de Klingenberg. La demostración mostrada en este artículo adopta una forma específica en el que paso a paso se explica las condiciones que debe cumplir el homeomorfismo, la cual será tomada como referencia para la presente investigación, pero sin el uso del teorema de Toponogov.
  - Martos (2014), realizó la investigación: “*Teorema de la Esfera*”, en la Universidad de Murcia, España. En este trabajo el autor demostró el teorema de la esfera, utilizando las estimaciones del radio de inyectividad de Klingenberg, hace cumplir el homeomorfismo entre una variedad y la esfera unitaria bajo ciertas condiciones. Lo

que se pretende a diferencia de este trabajo es ver este resultado como una extensión del teorema de la esfera definido en  $\mathbb{R}^3$  a variedades riemannianas y profundizar su demostración exponiendo de manera más detallada cada paso y mostrando las condiciones que cumple el homeomorfismo entre una variedad y la esfera.

## 2.2. MARCO TEÓRICO

En esta sección se presenta preliminares, teoremas, proposiciones, lemas y definiciones de geometría diferencial y geometría riemanniana importantes para el logro de los objetivos de la investigación. No se presenta demostraciones, por lo que se referencia y se interpreta en algunos casos. Cabe indicar que se profundiza en algunas de estas teorías por la importancia y utilización en la demostración de resultados (Do Carmo (2015), Sánchez (2007) y Gallot (1990)).

### 2.2.1. Métrica Riemanniana

Se inicia esta subsección con la definición de la métrica riemanniana, la cual permitirá definir una variedad riemanniana y sobre ella más adelante se definirán conceptos como: Campos vectoriales, transporte paralelo, curvatura y entre otras.

Se denotará por  $M$  a una variedad diferenciable de dimensión  $n$  que es lo mismo decir de clase  $C^\infty$  y por  $T_pM$  el plano tangente a  $M$  en  $p$ .

**Definición 2.2.1.1. (Métrica riemanniana)** Una métrica riemanniana o estructura riemanniana en una variedad diferenciable  $M$  es una correspondencia que asocia a cada

punto de  $p \in M$  un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (esto es una forma simétrica, bilineal y definida positiva) en el espacio tangente  $T_p M$  la cual varía diferencialmente en el siguiente sentido: Si  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  es un sistema de coordenadas alrededor de  $p$ , con  $X(x_1, \dots, x_n) = q \in X(U)$  y  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dX_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , entonces

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_j)$$

es una función diferenciable sobre  $U$ . (Do Carmo, 2015, p. 41)

De la definición anterior, las funciones  $g_{ij} = g_{ji}$  son llamadas representación local de la métrica riemanniana en el sistema coordenado  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ .

Una vez definida la métrica riemanniana se puede ahora definir la estructura de una variedad riemanniana.

**Definición 2.2.1.2. (Variedad riemanniana)** Sea  $M$  una variedad diferenciable, se dice que  $M$  es una variedad riemanniana cuando tiene asociada una métrica riemanniana  $g$ .

Las variedades riemannianas son variedades diferenciables reales en la que cada espacio tangente proviene con un producto interno para cada punto  $p$  de  $M$ .

Para finalizar esta subsección se define la teoría básica de campos vectoriales en una variedad.

**Definición 2.2.1.3. ( Campo vectorial)** Un campo vectorial  $V$  a lo largo de una curva  $c : I \rightarrow M$  es una aplicación que a cada  $t \in I$  asocia un vector tangente  $V(t) \in T_{c(t)}M$ .



Se dice que  $V$  es diferenciable si para toda función diferenciable  $f$  en  $M$ , la función  $t \rightarrow V(t)f$  es una función diferenciable en  $I$ . (Do Carmo, 2015, p. 47)

### 2.2.2. Teorema Fundamental de las Variedades Riemannianas

Esta subsección se inicia con la definición de la derivada covariante para definir las conexiones afines sobre una variedad riemanniana  $M$  y luego se enuncia el concepto de paralelismo para definir el teorema fundamental de variedades riemannianas o conexión de Levi-Civita, este último permitirá derivar campos vectoriales sobre  $M$ .

Se denotará por  $\chi(M)$  conjunto de los campos vectoriales y por  $D(M)$  al conjunto de las funciones reales de clase  $C^\infty$  definidas en  $M$ .

**Definición 2.2.2.1. (Derivada covariante)** Si  $M$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y  $\alpha$  una curva en  $M$ , tiene sentido calcular  $\alpha''(t_0)$ , aunque este vector se salga del espacio tangente  $T_{\alpha(t_0)}M$ . Si se piensa que la segunda derivada debe ser un vector tangente a  $M$ , se puede proyectar el vector  $\alpha''(t_0)$  sobre  $T_{\alpha(t_0)}M$ . A este vector se le llama la derivada covariante de  $\alpha'(t)$  en  $t_0$  y se denota de la siguiente forma

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t_0) = \text{Proy} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha'(t) - \alpha'(t_0)}{t - t_0}.$$

En base a lo anterior, la derivada covariante de un campo vectorial  $V$  en la dirección de  $\alpha'(t_0)$  está dada por

$$\frac{DV}{dt}(t_0) = \text{Proy} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V(\alpha(t)) - V(\alpha(t_0))}{t - t_0}$$

Sánchez (2007).

Dada la definición anterior, no sólo se puede derivar en la dirección de  $\alpha'(t_0)$ , sino que se puede derivar un campo cualquiera en la dirección de otro campo cualquiera, a este tipo de operación se le conoce como conexión.

**Definición 2.2.2.2. (Conexión afín)** Sea  $M$  una variedad diferenciable, una conexión afín sobre  $M$  es una operación:

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

Donde dados  $X, Y \in \chi(M)$ , se tiene la notación  $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$  y además se cumplen las siguientes propiedades para  $f, g \in C^\infty(M)$ ;  $X, Y, Z \in \chi(M)$ .

- i)  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- ii)  $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- iii)  $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ .

(Do Carmo, 2015, p. 55)

Las conexiones proporcionan una forma natural de derivar campos vectoriales arbitrarios en una variedad.

**Definición 2.2.2.3. (Paralelismo)** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Un campo vectorial  $V$  a lo largo de una curva  $c : I \rightarrow M$  es llamado paralelo cuando  $\frac{DV}{dt} = 0$ , para todo  $t \in I$ . (Do Carmo, 2015, p. 58)

El paralelismo permite transportar vectores tangentes desde un punto de una variedad a otra de modo que permanezcan paralelos a lo largo de una curva y respecto a la

conexión dada. Un resultado importante sobre este es el transporte paralelo que se enuncia a continuación.

**Proposición 2.2.2.1. (Transporte paralelo)** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Sea  $c : I \rightarrow M$  una curva diferenciable sobre  $M$ ,  $V_0$  un vector tangente a  $M$  en el punto  $c(t_0)$ ,  $t_0 \in I$  (es decir  $V_0 \in T_{c(t_0)}M$ ). Entonces existe un único campo de vectores paralelo  $V$  a lo largo de  $c$ , tal que  $V(t_0) = V_0$ , ( $V(t)$  es llamado transporte paralelo de  $V(t_0)$  a lo largo de  $c$ ). (Do carmo, 2015, p. 58)

La proposición (2.2.2.1), más adelante será utilizado para motivar el concepto de curvatura.

**Proposición 2.2.2.2. (Compatibilidad de la conexión afín)** Sea  $M$  una variedad riemanniana. Una conexión  $\nabla$  sobre  $M$  es compatible con una métrica si y sólo si para cualesquiera campos vectoriales  $V$  y  $W$  a lo largo de la curva diferenciable  $c : I \rightarrow M$ , se tiene que

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

(Do carmo, 2015, p. 59)

La proposición anterior, describe la compatibilidad de la conexión  $\nabla$  con la métrica  $\langle, \rangle$ . Con ello se preservan las normas de los vectores transportados a lo largo de las curvas.

**Definición 2.2.2.4. (Simetría de la conexión afín)** Una conexión afín  $\nabla$  en una variedad

diferenciable  $M$  es simétrica si  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  para todo  $X, Y \in \chi(M)$ . (Do carmo, 2015, p. 60)

La definición (2.2.2.4), en un sistema de coordenadas  $(U, x)$  implica lo siguiente:

Para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0$ ,  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , lo anterior es equivalente a  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

$\Gamma_{ij}^k$  son conocidos como los símbolos de Christoffel, que son funciones de los parámetros locales y tienen la propiedad de ser invariantes por isometrías.

Se puede ahora enunciar el teorema fundamental de las variedades riemannianas, conocida como conexión de Levi-Civita o conexión riemanniana sobre una variedad  $M$ .

**Teorema 2.2.2.1. (Conexión Levi-Civita)** Dada una variedad riemanniana  $M$ , existe una única conexión afín  $\nabla$  sobre  $M$  que satisface las siguientes condiciones:

- i).  $\nabla$  es simétrica.
- ii).  $\nabla$  es compatible con la métrica riemanniana.

(Do carmo, 2015, p. 61)

**Observación 2.2.2.1.** Sea  $\alpha$  una curva diferenciable y  $\chi(\alpha)$  campo de vectores tangentes a la curva  $\alpha$ . La conexión de Levi-Civita  $\nabla$  determina una aplicación en el conjunto  $\chi(\alpha)$ , llamada derivada covariante a lo largo de  $\alpha$  y es denotada por  $\frac{D}{dt}$ .

**Definición 2.2.2.5. (Símbolos de Christoffel)** En un sistema de coordenadas  $(U, x)$ , las funciones  $\Gamma_{ij}^k$  definidas en  $U$  son dadas por  $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$  son llamados coeficientes de conexión  $\nabla$  en  $U$  o los símbolos de Christoffel de la conexión. (Do carmo, 2015, p. 62)

### 2.2.3. Geodésicas y Aplicaciones Exponenciales

El concepto de las geodésicas se relaciona con curvas cuya derivada covariante se anulan en todos los puntos donde está definida (la geodésica como una curva con aceleración cero). Por otro lado, es aquel que minimiza la longitud de arco para puntos suficientemente cercanos, esto indica que si una curva minimiza la longitud de arco entre dos de sus puntos cualesquiera entonces es una geodésica.

La aplicación exponencial es una herramienta principal que describe el comportamiento de todas las geodésicas que comienzan en un sólo punto de la variedad.

**Definición 2.2.3.1. (Geodésica)** Una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  es una geodésica en  $t_0 \in I$  si y sólo si  $\frac{D\gamma'}{dt}$  se anula en  $t_0$ . La curva  $\gamma$  es una geodésica si y sólo si es una geodésica en  $t$  para todo  $t \in I$ . (Sánchez, 2007, p.120)

**Observación 2.2.3.1.** De la definición 2.2.3.1 una curva regular  $\gamma : I \rightarrow M$  se llama geodésica si

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0.$$

y la longitud del vector tangente  $\frac{d\gamma}{dt}$  es constante. Una geodésica está normalizada si  $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = 1$ .



La siguiente proposición define formalmente como son las geodésicas sobre una esfera  $\mathbb{S}^n$  de dimensión arbitraria.

**Proposición 2.2.3.1.** *Las geodésicas en una esfera unitaria  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  son las circunferencias máximas sobre  $\mathbb{S}^n$ , que se obtienen intersectando la esfera con cualquier plano que pase por el origen.*

En particular, en una esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$  definido por  $\gamma(t) = (\cos t)p + (\sin t)v$ , con  $p \in \mathbb{S}^2$  y  $v \in T_p\mathbb{S}^2$  es una geodésica porque su traza es un círculo máximo; es decir,

$$\gamma(t) = (\cos t)p + (\sin t)v$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t)p + (\cos t)v$$

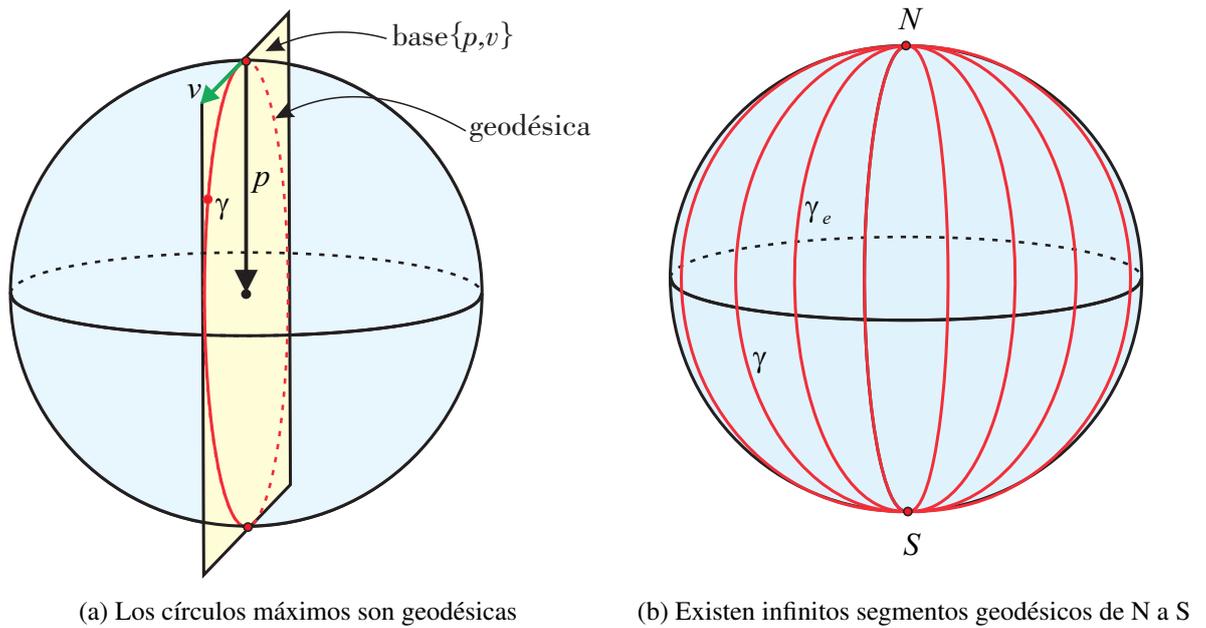
$$\gamma''(t) = (-\cos t)p + (-\sin t)v$$

$$\gamma''(t) = -\{(\cos t)p + (\sin t)v\}$$

$$\gamma''(t) = -\gamma(t) = -N(\gamma(t))$$

donde  $N(\gamma(t))$  es la normal principal, lo que significa que la intersección entre  $\mathbb{S}^2$  y el plano generado por  $p$  y  $v$  es un círculo máximo como se muestra en la figura (II.1a), cabe resaltar que por unicidad los círculos máximos son las únicas geodésicas de una esfera.

Por otro lado, los polos norte (N) y sur (S) de la esfera tienen infinitos segmentos geodésicos  $\gamma_e$  entre ellos, como se muestra en la figura (II.1b).



(a) Los círculos máximos son geodésicas (b) Existen infinitos segmentos geodésicos de N a S

Figura II.1: Geodésicas en la esfera.

Como se puede observar en la figura (II.1a), las geodésicas en la esfera están caracterizadas como curvas obtenidas por la intersección de planos que pasan por el origen de la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Es similar en el caso de la esfera  $\mathbb{S}^n$ .

Para los siguientes resultados es necesario indicar que  $TM$  es llamado fibrado tangente y es el conjunto formado de los pares  $(q, v)$  con  $q \in M$  y  $v \in T_qM$ .

**Proposición 2.2.3.2.** Dado  $p \in M$ , existe un conjunto abierto  $V \subset M$ ,  $p \in V$ , números  $\delta, \epsilon > 0$  y una aplicación  $C^\infty$

$$\gamma(-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \quad \mathcal{U} = \{(q, v) : q \in V, v \in T_qM, |v| < \epsilon\},$$

de modo que para cada  $(q, v) \in \mathcal{U}$ , la curva  $t \rightarrow \gamma(t, q, v), t \in (-\lambda, \lambda)$ , es la única geodésica que pasa por  $q$  con velocidad  $v$  en el instante  $t = 0$ , esto es  $\gamma(0, q, v) = q$ ,



$$\gamma'(0, q, v) = v \text{ y } \gamma''(t, q, v) = 0. \text{ (Do Carmo, 2015, p.71)}$$

La proposición (2.2.3.2), afirma la existencia de una única geodésica en un intervalo  $(-\delta, \delta)$  que satisface la condición inicial  $\gamma(0, q, v) = (q, v)$  en  $t = 0$  para cada  $(q, v) \in \mathcal{U}$ .

**Lema 2.2.3.1. (Homogeneidad de una geodésica)** Si la geodésica  $\gamma(t, q, v)$  está definida en el intervalo  $(-\lambda, \lambda)$ , entonces la geodésica  $\gamma(t, q, av)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , está definida en el intervalo  $(-\delta/a, \delta/a)$  y  $\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v)$ . (Do Carmo, 2015, p.72)

El lema (2.2.3.1), nos indica que es posible modificar el intervalo de definición de una geodésica cambiando su velocidad.

**Proposición 2.2.3.3.** Dado  $p \in M$  entonces existen una vecindad  $V$  de  $p$  en  $M$ , un número  $\epsilon > 0$  y una aplicación diferenciable  $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ , donde

$$\mathcal{U} = \{(q, v) \in TM : q \in V, v \in T_q M, |v| < \epsilon\}$$

tales que  $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$ ,  $t \in (-2, 2)$ , es la única geodésica de  $M$  que en el instante  $t = 0$  pasa por  $q$  con velocidad  $v$  esto es,  $\gamma(0, q, v) = q$  y  $\gamma'(0, q, v) = v$ . (Do Carmo, 2015, p.72)

La proposición (2.2.3.3), cuya demostración puede ser encontrada en Do Carmo (2015), permite introducir el concepto de la aplicación exponencial.

**Definición 2.2.3.2. (Aplicación exponencial)** Sea  $p \in M$  y sean  $(q, v) \in \mathcal{U} \subset TM$  un conjunto abierto, entonces la aplicación  $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$  dado por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(\|v\|, q, \frac{v}{\|v\|}\right),$$

es llamado aplicación exponencial sobre  $\mathcal{U}$ . (Do Carmo, 2015, p.73)

La aplicación exponencial es diferenciable  $C^\infty$  y restringido a un abierto del plano tangente  $T_qM$ , con  $q \in M$  se define de la siguiente manera:  $\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$  donde  $\exp_q = \exp_q(v) = \exp(q, v)$  y  $B_\epsilon(0)$  es una bola abierta con centro en el origen de  $T_qM$  con radio  $\epsilon$ , como se muestra en la figura (II.2).

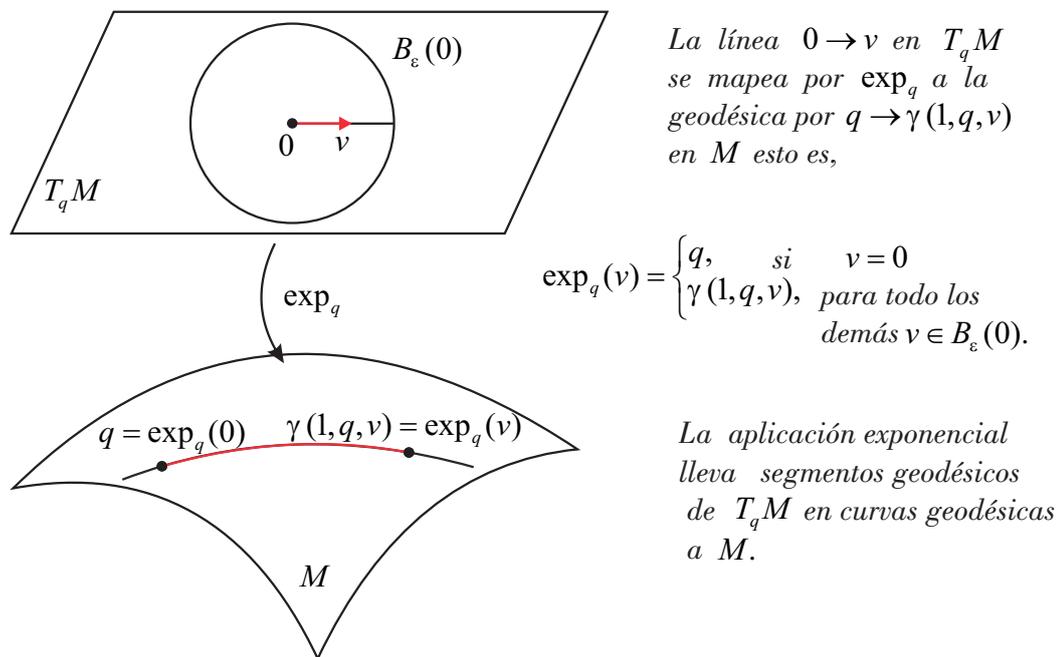


Figura II.2: La aplicación exponencial



**Proposición 2.2.3.4.** *Dado  $q \in M$ , existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$  es un difeomorfismo de  $B_\epsilon(0)$  sobre un abierto de  $M$ . (Do Carmo, 2015, p.73)*

De la proposición (2.2.3.4), si  $\exp_q$  es un difeomorfismo en una vecindad  $V$  del origen en  $T_qM$  entonces  $\exp_q(V) = U$  y es llamada vecindad normal de  $q$ . Si  $B_\epsilon(0)$  es tal que  $\overline{B_\epsilon(0)}$ , se llama  $\exp_q(B_\epsilon(0)) = B_\epsilon(q)$  la bola normal o círculo geodésico de centro  $q$  y radio  $\epsilon$ . Y las imágenes mediante  $\exp_q$  de las rectas que pasan por el origen de  $T_qM$  se llaman geodésicas radiales de  $U$ .

#### 2.2.4. Propiedades Minimizantes de las Geodésicas

Esta subsección se inicia con la definición de una curva minimizadora y luego se enuncia algunos resultados de las propiedades minimizadoras que tienen las curvas geodésicas.

**Definición 2.2.4.1.** Un segmento de geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  es llamado minimizante si  $L(\gamma) \leq L(c)$  para cualquier otra curva  $c$  diferenciable por partes uniendo  $\gamma(a)$  y  $\gamma(b)$ . (Do Carmo, 2015, p.75)

**Lema 2.2.4.1. (Simetría)** Si  $M$  es una variedad diferenciable con una conexión simétrica y  $s : A \rightarrow M$  es una superficie parametrizada entonces:

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v}$$

*A es un conjunto conexo. (Do Carmo, 2015, p. 76)*

El siguiente lema que se presenta es un resultado que más adelante caracterizará la curvatura seccional de subvariedades riemannianas a partir de la variedad ambiente.

**Lema 2.2.4.2. (Gauss)** Sea  $p \in M$  y sea  $v \in T_p M$  un vector donde está definida  $\exp_p v$  y  $w \in T_p M \approx T_v(T_p M)$ . Se cumple:

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

(Do Carmo, 2015, p. 77)

Por el lema (2.2.4.2), la frontera de una bola normal es una hipersuperficie en  $M$  ortogonal a las geodésicas que parten de  $p$  y es denotada por  $S_\epsilon(p)$  y es denominada la esfera normal.

**Proposición 2.2.4.1.** Sean  $p \in M$ ,  $U$  una vecindad normal de  $p$ , y  $B \subset U$  una bola normal de centro  $p$ . Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  un segmento de geodésica con  $\gamma(0) = p$ . Si  $c : [0, 1] \rightarrow M$  es cualquier curva diferenciable por partes uniendo  $\gamma(0)$  a  $\gamma(1)$  entonces  $l(\gamma) \leq l(c)$  y si la igualdad es cierto entonces  $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$ . (Do Carmo, 2015, p. 79)

El anterior resultado indica que las geodésicas minimizan localmente la longitud de arco. Cabe indicar que el resultado no es global. Por ejemplo, en una esfera las geodésicas que parten de  $p$  no son minimizantes después de pasar por la antípoda de  $p$ .

**Proposición 2.2.4.2.** Para cada  $p \in M$  existen una vecindad  $W$  de  $p$  y un número  $\delta > 0$ ,



tales que, para cada  $q \in W$ ,  $\exp_q$  es un difeomorfismo en  $B_\delta(0) \subset T_q M$  y  $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$  esto es,  $W$  es vecindad normal de cada uno de sus puntos. (Do Carmo, 2015, p. 80)

La proposición (2.2.4.2), muestra que para cada  $p \in M$  existe una vecindad  $W$  de  $p$  que es una vecindad normal de cada  $q \in W$ .

#### Observación 2.2.4.1.

- Dados dos puntos  $q_1, q_2 \in W$  existe una única geodésica minimizante  $\gamma$  de longitud  $< \delta$  uniendo  $q_1$  a  $q_2$ . Donde  $\gamma$  depende diferencialmente de  $(q_1, q_2)$  en el siguiente sentido: dado  $(q_1, q_2)$  existe un único  $v \in T_{q_1} M$  que depende diferenciablemente de  $(q_1, q_2)$  y es tal que  $\gamma'(0) = v$ .
- Se dice que un conjunto  $S \subset M$  es fuertemente convexo si para cualesquiera dos puntos  $q_1, q_2$  de la frontera  $\bar{S}$  de  $S$  existe una única geodésica minimizante  $\gamma$  uniendo  $q_1$  a  $q_2$  cuyo interior este contenido en  $S$ .

#### 2.2.5. Curvatura Seccional

En esta subsección el objetivo es describir brevemente la generalización de la curvatura de Gauss de superficies a variedades riemannianas al que se le conoce como curvatura seccional, este resultado será necesario para restringir la topología de las variedades sobre su curvatura.

El concepto de curvatura intuitivamente es aquel que mide la cantidad que una variedad riemanniana se desvía de ser euclidiana, éste hecho surge de manera natural dentro de la geometría diferencial con la construcción formal de la teoría de curvas y superficies

debidamente fundamentadas por Gauss, en base al trabajo y obra de éste último, Riemann define de una manera abstracta, pero rigurosa, el tensor curvatura con el fin de generalizar a dimensiones arbitrarias. Este proceso es la extensión del concepto de la curvatura de Gauss de una superficie a las variedades de Riemann. Siendo posible considerar el germen de la superficie totalmente geodésica tangente en un punto de la variedad al subespacio de dimensión dos en cuestión, entonces la curvatura de Gauss de una superficie se define como la curvatura seccional de ese plano en dicho punto. En general, el tensor curvatura de una variedad de Riemann depende de cuatro argumentos, mientras que la curvatura seccional sólo de dos. Pese a esta generalización el tensor de curvatura es muy complejo y difícil de interpretar es por eso que se considera la curvatura seccional que en un punto determina el tensor curvatura Martínez (2007).

**Definición 2.2.5.1. (Operador curvatura)** Se define como operador curvatura a una correspondencia que asocia a cada par  $X, Y \in \chi(M)$  una aplicación

$$R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dada por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \chi(M)$$

donde  $[X, Y]$  representa el corchete de Lie (clase de equivalencia) aplicado a los campos  $X$  e  $Y$ .

La definición anterior, se puede definir considerando un sistema de coordenadas

$\{x_i\}$  alrededor de un punto  $p \in M$  de la siguiente forma:

$$R \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

esto quiere decir que la curvatura mide la no-conmutatividad de la derivada covariante.

**Observación 2.2.5.1.** Se define como tensor curvatura al tensor que para cada  $p \in M$ , asigna una aplicación multilinear de la siguiente manera

$$R_p : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow D(M)$$

dada por:

$$R_p(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

donde  $R$  es un tensor de orden 4.

Directamente relacionado con el operador curvatura está la curvatura seccional cuya interpretación es similar que la curvatura gaussiana para superficies, que previa a la definición formal se presenta un bosquejo de ello para una mayor comprensión.

Sea  $p \in M$  y  $\sigma$  un plano bi-dimensional contenido en el plano tangente  $T_p M$ , donde para cada punto  $p \in \sigma$  se genera un disco pequeño y del mismo punto salen geodésicas que son tangentes a  $\sigma$ . La unión de todas estas geodésicas forman una superficie de dos dimensiones  $S_\sigma$  contenido en  $M$  como se muestra en la figura (II.3). Entonces de ésta descripción se define la curvatura seccional de  $\sigma$  denotada por  $K(\sigma)$  como la curvatura Gaussiana de la superficie de dos dimensiones  $S_\sigma$  en  $p$ . Lo que se pretende mostrar es que la curvatura de Riemann  $R$  queda determinada completamente por las curvaturas

seccionales de todos los planos bi-dimensionales  $\sigma$  de la variedad, en resumen se presenta la siguiente definición.

**Definición 2.2.5.2. (Curvatura seccional)** Dado un punto  $p \in M$  y un subespacio bi-dimensional  $\sigma \subset T_p M$  y una base  $\{X, Y\}$  de  $\sigma$ , se llama curvatura seccional de  $M$  en el punto  $p$  asociada a  $\sigma$  al número real

$$K_p(X, Y) = K(\sigma) = \frac{\langle R(X, Y, X), Y \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}, \quad |X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

$K(\sigma)$  es independiente de la base elegida para  $\sigma$ . (Martos, 2014, p. 20)

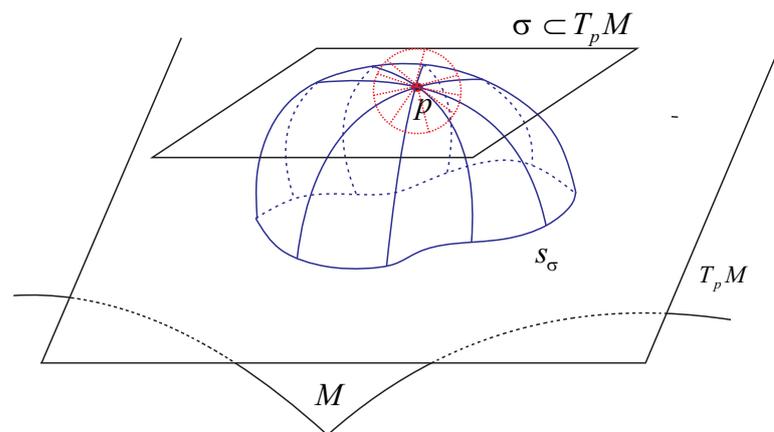


Figura II.3: Curvatura seccional.

Ahora, se enuncia un resultado fundamental de las variedades riemannianas que poseen la curvatura seccional constante, esta caracterización que presentan se expresa en el siguiente lema.

**Lema 2.2.5.1. (Curvatura seccional constante)** Sean  $M$  una variedad riemanniana y un punto  $p \in M$ . Sea una aplicación trilineal  $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \rightarrow T_pM$  definida por:

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle.$$

para todo  $X, Y, Z, W \in T_pM$ . Entonces  $M$  tiene curvatura seccional constante igual a  $K_0$  si, y solo si,  $R = K_0 R'$ . Donde  $R'$  es la curvatura de  $M$ . (Do Carmo, 2015, p. 106)

Las variedades riemannianas que tienen curvatura seccional constante son las siguientes:

- El espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , con  $K = 0$ .
- La esfera unitaria  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , con  $K = 1$ .
- El espacio hiperbólico  $H^n$ , con  $K = -1$ .

estas variedades son especiales es por ello que se recomienda un estudio separado.

En superficies se tiene varios conceptos de curvatura, de la misma manera en variedades riemannianas con dimensión mayor, también se tiene varios conceptos de curvatura, parte de ello para finalizar esta subsección se introduce dos tipos más de curvatura: la curvatura de Ricci es muy natural así como la métrica y su contracción como curvatura escalar poseen una gran importancia en la geometría y física.

**Definición 2.2.5.3.** Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión  $n$  y  $p \in M$  un punto de ésta, considerando  $e_1, \dots, e_n$  una base ortonormal de  $T_pM$ . En estas condiciones, para

cada  $X, Y \in T_p M$  la curvatura de Ricci viene dada por

$$Ric_p(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(X, e_k, Y), e_k \rangle.$$

Por otro lado, la curvatura escalar se define como:

$$S_p = \sum_{k=1}^n Ric(e_k, e_k).$$

(Do Carmo, 2015).

Un desarrollo profundo y denso sobre la curvatura, también puede ser encontrado en Lee (1997).

## 2.2.6. Campos de Jacobi y Puntos Conjugados

A continuación, se presentan algunos conceptos de campos de Jacobi, que se encuentran inmersos a lo largo de una geodésica y surgen de manera natural en el estudio de la aplicación exponencial y satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden, estos campos sirven para formalizar y determinar la velocidad del alejamiento de las geodésicas que salen de un mismo punto. Por otro lado, se presenta los puntos conjugados para obtener una caracterización simple de las singularidades de la aplicación exponencial, los puntos conjugados son las imágenes de este último.

**Definición 2.2.6.1.** Sea  $M$  una variedad riemanniana y  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica de  $M$ . Un campo de vectores  $J$  a lo largo de  $\gamma$  es un campo de Jacobi si satisface la ecuación

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

La ecuación dada es conocida como ecuación de Jacobi. (Martos, 2014, p. 21)

Un campo de Jacobi es determinado por las condiciones iniciales  $J(0)$  y  $\frac{DJ}{dt}(0)$ , por ende la ecuación de la definición (2.2.6.1) en términos del sistema de coordenadas es equivalente al siguiente sistema de ecuación diferencial:

$$f_j''(t) + \sum_{i=1}^n a_{ij}(t)f_i(t) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad \text{con} \quad a_{ij} = \langle R(\gamma'(t), e_i(t))\gamma'(t), r_j(t) \rangle.$$

La ecuación anterior es un sistema lineal de segundo orden y por las condiciones iniciales existe una solución en  $C^\infty(D)$  con  $D \subset \mathbb{R}^n$  del sistema definida en  $[0, l]$ . Por tanto, existen  $2n$  campos de Jacobi linealmente independientes.

**Observación 2.2.6.1.** A lo largo de una geodésica definida por  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ ,  $\gamma'(t)$  y  $t\gamma'(t)$  son campos de Jacobi a lo largo  $\gamma$ , entonces

- i)  $\gamma'(t)$  tiene derivada cero y nunca se anula.
- ii)  $t\gamma'(t)$  es nulo sí y sólo si  $t = 0$ .

Por tanto, de ii) se considerará campos de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  que son normales a  $\gamma'$ .

La siguiente observación es de especial importancia ya que caracteriza los campos de Jacobi a lo largo de una geodésica en variedades de curvatura seccional constante.

**Observación 2.2.6.2. Campos de Jacobi en una variedad de curvatura seccional constante.** Sea  $M$  una variedad riemanniana de curvatura seccional constante  $K$ , sea  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica normalizada (significa que esta parametrizada por longitud de arco) en  $M$  y sea  $J \in \chi(M)$  un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$ , normal a  $\gamma'$ . Puesto que la curvatura seccional de  $M$  es constante por el lema (2.2.5.1) se tiene que  $R = KR'$ , donde  $R' : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  es diferenciable y cumple

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle$$

y por la definición (2.2.5.1) se tiene que

$$\langle R(X, Y, W), Z \rangle = K[\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle]$$

para todo  $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ . Como consecuencia, dado  $T \in \chi(M)$  un campo arbitrario, se tiene

$$\begin{aligned} \langle R(\gamma', J, \gamma'), T \rangle &= \langle KR'(\gamma', J, \gamma'), T \rangle \\ &= K[\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, T \rangle - \langle \gamma', T \rangle \langle J, \gamma' \rangle] \\ &= K \langle J, T \rangle \end{aligned}$$

y como la igualdad es válida para todo  $T \in \chi(M)$ , se sigue que

$$R(\gamma', J, \gamma') = KJ$$

Este último implica que la ecuación de Jacobi para variedades de curvatura seccional

constante tiene la siguiente expresión:

$$\frac{D^2 J}{dt} + KJ = 0$$

Como se puede observar se trata de una ecuación lineal con coeficientes constantes y cuya solución para las condiciones iniciales  $J(0)$  y  $J'(0) = w(0)$  es lo siguiente :

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}w(t), & \text{si } K > 0 \\ tw(t), & \text{si } K = 0 \\ \frac{\text{senh}(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}w(t), & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

con  $w \in \chi(M)$  paralelo y cumpliendo  $\|w(t)\| = 1$ .

Según la solución de la ecuación anterior, se resalta los siguientes tres casos:

- $K > 0$ . En este caso,  $\frac{\text{sen}(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}w(t)$ , tiene sus ceros en los múltiplos enteros de  $\frac{\pi}{K}$ . Esto nos dice que el primer valor conjugado de cero a lo largo de una geodésica parametrizada por longitud de arco en  $M$  con  $K > 0$  aparece en  $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ .
- $K = 0$ . Ahora es,  $J = tw(t)$ , que no se anula salvo en  $t = 0$ . Es decir; en una variedad riemanniana llana no existen valores conjugados de cero a lo largo de ninguna geodésica.
- $K < 0$ . Así,  $J = \frac{\text{senh}(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}w(t)$ , que tampoco se anula salvo en  $t = 0$ , por lo que en una variedad riemanniana con curvatura seccional constante negativa no hay valores conjugados de cero a lo largo de ninguna geodésica.

**Observación 2.2.6.3.** Si  $M$  es una variedad de curvatura seccional constante igual a 1 y  $W$  un campo paralelo unitario a lo largo de una geodésica  $\gamma$  entonces, el campo de Jacobi  $J$  a lo largo de  $\gamma$  con condiciones iniciales  $J(0) = 0$  y  $J'(0) = W(0)$  es dado por

$$J(t) = \text{sen}(t).W(t).$$

**Observación 2.2.6.4.** Un campo de Jacobi a lo largo de una geodésica  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = v$ , con las condiciones iniciales  $J(0) = 0$  y  $J'(0) = w$  se puede expresar en términos de la aplicación exponencial, esto es :

$$J(t) = d(\exp_p)_{tv}(tw) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)).$$

Los campos de Jacobi son campos vectoriales que dan información sobre la manera en que se distribuyen las geodésicas en una variedad. Es decir, formalizan el concepto de que tan rápido las geodésicas que salen de un mismo punto se alejan. Por otro lado, los campos de Jacobi están definidos a lo largo de una geodésica, si estos campos se llegan a anular en dos puntos diferentes, entonces a estos puntos se les llamará puntos conjugados, cuya definición se da a seguir.

**Definición 2.2.6.2.** Sea  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica. El punto  $\gamma(t_0)$  se dice que es conjugado a  $\gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$  si para  $t_0 \in (0, l]$ , existe un campo de Jacobi  $J$  a lo largo de  $\gamma$  no idénticamente cero, con  $J(0) = 0 = J(t_0)$ . El número máximo de tales campos linealmente independientes es llamado la multiplicidad del punto conjugado  $\gamma(t_0)$ . (Do Carmo, 2015, p. 129)

**Observación 2.2.6.5.**



- Si  $\gamma(t_0)$  es conjugado a  $\gamma(0)$ , entonces  $\gamma(0)$  es conjugado a  $\gamma(t_0)$ .
- Si la dimensión de  $M$  es  $n$  entonces existen exactamente  $n$  campos de Jacobi linealmente independientes a lo largo de la geodésica  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ , los cuales son cero en  $\gamma(0)$ .
- El campo de Jacobi  $J(t) = t\gamma'(t)$  nunca se anula para  $t \neq 0$  se deduce de ahí que la multiplicidad de un punto conjugado nunca excede  $n - 1$ .

**Definición 2.2.6.3.** El conjunto formado de los primeros puntos conjugados a un punto  $p \in M$ , de todas las geodésicas que salen de  $p$ , es llamado lugar de los puntos conjugados de  $p$  y es denotado por  $C(p)$ . (Do Carmo, 2015, p. 129)

**Observación 2.2.6.6.** Sea la variedad  $M = \mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$  con la métrica usual. De la observación (2.2.6.3) la esfera  $\mathbb{S}^n$  tiene curvatura seccional escalar igual a 1 y de la observación (2.2.6.2) si  $K = 1$ , entonces  $J(t) = \sin(t)w(t)$  es un campo de Jacobi en  $\mathbb{S}^n$  con condiciones iniciales  $J(0) = 0$ ,  $J'(0) = w(0)$  y cualquier geodésica  $\gamma$ . Así, puesto que  $J(0) = J(\pi) = 0$ , se tiene que  $\gamma(0)$  y  $\gamma(\pi)$  son conjugados a lo largo de cualquier geodésica  $\gamma$ . Es decir, el punto antípoda  $\gamma(\pi)$  de  $\gamma(0)$  es conjugado de  $\gamma(0)$ .

A continuación, se presenta un resultado importante que relaciona puntos conjugados con las singularidades de la aplicación exponencial.

**Proposición 2.2.6.1.** Sean  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica y  $t_0 \in [0, l]$  con  $\gamma(0) = p$ ,  $v = \gamma'(0)$ . El punto  $q = \gamma(t_0)$ ,  $t_0 \in (0, l]$ , es conjugado de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  si, y solamente si,  $v_0 = t_0\gamma'(0)$  es un punto crítico de  $\exp_p$ , asimismo la multiplicidad de  $q$

como punto conjugado de  $p$  es igual a la dimensión del núcleo de la aplicación lineal  $(d \exp_p)_{v_0}$ . (Do Carmo, 2015, p.130)

De la proposición (2.2.6.1), se entiende también que el plano tangente a la aplicación exponencial es descrito por campos de Jacobi a lo largo de geodésicas radiales como se muestra en la figura (II.4). (Gallot, 1990, p. 122)

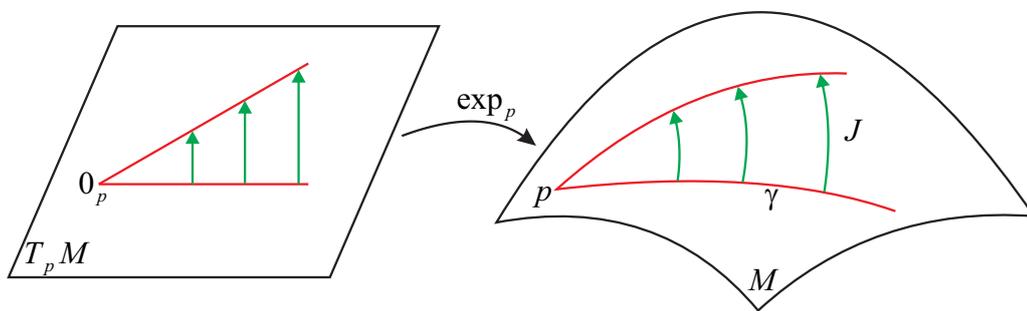


Figura II.4: La aplicación exponencial y los campos de Jacobi.

### 2.2.7. Variedades Completas

La definición que se presenta a continuación tiene el propósito de definir una variedad geodésicamente completa, a través de la aplicación exponencial.

**Definición 2.2.7.1.** Una variedad Riemanniana  $M$  es geodésicamente completa, si para todo  $p \in M$ , la aplicación exponencial  $\exp_p$  está definida para todo  $v \in T_p M$ ; es decir las geodésicas  $\gamma(t)$  que parten de  $p$  están definidas para para todos los valores del parámetro  $t \in \mathbb{R}$ . (Do Carmo, 2015, p. 161)

Un resultado interesante del concepto de completos es el siguiente teorema.



**Teorema 2.2.7.1. (Hopf-Rinow)** Sea  $M$  una variedad Riemanniana y sea  $p \in M$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- a)  $\exp_p$  está definida en todo el  $T_p M$ .
- b) Los conjuntos cerrados y acotados en  $M$  son compactos.
- c)  $M$  es completa como espacio métrico.
- d)  $M$  es geodésicamente completa.
- e) Existe una sucesión de compactos  $K_n \subset M$ ,  $K_n \subset \text{int}K_{n+1}$  y  $\bigcup_n K_n = M$ , tales que si  $q_n \notin K_n$  entonces  $d(p, q_n) \rightarrow +\infty$ .

$\text{int}A =$  interior del conjunto  $A$ . (Do Carmo, 2015, p.162)

En particular cada una de las afirmaciones anteriores implica que, en una variedad completa siempre hay una longitud que minimiza la geodésica entre dos puntos en la variedad esto es, para todo  $q \in M$  existe una geodésica  $\gamma$  uniendo  $p$  a  $q$  con  $l(\gamma) = d(p, q)$ .

### 2.2.8. Fórmulas de Variación de la Energía y Sus Aplicaciones

La longitud no es un buen funcional para estudiar geodésicas porque no distingue reparametrizaciones. La energía es un funcional similar a la longitud, pero con la propiedad de que distingue reparametrizaciones, es por ello que en esta subsección se introduce las fórmulas de variación de la energía únicamente en curvas diferenciables en el que se caracteriza las geodésicas como los puntos críticos de este. También se estudia el teorema de Bonnet-Meyers que más adelante será útil para la acotación del diámetro de una variedad con especial restricción sobre su curvatura seccional y por último se enuncia el corolario de Syng.

**Proposición 2.2.8.1. (Primera forma fundamental de variación de la energía).**

Sea  $\alpha : [0, a] \rightarrow M$  una curva diferenciable y  $f : [0, a] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  una variación de  $\alpha$  con campo variacional  $V(t)$ . Si  $E : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  es la energía de  $f$ , entonces;

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{ds}(0) = - \int_0^a \langle V(t), \frac{D\alpha'}{dt} \rangle dt + \langle V(a), \frac{d\alpha}{dt}(a) \rangle - \langle V(0), \frac{d\alpha}{dt}(0) \rangle, \quad s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

(Martos, 2014, p.27)

- Gracias a la primera fórmula de variación de la energía, se puede caracterizar las geodésicas como los puntos críticos de la funcional energía para variaciones propias.
- La razón principal de que se estudie la energía y no la longitud para descubrir hasta cuánto minimiza la distancia una geodésica, es porque los únicos mínimos de la energía son las geodésicas que minimizan la longitud.
- Las geodésicas son los puntos críticos de la funcional energía. Ahora se trata de estudiar el hessiano de dicho funcional en un punto crítico, para obtener información sobre cuándo una geodésica es un mínimo para la energía.

**Proposición 2.2.8.2. (Segunda forma fundamental de variación de la energía)** Sea  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  una geodésica y  $f : [0, a] \times (-\infty, +\infty) \rightarrow M$  una variación diferenciable de  $\gamma$  con campo variacional  $V$  y  $E(s)$  es la energía de dicha variación, se tiene:

$$\frac{1}{2} E''(0) = - \int_0^a \langle V(t), \frac{D^2V}{dt^2} + R(\frac{d\gamma}{dt}, V, \frac{d\gamma}{dt}) \rangle dt$$

donde  $R$  es el tensor de curvatura de 3 variables de  $(M, g)$ . (Martos, 2014, p.28)

Una aplicación inmediata de la segunda fórmula de variación es el teorema de Bonnet-Meyers que a continuación se presenta.

**Teorema 2.2.8.1. ( Bonnet-Meyers)** *Sea  $M$  una variedad completa de dimensión  $n$ . Si la curvatura de Ricci de  $M$  satisface*

$$Ric_p(X, Y) \geq \frac{1}{r^2} > 0, \quad r \neq 0$$

*para algún  $r$  y para cada  $p \in M$  y  $X, Y \in T_p M$ , entonces  $M$  es compacta y su diámetro cumple  $diam(M) \leq \pi r$ . (Martos, 2014, p.28)*

El resultado anterior afirma que una variedad completa cuya curvatura es positiva y no se aproxima a cero es compacta, y su diámetro puede ser estimado en términos de su curvatura, esto hace evidente la influencia de la curvatura de Ricci en la topología de la variedad.

Una consecuencia inmediata del teorema de Bonnet-Meyers que afirma que el número de elementos del grupo fundamental de una variedad compacta es finita, es el siguiente corolario.

**Corolario 2.2.8.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa con curvatura seccional*

$$K \geq \frac{1}{r^2} > 0$$

*entonces  $M$  es compacta, el diámetro  $diam(M) \leq \pi r$  y  $\pi_1(M)$  es finito. (Do Carmo, 2015, p. 223)*

**Observación 2.2.8.1.** La estimación para el diámetro dada por el teorema (2.2.8.1) es única en el siguiente sentido. Sea la esfera unitaria  $\mathbb{S}^n$  con la topología de subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , por el teorema (2.2.7.1) es completa porque goza de compacidad por ser cerrada y acotada. Entonces debido a la completitud verifica la condición  $Ric_p(X, Y) \geq \frac{1}{r^2} > 0$ , ya que la curvatura seccional de  $\mathbb{S}^n$  es 1 y por ende la curvatura de ricci es también igual a 1 y  $diam(\mathbb{S}^n) = \pi$ . Además, por el corolario (2.2.8.1)  $\pi_1(\mathbb{S}^n)$  es finito. Por otro lado sea  $M$  una variedad completa con  $Ric_p(v) \geq \frac{1}{r^2}$ , para todo  $p \in M$  y todo  $v \in T_pM$ ; si  $diam(M) = \pi r$ , entonces  $M$  es isométrica a la esfera  $\mathbb{S}^n$  de curvatura  $\frac{1}{r^2}$ .

El siguiente resultado, afirma la conexidad de una variedad compacta, orientable, de dimensión par y curvatura positiva.

**Corolario 2.2.8.2. (Syng)** *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta con curvatura seccional positiva.*

- a) *Si  $M$  es orientable de dimensión par, entonces  $M$  es simplemente conexa.*
- b) *Si  $M$  es de dimensión impar, entonces  $M$  es orientable. (Do Carmo, 2015, p. 228)*

Para finalizar esta subsección, se presenta un resultado que va relacionado con la variación y la existencia de puntos conjugados a lo largo de una curva.

**Proposición 2.2.8.3.** *Sea  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  un segmento geodésico en  $M$  tal que  $\gamma(a)$  no es conjugado a  $\gamma(0)$ . Entonces  $\gamma$  no posee puntos conjugados en  $(0, a)$  sí, y solamente si para toda variación propia de  $\gamma$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $E(s) > E(0)$  para  $0 < |s| < \delta$ . En particular si  $\gamma$  es minimizante, entonces  $\gamma$  no posee puntos conjugados en  $(0, a)$ . (Do Carmo, 2015, p. 274)*

### 2.2.9. Teoremas de la Comparación de Rauch

El teorema de Rauch es uno de los resultados fundamentales que expresa el hecho de que si las curvaturas aumentan las longitudes disminuyen. Es decir, con el teorema se relaciona o se compara las longitudes de las curvas entre dos variedades. En esta subsección se mencionarán solamente dos aplicaciones inmediatas del teorema de Rauch que serán fundamentales en la demostración del teorema de la esfera. La primera aplicación permite encontrar la posición de los puntos conjugados acotando la distancia entre estos puntos a lo largo de una geodésica y la segunda permite estimar las longitudes de las curvas entre dos variedades.

**Proposición 2.2.9.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión  $n$  y sea  $\gamma$  una geodésica de  $M$ . Si la curvatura seccional  $K$  de  $M$  satisface la siguiente desigualdad*

$$0 < L \leq K \leq H,$$

*para ciertos  $H$  y  $L$  constantes y positivos entonces la distancia  $d$  entre dos puntos conjugados consecutivos a lo largo de  $\gamma$  satisface:*

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}}.$$

*(Do Carmo, 2015, p. 241)*

**Proposición 2.2.9.2.** *Sean  $M$  y  $\tilde{M}$  variedades riemannianas y supóngase que para todo  $p \in M$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$ ,  $\sigma \subset T_p M$  y  $\tilde{\sigma} \subset T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ , se tiene que  $\tilde{K}_{\tilde{p}}(\tilde{\sigma}) \geq K_p(\sigma)$ . Sean  $p \in M$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  y sea una isometría lineal  $I : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ . Sea  $r > 0$  tal que la restricción  $\exp_p |_{B_r(0)}$  sea un difeomorfismo y  $\exp_{\tilde{p}} |_{\tilde{B}_r(0)}$  sea no singular. Sea  $c : [0, a] \rightarrow \exp_p(B_r(0)) \subset M$  una curva diferenciable y defina una curva  $\tilde{c} : [0, a] \rightarrow \exp_{\tilde{p}}(\tilde{B}_r(0)) \subset \tilde{M}$  por*



$$\tilde{c}(s) = \exp_{\tilde{p}} \circ I \circ \exp_p^{-1}(c(s)), \quad s \in [0, a].$$

*Entonces  $l(c) \geq l(\tilde{c})$ . (Do Carmo, 2015, págs.241-242)*

De la proposición anterior, se tiene que la longitud de una curva  $\tilde{c}$  que está en la variedad  $\tilde{M}$  es definida por la composición de funciones que van de la otra variedad  $M$ .



## CAPÍTULO III

### MATERIALES Y MÉTODOS

#### 3.1. MATERIALES

La presente investigación es descriptiva, por la naturaleza que tienen las investigaciones de ciencias básicas y de matemática pura, en el que no existe población y muestra para el estudio. Por lo que los materiales que se utiliza en su mayoría son aquellos que están orientados al conocimiento teórico científico .

En este caso los materiales que se utilizó son:

- Informaciones documentales adquiridas de textos, artículos, revistas y tesis, estas últimas fueron obtenidas de las fuentes bibliográficas especializadas en geometría diferencial, geometría riemanniana y topología, las mismas que pueden ser vistas en la revisión bibliográfica.
- Otros materiales que también fueron de gran utilidad son: la laptop, internet, hojas, pizarra, lapiceros y plumones.

#### 3.2. MÉTODOS

El presente trabajo de investigación “cota de Klingenberg en la demostración de la extensión del teorema de la esfera a variedades riemannianas”, por la modalidad y por naturaleza corresponde a un proyecto de investigación de tipo cualitativo, esto implica la utilización y recojo de conceptos, en razón de analizar y demostrar el problema, mediante la descripción, interpretación y comprensión hermenéutica de los procesos y resultados para contrastar la prueba de la hipótesis.



La demostración del teorema de la esfera en variedades riemannianas, es un estudio teórico, analítico, descriptivo, explicativo y demostrativo, lo cual implica la utilización del método deductivo que se lleva a cabo bajo las siguientes etapas:

- En primer lugar, la investigación se respalda con bibliografía especializada de los textos Do Carmo (2015), Cheeger (2008) y en los artículos de las estimaciones de radio de inyectividad de Klingenberg (1959, 1961), Yu (2013) y en el trabajo de Martos (2014), el trabajo fue ampliar y profundizar sobre el teorema de la esfera para visualizar su extensión de superficies a variedades riemannianas. En otras palabras, el trabajo fue definir y demostrar que, cualquier superficie compacta con curvatura constante unitaria y positiva de  $\mathbb{R}^3$  es una esfera en variedades riemannianas de dimensión  $n > 3$ .
- En segundo lugar, para el logro del objetivo de esta investigación, se recopiló una gran variedad de teorías de geometría riemanniana y se estudia algunos resultados que son de utilidad específica.
- En tercer lugar, se centra el estudio al propósito fundamental que es la demostración del problema bajo las siguientes etapas:
  1. Se define punto de corte y lugar de corte.
  2. Se presentan algunos resultados que identifican propiedades de punto de corte y lugar de corte.
  3. Se define radio de inyectividad.
  4. Se presentan las estimaciones de radio de inyectividad de Klingenberg y la cota de Klingenberg.
  5. Se presentan lemas auxiliares al teorema de la esfera en variedades riemannianas.



6. Se demuestra el homeomorfismo entre  $S^n$  y  $M$ , que justifica la extensión del teorema de la esfera a variedades riemannianas.

Durante la etapa de ejecución de la investigación se aplica una gran profundidad de técnicas y estrategias como la concentración, análisis y comprensión de todos los materiales que han sido considerados necesarios e importantes y por último, en la finalización se realiza una evaluación de resultados y algunas recomendaciones.



## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se expone el resultado principal de la tesis, cuyo objetivo es la demostración de la extensión del teorema de la esfera definido en  $\mathbb{R}^3$  a variedades riemannianas de dimensión  $n > 3$ . El desarrollo es elaborado en base a los trabajos de Klingenberg (1959, 1961), Martos (2014) y Yu (2013). La forma que adopta este capítulo es la de Do Carmo (2015) y la forma que adopta el teorema principal es la de Cheeger (2008).

La demostración del resultado principal consiste en acotar la curvatura de una variedad de dimensión  $n > 3$  con la cota de Klingenberg, esto se hace posible mediante la estimación del radio de inyectividad de la variedad. El objetivo de esta estimación es para darle una estructura a la variedad de manera que esta sea homeomorfa a la esfera, siendo ésta última también una variedad.

Para lograr la descripción anterior se requiere de un material profundo y denso, más de lo expuesto en la parte del marco teórico, razón por la cual se desarrollará bajo el siguiente criterio, primero se introducirá algunas definiciones, propiedades y resultados fundamentales de punto de corte, lugar de corte y radio de inyectividad, enseguida se establecerá los teoremas de Klingenberg, que serán piezas fundamentales en la prueba del teorema principal, luego se presentará algunos lemas que conducen directamente al teorema de la esfera y finalmente se presentará el teorema principal con la respectiva exposición de su demostración.

#### 4.1. Punto de Corte, Lugar de Corte y Radio de Inyectividad

En esta sección se expone conceptos, propiedades y algunos resultados de punto de corte y lugar de corte donde, por punto de corte se entiende como el punto donde una geodésica deja de ser minimizante y que a partir de ese punto es el comienzo del primer punto conjugado y por lugar de corte se entiende como el conjunto de todos los puntos de corte. También se expone sobre el radio de inyectividad. Todo esto con el objetivo de entender las estimaciones de Klingenberg que se presentará más adelante y posteriormente la demostración del teorema de la esfera en variedades.

Para abordar el tema se considerará variedades riemannianas completas, geodésicas normalizadas  $\gamma$  definida de la forma  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  y se denotará por  $\gamma_v$  a la única geodésica minimizante definida de la forma  $\gamma_v : [0, +\infty) \rightarrow M$  con  $\gamma_v = p$  y  $\gamma'_v(0) = v$ .

Previo a las definiciones y propiedades de punto de corte y lugar de corte se describe lo siguiente.

Sea  $M$  una variedad riemanniana completa, sea  $p \in M$ , y sea  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  una geodésica con  $\gamma(0) = p$ , para  $t \in [0, +\infty)$  suficientemente pequeño,  $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ , esto es,  $\gamma([0, t])$  es una geodésica minimizante, por causa de propiedades minimizantes si  $\gamma$  es minimizante entonces no tiene puntos conjugados. Además, si  $\gamma([0, t_0])$  no es minimizante tampoco lo es para todo  $t > t_1$  y no minimiza la distancia entre  $p$  y  $\gamma(t_0)$ . Por continuidad, el conjunto de los números  $t > 0$  para los cuales  $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$  es de la forma  $[0, t_0]$  o  $[0, +\infty)$ . Si el conjunto es de la primera forma entonces  $\gamma(t_0)$  es llamado punto de corte y si toma el segundo caso se dice que el punto de corte no existe, como se

observa en la figura (IV.1).

Lo expuesto anteriormente se resume en la siguiente definición.

**Definición 4.1.1. (Punto de corte)** Sean un punto  $p \in M$  y  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  una geodésica con  $\gamma(0) = p$  en  $M$ . Se llama punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  al punto  $\gamma(t_0)$ , con  $t_0$  cumpliendo:

$$\xi = \{t > 0 : d(p, \gamma(t)) = t\} = [0, t_0].$$

Si el conjunto  $\xi$  es igual a  $[0, +\infty)$ , entonces no existe el punto de corte.

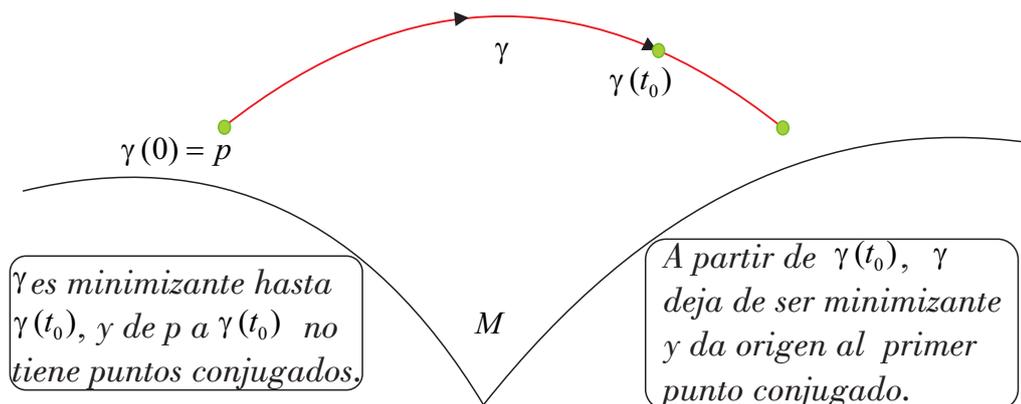


Figura IV.1: Punto de corte.

**Observación 4.1.1.** El conjunto de los números  $t > 0$  para los cuales  $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$  es de la forma  $[0, t_0]$  o  $[0, +\infty)$  expresando simbólicamente se tiene:

- i) El conjunto  $\{t > 0 : d(\gamma(0), \gamma(t)) = t\} = [0, t_0]$ ,  $\gamma$  es geodésica minimizante y no tiene puntos conjugados hasta el punto  $\gamma(t_0)$ .
- ii) El conjunto  $\{t > 0 : d(\gamma(0), \gamma(t)) = t\} = [0, +\infty)$ , no existe el punto de corte.

La unión de los puntos de corte es el lugar de corte como se puede observar en la figura (IV.2).

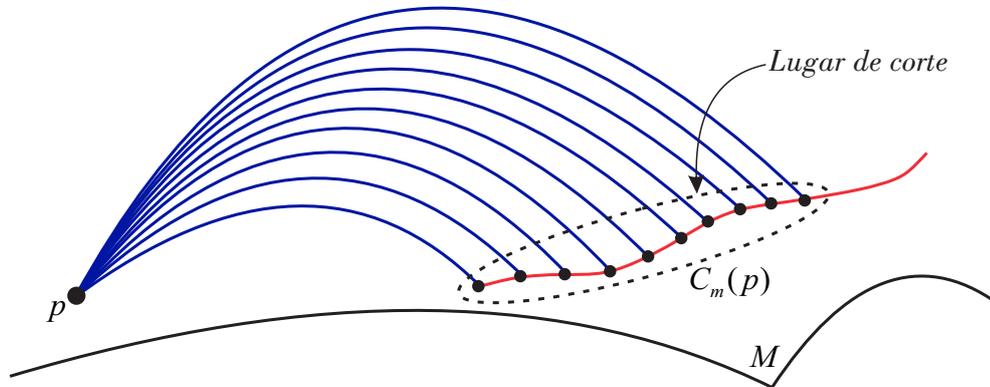


Figura IV.2: Lugar de corte.

**Definición 4.1.2. (Lugar de corte)** Dado  $p \in M$ , se conoce como lugar de corte de  $p$  al conjunto  $C_m(p)$ , formado por la unión de todos puntos de corte de  $p$  a lo largo de todas las geodésicas que parten del punto  $p$ .

**Observación 4.1.2.** Si  $M$  es la esfera  $\mathbb{S}^n$  unitaria con curvatura constante  $K = cte = 1$ , y  $p \in \mathbb{S}^n$ , entonces todas las geodésicas que salen de ese punto son minimizantes hasta llegar al punto antípoda y a partir de allí dejan de ser. Para cada  $p \in \mathbb{S}^n$ , se tiene una bola abierta  $B(0_p, \pi)$  tal que  $\exp_p(B(0_p, \pi)) = \mathbb{S}^n / \{-p\}$  y  $C_m(p) = \{-p\}$ , esto significa que el lugar de corte de  $p$  es el punto antípoda  $-p$ . Además, se puede observar que en la esfera el lugar de corte de  $p$  coincide con el lugar de los puntos conjugados a  $p$  como se muestra en la figura (IV.3). (Gallot, 1990, p. 102)

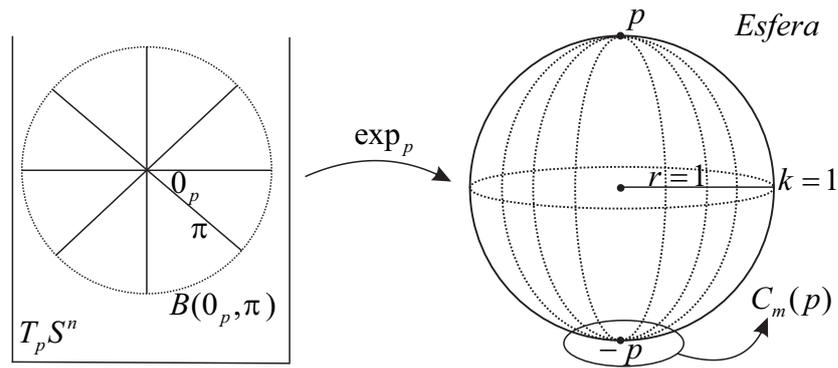


Figura IV.3: Lugar de corte en la esfera.

Se debe resaltar que el lugar de corte se ha estudiado activamente en geometría diferencial global, ya que fue introducido para superficies por Henri Poincaré en 1905. Para variedades riemannianas, el lugar de corte fue introducido por Alfred North Whitehead en 1935 y con mayor interés fue reanimado en 1959 por Wilhelm Klingenberg para mejorar el “pinching”, traducido viene a ser pinzamiento de una variedad en el teorema de la esfera. (Do Carmo, 2015, p. 296)

Determinar la estructura de lugar de corte de un punto en una variedad riemanniana es muy difícil, lo que lleva a plantear las siguientes preguntas ¿Cómo es que se puede identificar donde está el lugar de corte? ¿cómo es que un punto de corte se forma? y ¿cuáles son los mecanismos que hacen que una geodésica deja de ser minimizante?. La siguiente proposición que se presenta muestra que existen dos únicos mecanismos que producen punto de corte y lo relaciona con los puntos conjugados.

**Proposición 4.1.1.** *Sea  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  una geodésica y  $\gamma(t_0)$  el punto de corte de  $p = \gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$ . Entonces por lo menos, una de las siguientes afirmaciones es verdadera:*

a)  $\gamma(t_0)$  es el primer punto conjugado de  $p$  a lo largo de la geodésica  $\gamma$ .

b) Existe  $\sigma \neq \gamma$  una geodésica uniendo  $p$  y  $\gamma(t_0)$  tal que  $l(\sigma) = l(\gamma)$ .

Por otro lado, si se tiene a) o b), entonces existe  $0 < \tilde{t} \leq t_0$  tal que  $\gamma(\tilde{t})$  es el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ . (Do Carmo, 2015, p. 296)

### Demostración

Sea  $t_0 \in [0, +\infty)$  en las condiciones de la proposición (4.1.1) y sea  $\{t_0 + \epsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión con  $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$  se tiene el punto  $\gamma(t_0 + \epsilon_k)$  y una sucesión de geodésicas minimizantes  $\sigma_k$  uniendo los puntos  $p$  a  $\gamma(t_0 + \epsilon_k)$  asociada a una sucesión  $\{\sigma'_k(0)\}_{k=1}^{\infty} \subset T_p M$  de sus vectores tangentes en  $p$ , donde para cada  $k \in \mathbb{N}$  cumplen  $\|\sigma'_k(0)\| = 1$  y que están contenidos en una bola unidad compacta de  $T_p M$ . En consecuencia, existe una subsucesión tal que  $\{\sigma'_k(0)\}_{k=1}^{\infty}$  converge.

Entonces existe una geodésica  $\sigma$  asociada a  $\sigma'$  al que converge la subsucesión  $\{\sigma'_k(0)\}_{k=1}^{\infty}$  tal que

$$\sigma'_k(0) \rightarrow \sigma'(0)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma'(k) = \sigma'(0) \in T_p M.$$

Por continuidad,  $\sigma$  es una geodésica minimizante uniendo  $p$  y  $\gamma(t_0)$ . Luego se cumple  $l(\sigma) = l(\gamma)$ , ya que  $\gamma(t_0)$  es punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ . De lo anterior, se deduce lo siguiente:

- Si  $\sigma \neq \gamma$ , entonces se cumple el enunciado (b)
- Si  $\sigma = \gamma$ , entonces se cumple el enunciado (a)

Primero se mostrará que (a) se cumple. Por la proposición (2.2.6.1), que relaciona puntos conjugados y las singularidades de la aplicación exponencial, bastará probar que  $d(\exp_p)$  es singular en  $t_0\gamma'(0)$ . Es decir, que  $t_0\gamma'(0)$  es un punto crítico de  $\exp_p$  esto implica que  $d(\exp_p)$  es singular a  $t_0\gamma'(0)$ .

En efecto, suponiendo que  $d(\exp_p)$  es no singular en  $t_0\gamma'(0)$ . Entonces existen vecindades,  $U \subset T_pM$  de  $t_0\gamma'(0)$  y  $V \subset M$  de  $\gamma(t_0)$  tal que:

$$\exp_p : U \rightarrow V \text{ con } V = \exp_p(U)$$

es un difeomorfismo. Por definición de  $\sigma_k$ ,  $\gamma(t_0 + \epsilon_k) = \sigma_k(t_0 + \epsilon'_k)$  y además, por ser  $\sigma_k$  minimizante para cada  $k \in \mathbb{N}$  se tiene que,

$$t_0 + \epsilon'_k = l_0^{t_0 + \epsilon'_k}(\sigma_k) \leq l_0^{t_0 + \epsilon_k}(\gamma) = t_0 + \epsilon_k, \forall k \in \mathbb{N},$$

luego  $0 < \epsilon'_k \leq \epsilon_k$  y puesto que  $\{\epsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$  tiene límite 0, lo mismo ocurre con  $\{\epsilon'_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Por tanto,

$$\lim_k (t_0 + \epsilon'_k)\sigma'_k(0) = t_0\gamma'(0)$$

$$\lim_k (t_0 + \epsilon'_k)\sigma'_k(0) = \lim_k (t_0 + \epsilon_k)\gamma'(0)$$

en consecuencia, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \geq k_0$  se tiene que  $(t_0 + \epsilon'_k)\sigma'_k(0)$  y  $(t_0 + \epsilon_k)\gamma'(0)$  pertenecen a  $U$  como se muestra en la figura (IV.4).

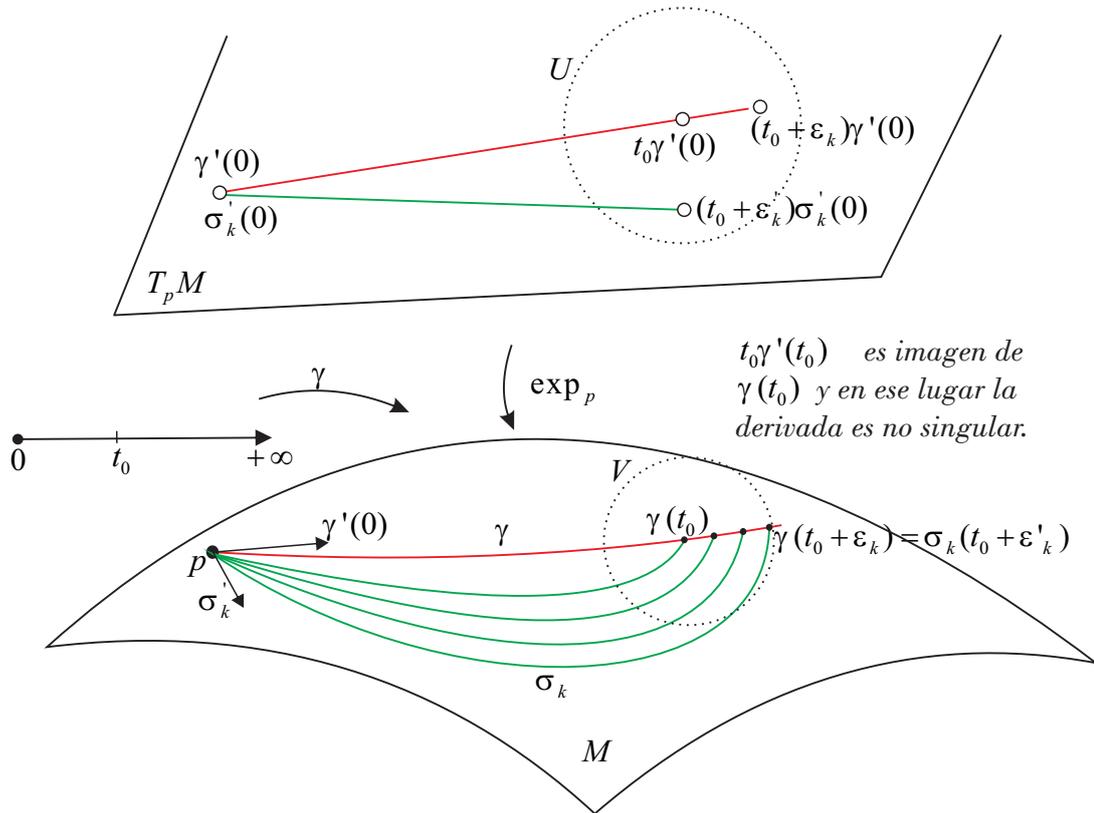


Figura IV.4: Caracterización de los puntos conjugados en un entorno  $U \subset T_p M$ .

Para  $k \geq k_0$  se tiene también que

$$\exp_p(t_0 + \epsilon_k)\gamma'(0) = \gamma(t_0 + \epsilon_k)$$

$$\exp_p(t_0 + \epsilon_k)\gamma'(0) = \sigma_k(t_0 + \epsilon'_k)$$

$$\exp_p(t_0 + \epsilon_k)\gamma'(0) = \exp_p(t_0 + \epsilon'_k)\sigma'_k(0).$$

Además, por ser  $\exp_p$  un difeomorfismo en  $U$  se cumple que

$$(t_0 + \epsilon_k)\gamma'(0) = (t_0 + \epsilon'_k)\sigma'_k(0), \quad \gamma'(0) = \sigma'_k(0) \quad \forall k \geq k_0.$$

Por la homogeneidad de las geodésicas se tiene que  $\gamma$  y  $\sigma_k$  son la misma geodésica, lo

que contradice la definición de  $t_0$ . El hecho anterior es una contradicción porque  $\sigma_k$  es minimizante en  $\gamma(t_0 + \epsilon'_k)$  y  $\gamma$  no lo es, porque  $\gamma(t_0)$  es un punto de corte a lo largo de  $\gamma$ .

Recíprocamente, suponiendo que se cumple el enunciado a). Esto es,  $\gamma(t_0)$  es el primer punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ . Por la proposición (2.2.8.3), se tiene que  $\gamma$  no minimiza distancias después del primer punto conjugado entonces el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  ocurre en  $\gamma(\tilde{t}), t \leq t_0$ .

Segundo se mostrará que (b) se cumple. Sea  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño de manera que  $\sigma(t_0 - \epsilon)$  y  $\gamma(t_0 + \epsilon)$  se encuentren contenidos en una vecindad totalmente normal de  $\gamma(t_0)$  y considérese  $\tau$  como la única geodésica minimizante que une  $\sigma(t_0 - \epsilon)$  y  $\gamma(t_0 + \epsilon)$  como se observa en la figura (IV.5). Se puede observar que la curva  $\sigma|_{[0, t_0 - \epsilon]} \cup \tau$  tiene longitud estrictamente menor que  $t_0 + \epsilon$ . En efecto,

$$\begin{aligned} l(\sigma|_{[0, t_0 - \epsilon]} \cup \tau) &= l_0^{t_0 - \epsilon}(\sigma) + l(\tau) < l_0^{t_0}(\sigma) + l_0^{t_0 + \epsilon}(\gamma) \\ &= l(\gamma_0^{t_0 + \epsilon}) \\ &= t_0 + \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  ocurre en  $\gamma(\tilde{t})$  con  $\tilde{t} \leq t_0$ . ■

Una variedad riemanniana compacta  $M$  para el cual, el lugar de corte  $C_m(p)$  de todo punto  $p \in M$  se reduce a un único punto es llamado una variedad Wiedersehen. (Do Carmo, 2015, p. 296).

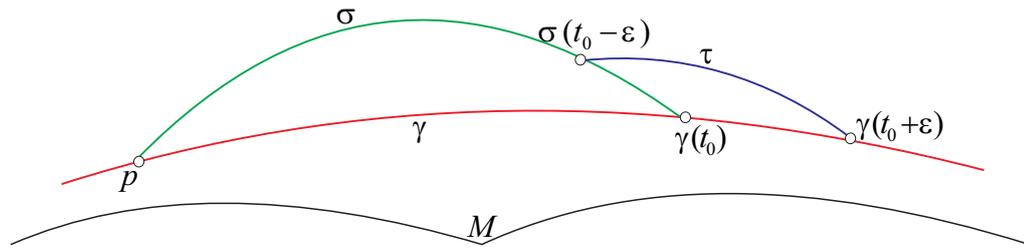


Figura IV.5:  $\tau$  : Es la única geodésica minimizante.  
Do Carmo (2015, p. 298)

De la proposición (4.1.1), se tiene la siguiente consecuencia.

**Corolario 4.1.1.** Sea  $p \in M$ .

- i) Si  $q$  es el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ , entonces  $p$  es el punto de corte de  $q$  a lo largo de  $-\gamma$ . En particular, tenemos que  $q \in C_m(p)$  sí, y solo si,  $p \in C_m(q)$  (como se muestra en la figura IV.6).
- ii) Si  $q \in M - C_m(p)$ , entonces existe una única geodésica minimizante uniendo  $p$  a  $q$ .

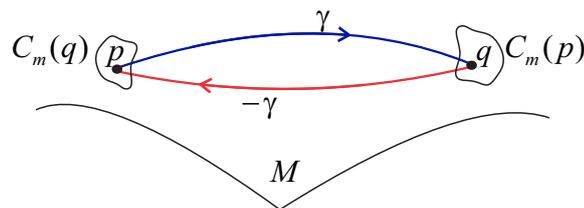


Figura IV.6:  $p$  y  $q$  son puntos de corte uno del otro.

De lo anterior, el ítem ii) asegura que  $\exp_p$  es inyectiva en una bola abierta  $B_r(p)$  centrada en  $p$  sí, y solamente si el radio  $r$  es menor o igual a la distancia de  $p$  a  $C_m(p)$ .

Por esa razón, es usual llamar

$$i(M) = \inf_{p \in M} d(p, C_m(p))$$

el radio de inyectividad de  $M$ . Por otro lado, muestra que también  $M - C_m(q)$  es homeomorfo a una bola abierta del espacio euclidiano, esto indica que la topología de  $M$  está contenida en su lugar de corte (Do Carmo, 2015).

A continuación, se presenta la definición formal del radio de inyectividad.

**Definición 4.1.3. (Radio de inyectividad)** Dada  $M$  una variedad riemanniana y  $p \in M$ , se dice

- Radio de inyectividad en  $p$ , si  $i(p) = d(p, C_m(p))$  (equivalentemente es el radio mayor de bola normal centrada en  $p$ ).
- Radio de inyectividad de  $M$ , si  $i(M) = \inf_{p \in M} d(p, C_m(p))$ .

La siguiente proposición es un poco más general que demuestra que la distancia de un punto  $p \in M$  a su lugar de corte a lo largo de  $\gamma$  depende continuamente en la dirección inicial de  $\gamma$ .

Para la siguiente proposición considérese el fibrado tangente unitario denotado por  $T_1M$  y definido por

$$T_1M = \{(p, v) \in TM; \|v\| = 1\}.$$

**Proposición 4.1.2.** Sea  $T_1M$  el fibrado tangente de  $M$ . La función  $f : T_1M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  definido por:

$$f(\gamma(0), \gamma'(0)) = \begin{cases} t_0, & \text{si } \gamma'(0) \text{ es el punto de corte de } \gamma(0) \text{ a lo largo de } \gamma. \\ \infty, & \text{si el punto de corte a lo largo de } \gamma \text{ no existe.} \end{cases}$$

es continua. (Do Carmo, 2015, p. 300)

### Demostración

Sea la sucesión convergente  $\{\gamma_k(0)\}_{k=1}^{+\infty}$  asociada a la sucesión  $\{\gamma'_k(0)\}_{k=1}^{+\infty}$ . Existe un punto  $\gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$  tal que  $\gamma_k(0) \rightarrow \gamma(0)$  y  $\gamma'_k(0) \rightarrow \gamma'(0)$  de tal forma  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma'_k(0) = \gamma'(0)$ . Sean  $\gamma_k(t_0^k)$  y  $\gamma(t_0)$  puntos de corte de  $\gamma_k(0)$  y  $\gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma_k$  y  $\gamma$ , respectivamente, donde  $t_0^k, t_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Lo que se quiere probar es

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} t_0^k = t_0.$$

- Para probar lo anterior primero se probará que  $\limsup_{k \rightarrow +\infty} t_0^k \leq t_0$ . como  $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  entonces si  $t_0 = +\infty$ , no hay nada que probar. Sea entonces  $t_0 < +\infty, \epsilon > 0$ . Se puede observar que no existen infinitos índices  $n$  tales que  $t_0 + \epsilon < t_0^n$ . Caso contrario

$$d(\gamma_n(0), \gamma_n(t_0 + \epsilon)) = t_0 + \epsilon,$$

y por continuidad de la función distancia se cumple que  $d(\gamma(0), \gamma(t_0 + \epsilon)) = t_0 + \epsilon$ , lo que contradice el hecho de ser  $\gamma(t_0)$  el punto de corte de  $\gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$ . Por lo tanto,  $\limsup_{k \rightarrow +\infty} t_0^k \leq t_0 + \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$  lo que prueba la afirmación hecha.

- Sea ahora  $\bar{t} = \liminf_{k \rightarrow +\infty} t_0^k$ . Como



$$\bar{t} = \liminf_{k \rightarrow +\infty} t_0^k \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} t_0^k \leq t_0,$$

bastará probar que  $\bar{t} \geq t_0$  y con ello se culminaría la prueba.

En efecto, si  $\bar{t} = +\infty$  entonces no hay nada que probar. Sea entonces  $\bar{t} < +\infty$  y sea una subsucesión de la sucesión  $\{t_0^n\}_{n=1}^{+\infty}$  indicada de la misma forma  $\{t_0^n\}_{n=1}^{+\infty}$  que converge a  $\bar{t}$ . Como un punto de acumulación de puntos conjugados es un punto conjugado. Entonces, para todo tal subsucesión, los puntos  $\gamma_j(t_0^n)$  son conjugados de  $\gamma_n(0)$  a lo largo de  $\gamma_n$ , esto implica que  $\gamma(\bar{t})$  es conjugado a  $\gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$ , donde  $\bar{t} \geq t_0$  y se estaría concluyendo la demostración.

Supóngase entonces que existe una subsucesión convergente  $t_0^n \rightarrow \bar{t}$  tal que para todo  $n$ ,  $\gamma_n(t_0^n)$  no es conjugado a  $\gamma_n(0)$  a lo largo de  $\gamma_n$ . Por la proposición (4.1.1) existen geodésicas  $\sigma_n \neq \gamma_n$  con

$$\sigma_0 = \gamma_0, \quad \sigma_n(t_0^n) = \gamma_n(t_0^n) \quad \text{tal que} \quad l(\sigma_n) = l(\gamma_n).$$

Tomando una subsucesión de ser necesario, se puede suponer que  $\sigma_n \rightarrow \sigma$ , donde  $\sigma$  es una geodésica uniendo  $\gamma(0)$  y  $\gamma(\bar{t})$ . Si  $\sigma \neq \gamma$ , entonces por la proposición (4.1.1) se tendría  $t_0 \leq \bar{t}$ , como se quería. Ahora si  $\sigma = \gamma$ , entonces por el argumento de la proposición (4.1.1) del ítem a) se muestra que  $\gamma(\bar{t})$  es conjugado a  $\gamma(0)$ . Por tanto,  $\bar{t} \leq t_0$  ■

Como consecuencia de la proposición (4.1.2), se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 4.1.2.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa.*

- i) Para todo  $p \in M$ , el conjunto  $C_m(p)$  es cerrado. En particular, si  $M$  es compacto, entonces  $C_m(p)$  también es compacto.*
- ii) Existe  $p \in M$ , tal que para toda geodésica partiendo de  $p$  existe el punto de corte, entonces  $M$  es compacta.*

A continuación se enuncia un resultado en el que se muestra cómo, las fórmulas de variación permiten ver lo que ocurre cuando existe un punto  $q \in C_m(p)$  en el cual se alcanza la distancia de  $p$  a  $C_m(p)$  es decir,  $d(p, C_m(p)) = d(p, q)$ .

**Proposición 4.1.3. (Lema de Klingenberg)** *Sea  $p \in M$  y  $q \in C_m(p)$  tal que  $d(p, C_m(p)) = d(p, q) = l$ . En estas condiciones se cumple, al menos una de las siguientes afirmaciones:*

- i) Existe una geodésica minimizante  $\gamma$  que une  $p$  y  $q$ , a lo largo de la cual  $q$  es conjugado a  $p$ .*
- ii) Existen exactamente dos geodésicas minimizantes  $\gamma$  y  $\sigma$  uniendo  $p$  y  $q$ . Además, si  $\gamma$  y  $\sigma$  son las geodésicas minimizantes, se tiene  $\gamma'(l) = -\sigma'(l)$  con  $l = d(p, q)$ .*

*(Do Carmo, 2015, págs.302-303)*

### **Demostración**

Supóngase que  $q$  no es conjugado a  $p$  a lo largo de cualquier geodésica minimizante. Entonces existen dos geodésicas minimizantes  $\gamma$  y  $\sigma$  de longitud  $l = d(p, q)$  uniendo  $p$  a  $q$ .

Asumiendo que  $\gamma'(l) \neq \sigma'(l)$ , entonces existe un vector unitario  $V \in T_q M$  tal que:

$$\langle V, \gamma'(l) \rangle < 0 \quad \text{y} \quad \langle V, \sigma'(l) \rangle < 0.$$

Como  $q$  no es conjugado a  $p$  a lo largo de  $\gamma$ . Entonces, por la caracterización de los puntos conjugados, el punto  $l\gamma'(0)$  no es un punto crítico de  $\exp_p$ . Por lo tanto, existe un entorno  $U$  de  $l\gamma'(0)$  en  $T_p M$  tal que  $\exp_p|_U$  es un difeomorfismo, con  $W = \exp_p(U)$ . Nótese también que  $\exp_p(l\gamma'(0)) = \gamma(l) = q$ , luego  $q \in W$ .

Sea  $\epsilon > 0$ , considérese  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow W$  una curva cumpliendo  $\alpha(0) = q$ ,  $\alpha'(0) = V$  y  $v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  una curva en  $T_p M$  tal que para  $s$  suficientemente pequeño, sea

$$v(s) = (\exp_p|_U)^{-1} \exp_q(sV) \quad \text{y} \quad \exp_p(v(s)) = \alpha(s), \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Usando  $v$  se puede construir una variación de las geodésicas  $\gamma$  y  $\sigma$  de la siguiente manera.

Primero, para  $\gamma$  considérese una la aplicación  $\gamma(s, t) = \gamma_s(t) = \exp_p\left(\frac{t}{l}v(s)\right)$ , con  $t \in [0, l]$ . Nótese que esta aplicación define una variación  $\gamma_s$  de  $\gamma$ , ya que

$$\exp(v(0)) = \alpha(0) = q = \exp_p(l\gamma'(0)),$$

y por ser  $\exp_p$  difeomorfismo en  $U$ , se tiene que  $v(0) = l\gamma'(0)$ . En consecuencia,

$$\gamma(0, t) = \exp_p\left(\frac{t}{l}v(0)\right) = \exp_p(t\gamma'(0)) = \gamma(t), \quad s = 0.$$

Luego por la primera fórmula de variación aplicada a  $\gamma$  y  $\gamma_s(t)$  se tiene que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\gamma_s) = \langle V, \gamma'(l) \rangle < 0$$

es estrictamente negativa en el cero. Por lo que para  $s > 0$  suficientemente pequeño se cumple,  $L(\gamma_s) < L(\gamma)$ . Como se muestra en la figura (IV.7).

Ahora por el mismo argumento, se verá para  $\sigma$ . Como  $q$  no es conjugado de  $p$  a lo largo de  $\sigma$ . Entonces la variación  $\sigma_s(t)$  de  $\sigma$  puede ser definido por la siguiente aplicación

$$\sigma(s, t) = \sigma_s(t) = \exp_p \left( \frac{t}{l} (\exp(\bar{U}))^{-1} \exp_q sV \right)$$

y de la misma forma que para  $\gamma$ , aplicando la primera fórmula de variación se cumple

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\sigma_s) = \langle V, \sigma'(l) \rangle < 0, \quad \sigma_s(l) = \alpha(s)$$

que también es estrictamente negativa. Por tanto,  $L(\sigma_s) < L(\sigma)$  para  $s$  suficientemente pequeño, donde  $\bar{U}$  es una vecindad de  $l(\sigma'(0))$  en  $T_q M$  tal que es un difeomorfismo. Se puede observar que cada  $\gamma_s$  y  $\sigma_s$  son geodésicas de  $p$  a  $\exp_q(sV)$ . Sin embargo, para  $s$  suficientemente pequeño

$$l_s = d(p, \exp_q(sV)) \leq L(\gamma_s) < d(p, q) = i(M) = l,$$

entonces  $\exp_p$  no es inyectiva en  $B_{\frac{l_s+l}{2}}(0) \subset T_p M$ . Lo cual es una contradicción. ■

Para finalizar esta sección, se enuncia un resultado que muestra, que si una varie-

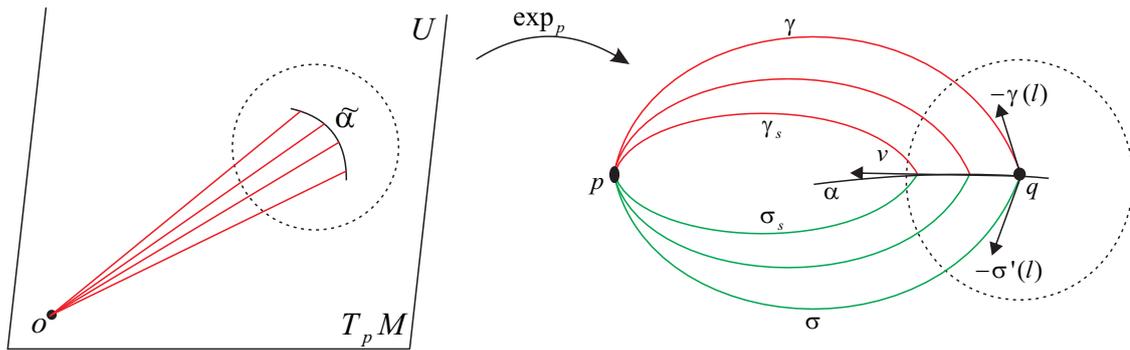


Figura IV.7: Comparación de geodésicas.

dad  $M$  es compacta y tiene curvatura seccional positiva entonces la determinación de una cota inferior para la distancia de un punto a su lugar de corte depende de la determinación de una cota inferior para las longitudes de las geodésicas cerradas de  $M$ .

**Proposición 4.1.4.** *Sea la curvatura seccional  $K$  de una variedad riemanniana completa  $M$  satisfice*

$$0 < K_{min} \leq K \leq K_{max},$$

entonces:

a)  $i(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K_{max}}},$

b) *O existe una geodésica cerrada  $\gamma$  en  $M$ , cuya longitud es menor que cualquier otra geodésica cerrada en  $M$ , tal que*

$$i(M) = \frac{1}{2}l(\gamma).$$

(Do Carmo, 2015, págs.304-305)

### Demostración

a) En las condiciones del enunciado de la proposición (4.1.4),  $M$  es completa con curvatura seccional positiva. Por el teorema de Bonnet-Meyers (2.2.8.1)  $M$  es compacta por ende el fibrado tangente unitario  $T_1M$  también lo es. Entonces, se puede calcular la distancia de un punto  $p \in M$  a su lugar de corte  $C_m(p)$  y además la función distancia por la proposición (4.1.2) es continua. Por tanto, se puede tomar un ínfimo  $r \in M$  sobre  $p$  de manera que esté más próximo a su lugar de corte  $C_m(p)$ . Es decir, existe un  $p \in M$  tal que

$$d(p, C_m(p)) = \inf_{r \in M} d(r, C_m(r)) = i(M) > 0.$$

Como  $C_m(p)$  es compacto, existe  $q \in C_m(p)$  tal que la distancia de  $p$  a  $C_m(p)$  se alcanza en  $q$ . Es decir,

$$d(p, C_m(p)) \leq d(q, C_m(q)) \leq d(p, q).$$

Lo cual implica que  $p$  es también un punto próximo de  $q$ . Entonces,

$$d(p, C_m(p)) = d(p, q).$$

Si  $q$  es conjugado a  $p$  entonces por la proposición (2.2.9.1) se tiene que

$$d(p, q) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K_{max}}}.$$

b) Si  $q$  es conjugado a  $p$ , entonces existe una geodésica minimizante uniendo  $p$  y  $q$ . Pero si  $q$  no es conjugado con  $p$ , por la proposición (4.1.3) existen dos geodésicas minimizantes  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  uniendo  $p$  a  $q$  tales que  $\gamma_1'(l) = -\gamma_2'(l)$  con  $l = d(p, q)$ . Como  $q \in C_m(p)$ , se tiene que  $p \in C_m(q)$  y por su propia definición, la distancia de  $q$  a  $C(p)$  se alcanza en  $p$ . Luego aplicando nuevamente la proposición (2.2.9.1) se deduce que  $\gamma_1'(0) = -\gamma_2'(0)$ . En

consecuencia, gracias a la unión de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  existe una geodésica cerrada  $\gamma$  que cumple

$$i(M) = \frac{1}{2}l(\gamma). \blacksquare$$

**Observación 4.1.3.** En la demostración de la proposición anterior, la unión de dos geodésicas forman una geodésica cerrada cuya longitud es  $l = 2\pi$  y radio de inyectividad  $i(M) = \frac{1}{2}l(\gamma)$ . En conclusión, existe una geodésica cerrada que une dos puntos no conjugados  $p, q$  en  $M$ .

#### 4.2. Teoremas de Estimación del Radio de Inyectividad y la Cota de Klingenberg

En esta sección se establecerá teoremas que relacionan la curvatura seccional de la variedad  $M$  con el radio de inyectividad  $i(M)$ , estos teoremas son las estimaciones del radio de inyectividad, que fueron introducidos por Klingenberg. En primera instancia, estimó para una variedad con curvatura seccional uno, cuando esta era de dimensión par (Klingenberg, 1959). Pero más adelante él mismo extendió su estimación para el caso impar (Klingenberg, 1961) introduciendo una teoría más amplia.

El objetivo de estimar el radio de inyectividad de una variedad  $M$ , es para darle una estructura sobre su curvatura seccional, de manera que sea homeomorfa con la esfera.

**Teorema 4.2.1.** *Si la curvatura seccional  $K$  de una variedad riemanniana  $M$ , compacta, orientable y de dimensión par, satisface  $0 < K \leq 1$ , entonces  $i(M) \geq \pi$ . (Do Carmo, 2015, p. 310)*

#### Demostración

En las condiciones del enunciado  $M$  es compacto, entonces existen  $p \in M$  y  $q \in C_m(p)$  tal que  $d(p, q) = i(M)$ . Supongamos que el teorema no se cumple; es decir,

$$l = d(p, q) < \pi. \quad (\text{IV.1})$$

Entonces, por la proposición (2.2.9.1)  $p$  y  $q$  no son puntos conjugados, y según la observación (4.1.3) existe una geodésica minimizante cerrada  $\gamma$  en  $M$  uniendo  $p = \gamma(0)$  y  $q = \gamma(l)$  cuya longitud es  $i(M) = \frac{1}{2}L(\gamma)$  pues  $d(p, q) = i(M)$  entonces

$$L(\gamma) = 2[i(M)]$$

$$L(\gamma) = 2d(p, q) \text{ por la ecuación (IV.1)}$$

$$L(\gamma) = 2(l) < \pi + \pi$$

$$L(\gamma) = 2(l) < 2\pi.$$

Por el corolario (2.2.8.2) de Synge existe un campo vectorial  $V(t)$  paralelo a lo largo de la geodésica cerrada  $\gamma$ , que deja un vector ortogonal invariante a esta; es decir,

$$V(2l) = V(0) = V_p \in \gamma'(0)^\perp$$

tal que la variación de  $\gamma$  con la variación del campo  $V$  calculando la segunda derivada de la energía  $E''_v(0)$  satisface

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} E(\gamma_s) = - \int R \left( \frac{d\gamma}{dt}, V, \frac{d\gamma}{dt}, V \right) dt < 0.$$

Nótese que la energía es estrictamente negativa. En consecuencia, para  $s \in [0, \epsilon]$  existe

$\gamma_s(t)$  una variación de  $\gamma$  formada por curvas regulares, cerradas y tales que  $L(\gamma_s) < L(\gamma)$  para todo  $s \neq 0$ .

Sean  $p_s = \gamma_s(0)$  y  $q_s = \gamma_s(l_s)$  puntos a lo largo de  $\gamma_s(t)$  con  $t \in [0, l_s]$  y  $s \in [0, \epsilon]$ , donde  $q_s = \gamma_s(l_s)$  es un punto que se encuentra a máxima distancia de  $p_s$ . Como  $\gamma_s$  es una variación de  $\gamma$  entonces se cumple:

$$d(p_s, q_s) < d(p, q) = i(M),$$

tal que existe una única geodésica minimizante  $\sigma_s$  uniendo  $q_s = \sigma_s(0)$  y  $p_s$ . Como  $q$  es el único punto a máxima distancia de  $p$  implica que

$$\lim_{s \rightarrow 0} q_s = q \quad \text{con} \quad q_s = \sigma_s(0),$$

tal que existe una sucesión  $s_i \rightarrow 0$  para que  $\sigma'_{s_i}(0)$  converja a un vector unitario  $W_q \in T_q M$ . Por continuidad  $\sigma(t) = \exp(tW_q)$  es una geodésica minimizante que une  $p$  y  $q$ .

Ahora se demostrará que  $\sigma'(0) \perp \gamma'(l)$ , de modo que  $\sigma$  no sea una de las partes de  $\gamma$ . Como consecuencia se obtendrá tres geodésicas minimizantes que unen  $p$  y  $q$ . Lo que llevará a contradecir la proposición (4.1.3).

En efecto, sea  $\sigma_{s,t}$  la geodésica minimizante de  $p_s = \gamma_s(0)$  a  $\gamma_s(t)$ , donde  $p_s = \gamma_s(0)$  es un punto próximo a  $q_s = \gamma_s(l_s)$ . Luego  $\sigma_{s,t}$  es una variación de  $\sigma_s = \sigma_{s,l_s}$ . Por la elección de  $q_s$  se tiene que  $L(\sigma_{s,t}) \leq L(\sigma_s)$ . Entonces, de acuerdo a la primera fórmula

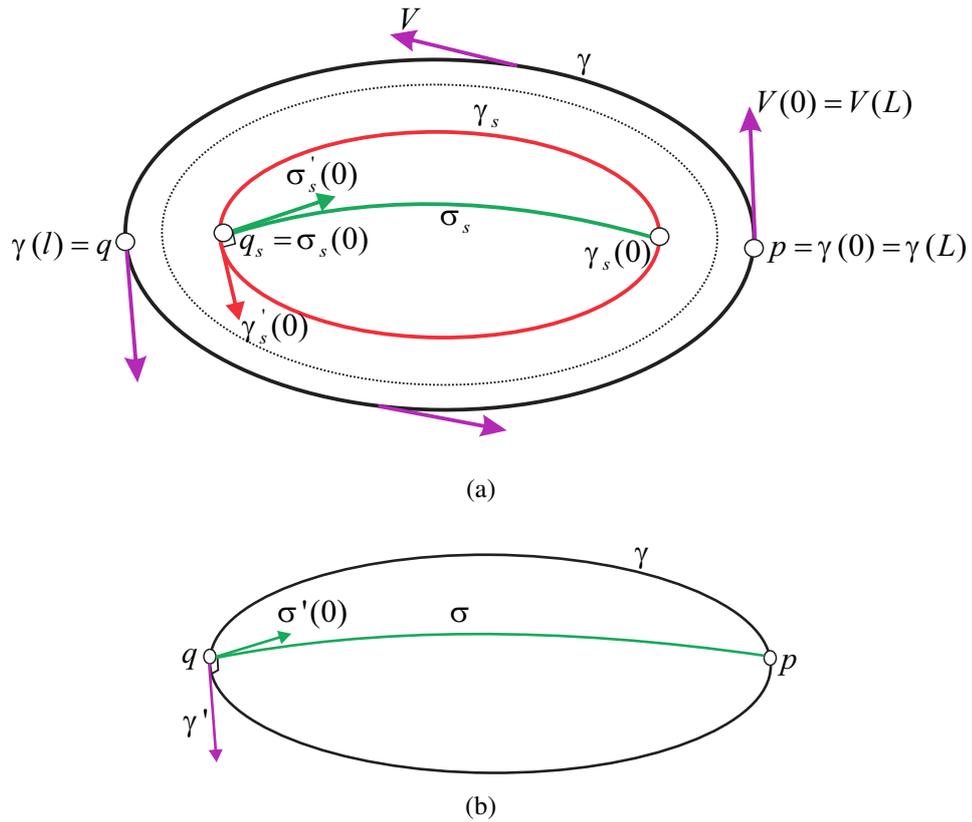


Figura IV.8: La variación de las geodésicas.

de variación de energía se tiene

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=l_s} E(\sigma_{s,t}) = \langle \sigma'_s(0), \gamma'_s(l_s) \rangle = 0. \quad (\text{IV.2})$$

De la ecuación (IV.2), puesto que es nula se deduce que  $\sigma'_s(0) \perp \gamma'_s(l_s)$  como se muestra en la figura (IV.8a). De la sucesión  $s_i$  y tomando el límite se tiene,

$$\sigma'(0) = W_q \perp \gamma'(l). \quad (\text{IV.3})$$

De la ecuación (IV.3), puesto que es nula se deduce que  $\sigma'(0)$  es ortogonal a  $\gamma'$  como se muestra en la figura (IV.8b). Por lo tanto,  $\sigma \neq \gamma$ . ■



A continuación, antes de enunciar el resultado para el caso impar. Es importante resaltar que la demostración del resultado de estimación en el caso par, es más sencillo de probar porque se basa en la demostración del resultado de Syng (que se puede encontrar en libros de geometría riemanniana). En cambio, en el caso de dimensiones impares es más elaborado porque utiliza la teoría de morse y esto lleva a conceptos de homotopía y dentro de ello el lema de Klingenberg de homotopía. Es aún más fuerte la prueba cuando  $h = \frac{1}{4}$ . Es por ello que no se demostrará el resultado para dimensiones impares. Pero se dará una breve descripción en lo que consiste su demostración ya que el enunciado será fundamental en la demostración del resultado principal de la investigación.

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $M$  con  $n \geq 3$ , una variedad riemanniana compacta, simplemente conexa, tal que  $\frac{1}{4} < K \leq 1$ . Entonces,  $i(M) \geq \pi$ . (Do Carmo, 2015, p.305)*

La prueba de la estimación del radio de inyectividad de la variedad con curvatura contenida en  $(\frac{1}{4}, 1]$  se consigue por contradicción es decir, suponiendo que  $i(M) < \pi$ . Se comienza con la idea de que el radio de inyectividad de la variedad pueda relacionarse con su radio conjugado y con la longitud de una geodésica que une puntos en la variedad. La aplicación de varios resultados de la teoría de Morse se resume en la estimación de la longitud de una geodésica más grande que las otras. Dicha estimación se logra mediante la comparación de índices entre dos variedades en el que una de ellas es una esfera con curvatura  $K = K_{min} > \frac{1}{4}$ . Por otro lado, está un resultado de homotopía que es el lema de Klingenberg, éste afirma que en la homotopía de geodésicas minimizantes existe una curva con longitud mayor a lo supuesto lo que afirmará la contradicción buscada.



La demostración del teorema (4.2.2) se encuentra en Do Carmo (2015) y Klingenberg (1961), y una descripción sobre las ideas que se introduce en su amplia demostración se encuentra en Abresch (1997).

### 4.3. Teorema de la Esfera en Variedades Riemannianas

En esta sección se demuestra el resultado principal, que es el teorema de la esfera en variedades riemannianas de dimensión  $n > 3$ . Cabe indicar que este resultado se debe a Klingenberg y Berger.

Se da inicio esta sección con la demostración de algunos lemas usando las proposiciones de la sección anterior que conducen directamente al teorema de la esfera en variedades.

**Lema 4.3.1. (Berger)** *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta y sean  $p, q \in M$  tal que  $d(p, q) = \text{diam}(M)$ . Entonces, para todo  $W \in T_q M$ , existe una geodésica minimizante  $\gamma$  de  $p = \gamma(0)$  a  $q$  con  $\langle \gamma'(0), W \rangle \geq 0$ . (Do Carmo, 2015, p. 312)*

#### Demostración

Sea  $\lambda(t) = \exp_p(tW)$  una curva y sea  $\gamma_t[0, l(\gamma_t)] \rightarrow M$  (para cada  $t$ ) una geodésica minimizante que une  $\gamma_t(0) = \lambda(t)$  y  $\gamma_t(l(\gamma_t)) = q$ . Primero, suponiendo que para todo  $k \in (0, \infty)$  existe  $t_k \in \left[0, \frac{1}{k}\right]$ , tal que  $\langle \gamma'_{t_k}(0), \lambda'(t_k) \rangle \geq 0$ . Donde si



$$k = 1 \Rightarrow t_k \leq 1$$

$$k = 2 \Rightarrow t_k \leq \frac{1}{2}$$

$$k = 3 \Rightarrow t_k \leq \frac{1}{3}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow t_k \rightarrow 0$$

se tiene entonces una sucesión  $\{\gamma_{t_k}\}_{k=1}^{\infty}$  de geodésicas minimizantes con  $t_k \rightarrow 0$ .

Por la continuidad de las geodésicas y tomando una subsucesión, en caso de ser necesario, la sucesión  $\{\gamma_{t_k}\}_{k=1}^{\infty}$  converge a una geodésica minimizante  $\gamma$  uniendo  $\lambda(0) = p$  y  $q = \gamma(0)$  y por la continuidad de la métrica satisface

$$0 \leq \langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle = \langle \gamma'(0), W \rangle,$$

y la demostración estaría terminada.

Primero, se demostrará lo siguiente. Supongamos que existe  $k$  tal que para todo  $t \in \left[0, \frac{1}{k}\right]$ , se cumple

$$\langle \gamma'_t(0), \lambda'(t) \rangle < 0.$$

Se mostrará que esto lleva a una contradicción.

En efecto, sea  $t = t_1$  con  $t_1 \in \left[0, \frac{1}{k}\right]$  y considérese una vecindad totalmente normal  $U$  de  $\lambda(t_1)$  y sea  $q_1 \in U$  un punto de  $\gamma_{t_1}$ . Tomando  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño  $\lambda(s) \in U$  para todo  $s \in (t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon)$  y  $\sigma_s$  son las geodésicas minimizantes que unen  $q_1$  y  $\lambda(s)$ . La geodésica  $\sigma_s$  define una variación del trozo  $\gamma_{t_1}$  que va de  $\lambda_{t_1}$  hasta  $q_1$  y  $\sigma_{t_1} = \gamma_{t_1}$

en dicho segmento, como se muestra en la figura (IV.9).

Aplicando la primera fórmula de variación de la energía a  $\sigma_s$ , se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \Big|_{s=t_1} E(\sigma_s) = -\langle \lambda'(t_1), \gamma'_{t_1}(0) \rangle > 0$$

del cual, se puede decir que la funcional energía es estrictamente creciente en un entorno de  $t_1$ . Por tanto, para  $s < t_1$  se tiene que  $d(q_1, \lambda(s)) < d(q_1, \lambda(t_1))$ , donde

$$d(q, \lambda(s)) < d(q, q_1) + d(q_1, \lambda(s)) < d(q, q_1) + d(q_1, \lambda(t_1)) = d(q, \lambda(t_1))$$

$$d(q, \lambda(s)) < d(q, \lambda(t_1)).$$

Segundo, véase ahora qué sucede si se aplica el mismo razonamiento, para cada  $t$  cumpliendo  $0 \leq t \leq \frac{1}{k}$ , y en consecuencia se elige  $t_1$  tan cerca de 0, de modo que  $d(q, \lambda(s)) < d(q, \lambda(t_1))$  con  $s \geq 0$ . Por otro lado, por hipótesis  $p$  está a una distancia máxima de  $q$ , de donde se tiene que

$$d(q, \lambda(s)) < d(q, \lambda(t_1)) \leq d(q, p) = d(q, \lambda(0))$$

$$d(q, \lambda(s)) < d(q, \lambda(0)), \quad (s \geq 0)$$

lo que es una contradicción. ■

El siguiente lema que se presenta cuya demostración es debido a Tsukamoto (1961) utiliza el teorema de Rauch, específicamente el teorema de la comparación de Rauch. El resultado afirma que bajo la hipótesis de que una variedad  $M$  compacta y sim-

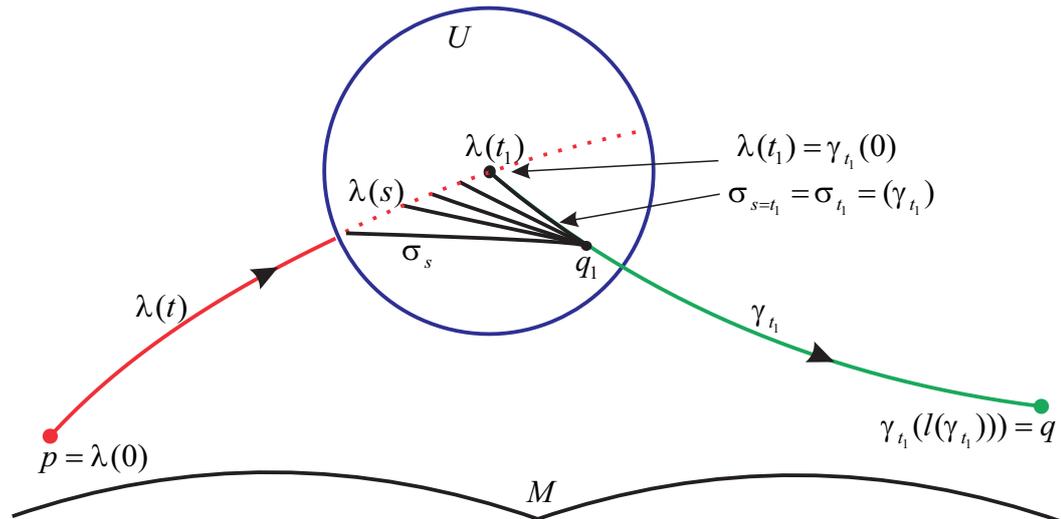


Figura IV.9: Variación de geodésicas minimizantes en un entorno  $U$ .  
Adaptado de Do Carmo (2015, p. 313)

plemente conexa, cuya curvatura seccional este estrictamente entre  $\frac{1}{4}$  y 1 recubre dicha variedad con dos bolas, esto es posible debido a la estimación del radio de inyectividad. Se puede notar que es aquí, el momento crucial del uso de los resultados de las estimaciones de la sección anterior.

**Lema 4.3.2.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta, simplemente conexa cuya curvatura seccional  $K$  satisfice*

$$\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1,$$

y sean  $p, q \in M$  tales que  $d(p, q) = \text{diam}(M)$  entonces

$$M = B_\rho(p) \cup B_\rho(q),$$

con  $\rho \in \left( \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}, \pi \right)$ . (Do Carmo, 2015, págs.313-314)



## Demostración

La demostración del lema, se hará por el método de reducción al absurdo. Es decir, se supondrá que la afirmación del lema es falsa, de la siguiente manera.

Existe un punto  $r \in M$  tal que  $d(p, r) \geq \rho$  y  $d(q, r) \geq \rho$ . De manera que se deducirá una contradicción.

A) Se mostrará, que existe un punto  $r_0 \in M$  tal que  $d(p, r_0) = d(q, r_0) = \rho$ . Sea  $\rho$ , cumpliendo  $\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \rho < \pi$  ( esta definición es para el resto de la prueba) y sean  $p, q \in M$  tales que  $d(p, q) = \text{diam}(M)$ . De los teoremas de estimación de Klingenberg (4.2.1) o (4.2.2), la distancia del punto  $p$  a su lugar de corte  $C_m(p)$  es de almenos  $\pi$ . Por tanto, se tiene los siguientes:

- El conjunto  $B_\rho(p)$  (respecto a  $B_\rho(q)$ ) de puntos en  $M$  tienen una distancia  $< \rho$  de  $p$  (respecto a  $q$ ) es difeomorfa a la bola abierta  $B_\rho(p)$  (respecto a  $q$ ) en el espacio tangente  $T_pM$  (respecto a  $T_qM$ ).
- Y el límite  $S_\rho(p)$  (respecto a  $S_\rho(q)$ ) de  $B_\rho(p)$  (respecto a  $B_\rho(q)$ ) es difeomorfa a la esfera de radio  $\rho$  y centro  $p$  respecto a  $q$  en  $T_pM$  (respecto a  $T_qM$ ).

Por el teorema de la comparación de Rauch (2.2.9.1) y de la definición de  $\rho$ , se tiene que  $2\rho > \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \geq \text{diam}(M)$ . Por tanto, se cumple

$$B_\rho(p) \cap B_\rho(q) \neq \emptyset.$$

Ahora se puede asumir que,  $d(p, r) \geq d(q, r) \geq \rho$ . Observe que una geodésica minimizante que une  $q$  y  $r$  intersecta en un punto  $q'$  a  $S_\rho(q)$  de manera que



$q' \notin B_\rho(p)$ . Y si no fuera así entonces  $q' \in B_\rho(p)$  y se tendría

$$d(r, q') > d(r, B_\rho(p)) \geq d(r, B_\rho(q)) = d(r, q')$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $q' \notin B_\rho(p)$  y  $q' \in S_\rho(q)$ .

Por otro lado, como  $0 < \delta \leq K$ , por el teorema de Bonnet Meyers (2.2.8.1) se tiene  $diam(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} < 2\rho$ . Sea  $q''$  el punto de intersección entre  $S_\rho(q)$  y la geodésica minimizante que une  $p$  y  $q$ , se tiene que

$$d(p, q'') \leq diam(M) - d(q, q'') = d(p, q) - d(q, q'') < 2\rho - \rho = \rho.$$

Dado que  $S_\rho(q)$  es arco conexo, pues  $B_\rho(q)$  es homeomorfa a una bola euclidiana, de ello se deduce que

$$S_\rho(p) \cap S_\rho(q) \neq \emptyset.$$

Por tanto, existe un punto  $r_0$  tal que  $d(p, r_0) = d(q, r_0) = \rho$  y existe uno y solamente una geodésica minimizante que une  $p$  (respecto  $q$ ) a  $r_0$ . Cuya existencia es la causante de la contradicción buscada.

- B) Sea  $\sigma_1 = \sigma_1(t)$  ( $0 \leq t \leq \rho$ ) geodésica minimizante que une  $p = \sigma_1(0)$  y  $r_0$ , y sea  $\sigma_2 = \sigma_2(t)$  ( $0 \leq t \leq \rho$ ) geodésica minimizante que une  $\sigma_2(0) = q$  y  $r_0$ . Entonces existe una geodésica minimizante  $A = \{\lambda(s)\}$  uniendo  $p = \lambda(0)$  y  $q$  tal que  $A \in \llbracket p, q \rrbracket$  y  $\langle \lambda'(0), \sigma_1'(0) \rangle \geq 0$ .

Primero se mostrará el siguiente hecho.

Existe una sucesión de puntos  $\{p_k\}_{k=1}^{+\infty}$  en  $\sigma_1$  y una sucesión de geodésicas minimizantes  $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$  de modo que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k = p$  y  $\langle \sigma_1'(0), \lambda_k'(0) \rangle \geq 0$ , donde  $p_k = \sigma_1(t_k)$  y  $A_k = \{\lambda_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$  son las geodésicas minimizantes que unen  $p_k$  a  $q$ , entonces  $\lambda_k(0) = p_k$ .

Ahora suponga que no existe la sucesión  $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ . Entonces existe un número positivo  $\epsilon$  tal que si, para  $s \in (0, \epsilon]$ , tomando una geodésica minimizante cualquiera  $A_s = \{\lambda_s(t)\}$  uniendo  $\sigma_1(s)$  a  $q$ ,  $\lambda_s(0) = \sigma_1(s)$ . Entonces

$$\langle \sigma_1'(s), \lambda_s'(0) \rangle < 0.$$

Ahora tómesese un número positivo  $s_1$  tal que  $0 < s_1 \leq \epsilon$  y una geodésica minimizante  $A_1 = \{\theta_1(t)\}$ , uniendo  $\theta_1(s_1)$  a  $q$ ,  $\lambda_{s_1}(0) = \theta_1(s_1)$ . Entonces se tiene

$$\langle \lambda_{s_1}'(0), \sigma_1'(s_1) \rangle < 0 \quad \text{y} \quad \langle \lambda_{s_1}'(0), -\sigma_1'(s_1) \rangle > 0.$$

Sea ahora en  $A_1$ , un punto  $q_1$  lo suficientemente cercano al punto  $\sigma_1(s_1)$ . Sea entonces  $\sigma_1(s_2)$  el punto en  $\sigma_1$  que se encuentra en la distancia más próximo a  $q_1$ . Luego, por el lema (4.3.1) la geodésica que une  $\sigma_1(s_2)$  y  $q_1$  es ortogonal a  $\sigma_1$  y  $0 < s_2 < s_1$ .

Uniando  $\sigma_1(s_2)$  y  $q$  por una geodésica minimizante  $A_2 = \{\lambda_{s_2}(t)\}$ . Se tiene

$$L(A_2) < L(A_1) \quad \text{y} \quad \langle \lambda_{s_2}'(0), \sigma_1'(s_2) \rangle < 0$$

donde  $L(A_2)$  y  $L(A_1)$  son longitudes.



Nuevamente tómesese, en  $A_2$  un punto  $q_2$  suficientemente cercano al punto  $\sigma_1(s_2)$ . Sea  $\sigma_1(s_3)$  el punto en  $\sigma_1$  que se encuentra a una distancia más cercana a  $q_2$ . Luego, usando el lema (4.3.1), la geodésica minimizante que une  $\sigma_1(s_3)$  y  $q_2$  es ortogonal a  $\sigma_1$  y se tiene  $0 < s_3 < s_2$ . Uniendo  $\sigma_1(s_3)$  y  $q$  por una geodésica minimizante  $A_3 = \{\lambda_{s_3}(t)\}$ , se tiene

$$L(A_3) < L(A_2).$$

Continuando los procesos anteriores, se obtiene una sucesión de puntos  $\{\sigma_1(s_k)\}_{k=1}^{+\infty}$  y geodésicas minimizantes  $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ .

Ahora se puede asumir que  $s_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ . Porque si  $s_k \rightarrow s_0$  ( $s_0 > 0$ ) cuando  $k \rightarrow +\infty$ . Se puede elegir la subsucesión convergente de  $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ . Entonces el límite geodésico  $A_0 = \{\lambda_{s_0}(t)\}$  es una geodésica minimizante que une  $\sigma_1(s_0)$  a  $q$  y

$$\langle \sigma_1'(s_0), \lambda'_{s_0}(0) \rangle < 0$$

por suposición.

Para continuar nuevamente el proceso anterior. Es necesario elegir una subsucesión convergente de  $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ . El límite geodésico  $A$  es una geodésica minimizante y

$$L(A_1) > \lim_{k \rightarrow +\infty} L(A_k) = L(A) = \text{diam}(M).$$

Lo que contradice la definición de  $\text{diam}(M)$ . Por lo tanto, existe una sucesión de

puntos  $\{p_k\}_{k=1}^{+\infty}$  en  $\sigma_1$  y geodésicas minimizantes  $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$  tal que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} p_k = p \quad \text{y} \quad \langle \lambda'_k(0), \sigma'_1(s_k) \rangle \geq 0,$$

donde  $p_k = \sigma_1(s_k)$ ,  $A_k = \{\lambda_k(s)\}_{k=1}^{+\infty}$  y  $\lambda_k(0) = p_k$ .

Ahora se puede elegir la subsucesión convergente  $\{A'_k\}_{k=1}^{+\infty}$  de  $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$  y luego elegir la subsucesión  $\{\bar{A}_k\}_{k=1}^{+\infty}$  de  $\{A'_k\}_{k=1}^{+\infty}$  en la que los vectores tangentes  $\lambda'_k(0)$  convergen en la topología del haz tangente de  $M$ .

Entonces el límite geodésico  $\bar{A}$  de  $\{\bar{A}_k\}_{k=1}^{+\infty}$  es una geodésica minimizante, que une  $p$  a  $q$  y por elección se tiene

$$\langle \bar{\lambda}'(0), \sigma'(0) \rangle \geq 0,$$

donde  $\bar{A} = \{\bar{\lambda}(s)\}$ ,  $\bar{\lambda}(0) = p$  y  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{\lambda}'_k(0) = \bar{\lambda}'(0)$ .

- C) Sea  $s$  un punto en  $\bar{A}$  que se encuentra en la distancia  $\rho$  desde  $p$ . Entonces  $s$  es un punto interno de  $\bar{A}$ . Mediante el uso del teorema de comparación de rauch (proposición 2.2.9.2)

$$d(r_0, s) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Por lo tanto, existe un punto  $s_0$  como un punto interno en  $\bar{A}$  que se encuentra en la distancia más corta desde  $r_0$ . Entonces se tiene  $d(r_0, s_0) < \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$  y según el lema (4.3.1) la geodésica minimizante de  $r_0$  a  $s_0$  es ortogonal a  $\bar{A}$ . Como  $d(p, q) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ ,



se tiene que

$$d(p, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} \quad \text{o} \quad d(q, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

En cualquiera de los casos anteriores, se obtendrá la contradicción buscada.

Sea el caso  $d(p, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ .

Dado que  $d(p, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ . En este caso, como  $d(r_0, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ , y el ángulo  $\angle ps_0r_0 = \frac{\pi}{2}$ , utilizando el teorema de comparación de Rauch se tiene

$$d(p, r_0) < \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \rho.$$

esto contradice la suposición  $d(p, r_0) = \rho$ . ■

El lema que a continuación se presenta, establece la existencia del punto medio entre los puntos extremos de una variedad.

**Lema 4.3.3.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta, simplemente conexa y con curvatura seccional que satisface:*

$$\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1.$$

*Dados  $p, q \in M$  tales que  $d(p, q) = \text{diam}(M)$  y  $\rho$  cumpliendo  $\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \rho < \pi$ , para cada geodésica partiendo de  $p$  con longitud  $\rho$  existe un único punto  $r$  de ésta geodésica tal que:*

$$d(p, r) = d(q, r) < \rho.$$



*Análogamente, en cada geodésica partiendo de  $q$  con longitud  $\rho$  existe un único punto  $m$  equidistante de  $p$  y  $q$ . (Do Carmo, 2015)*

### Demostración

Según el enunciado del lema, se debe demostrar la existencia y unicidad de un punto  $r$  con longitud  $\rho$  que satisface  $d(p, r) = d(q, r) < \rho$ .

**Existencia:** Sea  $\gamma(s)$  una geodésica con  $\gamma(0) = p$  y considérese una función  $f$  continua de valor real definida, como sigue.

$$f(s) = d(q, \gamma(s)) - d(p, \gamma(s)) \quad (\text{IV.4})$$

donde

- Si  $s = 0$  entonces  $\gamma(0) = p$ , evaluando en la ecuación (IV.4) se tiene:

$$f(0) = d(q, \gamma(0)) - d(p, \gamma(0))$$

$$f(0) = d(q, p) - d(p, p)$$

$$f(0) = d(q, p) - 0$$

$$f(0) = d(q, p) = d(p, q)$$

$$f(0) = d(p, q)$$

$$f(0) > 0$$



esto implica que la función  $f$  es positiva.

- Para  $s = s_0$  entonces a lo largo de  $\gamma(s)$ , el punto  $\gamma(s_0)$  es un punto de corte de  $p$ , es decir  $\gamma(s_0) \in C_m(p)$ . Por las estimaciones de Klingenberg (teorema 4.2.1 o teorema 4.2.2) se tiene que  $i(M) \geq \pi$ , entonces  $d(p, \gamma(s_0)) \geq \pi \geq \rho$  y por el lema (4.3.2), para los puntos  $p$  y  $q$  existe la unión de bolas como sigue

$$M = B_\rho(p) \cup B_\rho(q)$$

de donde  $\gamma(s_0) \in B_\rho(q)$ . Luego  $d(q, \gamma(s_0)) < \rho$ , entonces evaluando en la ecuación (IV.4) se tiene:

$$f(s_0) = d(q, \gamma(s_0)) - d(p, \gamma(s_0)) \quad \text{de donde } \gamma(s_0) = q$$

$$f(s_0) = d(q, q) - d(p, q)$$

$$f(s_0) = 0 - d(p, q)$$

$$f(s_0) = -d(p, q)$$

$$f(s_0) < 0$$

esto implica que la función  $f$  es negativa.

Por lo tanto, por la continuidad de  $f$ , existe  $s_1 \in (0, s_0)$  tal que  $r = \gamma(s_1)$  es un punto que satisface la ecuación (IV.4) de tal manera que  $f$  se anula. Es decir,



$$f(s_1) = d(q, \gamma(s_1)) - d(p, \gamma(s_1))$$

$$f(s_1) = d(q, r) - d(p, r) \quad \text{pues} \quad d(q, r), d(p, r) = \rho$$

$$f(s_1) = \rho - \rho$$

$$f(s_1) = 0$$

Así se establece la existencia.

**Unicidad:** En efecto, sea  $\gamma$  una geodésica que parte de  $p$  con una longitud  $\rho$  y supongamos que a lo largo de  $\gamma$  existen  $r_1$  y  $r_2$  ( $r_1 \neq r_2$ ) que son equidistantes de  $p, q$  a la distancia menor que  $\rho$ .

Dado  $r_1 \neq r_2$  se puede suponer que  $r_1$  se encuentra entre  $p$  y  $r_2$  en  $\gamma$  como se muestra en la figura (IV.10), por lo que  $d(p, r_1) < d(p, r_2)$  de donde se tiene que:

$$d(q, r_2) = d(p, r_2)$$

$$d(q, r_2) = d(p, r_1) + d(r_1, r_2)$$

$$d(q, r_2) = d(q, r_1) + d(r_1, r_2)$$

sea  $\sigma$  la única geodésica minimizante uniendo  $q$  y  $r_1$ . Por la igualdad anterior la distancia de  $q$  a  $r_2$  se realiza mediante  $\sigma$  y coincide con  $\gamma$ , pues esto por unicidad  $\sigma$  y  $\gamma$  son la misma geodésica, con  $q \in \gamma$ . Se observa que además  $q$  está entre  $p$  y  $r_1$ .

En efecto, si  $r_1 \neq r_2$  se obtiene la siguiente igualdad

$$d(p, r_1) = d(q, r_1) \quad \text{y} \quad d(p, r_2) = d(q, r_2) \quad (\text{IV.5})$$

entonces se deduce que:

$$d(p, r_2) = d(p, q) + d(q, r_2)$$

$$d(p, r_2) = d(p, q) + d(p, r_2), \quad \text{por la ecuación (IV.5)}$$

$$d(p, r_2) - d(p, r_2) = d(p, q)$$

$$0 = d(p, q) \quad (\text{IV.6})$$

Por la ecuación (IV.6), se tiene que  $p = q$  lo que es una contradicción ( $d(p, q) > 0$ ) y con ello se prueba la unicidad. ■

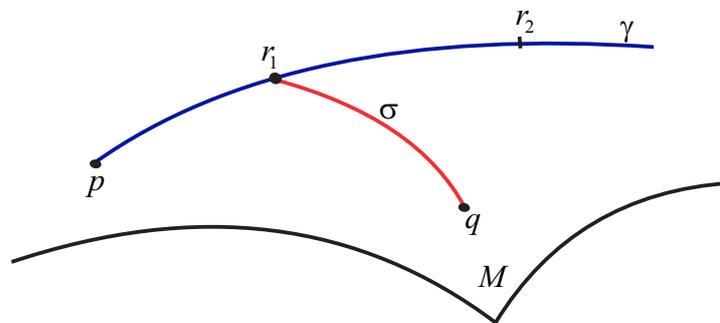


Figura IV.10: Puntos equidistantes sobre una geodésica.

El lema anterior prueba que entre los extremos de una variedad cuya curvatura está entre  $\frac{1}{4}$  y 1 existe un punto equidistante o punto medio que representa el ecuador de



la variedad que será homeomorfo al ecuador de una esfera unitaria.

**Observación 4.3.1.** El punto  $r$  depende continuamente de la dirección inicial de la geodésica que lo contiene, esto debido a la unicidad.

Para llegar hasta este punto, donde finalmente se presentará el teorema principal, fue necesario determinar la estructura de la variedad, que será homeomorfa a la esfera unitaria, dicha estructura se determinó mediante las estimaciones de Klingenberg desarrolladas en la sección anterior, pues de ello se deduce que la variedad riemanniana con curvatura seccional uno, cuyo pinzamiento denotada por  $h$  no puede ser menor que  $\frac{1}{4}$ .

El objetivo de esta investigación es proporcionar una demostración constructiva explícita de la extensión del teorema de la esfera definido en superficies  $\mathbb{R}^3$  a superficies de dimensiones arbitrarias representada por el teorema de la esfera topológica. La demostración y la interpretación explícita no es fácil hacerlo en variedades riemannianas de dimensiones  $n > 3$ , ya que se tuvo que dar un gran recorrido desde geometría diferencial hasta variedades riemannianas para estudiar el teorema de la esfera topológica.

Para la demostración del resultado principal de la investigación se analizó información de investigaciones consideradas en los antecedentes, en los que se trabajó con argumentos topológicos en variedades riemannianas en las que se aplica la definición de homeomorfismo, esto es: Una aplicación entre dos variedades que sea bicontinua y biyectiva. En ese sentido se presenta y se demuestra el resultado principal de la investigación.



**Teorema 4.3.1.** *Sea  $M$  de dimensión  $n > 3$  una variedad riemanniana compacta y simplemente conexa, cuya curvatura seccional  $K$  satisfice:*

$$0 < h < K \leq 1$$

*si  $h = \frac{1}{4}$ , entonces  $M$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .*

### Demostración

Para demostrar el teorema principal, se empieza por describir las características que poseen las variedades en estudio, con el propósito de determinar un homeomorfismo entre ellas.

**La esfera unitaria  $\mathbb{S}^n$ .** Es una variedad cerrada y compacta y por ser unitaria tiene curvatura seccional uno.

**La variedad riemanniana  $M$ .** Es una variedad compacta y simplemente conexa cuya estructura cumple las siguientes condiciones:

- Por la estimación de Klingenberg (4.2.2) la curvatura de  $M$  está acotada entre la cota de Klingenberg  $\frac{1}{4}$  y la curvatura máxima uno, y por tener esa especial característica por el lema(4.3.2)  $M$  posee bolas que la recubren.
- Sobre la variedad  $M$  por lema (4.3.1) para cada campo vectorial que esté en el plano tangente existe una geodésica minimizante con velocidad inicial que une los puntos extremos de la variedad tal que el producto interno entre la velocidad inicial con el campo vectorial es cero.



- Por lema(4.3.3) sobre  $M$  existe un punto equidistante entre los puntos extremos de la variedad a lo largo de una geodésica minimizante.

Luego se define una aplicación  $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow M$  para establecer el homeomorfismo explícito entre la esfera  $\mathbb{S}^n$  unitaria y la variedad  $M$  con las características que estas poseen.

Sea la aplicación  $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow M$ , con  $N, S \in \mathbb{S}^n$  asociados a  $p, q \in M$  tales que  $\phi(N) = p$  y  $\phi(S) = q$ . Donde  $N$  y  $S$  representan el polo norte y el polo sur de la esfera,  $\phi$  es un homeomorfismo si cumple las siguientes condiciones:

- $\phi$  es bicontinua.
- $\phi$  es biyectiva.

Antes de hacer cumplir la bicontinuidad y la biyectividad es necesario definir ciertas aplicaciones que intervienen durante la demostración.

Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión  $n > 3$ . Por el lema (4.3.3), si la variedad  $M$  sobre su curvatura seccional cumple la condición  $\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1$ . Entonces, existen  $p, q \in M$  puntos tales que el  $diam(M) = d(p, q)$  y sea  $\mathbb{S}^n$  la esfera unitaria cuya curvatura seccional es uno con  $N$  y  $S$  puntos antipodales.

Sea  $I$  una isometría lineal entre los planos tangentes a  $N \in \mathbb{S}^n$  y a  $p \in M$  denotado por  $I : T_N \mathbb{S}^n \rightarrow T_p M$ . Y para cada vector distinto de cero  $v \in T_p M$  se define una aplicación  $f : T_p M \rightarrow T_p M$  con  $f(v) = t_0 v$  siendo  $\exp(f(v))$  un punto equidistante a lo



largo de la geodésica  $t \rightarrow \exp_p tv$  que unen  $p$  y  $q$ .

Por otro lado, sea  $\gamma_e : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^n$  un segmento geodésico y  $E$  el ecuador de  $\mathbb{S}^n$  respecto a los polos norte y sur cumpliendo:

- $E \in \mathbb{S}^n$  (respecto al polo norte) para todo  $e \in E$  se tiene  $\gamma_e(0) = N$  y  $\gamma_e\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ .

Sea  $\sigma_e$  la geodésica en  $M$  que pasa a través de  $p$  con una velocidad  $I(\gamma'_e(0))$ .

- $E \in \mathbb{S}^n$  (respecto al polo sur) para todo  $e \in E$  se tiene  $\gamma_e\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$  y  $\gamma_e(\pi) = S$ .

Sea  $\lambda_e$  la geodésica en  $M$  que pasa a través de  $q$  con una velocidad  $I(\gamma'_e(\pi))$ .

Por otra parte, también se tiene la existencia de  $f(v)$  que satisface la condición dada por el lema (4.3.3) esto es,

$$f(v) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \pi \leq i(M).$$

La descripción hecha anteriormente se muestra en la figura IV.11.

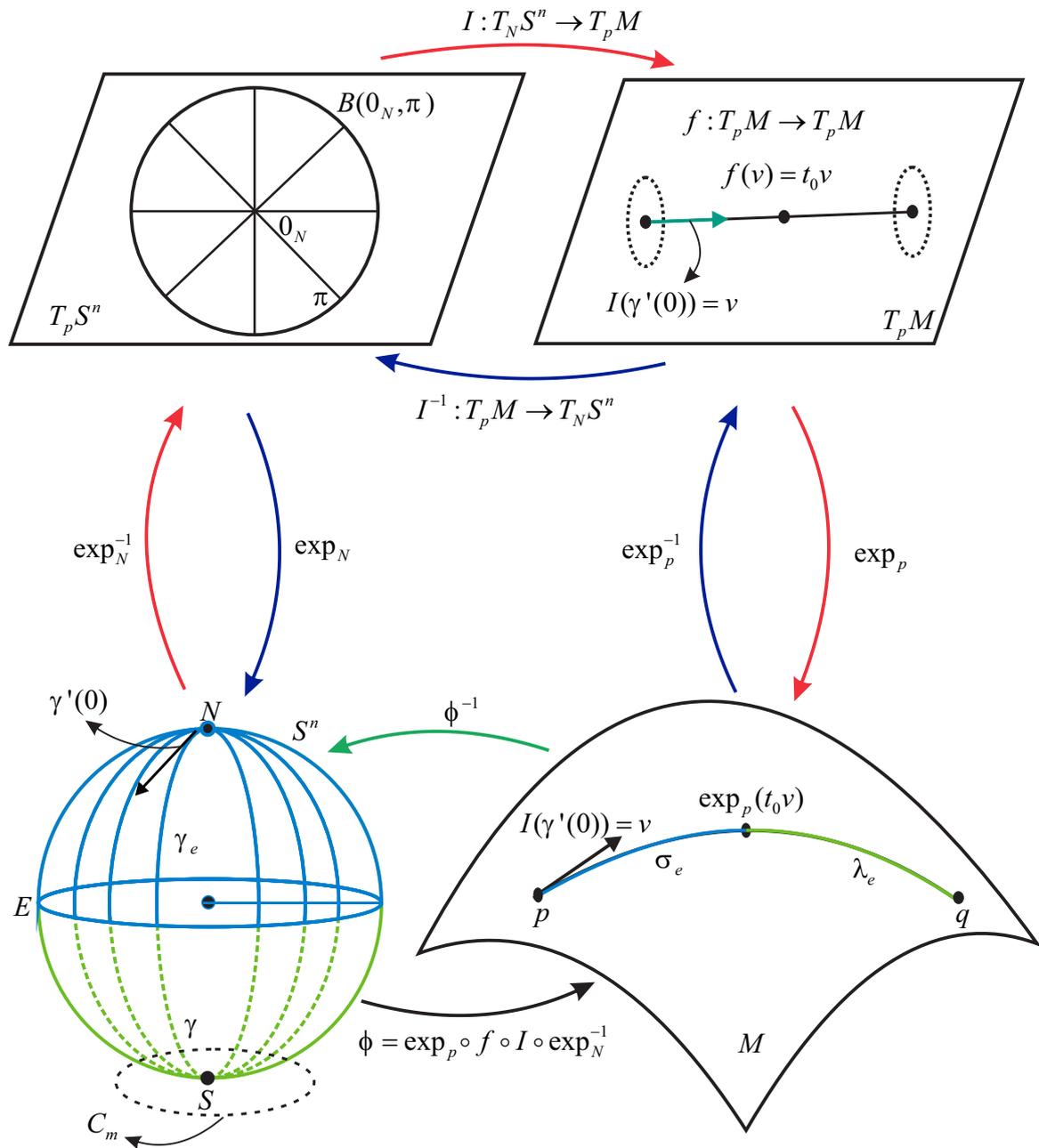


Figura IV.11: Aplicación homeomórfica  $\phi$ .

En función de las descripciones dadas y de la figura (IV.11) se define la aplicación  $\phi$  que establecerá el homeomorfismo.

Sea entonces  $\phi : S^n \rightarrow M$  definida de la siguiente manera:

$$\phi(\gamma_e) = \begin{cases} p, & \gamma_e = N \\ \exp_p \left[ \frac{2d(\gamma_e, N)}{\pi} (f \circ I \circ \exp_p^{-1})(\gamma_e) \right], & \gamma_e \in B_{\frac{\pi}{2}}(N) - N \\ \exp_q \left[ \frac{2d(\gamma_e, S)}{\pi} (\exp_q^{-1} \circ \exp_p \circ I \circ \exp_p^{-1})(\gamma_e) \right], & \gamma_e \in B_{\frac{\pi}{2}}(S) - S \\ q, & \gamma_e = S \end{cases}$$

Una vez definida la aplicación  $\phi$ , se procede a demostrar las condiciones del homeomorfismo como sigue.

i)  $\phi$  **ES BICONTINUA**, puesto que:

- $\phi$  es continua porque las funciones  $f$ ,  $\exp$  e  $I$  son aplicaciones continuas.
- $\phi^{-1}$  es continua porque las funciones  $f^{-1}$ ,  $\exp^{-1}$  e  $I^{-1}$  son aplicaciones continuas.

Además, como la composición de aplicaciones continuas es continua, entonces  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  son continuas. Por lo tanto,  $\phi$  es bicontinua.

ii)  $\phi$  **ES BIYECTIVA**: Para demostrar que  $\phi$  es biyectiva, se hará cumplir la inyectividad y sobreyectividad, condiciones que debe cumplir una función biyectiva.



A)  $\phi$  es **inyectiva**. Como  $\|f\| < i(M)$ , se deduce que  $B_{\frac{\pi}{2}}(N)$  y  $B_{\frac{\pi}{2}}(S)$  en  $\mathbb{S}^n$  tales que  $\phi|_{B_{\frac{\pi}{2}}(N)}$  y  $\phi|_{B_{\frac{\pi}{2}}(S)}$  son inyectivas. Por tanto, para demostrar la inyectividad de  $\phi$  es suficiente mostrar que

$$\phi(B_{\pi/2}(N)) \cap \phi(B_{\pi/2}(S)) = \emptyset.$$

En efecto, es suficiente suponer dos casos:

- Primero si  $\gamma_e \in \phi(B_{\frac{\pi}{2}}(N))$ , entonces  $\gamma_e = \sigma_e(t)$  con  $\sigma_e(0) = p$  y  $d(\gamma_e, p) < \|f(\sigma'_e(0))\|$ . Por la unicidad del lema (4.3.3) existe un punto equidistante en la geodésica  $\gamma_e$  tal que  $d(\gamma_e, p) < d(\gamma_e, q)$ .
- Segundo por el mismo argumento de lo anterior si  $\gamma_e \in \phi(B_{\frac{\pi}{2}}(S))$ , entonces  $\gamma_e = \lambda_e(t)$  con  $\lambda_e(\pi) = q$  y  $d(\gamma_e, q) < \|f(\lambda'_e(0))\|$ . Y de la misma forma que en el caso anterior por el lema (4.3.3) existe un punto equidistante en la geodésica  $\gamma_e$  tal que  $d(\gamma_e, q) < d(\gamma_e, p)$ .

De los dos casos anteriores se puede ver que si  $\gamma_e \in \phi(B_{\frac{\pi}{2}}(N))$ , entonces  $\gamma_e \notin \phi(B_{\frac{\pi}{2}}(S))$  esto significa que ningún punto puede alinearse en la intersección de las bolas  $B_{\frac{\pi}{2}}(N)$  y  $B_{\frac{\pi}{2}}(S)$ . Por lo tanto,  $\phi$  es inyectiva.

También se muestra la inyectividad de  $\phi$  mediante la composición de funciones inyectivas, como se muestra a continuación.

- Primero es necesario mostrar que la isometría lineal  $I : T_N\mathbb{S}^n \rightarrow T_pM$  es inyectiva.

En efecto,  $I$  es inyectiva puesto que, es una aplicación lineal que preserva

normas. Además, por definición de inyectividad se cumple,

si  $\gamma'_e(0) \neq \gamma'_e(\pi)$ , entonces

$$\|I[\gamma'_e(0)] - I[\gamma'_e(\pi)]\| = \|I[\gamma'_e(0) - \gamma'_e(\pi)]\| = \|\gamma'_e(0) - \gamma'_e(\pi)\| > 0.$$

Es decir,  $I(\gamma'_e(0)) \neq I(\gamma'_e(\pi))$

- La aplicación  $\phi$  es inyectiva si, y solo si, la composición

$$(\exp_p \circ f \circ I \circ \exp_N^{-1}) : \mathbb{S}^n \rightarrow M$$

es inyectiva.

Sean  $\exp_N^{-1} : \mathbb{S}^n \rightarrow T_N \mathbb{S}^n$ ,  $I : T_N \mathbb{S}^n \rightarrow T_p M$ ,  $f : T_p M \rightarrow T_p M$  y  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  aplicaciones inyectivas, pues por definición  $\exp^{-1}$ ,  $\exp$  son inyectivas y por la demostración anterior  $I$  y  $f$  también son inyectivas, entonces la composición de  $\phi = \exp_p \circ f \circ I \circ \exp_N^{-1}$  es inyectiva.

Lo anterior se formaliza con la definición de inyectividad como sigue.

La aplicación  $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow M$  es inyectiva, si para todo  $N, S \in \mathbb{S}^n$  se cumple :

Si  $N \neq S$  en  $\mathbb{S}^n$  entonces  $\phi(N) \neq \phi(S)$  en  $M$ , con

$$\phi(N) = (\exp_p \circ f \circ I \circ \exp_N^{-1})(N)$$

$$\phi(S) = (\exp_p \circ f \circ I \circ \exp_N^{-1})(S).$$

En efecto,



$$N \neq S$$

$$\exp_N^{-1}(N) \neq \exp_N^{-1}(S), \quad \exp_N^{-1} \text{ es inyectiva}$$

$$I(\exp_N^{-1}(N)) \neq I(\exp_N^{-1}(S)), \quad I \text{ es inyectiva}$$

$$f[I(\exp_N^{-1}(N))] \neq f[I(\exp_N^{-1}(S))], \quad f \text{ es inyectiva}$$

$$\exp_p\{f[I(\exp_N^{-1}(N))]\} \neq \exp_p\{f[I(\exp_N^{-1}(S))]\}, \quad \exp_p \text{ es inyectiva}$$

$$(\exp_p \circ f \circ I \circ \exp_N^{-1})(N) \neq (\exp_p \circ f \circ I \circ \exp_N^{-1})(S)$$

$$\phi(N) \neq \phi(S)$$

Por lo tanto, por la composición de aplicaciones inyectivas,  $\phi$  es inyectiva.

Ahora se verá que  $\phi$  es sobreyectiva.

B)  $\phi$  es **sobreyectiva** si  $d(\gamma_e, p) \leq d(\gamma_e, q)$ . Sea  $\sigma_e$  una geodésica minimizante de  $p$  a  $\gamma_e$  tal que  $\gamma_e = \sigma_e(t)$ . Por el lema (4.3.3) y por el razonamiento anterior existe  $t_0 \geq t$  tal que  $t_0 = \|f(v)\|$ . Entonces  $\gamma_e \in \phi(\overline{B}_{\frac{\pi}{2}}(N))$ . Por simetría, si  $d(\gamma_e, q) \leq d(\gamma_e, p)$  entonces  $\gamma_e \in \phi(\overline{B}_{\frac{\pi}{2}}(S))$ . Por lo tanto,  $\phi$  es sobreyectiva.

Dado que  $\phi$  es una aplicación continua, con inversa también continua, inyectiva y sobreyectiva de un espacio compacto  $\mathbb{S}^n$  a una variedad  $M$  compacta. Por lo tanto,  $\phi$  es un homeomorfismo. ■

Como se puede observar se ha demostrado el teorema haciendo cumplir propiedades que definen a un homeomorfismo, donde la aplicación  $\phi$  en general es un recubri-



miento que lleva arcos maximales de la esfera  $\mathbb{S}^n$  a la variedad  $M$ . Específicamente lleva segmentos geodésicos en el siguiente sentido. La aplicación  $\gamma_e : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^n$  definido en  $\mathbb{S}^n$  se particiona en dos. La primera viene a ser  $\gamma_e : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^n$  al que al aplicarle la aplicación  $\phi$ , la variedad  $M$  se recubre o se llena de segmentos desde  $p$  hasta el punto medio entre  $p$  y  $q$ . Donde el punto medio por la existencia de  $f(v)$  es  $\exp_p(t_0v)$ . y la segunda es  $\gamma_e : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \subset [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^n$  de la misma forma que la anterior al aplicarle la aplicación  $\phi$ , la variedad se recubre por geodésicas en este caso desde punto medio  $\exp_p(t_0v)$  hasta  $q$ . Y así la variedad con curvatura entre  $\frac{1}{4}$  y 1 tiene la forma de la esfera.



## CAPÍTULO V

### CONCLUSIONES

Al terminar el trabajo de investigación, se llegó a las siguientes conclusiones:

- El teorema de la cota de Klingenberg permitió demostrar que es posible extender el teorema de la esfera definido en  $\mathbb{R}^3$  a una variedad riemanniana de dimensión  $n > 3$ . Con este resultado se definió el homeomorfismo entre una variedad  $M$  de dimensión  $n > 3$  y la esfera  $S^n$ .
- La variedad  $M$  de dimensión  $n > 3$  homeomorfa a la esfera unitaria  $S^n$  mediante la aplicación  $\phi$ , se cubre por geodésicas.
- Se logró restringir la topología de la variedad  $M$  sobre su curvatura seccional mediante la condición global, que fue limitar el rango de los valores de la curvatura seccional  $K$ .
- Al estudiar las propiedades de punto de corte y lugar de corte se concluyó que existen dos únicos mecanismos que producen estos puntos, los cuales son: La existencia del primer punto conjugado a lo largo de una geodésica o la existencia de dos geodésicas diferentes de igual longitud que unen dos puntos. Estos dos elementos fueron fundamentales para llegar al teorema de la esfera en variedades.



## CAPÍTULO VI

### RECOMENDACIONES

Durante el desarrollo del trabajo surgieron motivaciones que pueden dar lugar a nuevas investigaciones.

- La estimación de la cota de Klingenberg es fundamental en la demostración del homeomorfismo entre una variedad  $M$  de dimensión  $n > 3$  y la esfera  $\mathbb{S}^n$ . En base a ello, se plantea la posibilidad de iniciar una investigación donde la aplicación entre la esfera  $\mathbb{S}^n$  y la variedad  $M$  además de un homeomorfismo se logre determinar un difeomorfismo lo que estaría incluyendo propiedades isométricas.
- Existen dos formas de estimar el radio de inyectividad de una variedad, una de ellas es cuando la variedad es de dimensión par y la otra cuando la variedad es de dimensión impar, la segunda es la más general ya que en ella se muestra la cota de Klingenberg, éste último motiva estudios para relacionar las topologías entre variedades riemannianas.



## BIBLIOGRAFÍA

- Abresch, Uwe y Meyer, W. T. (1997). Injectivity radius estimates and sphere theorems. Comparison geometry. Cambridge Univ., 30:1–47.
- Berger, M. (1960). Les variétés riemanniennes  $(1/4)$ -pincées. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, 3e série, 14(2):161–170.
- Brendle, Simon y Schoen, R. (2009). Sphere theorems in geometry. Surveys in Differential Geometry, 13(1):49–84.
- Cheeger, Jeff & Ebin, D. G. (2008). Comparison Theorems in Riemannian Geometry. AMS Chelsea Publishing, vol. 365.
- Do Carmo, M. P. (2015). Geometria riemanniana. IMPA, Brasil, 5<sup>a</sup> edição edition.
- Do Carmo, M. P. (2016). Diferential Geometri of Curves & Surfaces. Dover publications, Inc., Mineola, New York, second edi edition.
- Gallot, S., H. D. . L. J. (1990). Riemannian Geometry. Springer-Verlag, Berlin, second ed. edition.
- Hadamard, J. (1898). Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésique. J. Math. pures appl., 5e série,:27–74.
- Klingenberg, W. (1959). Cntribution to Riemannian Geometry in the Large. Annals of Mathematics, Vol. 69, N:654–666.



- Klingenberg, W. (1961). *Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung*. Commentarii Mathematici Helvetici, 35:47–54.
- Lee, J. M. (1997). Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. Springer, 2nd ed. (2018) edition.
- Martínez, N. (2007). La curvatura de Riemann a través de la historia. Miscelánea Matemática, 44:29–52.
- Martos, G. A. (2014). El Teorema de la Esfera. Universidad de Murcia.
- Munkres, J. (2014). *Topology*. pages 1–503.
- Sánchez, M. & Palmas, O. (2007). *Geometría riemanniana*.
- Tsukamoto, Y. (1961). *On Riemannian Manifolds With Positive Curvature*. Kyushu University, 15:90–96.
- Yu, T. (2013). *The Sphere Theorem in Riemannian Geometry*.



## ANEXO

### A. Conceptos Topológicos

En este trabajo se estudia una relación de dos ramas de las matemáticas: la geometría diferencial y la topología. Por tanto, el objetivo en este apartado es definir las nociones topológicas que se utilizaron en la demostración del resultado principal como son: conjuntos compactos y conexos que son conjuntos de puntos en espacios euclideos. y también demostrar algunos resultados de cuestiones topológicas. Si se quiere profundizar aún más en algunos aspectos, se puede consultar en Do Carmo (2016) y Munkres (2014), de donde se han extraído todos los conceptos.

**Definición 6.0.1.** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es conexo cuando no es posible representarlo en la forma  $A = U_1 \cup U_2$ , donde  $U_1$  y  $U_2$  son subconjuntos abiertos no vacíos de  $A$  y  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . (Do Carmo, 2016, p. 465)

La definición anterior indica que no es posible descomponer  $A$  en dos trozos disjuntos.

**Proposición 6.0.1.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto conexo y sea  $B \subset A$  abierto y cerrado simultáneamente en  $A$ . Entonces o  $B = \emptyset$  o bien  $B = A$ . (Do Carmo, 2016, p. 466)

#### Demostración

Supongamos que  $B \neq \emptyset$  y que  $B \neq A$  y sea  $A = B \cup (A - B)$ . Como  $B$  es cerrado en  $A$ ,  $A - B$  es abierto en  $A$ . Así  $A$  es la unión disjunta de dos abiertos no vacíos, a saber,  $B$  y  $A - B$ . Esto contradice la conexidad de  $A$ . ■



**Proposición 6.0.2.** Sea  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  continua y sea  $A$  un conexo. Entonces  $F(A)$  es un conexo. (Do Carmo, 2016, p. 466)

### Demostración

Supongamos que  $F(A)$  no es conexo. Entonces  $F(A) = U_1 \cup U_2$ , donde  $U_1$  y  $U_2$  son subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos de  $F(A)$ . Como  $F$  es continua,  $F^{-1}(U_1)$ ,  $F^{-1}(U_2)$  son también subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos de  $A$ . Al ser  $A = F^{-1}(U_1) \cup F^{-1}(U_2)$ , se llega a una contradicción, en virtud a la conexidad de  $A$ . ■

**Definición 6.0.2.** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es acotado si está contenido en alguna bola de  $\mathbb{R}^n$ . Un conjunto  $W \subset \mathbb{R}^n$  es compacto si es cerrado y acotado. (Do Carmo, 2016, p. 468)

**Proposición 6.0.3.** Sea  $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación continua y sea  $W$  un compacto. Entonces  $F(W)$  es un compacto. (Do Carmo, 2016, p. 471)

### Demostración

Si  $F(W)$  es finito entonces es, trivialmente, un compacto. Supongamos que  $F(W)$  no es finito y consideremos un subconjunto finito  $\{F(p_\alpha)\} \subset F(W)$ ,  $p_\alpha \in W$ . Está claro que el conjunto  $\{p_\alpha \in W\}$  es infinito y admite, por compacidad, un punto límite  $q \in W$ . Por tanto, existe una sucesión  $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots \rightarrow q$ ,  $p_i \in \{p_\alpha\}$ . Por la continuidad de  $F$ , la sucesión  $F(p_i) \rightarrow F(q) \in F(W)$ . En consecuencia,  $\{F(p_\alpha)\}$  admite un punto límite  $F(q) \in F(W)$ ; luego  $F(W)$  es compacto. ■

**Proposición 6.0.4.** Sea  $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida continua sobre un conjunto compacto  $W$ . Entonces existen  $p_1, p_2 \in W$  tales que



$$f(p_2) \leq f(p) \leq f(p_1)$$

para todo  $p \in W$ ; es decir,  $f$  alcanza el máximo en  $p_1$  y el mínimo en  $p_2$ . (Do Carmo, 2016, p. 471)

### Demostración

se demostrará la existencia de  $p_1$ ; el caso del mínimo se trata de una manera similar.

De la proposición anterior,  $f(W)$  es compacto, luego es cerrado y acotado. Por lo tanto, existe  $\sup f(W) = x_1$ . Como  $f(W)$  es cerrado,  $x_1 \in f(W)$ . Se deduce entonces que existe  $p_1 \in W$  con  $x_1 = f(p_1)$ . Está claro que  $f(p) \leq f(p_1) = x_1$  para todo  $p \in W$ .

**Definición 6.0.3. (Homeomorfismo)** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos, y  $f$  una función continua de  $X$  a  $Y$ ; entonces,  $f$  es un homeomorfismo si se cumple que:

- $f$  es una biyección
- $f$  es continua
- La inversa de  $f$  es continua.

(Munkres, 2014, p. 105)

**Definición 6.0.4. (Difeomorfismo)** Dadas dos variedades  $M$  y  $N$ , una aplicación  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo si es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable.