UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRIA EN EDUCACIÓN

TESIS

EL GEOGEBRA EN EL APRENDIZAJE DE LA INTEGRAL DEFINIDA E INDEFINIDA EN ESTUDIANTES DE LA ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA DE SISTEMAS DE LA UNA PUNO

PRESENTADA POR:

MIGUEL ANGEL RIVAS MAMANI

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN EDUCACIÓN

MENCIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

PUNO, PERÚ

2020

DEDICATORIA

Dedico este trabajo principalmente a Dios, por haberme dado la vida y permitirme el haber llegado hasta este momento tan importante de mi formación profesional. A mis padres Roberto y Renilda, por ser el pilar más importante y demostrarme siempre su cariño y apoyo, a mi hermano Boris por sus palabras de aliento.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Alfredo Carlos Castro Quispe director de esta investigación, por la motivación, orientación, seguimiento y supervisión continua de la misma.

Asimismo, agradezco también a todos los profesores de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Altiplano, por ser orientadores en mi formación profesional.

A mi familia, amistades y compañeros de estudios del posgrado, por brindarme su apoyo desinteresado, gracias a todos por su ayuda, paciencia, palabras de ánimo y buenos consejos.

ÍNDICE GENERAL

ÁREA: Logros de aprendizaje de la matemática
TEMA: Uso del GeoGebra en la educación matemática
LÍNEA: Resultados de aprendizaje de la matemática

Puno, 16 de enero de 2020

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

El propósito de esta investigación fue determinar el efecto del uso del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA – Puno. Para tal fin la metodología empleada fue del tipo correlacional de enfoque cuantitativo y diseño cuasi experimental, con una muestra conformada por 58 estudiantes distribuidos en 2 grupos denominados control y experimental, con 28 estudiantes en el grupo control y 30 estudiantes en el grupo experimental a los que se aplicaron 2 pruebas una de entrada y otra de salida. Utilizando las sesiones de aprendizaje tradicionales en el grupo control se obtuvo una media de calificaciones de 10.32 a 11.21, mientras que en el grupo experimental implementando el GeoGebra como recurso didáctico en forma sistemática con las sesiones de aprendizaje se pudo apreciar un incremento en la media de 10.53 a 14.14 puntos. Los resultados muestran que la aplicación del GeoGebra en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en los estudiantes del grupo experimental, difieren significativamente respecto a los estudiantes del grupo control, ello se evidencia en la prueba t de Student con un 95 % de confiabilidad. La investigación permitió concluir que la aplicación del GeoGebra como recurso didáctico mejora significativamente el aprendizaje de la integral definida e indefinida en los estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.

Palabras clave: aprendizaje, didáctica, GeoGebra, integral definida, integral indefinida.

ABSTRACT

This research has as purpose to determine the effect of the use of Geogebra as a didactic resource in the learning of the defined and indefinite integral in students of the professional school of systems engineering of the UNA - PUNO. To this purpose, the methodology used was the correlational type of quantitative approach and quasi-experimental design, with a sample of 58 students distributed in 2 groups called control and experimental, with 28 students in the control group and 30 students in the experimental group to whom 2 tests were applied, one input and one output. Using the traditional learning sessions in the control group, a mean score of 10.32 to 11.21 was obtained, while in the experimental group, implementing Geogebra as a teaching resource in a systematic way with the learning sessions, an increase in the mean score from 10.53 to 14.14 points was observed. The results show that the application of Geogebra in the learning of the definite and indefinite integral in the students of the experimental group, differ significantly with respect to the students of the control group, this is evidenced in the student T test with 95 % reliability. The investigation allowed to conclude that the application of Geogebra as a didactic resource significantly improves the learning of the definite and indefinite integral in the students of the professional school of informatic engineering of the UNA PUNO.

Keywords: definite integral, didactics, GeoGebra, indefinite integral, learning.

INTRODUCCIÓN

Hoy en día el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) en la educación constituyen una herramienta importante en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos ya que permiten interactuar e integrar conocimientos. Las tendencias en la enseñanza de las matemáticas actualmente destacan la importancia del uso de la tecnología como un medio que permite al estudiante obtener mayor profundidad del conocimiento matemático, para este tratamiento en los últimos años se ha venido desarrollando una gran cantidad de estudios basados en el uso del GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles de educación, esto debido a que en comparación con otros software matemáticos, el GeoGebra es de fácil acceso y manipulación, por ello se considera importante que es indispensable para los docentes ser orientadores del uso de esta herramienta para dejar de ser maestros tradicionales, estar conscientes y dispuestos para aceptar los cambios e implementar la tecnología en las aulas de enseñanza en favor de los estudiantes.

El presente trabajo surge como una consecuencia del poco interés y compresión de las matemáticas donde una de las causas es el uso de estrategias metodológicas del docente, además de las dificultades que presentan los estudiantes en la forma de resolver e interpretar problemas relacionados con las matemáticas, concretamente en el curso de cálculo que comprende las integrales definidas e indefinidas donde la representación gráfica es una herramienta fundamental para la compresión de estos conceptos. La investigación se plantea en un estudio realizado con 58 estudiantes distribuidos en dos grupos los cuales fueron sometidos a un proceso cuasi experimental, con la aplicación de una estrategia basada en el uso del GeoGebra como recurso didáctico, proponiendo un análisis de correspondencia mediante una verificación estadística apropiada entre las pruebas de entrada y salida aplicadas en los estudiantes.

La investigación consta de cuatro capítulos. El primero trata sobre la revisión de literatura, donde se detallan las principales definiciones y características como: La importancia del uso de las TIC, el GeoGebra, la importancia del aprendizaje de las integrales, sus aplicaciones y representaciones gráficas, además de los antecedentes relacionados con la investigación.

El segundo capítulo presenta el planteamiento del problema, donde se da a conocer la formulación del mismo, justificación, alcance de la investigación, hipótesis y los objetivos que se pretende lograr.

El tercer capítulo da a conocer los materiales y métodos utilizados en la investigación, destacando la población, muestra, tipo de investigación, técnicas e instrumentos de recolección de datos, prueba de la hipótesis y técnicas de procesamiento y análisis de datos por objetivos específicos.

El cuarto capítulo comprende los resultados de la investigación presentados por objetivos específicos describiendo su confiabilidad, análisis e interpretación de datos en base a las pruebas de entrada y salida, validación de las hipótesis, discusión respecto a los trabajos citados, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y los anexos correspondientes.

CAPITULO I

REVISIÓN DE LITERATURA

1.1 Marco teórico

1.1.1 Tecnologías de la Información y Comunicación

Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) es un término que contempla toda forma de tecnología usada para crear, almacenar, intercambiar y procesar información en sus diferentes formas tales como datos, conversaciones de voz, imágenes fijas o en movimiento, presentaciones multimedia y otras formas, incluyendo aquéllas aún no concebidas. Las Tecnologías de la Información y Comunicación se desarrollan a partir de los avances científicos desarrollados en el campo de la informática y las telecomunicaciones (Ayala & Gonzales, 2015).

Las TIC en la actualidad se han convertido en una herramienta fundamental para los procesos de enseñanza aprendizaje, información, comunicación, generación, apropiación y uso de los saberes y el desarrollo de la ciencia y el conocimiento (Rivera, 2011). La sociedad del conocimiento se encuentra en la revolución tecnológica en la información y comunicación lo cual paulatinamente conducirá el futuro de los aprendizajes y la educación (Sánchez & Boix, 2009). En ese sentido uno de los problemas que enfrentan las universidades en el Perú es la falta de articulación y comunicación; además de la fragmentación de las estructuras educativas en departamentos académicos lo cual ocasiona que se tienda a trabajar de forma aislada, precisamente la importancia de las TIC enmarca la interacción sin restricciones de tiempo, cultura o lengua entre los participantes en un determinado contexto educativo. Gracias a la familiarización con las TIC los estudiantes pueden acceder a una nueva cultura donde predomina el ordenador sobre el libro o el docente, de esta forma no les sirve sólo lo que encuentran en los libros, ya que pueden aprender cada vez más por sí mismos, como también plantear problemas, planificar estrategias y resolver situaciones en permanente transformación gracias a la accesibilidad a los medio telemáticos (Sánchez & Boix, 2009). Además las TIC permiten su uso en los procesos de enseñanza y aprendizaje ya sea presencial o a distancia, en forma uni o bidireccionalmente, propician el intercambio de roles y mensajes (Castro, Guzmán, & Casado, 2007). En otras palabras, median el proceso de comunicación entre estudiantes, docentes y los materiales educativos, también permiten distribuir información que se puede utilizar en tiempo real o ser almacenada para tener acceso a ella cuando los interesados así lo requieran, de esta manera se incrementa la posibilidad del acceso a la educación.

De acuerdo con Cabero (1998), las TIC giran en torno a tres medios básicos: la microelectrónica, la informática y las telecomunicaciones; pero giran, no sólo de forma aislada, sino lo que es más significativo, de manera interactiva lo que permite conseguir nuevas realidades comunicativas. Hoy en día, aludir a las tecnologías de información y comunicación es abordar temáticas inherentes al internet y la informática siendo esta uno de los ejes fundamentales. La informática tiene una relación estrecha con la educación teniendo en cuenta que la sociedad del futuro será una sociedad fuertemente informatizada debido a que es una herramienta auxiliar de muchas materias, tal como se muestran en problemas de simulación en las ciencias puras y ciencias sociales (Ayala & Gonzales, 2015).

La introducción y uso de las TIC en los sistemas educativos es común ya que son herramientas que se utilizan para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje considerándose estas una competencia básica como la lectura o escritura. Así desde un enfoque pedagógico y de una acción institucional concertada, el uso de las TIC puede ayudar a lograr que en una determinada institución más estudiantes aprendan mejor y de modo más activo (Rué, 2015). El proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula haciendo uso de las TIC requiere de un conjunto de competencias que el docente debe adquirir con la lógica de sumar una metodología capaz de aprovechar las herramientas tecnológicas, donde la capacitación docente deberá considerarse una de las primeras opciones antes de afrontar nuevos retos educativos. En consideración de la experiencia de los profesionales que se dedican a la enseñanza de las matemáticas, las TIC constituyen un elemento eficaz en la educación, ya que permite simplificar el proceso de aprendizaje y autoaprendizaje gracias a su valor interactivo que brinda además de la facilidad con que se pueden repetir diferentes contenidos curriculares.

La actualidad nos demuestra que el acceso a las TIC es un requisito importante para participar de una sociedad tecnológica (Tello, 2017). La adopción de las TIC en el medio como acceso y continuidad tiene como punto de partida romper con las brechas digitales de una sociedad que aún no cumple con el dinamismo de adaptación, quizás en un inicio la incorporación de estos recursos ha sido resistida, sin embargo, el trascurrir del tiempo ha evidenciado que la sociedad educativa depende de un enfoque tecnológico que lo ayude a construir y adquirir conocimiento. Es un hecho que el aporte de las TIC a la educación y a la sociedad como tal es la flexibilidad y la adaptación a un entorno cada vez más cambiante, pero esto no garantiza de por sí el éxito en el aprendizaje ya que estos recursos y medios a ser utilizados deben estar sujetos al proceso educativo, y no lo contrario.

Las TIC como herramientas añadidas a los modelos pedagógicos pueden convertirse en recursos valiosos para el aprendizaje, logrando formar estudiantes con competencias personales y profesionales idóneas para el desarrollo de un país (Prieto et al., 2011). La adaptación de las TIC en la enseñanza de las matemáticas permite a los estudiantes desarrollar la creatividad, curiosidad, así como también la capacidad para resolver problemas y tomar decisiones consolidando su aprendizaje de una forma interactiva.

1.1.2 El GeoGebra

El GeoGebra es un software matemático interactivo de libre acceso desde cualquier sistema operativo que permite relacionar las distintas representaciones geométricas y algebraicas de un objeto matemático. Fue creado en 2001 por Markus Hohenwarter en la Universidad de Salzburgo, desde entonces, Markus y un equipo de desarrolladores dedicado y en continuo crecimiento han transformado este programa en uno de los principales programas informáticos pedagógicos para la educación matemática en todo el mundo (Hall & Lingefjärd, 2017, p. 448). Además, es utilizado en más de 80 países y traducido a más de 60 idiomas incluyendo el español; en los últimos años este software se ha convertido en una herramienta muy utilizada en la investigación de la didáctica de la matemática en educación secundaria y superior ya que permite combinar dinámica y simultáneamente la geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente.

En la Figura 1 se muestra el interfaz del GeoGebra donde se pueden distinguir las siguientes zonas de trabajo: Herramientas, Barra de entrada, Vista Algebraica, Vista Gráfica, Menú y Teclado Virtual. Esta multiplicidad permite apreciar los objetos matemáticos en dos representaciones diferentes: gráfica (como en el caso de puntos, gráficos de funciones) y algebraica (como coordenadas de puntos, ecuaciones). Cada representación del mismo objeto se vincula dinámicamente a las demás en una adaptación automática y recíproca que asimila los cambios producidos en cualquiera de ellas, más allá de cuál fuera la que lo creara originalmente (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

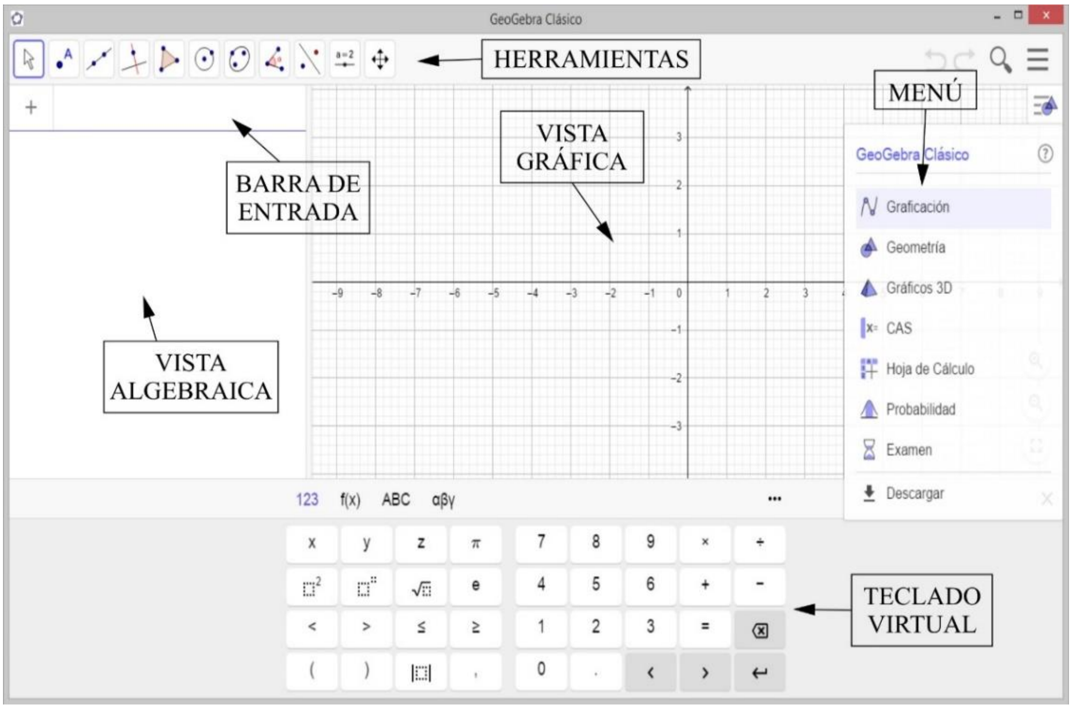


Figura 1. Interfaz del GeoGebra Clásico

Esta presentación del software nos abre la posibilidad de abordar su aplicación no solo a la geometría y algebra, sino que también al cálculo superior. En ese sentido facilita los procesos de aprendizaje como el concepto de derivada el cual tradicionalmente privilegiaba los procesos algorítmicos mas no la parte conceptual y geométrica, como consecuencia de ello también permite el estudio más agudo de las definiciones y aplicaciones de las integrales.

Cotic (2014), refiere que el GeoGebra por ser una herramienta de libre acceso y fácil uso en el aula contribuye a mejorar una actividad central de la matemática resultando un elemento muy motivador para los estudiantes. Utilizando este software se puede establecer una permanente conexión entre las expresiones algebraicas y la geométricas permitiendo abordar diferentes aspectos de la matemática a través de la experimentación y manejo de los elementos, facilitando así la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa. Respecto a las potencialidades del software, Tamayo (2013), resalta la posibilidad de generar conflicto cognitivo, facilidad de manejo del programa, precisión en la elaboración de gráficas y la eficiencia en su realización, además de motivar la interacción entre los estudiantes. Otra de las cualidades de esta herramienta es que permite examinar los saberes previos de los estudiantes mediante la preparación de una guía o manual que se oriente a la construcción del conocimiento, esto debido a que muchos conceptos matemáticos en un texto o una lectura son abstractos y difíciles de comprender por lo que es necesario una representación visual.

Por otro lado el uso del GeoGebra y el empleo de metodologías en el aprendizaje permite a los docentes desarrollar competencias para la utilización de recursos y herramientas informáticas adecuadas a los conocimientos matemáticos que desean impartir en sus alumnos, de esta forma el uso adecuado del GeoGebra permite una mejor visualización, análisis e interpretación de los objetos matemáticos ayudando desde diferentes ópticas a comprenderlos de mejor manera, pero no debe entenderse como el sustituto del conocimiento sino como una herramienta que permita potenciarlo. La incorporación de este software no solo ha hecho más fáciles las representaciones gráficas, algebraicas y los cálculos matemáticos, sino que también ha cambiado la naturaleza misma de los problemas, brindando otra perspectiva para el estudio e investigación en el área de las matemáticas.

1.1.3 Aprendizaje

El aprendizaje es el proceso a través del cual se modifican y adquieren habilidades, destrezas, conocimientos, conductas y valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación. El aprendizaje de la matemática es una actividad considerada por un gran número de estudiantes como una de las materias más difíciles, exigentes y problemáticas (Mota, Oliveira, & Henriques, 2017).

A lo largo de la historia el estudio de las matemáticas se ha realizado desde perspectivas diferentes, en el periodo inicial de la matemática se produjo un enfrenamiento entre los partidarios de un aprendizaje de las habilidades matemáticas elementales basado en la práctica y el ejercicio y los que defendían que era necesario aprender unos conceptos y una forma de razonar antes de pasar a la práctica y que su enseñanza, por tanto se debía centrar principalmente en la significación o en la comprensión de los conceptos. Según Ausubel, Novak, & Hanesian (1983), el aprendizaje por descubrimiento sucede cuando los aprendices llegan a hacer, por ellos mismos, generalizaciones sobre los conceptos o fenómenos, este descubrimiento al que se llega en clase es denominado descubrimiento guiado.

Para Piaget & Chomsky (1983), el aprendizaje es un proceso mediante el cual el sujeto a través de la manipulación de objetos, experimentación, la interacción con las personas, genera o construye conocimiento, modificando, en forma activa sus esquemas cognoscitivos del mundo que lo rodea. Ausubel (2002), considera que el sujeto para obtener el aprendizaje debe pasar por un proceso de reconstrucción de sus ideas, conocimientos, representaciones mentales y conceptos además de contar con la predisposición para aprender y un material potencialmente significativo. Lo primero hace referencia al esencial deseo de aprender y lo segundo a que el material de aprendizaje esté ordenado y tenga coherencia lógica para establecer una conexión con lo que el estudiante conoce. Según Dongo (2008), el estudio del aprendizaje estuvo casi siempre vinculado a procesos repetitivos de adquisición de conocimientos y por ende a mecanismos asociativos. Por otro lado Carretero (2009), afirma que aprender es sinónimo de comprender, el aprendizaje está estrictamente ligado a las relaciones existentes entre el nuevo conocimiento y el que ya posee el alumno.

Según Brunner (2004), plantea que el aprendizaje de conceptos matemáticos se introduce a partir de actividades simples que los alumnos puedan manipular para descubrir principios y soluciones matemáticas. Actualmente, la forma de concebir el aprendizaje matemático es de tipo estructuralista, especialmente cuando se refiere al aprendizaje de conceptos, donde se considera que aprender es alterar estructuras, y que estas alteraciones no se producen por medio de procesos simples, sino que se realizan de manera global. Algunas cualidades de este tipo de aprendizaje son a través de experiencias concretas, el aprendizaje va de lo concreto a lo abstracto. Así, la enseñanza matemática actual promueve que se trabaje con objetos concretos antes de pasar a establecer las abstracciones, cuando estas abstracciones se han consolidado entonces estamos en condiciones de emplearlas como elementos concretos. En ese sentido se debe tener en cuenta que los conceptos matemáticos no son objetos reales por ello debe recurrirse a sus distintas representaciones para su estudio, también es importante destacar que estas representaciones no son el objeto matemático en sí, sino es un medio que ayuda a su comprensión (Godino, Batanero, & Font, 2007).

Así mismo se debe considerar que el rol del docente no necesariamente es el de transmitir o facilitar los conocimientos, sino el mediador en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Estos deben impartir las matemáticas comprendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y los saberes previos (Godino, Batanero, & Font, 2003). Por ello, aparte de contenidos y procesos, también es fundamental considerar el papel del profesor, la propia enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje y la instrucción (Godino et al., 2003). Estos aspectos son importantes debido a que es el profesor quien proporciona el conocimiento y organiza las diferentes situaciones didácticas que pueden darse en el aula, siendo también él quien guía los aprendizajes, por lo que la capacidad de los estudiantes para aplicar este conocimiento en la resolución de problemas y buena disposición hacia las matemáticas están condicionadas por la enseñanza que encuentran en su aula.

Conforme a lo que refiere Duval (2004), el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y comprensión de textos, el acceso al conocimiento matemático no es directo, es necesario acudir a diferentes representaciones de los objetos matemáticos como expresiones, notaciones, gráficas, problemas, operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, definiciones, axiomas, teoremas, etc., para este fin propone dos tipos de representaciones las mentales y las semióticas, ésta última son representaciones notorias al sujeto, directamente visibles y observables, son producciones construidas por el empleo de signos. Aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas además del lenguaje natural o el de las imágenes requieran la utilización de distintos registros de expresión y representación. El desarrollo de un proceso de aprendizaje matemático está relacionado con los siguientes aspectos: comprensión, establecimiento de relaciones, razonamiento, aplicación de conceptos, métodos y evaluación.

En ese sentido una forma de introducir los conceptos de las integrales en el proceso de aprendizaje de los estudiantes del nivel superior es a través de su representación gráfica asistida por el GeoGebra, con el cual se logra una visualización de los objetos geométricos y algebraicos que están involucrados en el estudio, permitiendo relacionarlos en forma simultánea y realizar un análisis más completo.

1.1.4 Recursos Didácticos

Los recursos didácticos son materiales de trabajo que sirven como mediadores para el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que permite que el profesor presente los conocimientos de una manera más cercana y menos abstracta. Según Spiegel (2006), los recursos didácticos permiten dar un concepto de manera organizada a fin de complementar, respaldar y acompañar las explicaciones en clase, con su ayuda podemos ampliar, detallar procedimientos, presentar relaciones, sintetizar, o contextualizar informaciones. Atender a la diversidad del alumnado es un propósito que muchas veces no se lleva bien por el escaso tiempo con el que el profesor dispone para desarrollar los contenidos de un módulo de aprendizaje, en ese sentido los recursos didácticos son herramientas con las que podemos contar para presentar un contenido de distinta manera, con diferentes lenguajes, de esta manera abrir oportunidades equivalentes de aprender a los estudiantes que tienen diversos tipos de capacidades. Uno de los recursos utilizados en una sesión de aprendizaje son las guías didácticas, estas contienen las instrucciones a seguir y los conceptos que se desea que el alumno aprenda, su objetivo es conducir al estudiante para que construya el conocimiento de forma activa y reflexiva convirtiéndose en un material que posibilita el trabajo autónomo por parte de los estudiantes.

En toda guía o secuencia didáctica se pueden diferenciar cuatro tipos de actividades

- Apertura; tiene la finalidad de indagar los saberes previos, formas de aprender, expectativas e intereses de los estudiantes, a través de estas puede estructurarse el módulo de aprendizaje.

- Desarrollo; se usan las condiciones para que los estudiantes tengan oportunidad de desarrollar las capacidades propuestas en el módulo.
- Cierre; se propone la integración y aplicación de los aprendizajes.
- Evaluación formativa; se propone analizar tanto el proceso de aprendizaje como las capacidades desarrolladas al final del módulo.

De acuerdo a esta secuencia de actividades propuesta, se diseñan las guías didácticas asistidas por un software, estas deben contar con instrucciones detalladas que implican la realización de trabajos específicos no extensos, actividades que los estudiantes puedan desarrollar en un plazo corto de tiempo sin necesidad de tener conocimientos avanzados del software utilizado.

1.1.5 Integrales

La integración es un concepto fundamental del análisis matemático que permite realizar aplicaciones en diferentes ramas de la ingeniería principalmente en problemas del cálculo de áreas de regiones irregulares y volúmenes de sólidos. En la historia de la matemática, el cálculo de áreas es uno de los problemas más antiguos que fue foco de interés de muchos de los protagonistas de la matemática griega. Desde los tiempos de la educación primaria hemos estado en contacto con este problema: se nos ha enseñado cómo calcular áreas de cuadradas, de rectángulos, de triángulos, y quizás, de algunos polígonos más complicados (Pita Ruiz, 1998, p. 571). En ese contexto para el cálculo de áreas de regiones distintas a las figuras geométricas conocidas es necesario implementar la integral de Riemann, la cual es una herramienta matemática importante para dar solución a muchos problemas de ingeniería.

1.1.5.1 Integrales Definidas

Una partición del intervalo $[a,b]$ es un subconjunto finito de puntos $P=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}\subset[a,b]$ tal que $a\in P$ y $b\in P$.

Dada una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, usaremos la notación

$$m=\inf\{f(x);\ x\in[a,b]\}\ \text{ y }\ M=\sup\{f(x);\ x\in[a,b]\}$$

de donde tenemos $m\le f(x)\le M$, $\forall x\in[a,b]$

La suma inferior de f respecto a la partición P es el número

$$s(f;P)=m_1(t_1-t_0)+...+m_n(t_n-t_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1})$$

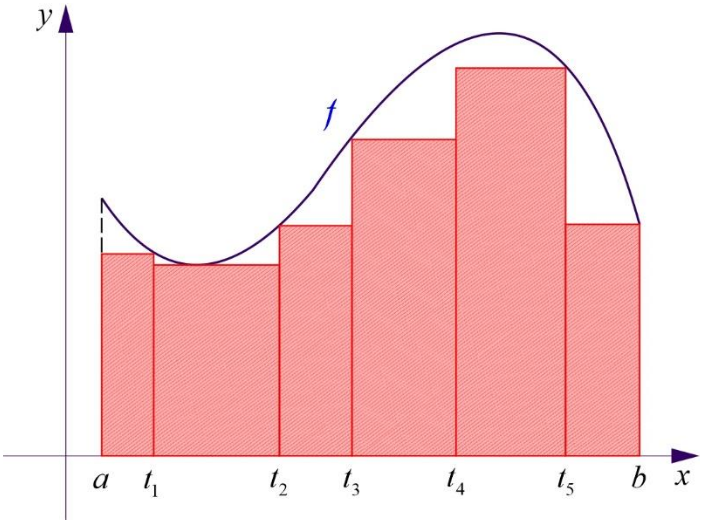


Figura 2. Suma inferior de f respecto a la partición P

La suma superior de f respecto a la partición P es el número

$$S(f;P)=M_1(t_1-t_0)+...+M_n(t_n-t_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1})$$

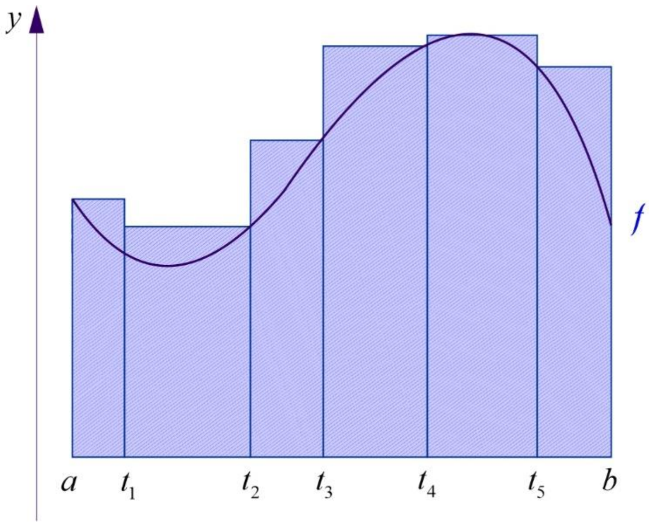


Figura 3. Suma superior de f respecto a la partición P

La integral inferior y superior de una función acotada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, se definen como sigue:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P S(f;P), \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P s(f;P)$$

donde el supremo e ínfimo se toman en el conjunto de todas las particiones P del intervalo $[a,b]$.

Definición.- Una función f se dice que es integrable en $[a,b]$ si f está acotada sobre $[a,b]$ y si

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

en tal caso, a este valor común se le denomina integral definida y es representada por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema (**Condición suficiente para la integrabilidad**)

Toda función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable.

Propiedades de la integral definida

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en el intervalo $[a,b]$ y k una constante cualquiera, entonces:

- $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
- $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
- Si $f(x)\geq 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- Si $f(x)\geq g(x),\ \forall x\in[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$
- Si $c\in[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Sea $F(x)$ una función definida por:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Si f es continua sobre un intervalo J y si $a\in J$, entonces $F(x)$ es diferenciable sobre J y se cumple que: $F'(x)=f(x),\ \forall x\in J$

Es decir, $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),\ \forall x\in J$

El Teorema Fundamental del Cálculo.- Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua, además $F'(x)=f(x)$ para $x\in[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

1.1.5.2 Integral Indefinida

Una antiderivada de una función $f(x)$, es una función $F(x)$

$$F'(x)=f(x)$$

Se denomina antiderivada general de $f(x)$ a la función $F(x)+C$, donde C es la constante de integración.

Definición.- Si $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ sobre un intervalo $[a,b]$, entonces la integral indefinida de $f(x)$ es denotada por:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,\ \forall x\in[a,b]$$

Propiedades de la integral indefinida

- $\int k\, f(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$
- $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

Teorema.- (Cambio de variable) Sea la integral $\int f\left[\psi\left(x\right)\right]\psi'\left(x\right)dx$, si llamamos $u=\psi\left(x\right)$, entonces

$$\int f\left[\psi\left(x\right)\right]\psi'\left(x\right)dx=\int f\left(u\right)du$$

Métodos de integración

a) Integración por partes

Se aplica cuando en el integrando se encuentra el producto de dos funciones.

$$\int u.dv=uv-\int vdu$$

La función dv debe ser aquella que se pueda integrar inmediatamente, en algunos casos se tiene que integrar por partes más de una vez, a este tipo de problemas se denomina integral circular.

b) Integración de funciones trigonométricas

Para esta forma de integración, mencionaremos algunas identidades trigonométricas:

- $sen^2x+\cos^2 x=1$
- $\sec^2 x=1+\tan^2 x$
- $\csc^2 x=1+\cot^2 x$

Integrales de la forma: $\int sen^m x\cos^n x\,dx$

- Cuando m es impar se factoriza $senx\,dx$ y los senos restantes se expresan en función de cosenos.
- Cuando m ó n son pares, utilizaremos las siguientes identidades:

$$sen^2x=\frac{1-\cos x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos x}{2}$$

Integrales de la forma: $\int \tan^m x\sec^n x\,dx$

- Cuando n es par, poner todas las integrales como potencia de $\tan x$

- Cuando m, n es impar o par, descomponer de tal forma que aparezca $\sec x \tan x$ para integrar como potencia $\sec x$.

c) Integración por sustitución trigonométrica

Si las funciones a integrar tienen forma de radicales, para simplificar los cálculos considerando $u = u(x)$, se procede hacer una sustitución trigonométrica que se presentan en los siguientes casos:

- $f(x) = \sqrt{a^2 - u^2}$

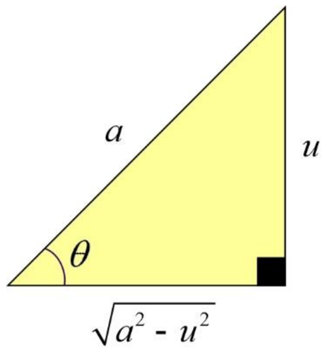


Figura 4. Triángulo notable para $f(x) = \sqrt{a^2 - u^2}$

Hacer $\frac{u}{a} = sen\theta \to u = asen\theta$, de donde $du = a\cos\theta d\theta$

- $f(x) = \sqrt{u^2 - a^2}$

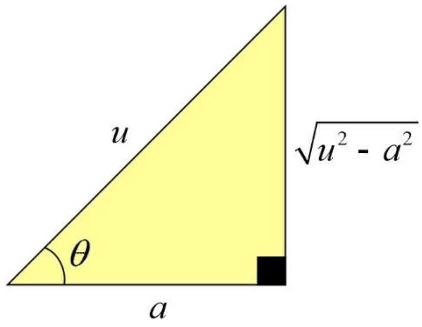


Figura 5. Triángulo notable para $f(x) = \sqrt{u^2 - a^2}$

Hacer $\frac{u}{a} = \sec\theta \to u = a\sec\theta$, de donde $du = a\sec\theta\tan\theta d\theta$

- $f(x)=\sqrt{u^2+a^2}$

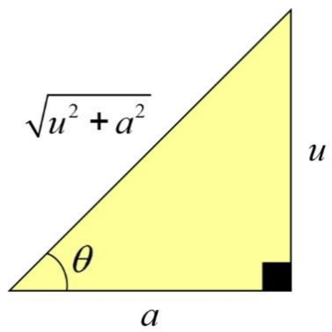


Figura 6. Triangulo notable para $f(x)=\sqrt{u^2+a^2}$

Hacer $\dfrac{u}{a}=\tan\theta \rightarrow u=a\tan\theta$, de donde $du=a\sec^2\theta\, d\theta$

d) Integración de funciones racionales

Toda función racional propia se puede descomponer como suma de fracciones simples, consideremos:

$$\int f(x)dx;\ \ f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\ \ m>n$$

Caso 1: El polinomio $Q_m(x)$ tiene factores lineales simples no repetidos, la función será descompuesta en m fracciones simples como se muestra

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_m}{x-a_m}$$

Caso 2: El polinomio $Q_m(x)$, tiene algunos factores lineales repetidos, el factor repetido será descompuesto de la siguiente forma:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{\ldots(x-a)^k\ldots}=\ldots+\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\ldots$$

Caso 3: El polinomio $Q_m(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles no repetidos:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{\ldots\left(x^2+ax+b\right)\ldots}=\ldots+\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}+\ldots$$

Caso 4: El polinomio $Q_m(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles repetidos, el factor repetido será descompuesto de la siguiente manera:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{\ldots\left(x^2+ax+b\right)^k\ldots}=\ldots+\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+ax+b\right)}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+ax+b\right)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+ax+b\right)^k}+\ldots$$

1.1.5.3 Aplicaciones en áreas de regiones planas

Parar determinar el área de una región es necesario conocer las funciones que la acotan y sus límites de integración, estas pueden presentarse en diversas situaciones debido a que las integrales pueden calcularse respecto a la variable x o y, este criterio dependerá de la forma que tenga la región en ese sentido consideraremos los siguientes casos.

a) Si $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a,b]$ entonces el área limitada por la gráfica de esta función, las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje x es dada por

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

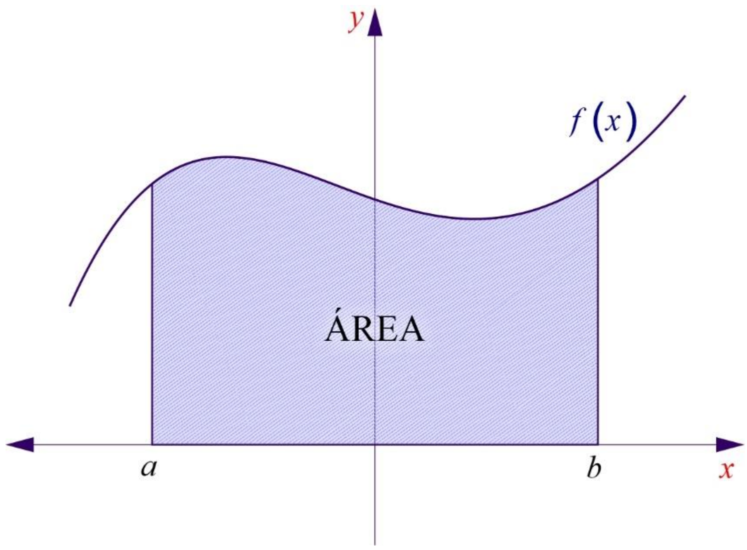


Figura 7. Área bajo la gráfica de f respecto a x

b) Si $f(y) \geq 0, \ \forall y \in [c, d]$ entonces el área limitada por la gráfica de esta función, las rectas $y = c$, $y = d$ y el eje y es dada por

$$A = \int_{c}^{d} f(y)\, dy$$

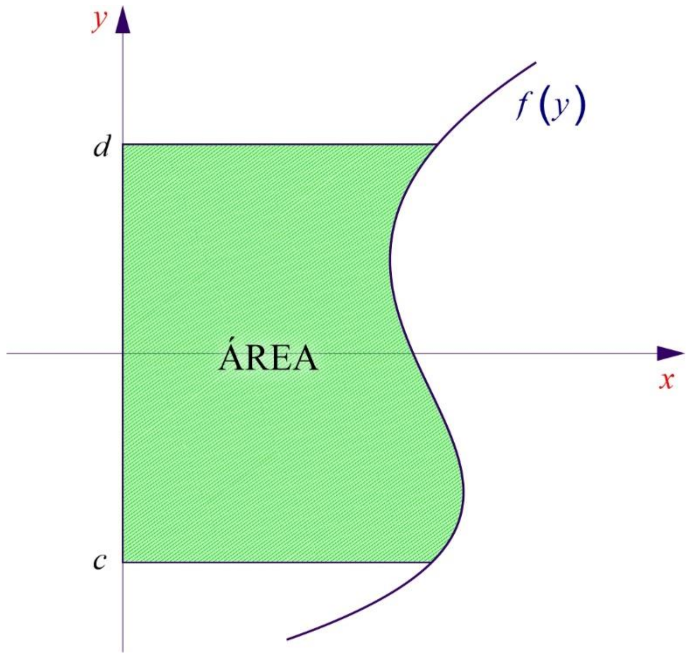


Figura 8. Área bajo la gráfica de f respecto a y

c) Si $f(x) \geq g(x), \ \forall x \in [a, b]$ entonces el área limitada por las gráficas de estas dos funciones es dada por

$$A = \int_{a}^{b} \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

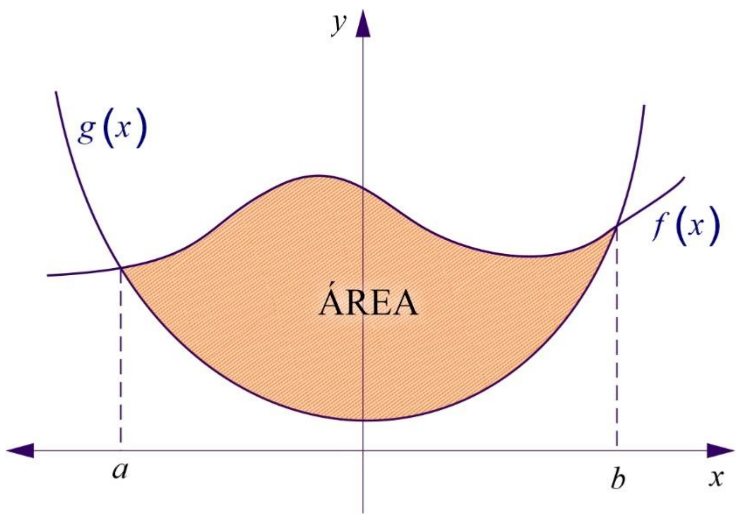


Figura 9. Área entre las gráficas de f y g respecto a x

d) Si $f(y) \geq g(y)$, $\forall y \in [c,d]$ entonces el área limitada por las gráficas de estas dos funciones es dada por

$$A = \int_{c}^{d} \left[f(y) - g(y) \right] dy$$

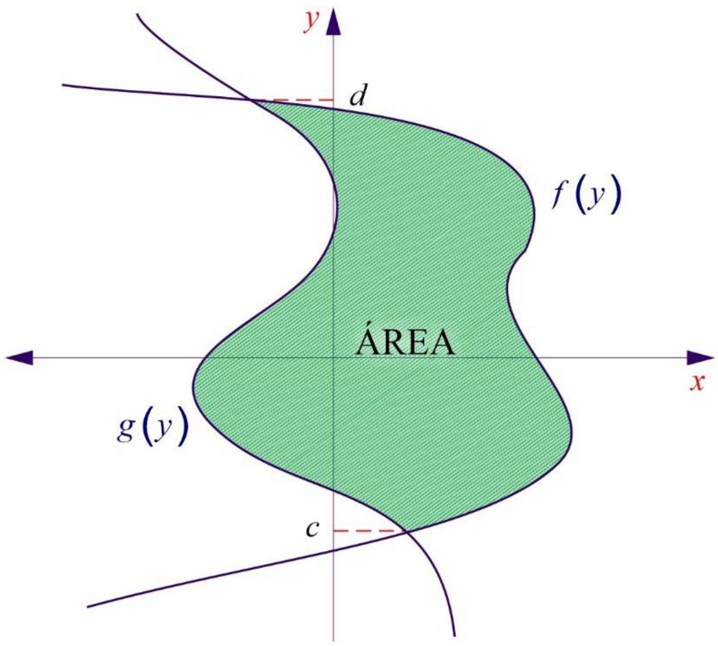


Figura 10. Área entre las gráficas de f y g respecto a y

OBSERVACIÓN

Dada la función $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a,b]$, entonces el área de la región es dada por $A = -\int_{a}^{b} f(x)\,dx$

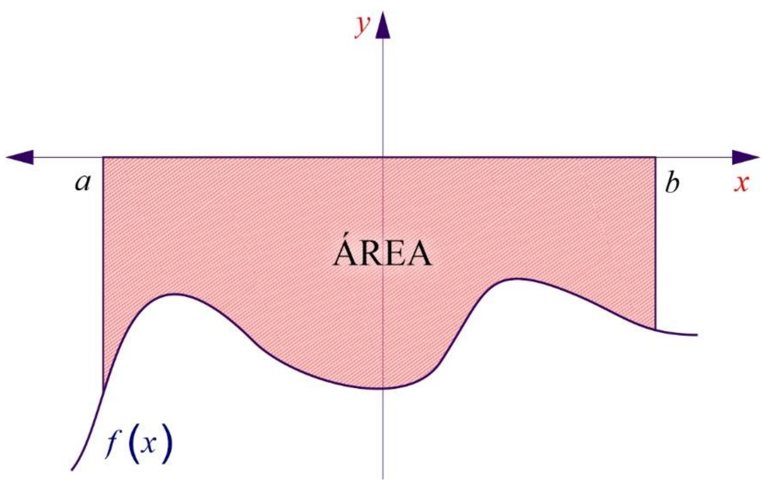


Figura 11. Área sobre la función negativa f

De esta forma, es posible extender el concepto de área apara una situación más general.

$$A=\int_a^m f(x)dx-\int_m^n f(x)dx+\int_n^p f(x)dx-\int_p^b f(x)dx$$

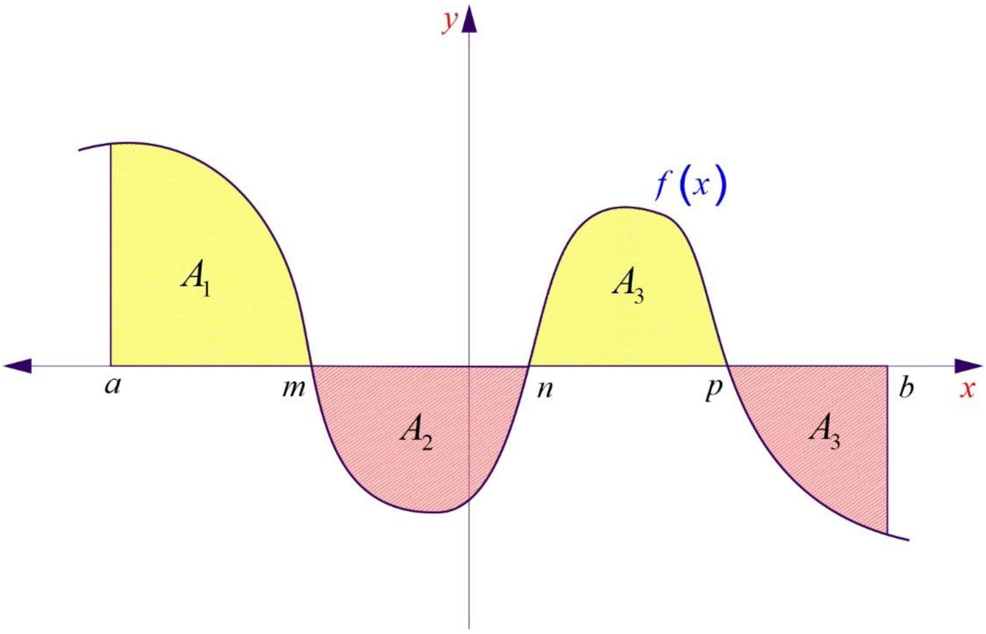


Figura 12. Área de f para regiones positivas y negativas

$$A=A_1+A_2+A_3+A_4$$

donde A es la suma de las áreas de las regiones que están encima del eje x menos la suma de las regiones que están por debajo del mismo eje.

1.2 Antecedentes

Allca (2018), en su investigación de tipo cuasi experimental referente a la aplicación del programa informático GeoGebra en el aprendizaje de funciones matemáticas teniendo como objetivo analizar el efecto que produce esta forma de trabajo, aplicó dos pruebas (pre test y post test) en un grupo experimental y un grupo control con 25 estudiantes cada uno, en el pre test obtuvo una comparación de medias de los puntajes de 10.7 en el grupo control y 10.8 en el grupo experimental, mientras que en el post test 12.5 en el grupo control y 14.5 en el grupo experimental, además la prueba de la hipótesis fue realizada mediante la prueba t-Student, con ello se pudo concluir que en relación del método tradicional, la aplicación del GeoGebra influye significativamente en el aprendizaje de funciones matemáticas.

Baltodano (2019), en su trabajo de grado analizó el uso del GeoGebra en el aprendizaje de las secciones cónicas en matemática básica en la facultad de ingeniería de una Universidad Privada de Lima Metropolitana con un enfoque cuantitativo sobre una muestra de 70 estudiantes (35 grupo control y 35 grupo experimental), el instrumento utilizado fueron dos pruebas (pre test y post test). Los resultados descriptivos indican que la diferencia de medias en el pre test es de 0.14 con una media obtenida de 10.06 en el grupo control y 10.20 en el grupo experimental; en tanto en el post test se obtuvo una media de 11.17 en el grupo control y 16.06 en el grupo experimental, lo cual al 95% de confianza evidencia una diferencia significativa a favor de los estudiantes que recibieron el tratamiento por medio del GeoGebra.

Bonilla (2013), presenta un análisis de la influencia del uso del GeoGebra en el rendimiento académico en la geometría analítica plana en un grupo de 35 estudiantes con 21 en el grupo experimental y 15 en el grupo control, donde se utilizó una encuesta y examen objetivo como técnica de recolección de datos. Luego de la experimentación se pudo evidenciar el rendimiento académico en el grupo experimental con una media de (7.13/10), mientras que en el grupo control de (5.7/10), lo cual indica que en el grupo experimental mejoro a un 14.3% con respecto al grupo control.

Castillón (2019), muestra en su investigación, de que forma el software GeoGebra influye en el aprendizaje de la geometría plana, sobre una muestra de 43 estudiantes con 22 en el grupo experimental y 21 en el grupo control con un muestreo de tipo no probabilístico intencionado. Aplicó una encuesta como instrumento de recolección de datos (pre test y pos test); los resultados en el pos test indican una diferencia de medias de más de 2 puntos a favor del grupo experimental, de esta forma se validó la hipótesis mediante la prueba U de Mann Whitney con un valor de significancia de 0.05 concluyendo que el uso del GeoGebra es favorable en el aprendizaje de la geometría plana.

Choque (2013), en su investigación cuyo objetivo fue determinar la influencia del uso del GeoGebra en la resolución de problemas de geometría, de tipo cuasi experimental con 43 estudiantes de ambos sexos divididos en dos grupos: uno experimental y otro de control, utilizó dos pruebas una de entrada y otra de salida; donde se obtuvieron como resultados que la puntuación inicial de matemática de los estudiantes era baja, la mayoría de estudiantes obtuvieron puntajes entre 0 y 10 puntos, sin embargo, luego del experimento se observó que hubo diferencias significativas en el aprendizaje del grupo de estudiantes que recibió el tratamiento basado en la resolución de problemas utilizando el GeoGebra.

Condori (2016), en su trabajo de enfoque cuasi experimental realizada en 2 grupos, experimental y control con 25 y 21 estudiantes respectivamente tuvo como objetivo optimizar el rendimiento de los estudiantes en el aprendizaje de matrices y geometría analítica con la aplicación del GeoGebra y Matlab durante 4 semanas, observándose en el pre test muy bajas calificaciones con un promedio de 10 en el grupo experimental y 11 en el grupo control, sin embargo en el post test en el grupo experimental un 60% (15 estudiantes) obtuvieron notas entre (14-17) mientras que en el grupo control un 62% (13 estudiantes) obtuvieron notas entre (11-13), además se encontró la misma cantidad de desaprobados en ambos grupos.

Esguerra, González, & Acosta (2018), en su artículo presentan un método para enseñar los números complejos y sus operaciones asistidos con herramientas del Matlab y GeoGebra, donde se enfatiza que la enseñanza se puede simplificar mediante el uso de herramientas gráficas que permiten a los estudiantes retener la información aprendida más fácilmente, también se diferencia el uso de ambos software, mientras que el Matlab está abocado a la operación de un código utilizando su propio lenguaje de programación, el GeoGebra que es un software libre está más orientado hacia la facilidad de su uso para los estudiantes.

Espina & Santana (2015), en su trabajo titulado "III Encuentro GeoGebra Canarias" en uno de los talleres organizados "¿Qué pasaría si…? Investiga con GeoGebra" cuyo objetivo fue potenciar el uso del GeoGebra en el aula permitió al profesorado asistente encontrar una manera amena de elaborar y presentar actividades de investigación con GeoGebra, también se pudo observar que la aplicación de este tipo de recursos posibilitó al alumnado extraer sus propias conclusiones sobre distintos elementos matemáticos fomentando la imaginación y el desarrollo de los procesos de investigación.

Florecin (2017), desarrolló su investigación del tipo cuasi experimental basada en la aplicación del GeoGebra en el aprendizaje de programación lineal, para ello consideró una muestra de 72 estudiantes distribuidos: 36 en el grupo experimental y la misma cantidad en el grupo control, de acuerdo al pre test en el grupo control se obtuvo una media de 10.17 y en el grupo experimental 10.47. Con respecto al post test en el grupo control la media fue de 10.47 mientras que en el grupo experimental se obtuvo una media de 15.28 puntos; se pudo observar una diferencia de las medias de más de 4 puntos a favor del grupo experimental concluyendo que el GeoGebra favorece el aprendizaje.

Giubergia, Socolovsky, & Ré (2017) exponen una propuesta de incorporación del GeoGebra en las clases de Análisis Matemático I en el primer año de las carreras de ingeniería de la Facultad de Regional de Cordoba de la Universidad Tecnológica Nacional, la experiencia se llevó a cabo con 51 estudiantes en el grupo experimental y 56 estudiantes en el grupo control donde el porcentaje de la cantidad de alumnos que respondieron correctamente el cuestionario previo referente a la interpretación geométrica de la derivada y reconocimiento de la derivada como función fue del 6% en el grupo control y 15% en el grupo experimental, en tanto los porcentajes respecto al cuestionario aplicado posterior al experimento fueron del 63% en el grupo control y 95% en el grupo experimental. De acuerdo a los resultados obtenidos se concluyó que la realización de la actividad propuesta contribuyó significativamente en la comprensión de los conceptos teóricos abordados.

Hernández, Briones, Serdeira, & Medina (2016) muestran en su investigación los datos obtenidos de un estudio de casos múltiples llevados a cabo en un centro público de enseñanza secundaria de la Región de Murcia en el aula de matemáticas, donde se analizan las ventajas de la utilización e incorporación del GeoGebra y las TIC en la geometría métrica, los participantes de este estudio fueron 41 alumnos del tercer grado divididos en dos grupos A y B con 24 alumnos en cada uno. En el grupo A se desarrolló la enseñanza utilizando el GeoGebra, mientras que en el grupo B se utilizó la enseñanza tradicional. Luego de la evaluación final el porcentaje de alumnos aprobados en el grupo A fue 83.3% que resultó superior al grupo B con 62.5% por tanto, se evidencio que el uso del GeoGebra influyó en los estudiantes significativamente para el aprendizaje de los contenidos esenciales.

Lopez, Nieto, Antolin, & Lopez (2013) en su trabajo de investigación titulado “Arribando a la integral definida con el GeoGebra” elaboraron una secuencia didáctica apoyada con el GeoGebra con el que se construyó una idea geométrica de la integral definida, resaltando luego de la aplicación de estos materiales en la instrucción e investigación una experiencia satisfactoria de la comprensión de la integral definida con un significado en la realidad de los estudiantes.

Muñoz (2012), en su trabajo diseñó e implementó una estrategia didáctica del Moodle y el GeoGebra para la enseñanza y aprendizaje de la función lineal modelando situaciones con el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación en un grupo de 60 estudiantes con 30 estudiantes en el grupo control y 30 en el grupo En la prueba de diagnóstico (pre test) se observó que los estudiantes de ambos grupos no tenían los conocimientos previos acerca del tema planteado, ambos grupos obtuvieron un desempeño bajo que representa el 73% del total, lo cual indica que no existe una diferencia significativa. En la prueba de desempeño (post test) se pudo notar una diferencia marcada en los resultados, ya que en el grupo experimental el 37% obtuvo un desempeño superior mientras que en el grupo control este indicador fue solo del 14%.

Narváez (2015), realizó un análisis de la estimulación del desarrollo del pensamiento por medio del estudio de funciones polinómicas con el GeoGebra. En su estudio en estudiantes de la I. E. San Juan Bautista - Sucre, Colombia presenta la implementación de 10 talleres con el GeoGebra donde luego del mismo se resalta la potencialización del pensamiento que permite a los estudiantes realizar construcciones geométricas, analizar, conjeturar y modelar situaciones contextuales donde se evidencia el concepto de función.

Pabón, Nieto, & Gómez (2015) en su investigación con una muestra de 24 estudiantes de la Institución Educativa José María Cordoba – Durania Colombia, plantea la importancia de introducir el GeoGebra como herramienta facilitadora para el desarrollo de competencias matemáticas en el modelado de funciones, concluyendo que el GeoGebra permitió orientar los procesos de modelación e interpretación de las soluciones de manera más completa gracias a la rapidez y precisión de las gráficas.

Padilla (2014), en su trabajo acerca de la influencia de la aplicación del GeoGebra en la resolución de problemas de geometría euclidiana plana, de diseño cuasi experimental trabajó con 60 estudiantes de ambos sexos, donde los grupos control y experimental se conformaron antes del experimento, empleó la técnica de experimentación y observación con un pre test y post test, donde analizando los resultados permitió concluir que los estudiantes que recibieron el tratamiento con el GeoGebra mostraron mayor rendimiento con respecto al otro grupo.

Palacios (2013), en su trabajo de investigación analizó el uso del software GeoGebra, para optimizar los aprendizajes de geometría analítica, el diseño metodológico fue cuasi experimental con un grupo de 44 estudiantes divididos con 22 estudiantes en cada uno de los grupos: control y experimental. En la evaluación previa a la experimentación se obtuvo una media de 7.96 en el grupo control y 3.36 en el grupo experimental; luego de la experimentación se pudo observar un promedio de notas de 12.14 puntos en el grupo experimental mientras que en el grupo control el promedio fue de 8.27 puntos. Así se pudo determinar que el uso del GeoGebra ayudó a mejorar el aprendizaje de geometría analítica.

Rivero (2018), en su investigación cuantitativa, cuasi experimental realiza un estudio de la eficacia del GeoGebra en el aprendizaje de funciones cuadráticas realizado en dos grupos con 25 estudiantes cada uno, donde se aplicó una prueba de entrada mostrando una media de 10.10 en el grupo experimental y 10.32 en el grupo control, en tanto en la prueba de salida se obtuvo una media de 17.52 en el grupo experimental y 11.68 en el grupo control, donde claramente existe una diferencia altamente significativa por lo tanto se concluyó que el GeoGebra es eficaz en el aprendizaje de funciones cuadráticas.

Rodriguez (2018), en su investigación afirma que el GeoGebra influye significativamente en el aprendizaje de la circunferencia analítica en estudiantes del II ciclo de matemática de la facultad de ciencias de la Universidad Enrique Guzman y Valle, con un diseño cuasi experimental, la población estudiada fue de 60 estudiantes (30 en el grupo experimental y 30 en el grupo control), donde en el pre test el grupo control obtuvo un promedio de 10.20 y en el grupo experimental 10.10; además en el post test se obtuvo una media de 11 en el grupo control y 16.43 en el grupo experimental, aquí se pudo notar una diferencia de medias de 5.43 puntos a favor del grupo experimental, lo cual permitió verificar la hipótesis planteada.

Tamayo (2013), en su trabajo presenta las implicaciones que tiene los recursos didácticos en la enseñanza de las matemáticas a partir del análisis crítico de las percepciones de estudiantes y docentes sobre talleres en los que se utilizó el programa GeoGebra para el estudio de diversos tipos de funciones, esta investigación fue realizada en el Colegio Colombo Francés de Antioquía Colombia con 21 estudiantes del grado 11. Una de las conclusiones más importantes fue que la aplicación del GeoGebra complementa la enseñanza y aprendizaje gracias a sus estímulos visuales, interactividad y creatividad que promueve.

CAPITULO II

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 Identificación del problema

2.1.1 Definición del problema

El surgimiento de las nuevas tecnologías y el desarrollo constante de la ciencia y comunicación han permitido encontrar nuevas alternativas de innovación sobre el aprendizaje en diversas áreas de la educación como la matemática, precisamente la enseñanza de esta materia siempre ha sido un desafío para los docentes quienes para lograr el aprendizaje significativo en sus estudiantes recurren a diferentes metodologías. En ese contexto el uso de las Tecnología de la Información y Comunicación en la educación universitaria cumplen funciones de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Paz, Arancibia, Padilla, & Torrejón, 2009). La incorporación de las TIC en las universidades, así como en las escuelas de posgrado, permiten a los estudiantes acceder a nuevas fuentes de información y canales de comunicación para compartir trabajos, debatir ideas y complementar su aprendizaje. La falta de motivación de los estudiantes para el aprendizaje es una de las mayores dificultades que se presenta, esto es generado por el método tradicional de enseñanza que se aplica, donde los profesores determinan cuando y como los estudiantes reciben los materiales educativos, estos tienden a apoyarse en materiales impresos y cumplen la función de ser la única fuente de presentación y estructuración de la información (Cabero, 2006). Así mismo según González & Garde (2014), los estudiantes universitarios suelen tener dificultades para afrontar un curso de matemática debido a varias razones, entre las que destacan la dificultad de los conceptos y las estrategias que cada uno adopta para hacer frente a las mismas, en ese sentido el GeoGebra es una de las herramientas tecnológicas de libre acceso y fácil adaptación que permite a los estudiantes cambiar la visión de cómo se construyen las matemáticas de forma dinámica y precisa. Los conceptos matemáticos no son objetos reales por consiguiente se tiene que recurrir a diferentes representaciones para su estudio por lo que la incorporación de un software educativo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una necesidad en el contexto actual. Así pues para facilitar el proceso de representación e interpretación de las integrales y la resolución de problemas en el contexto real, resulta muy pertinente utilizar los recursos informáticos como el GeoGebra, por lo que en este trabajo de investigación se pretende mejorar el nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida en los estudiantes mediante la utilización y el aprovechamiento de nuevos enfoques basados en las Tecnologías de la Información y Comunicación como es la aplicación del GeoGebra como recurso didáctico.

2.2 Enunciados del problema

2.2.1 Enunciado general

¿Cuál es el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno?

2.2.2 Enunciados específicos

a) ¿Cuál es el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno?

b) ¿Cuál es el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno?

c) ¿Cuál es el nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental y control antes de la aplicación del experimento?

d) ¿Cuál es el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental?

e) ¿Cuál es el efecto de la aplicación de la enseñanza tradicional en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo control?

2.3 Justificación

La presente investigación surgió a partir de la observación en la dificultad de aprendizaje y los altos índices de desaprobación registrados en las actas de notas de los semestres académicos 2018-II y 2019-I que mostraron los estudiantes del segundo ciclo en el curso de cálculo integral de escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno, causando falta de interés por el estudio y deserción estudiantil. Este problema se presenta frecuentemente en los cursos de matemática en particular en el curso de cálculo integral ya que el proceso de desarrollo de las sesiones tienen un manejo tradicional de los conceptos, donde se establecen definiciones y propiedades de cierto objeto matemático, para luego mostrar ejemplos y ejercicios prácticos con procedimientos algebraicos en los cuales no se enfatizan con amplitud sobre la interpretación y representación geométrica, debido a las limitaciones que presenta este método de enseñanza; sumado a que en la universidad es muy poco el interés de los docentes por la inclusión de las TIC en la enseñanza de los cursos de formación básica en el área de matemática.

Con el uso del GeoGebra se pretende desarrollar capacidades para aprender, razonar, interpretar y relacionar conceptos matemáticos de una manera dinámica para los estudiantes, motivándolos en la importancia del uso de las TIC en nuestra vida cotidiana y sobre todo en la educación matemática. Al desarrollar una sesión de aprendizaje apoyada con el GeoGebra se pretende atraer el interés de los estudiantes a un entorno didáctico que permite disminuir los prejuicios que se tiene sobre la dificultad para comprender y resolver problemas matemáticos, además el uso de este software motiva la creatividad e investigación, pues permite realizar simulaciones y modelación de problemas que posibilitan el desarrollo de competencias básicas en la matemática.

En ese sentido, el interés del presente estudio, se enfoca en analizar el efecto del uso del GeoGebra como recurso didáctico a través de guías didácticas complementarias para el aprendizaje de la integral definida e indefinida en los estudiantes del segundo ciclo de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional del Altiplano - Puno.

2.4 Objetivos

2.4.1 Objetivo general

Determinar el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.

2.4.2 Objetivos específicos

a) Determinar el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.

b) Determinar el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.

c) Determinar el nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental y control antes de la aplicación del experimento.

d) Determinar el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental.

e) Determinar el efecto de la enseñanza tradicional en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo control.

2.5 Hipótesis

2.5.1 Hipótesis general

El GeoGebra como recurso didáctico es eficaz en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA-Puno.

2.5.2 Hipótesis específicas

a) El GeoGebra como recurso didáctico es eficaz en el aprendizaje de la integral definida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA-Puno.

b) El GeoGebra como recurso didáctico es eficaz en el aprendizaje de la integral indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA-Puno.
c) El nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida es el mismo en el grupo experimental y control antes de la aplicación del experimento.
d) El GeoGebra como recurso didáctico es eficaz en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental.
e) La enseñanza tradicional no es eficaz en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo control.

CAPITULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Lugar de estudio

El presente estudio se realizó en la Escuela Profesional de Ingeniería de Sistemas perteneciente a la Facultad de Ingeniería Mecánica Eléctrica, Electrónica y Sistemas de la Universidad Nacional del Altiplano ubicado en el distrito, provincia y departamento de Puno.

3.2 Población

El universo de estudio que se investigó se realizó con una población constituida por los estudiantes matriculados en el semestre académico 2019-II de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional del Altiplano de la ciudad de Puno.

Según Tamayo (1997), la población se define como la totalidad del fenómeno a estudiar donde las unidades de población posee una característica común la cual se estudia y da origen a los datos de la investigación.

3.3 Muestra

Como afirma Hernandez, Fernandez, & Baptista (2014) la muestra es en esencia, un subgrupo de elementos que pertenecen a ese conjunto definido en sus características al que llamamos población. Para la presente investigación la muestra de estudio fue conformado por 58 estudiantes seleccionados por una muestra no probabilística intencionada, donde se consideraron dos grupos denominados experimental y control que constan de 30 y 28 estudiantes respectivamente como se muestra en la Tabla 1. La asignación de estos grupos se realizó sobre las aulas preestablecidas en función de los procesos de matrícula de la escuela profesional.

Tabla 1

Muestras utilizadas para la investigación

Grupo	Número de estudiantes
Experimental	30
Control	28

3.4 Método de investigación

El presente trabajo de investigación es de tipo correlacional ya que se pretende determinar el grado de relación entre las dos variables intervinientes.

Variable Independiente: La aplicación del GeoGebra como recurso didáctico.

Variable Dependiente: El aprendizaje de la integral definida e indefinida.

El propósito principal de los estudios correlacionales es saber cómo se comporta una variable conociendo el comportamiento de otras variables relacionadas (Arias, 2012).

El estudio es presentado con un enfoque de carácter cuantitativo y de diseño cuasi experimental. Como señala (Hernandez et al., 2014), en los diseños cuasiexperimentales, los sujetos no se asignan al azar a los grupos ni se emparejan, sino que dichos grupos ya están conformados antes del experimento.

La Tabla 2 muestra el proceso de la investigación, donde se consideró como instrumento para la recolección de datos dos pruebas una de entrada y otra de salida, cada una de ellas compuesta por 5 preguntas referente a la integral definida y 5 sobre la integral indefinida. En las pruebas se utilizó un sistema vigesimal de calificaciones, con el fin de medir los aprendizajes de estos conceptos matemáticos.

Tabla 2

Esquema de la investigación

Grupo	Prueba de entrada	Tratamiento	Prueba de salida
GE	E1	Uso del GeoGebra	E2
GC	E1	Enseñanza tradicional	E2

La metodología de trabajo empleada en el grupo control fueron 10 sesiones desarrolladas de forma tradicional, donde el profesor se limita a exponer los conceptos de forma verbal, utilizando los medios típicos como los textos guía y la pizarra. Según Cabero (2006), en la formación tradicional los estudiantes reciben pasivamente el conocimiento para generar actitudes innovadoras, críticas e investigadoras, además el profesor es la única fuente de presentación y estructuración de la información y determina cuando y como sus estudiantes reciben los materiales.

Por otro lado, en el grupo experimental se implementaron 10 guías didácticas complementarias apoyadas con el GeoGebra que fueron desarrolladas en forma sistemática y secuencial con las sesiones de aprendizaje programadas, estas guías fueron realizadas en el centro de cómputo de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas.

3.5 Escala de calificaciones

El sistema universitario de calificaciones que rige en el Perú por ende también en la Universidad Nacional del Altiplano es de carácter vigesimal, de cero a veinte (0–20), siendo la nota mínima aprobatoria 10.5 equivalente a once.

Tabla 3

Escala de calificación vigesimal

Calificación	Descripción
00 - 10	Cuando el estudiante está empezando a desarrollar los aprendizajes previstos o evidencia dificultades para el desarrollo de éstos y necesita mayor tiempo de acompañamiento e intervención del docente de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje.
11 - 13	Cuando el estudiante está en camino de lograr los aprendizajes previstos, para lo cual requiere acompañamiento durante un tiempo razonable para lograrlo.
14 – 17	Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos en el tiempo programado
17 – 20	Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos, demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todas las tareas propuestas.

Fuente: Minedu

3.6 Descripción detallada de métodos por objetivos

Con el propósito de contrastar los resultados en nuestra investigación se utilizó la estadística descriptiva e inferencial para el tratamiento de datos e inferir parámetros poblacionales a partir de los resultados, además se eligió arbitrariamente un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, lo cual representa un 95% de confiabilidad en la investigación

Para el análisis descriptivo se utilizó los principales estadísticos descriptivos como son: la media, mediana, varianza, desviación estándar, coeficiente de curtosis y asimetría los mismo que fueron obtenidos con el SPSS versión 25 con el fin de validar las hipótesis planteadas.

3.6.1 Para el objetivo general

En relación al efecto que produce el GeoGebra en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en los estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno; el análisis fue dado de la siguiente manera: antes de la prueba de la hipótesis fue necesario probar los supuestos de normalidad mediante la prueba de Shapiro-Wilk, además la igualdad de varianzas de la prueba de entrada y la de salida de ambos grupos mediante la prueba de Levene y finalmente se utilizó la prueba t-Student para muestras independientes a fin de validar la hipótesis general.

3.6.1.1 Prueba de normalidad de Shapiro-Wilk

Esta prueba se utiliza para contrastar la normalidad de un conjunto de datos.

Consideramos las siguientes hipótesis de normalidad

Hipótesis Nula (H_0): Los datos de la muestra provienen de una población distribuida normalmente.

Hipótesis Alterna (H_1): Los datos de la muestra no provienen de una población distribuida normalmente.

3.6.1.2 Prueba de homogeneidad de varianzas de Levene

Esta prueba es aplicable a muestras independientes para determinar la igualdad de varianzas, condición necesaria para la prueba de las hipótesis de investigación.

Establecemos las siguientes hipótesis:

Hipótesis Nula (H_0): Los datos de las muestras tienen varianzas iguales.

Hipótesis Alterna (H_1): Los datos de las muestras tienen varianzas diferentes.

3.6.1.3 Procedimiento para el contraste de la hipótesis general

En la investigación se trabajó con muestras pequeñas y se consideran dos grupos independientes, por lo que se utilizará la prueba t-Student para las pruebas estadísticas. Como afirma Córdova (2014), la prueba t-Student se utiliza para hacer pruebas de hipótesis que cumplan las siguientes condiciones: la variable es de tipo cuantitativo, la muestra es pequeña ($n \leq 30$) y la hipótesis trata sobre correlación.

Para ello se plantearon las siguientes hipótesis estadísticas:

Hipótesis Nula (H_0): Los datos comparados presentan igualdad de medias (μ1= μ2)

Hipótesis Alterna (H_1): Los datos comparados presentan diferencias en las medias (μ1≠μ2), o que una media es mayor a la otra (μ1>μ2).

Donde se consideró un nivel de significancia α=0.05, que permite determinar si el resultado de la investigación se puede considerar estadísticamente significativo luego de la prueba t.

3.6.1.4 Toma de decisión

Para el contraste de las hipótesis es necesario considerar lo siguiente:

Si $p_v < \alpha$, entonces se rechaza la hipótesis nula (H_0) y se acepta la hipótesis alterna (H_1).

Si $p_v > \alpha$, entonces se acepta la hipótesis nula (H_0) y se rechaza la hipótesis alterna (H_1).

Donde p_v se denomina el p-valor que representa la probabilidad correspondiente al estadístico de ser posible bajo la hipótesis nula.

3.6.2 Para el primer objetivo específico

Para determinar el aprendizaje de la integral definida en los estudiantes después de la aplicación del experimento primeramente se procedió a realizar una prueba de igualdad de varianzas, seguidamente se eligió la prueba t para muestras independientes con el fin de verificar la hipótesis planteada.

3.6.3 Para el segundo objetivo específico

Al igual que el procedimiento del primer objetivo específico, se realizó la prueba de varianzas de Levene luego la prueba t, por último, la toma de decisión para corroborar la hipótesis planteada.

3.6.4 Para el tercer objetivo específico

Para determinar el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental y control antes de la aplicación del experimento se utilizó los datos estadísticos descriptivos, además se verificó la normalidad de las muestras, la prueba de igualdad de varianzas y la prueba t para muestras independientes.

3.6.5 Para el cuarto objetivo específico

Para determinar el efecto del GeoGebra en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental se realizó un análisis cuantitativo de los principales estadígrafos, luego se aplicó la prueba t para muestras relacionadas a fin de contrastar la hipótesis planteada.

3.6.6 Para el quinto objetivo específico

De igual manera para determinar el efecto de la enseñanza tradicional en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo control, se realizó un análisis estadístico descriptivo además se aplicó la prueba t para muestras relacionadas a fin de contrastar la hipótesis planteada.

3.6.7 Operacionalización de las variables

Variable Independiente		
El uso del GeoGebra		
Variable Dependiente		
Aprendizaje de la integral definida e indefinida		
Dimensiones	**Indicadores**	**Instrumentos**
Integral indefinida	Maneja diferentes técnicas y propiedades de integración	Ficha de observación
	Analiza y problemas de integrales indefinidas	
Integral definida	Utiliza adecuadamente las propiedades de la integral definida	Prueba
	Resuelve e interpreta gráficamente problemas relacionados con el cálculo de áreas.	

CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Resultados

Para analizar cada una de las pruebas que se muestran a continuación, se eligió arbitrariamente un nivel de significancia del $\alpha = 0.05$.

4.1.1 Prueba de normalidad

La normalidad consiste en determinar que cada conjunto de datos que están siendo comparados provienen de una distribución normal, debido a que las muestras analizadas son menores de 50, consideramos la prueba de Shapiro-Wilk.

Tabla 4

Prueba de normalidad a las muestras en estudio

PRUEBA	GRUPO	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
		Est.	gl	Sig.	Est.	gl	Sig.
Prueba Salida	GC	.180	28	.020	.933	28	.074
	GE	.131	30	.200*	.954	30	.221
Prueba Entrada	GC	.186	28	.015	.950	28	.196
	GE	.168	30	.030	.946	30	.129

Formulación de las hipótesis:

Hipótesis Nula $\left(H_0\right)$: Los datos de la muestra provienen de una población normalmente distribuida.

Hipótesis Alterna (H_1): Los datos de la muestra no provienen de una población normalmente distribuida.

Estimación del *p*-valor

La prueba a considerar en la Tabla 4, es Shapiro-Wilk, el p - valor representado por p_v, se analizó para cada una de las cuatro muestras.

Toma de decisión

- Para el grupo experimental (GE) en la prueba de entrada se toma el valor $p_v = 0.129$, como $p_v > \alpha = 0.05$ entonces aceptamos la hipótesis nula.
- Para el grupo control en la prueba de entrada (GC) se toma el valor $p_v = 0.196$, como $p_v > \alpha = 0.05$ entonces aceptamos la hipótesis nula.
- Para el grupo experimental en la prueba de salida (GE) se toma el valor $p_v = 0.221$, como $p_v > \alpha = 0.05$ entonces aceptamos la hipótesis nula.
- Para el grupo control en la prueba de salida (GC) se toma el valor $p_v = 0.074$, como $p_v > \alpha = 0.05$ entonces aceptamos la hipótesis nula.

Conclusión:

De los resultados obtenidos en las pruebas de hipótesis se puede afirmar que los cuatro grupos de muestras provienen de una población normalmente distribuida, de esta forma queda probado el supuesto de normalidad.

4.1.2 Nivel de aprendizaje sobre la integral definida e indefinida antes del experimento

En esta sección se presentan los resultados que corresponden al tercer objetivo específico.

El nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida previo de los estudiantes de los grupos experimental y control, es resumido en los estadígrafos de la Tabla 5.

Tabla 5

Principales estadígrafos antes del experimento

Estadígrafos	Grupo Experimental	Grupo Control
Media	10.53	10.32
Mediana	10.00	10.00
Varianza	7.706	3.930
Desviación Est.	2.776	1.982
Mínimo	4	6
Máximo	16	14
Rango	12	8
Asimetría	-.183	-.114
Curtosis	.231	-.202

De los datos mostrados en la Tabla 5, se desprende que los estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional del Altiplano – Puno; respecto a sus conocimientos previos en el grupo experimental obtuvieron un promedio de calificación de 10.53, mientras que en el grupo control el promedio fue de 10.32; con una variabilidad de 2.8 puntos en el grupo experimental y 2 puntos en el grupo control. La calificación de la mitad de los estudiantes del grupo experimental y grupo control estuvieron por debajo de los 10 puntos; entre los estudiantes con mayor y menor calificación hay una diferencia de 12 puntos en el grupo experimental y 8 puntos en el grupo control.

La distribución de la calificación de los estudiantes del grupo experimental presenta una ligera asimetría negativa y una curtosis leptocurtica; es decir, no se comporta de manera normal, sino que se aproxima a este tipo de distribución. La distribución de la calificación de los estudiantes del grupo control presenta una ligera asimetría negativa y una curtosis platicurtica; es decir, hay una menor concentración de notas en torno al promedio de calificación.

a) Prueba de igualdad de varianzas

Para esta prueba consideramos las siguientes hipótesis:

Hipótesis Nula (H_0):

Las varianzas del grupo experimental y control son iguales.

Hipótesis Alterna (H_1 **):**

Las varianzas del grupo experimental y control son diferentes.

Para contrastar este resultado se consideró la significancia de la prueba de Levene mostrada en la Tabla 6, donde $p_v = 0.108$.

Tabla 6

Prueba t para muestras independientes antes del experimento

	Prueba de Levene de igualdad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias		
	F	Sig	t	gl	Sig (Bilateral)
GE-GC	2.673	.108	.33	56	.741

Como $p_v > \alpha = 0.05$, entonces aceptamos la hipótesis nula.

Así concluimos que las varianzas del grupo experimental y control son iguales, por tanto, queda probado el supuesto de homogeneidad de varianzas.

b) Hipótesis Estadísticas

Para probar el tercer objetivo específico, planteamos las siguientes hipótesis

Hipótesis Nula (H_0 **)** $[\mu_E = \mu_C]$ **:**

El nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida es el mismo en ambos grupos antes de la aplicación del experimento.

Hipótesis Alterna (H_1 **)** $[\mu_E \neq \mu_C]$ **:**

El nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida es diferente en ambos grupos antes de la aplicación del experimento.

c) Elección del nivel de significancia

Se consideró de manera deliberada un nivel de significancia de 5%, es decir un valor de $\alpha = 0.05$, con grados de libertad determinado de la siguiente forma: $gl = n_1 + n_2 = 30 + 28 - 2 = 56$

d) Selección del estadístico de prueba

Según las muestras consideradas se aplicó la prueba t para muestras independientes, con 56 grados de libertad.

e) Regla de decisión

Para verificar la hipótesis se consideró el valor de $t = 0.33$ mostrado en la Tabla 6.

Figura 13. Campana de Gauss de la t antes del experimento

f) Toma de decisión

Como se puede observar en la Figura 13, $t = 0.33 < t_{0.95} = 1.67$ el estadístico cae en la zona de aceptación, lo cual nos indica que rechazamos H_1 en consecuencia aceptamos la hipótesis alterna H_0.

Por tanto, concluimos que el nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida es el mismo en el grupo control y experimental antes de la aplicación del experimento.

4.1.3 Análisis del aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental

Para analizar el efecto del GeoGebra en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental, en la Tabla 7 presentamos los estadígrafos correspondientes a la prueba de entrada y salida.

Tabla 7

Principales estadígrafos en el grupo experimental

Estadígrafos	Prueba de entrada	Prueba de salida
Media	10.533	14.14
Mediana	10.000	14.00
Varianza	7.706	12.05
Desviación Est.	2.7759	3.471
Mínimo	4.0	8
Máximo	16.0	20
Rango	12.0	12
Asimetría	-.183	.055
Curtosis	.231	-.819

De la Tabla 7 podemos observar que los estudiantes del grupo experimental de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional del Altiplano – Puno en el resultado de la prueba de salida aplicado, obtuvieron un promedio de calificación de 10.533 puntos y en la prueba de salida alcanzaron a los 14.14 puntos; con una variabilidad de 2.8 puntos en la prueba de entrada y 3.5 puntos en la prueba de salida. La calificación de la mitad de los estudiantes del grupo experimental en la prueba de entrada estuvo por debajo de los 10 puntos y 14 puntos en la prueba de salida; entre los estudiantes con mayor y menor calificación hay una diferencia de 12 puntos en la prueba de entrada y la prueba de salida.

La distribución de la calificación de los estudiantes del grupo experimental correspondiente a la prueba de salida presentó una ligera asimetría negativa y una curtosis leptocurtica; es decir, no se comporta de manera normal, sino que se aproxima a este tipo de distribución. Así mismo la distribución de la calificación en los estudiantes en la prueba de salida presentó una ligera asimetría positiva y una curtosis platicurtica; es decir, hay una menor concentración de notas en torno al promedio de calificación.

a) Hipótesis Estadísticas

Hipótesis Nula (H_0 **)** $\left[\mu_f = \mu_i\right]$ **:**

El nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida es el mismo al inicio y al finalizar la investigación en el grupo experimental.

Hipótesis Alterna (H_1**)**$\left[\mu_f > \mu_i\right]$**:**

El nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida mejora al finalizar la investigación en el grupo experimental.

b) Elección del nivel de significancia

Se asignó de manera arbitraria un nivel de significancia del 5%, $\alpha = 0.05$ es decir un nivel de confianza del 95%, donde los grados de libertad fueron determinados de la siguiente forma $gl = n - 1 = 30 - 1 = 29$.

c) Selección del estadístico de prueba

Para esta prueba por tratarse de la comparación de las medias de dos variables de un solo grupo, se utilizó la prueba t para muestras relacionadas, con 29 grados de libertad.

Tabla 8

Prueba t para muestras relacionadas en el grupo experimental

	Diferencias emparejadas					
	Media	**Desv. Desviación**	**Desv. Error Promedio**	**t**	**gl**	**Sig (Bilateral)**
P. Entrada - P. Salida	3.6000	4.2556	.7770	4.633	29	.000

d) Regla de decisión

Para la validación de la hipótesis formulada, se consideró el valor $t = 4.63$ mostrado en la Tabla 8.

e) Toma de decisión

En la Figura 14, se puede apreciar que $t = 4.63 > t_{0.95} = 1.70$ donde el estadístico cae en la zona de rechazo de manera que rechazamos H_0 y aceptamos H_1.

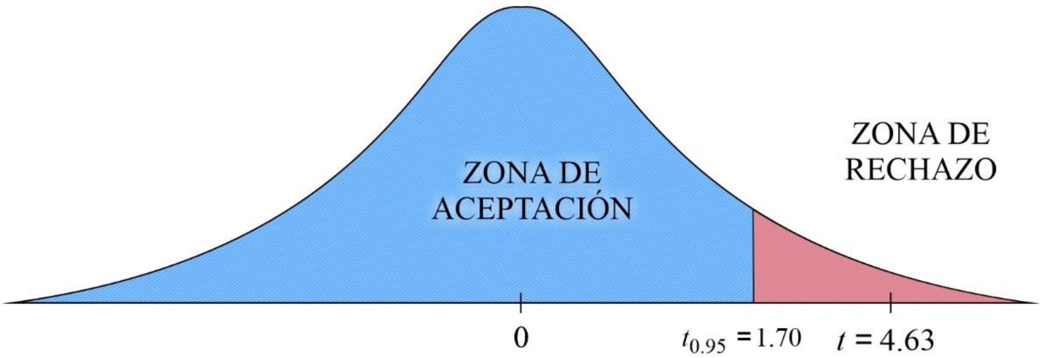


Figura 14. Campana de Gauss de la prueba t en el grupo experimental

Por consiguiente, se concluye que el nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida mejora al finalizar la investigación en el grupo experimental en consecuencia, el GeoGebra como recurso didáctico es eficaz en el aprendizaje de la integral definida e indefinida.

4.1.4 Análisis del aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo control

Para realizar el estudio del objetivo principal de esta investigación es necesario también analizar el efecto de la enseñanza tradicional de la integral definida e indefinida aplicada en el grupo control, para lo cual en la Tabla 9 se presenta un resumen de los principales estadígrafos antes y después de la investigación.

Tabla 9

Principales estadígrafos en el grupo control

Estadígrafos	**Prueba de entrada**	**Prueba de salida**
Media	10.321	11.21
Mediana	10.000	12
Varianza	3.930	8.101
Desviación Est.	1.9824	2.846
Mínimo	6	6
Máximo	14	16
Rango	8	10
Asimetría	-.114	-.316
Curtosis	-.202	-.569

En la Tabla 9, se observa que los estudiantes del grupo control de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional del Altiplano – Puno en el resultado de la prueba de entrada obtuvieron un promedio de calificación de 10.321 puntos y en la prueba de salida alcanzaron los 11.21 puntos; de manera que no existe una diferencia significativa. Se presentó una variabilidad de 1.98 puntos en la prueba de entrada y 2.84 puntos en la prueba de salida. La calificación de la mitad de los estudiantes del grupo control en la prueba de entrada estuvieron por debajo de los 10 puntos en la prueba de entrada y 12 puntos en la prueba de salida; entre los estudiantes con mayor calificación y menor calificación hay una diferencia de 8 puntos en la prueba de entrada y 10 puntos en la prueba de salida.

La distribución de la calificación de los estudiantes del grupo control correspondiente en la prueba de entrada presentó una ligera asimetría negativa y una curtosis platicurtica; es decir, hay una menor concentración de notas en torno al promedio de calificación. Así mismo la distribución de la calificación en los estudiantes en la prueba de salida presento una ligera asimetría negativa y una curtosis platicurtica; es decir, hay una menor concentración de notas en torno al promedio de calificación.

a) Hipótesis Estadísticas

Hipótesis Nula (H_0 **)** $\left[\mu_f = \mu_i\right]$**:**

El nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida es el mismo antes y al finalizar la investigación en el grupo control.

Hipótesis Alterna (H_1 **)** $\left[\mu_f > \mu_i\right]$**:**

El nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida mejora al finalizar la investigación en el grupo control.

b) Elección del nivel de significancia

Se asignó de manera arbitraria un nivel de significancia del 5%, $\alpha = 0.05$ es decir un nivel de confianza del 95%, donde los grados de libertad fueron determinados de la siguiente forma $gl = n - 1 = 28 - 1 = 27$.

c) Selección del estadístico de prueba

Puesto que la comparación de medias se trata de un mismo grupo, se aplicó la prueba t para muestras relacionadas, con 27 grados de libertad.

Tabla 10

Prueba t para muestras relacionadas en el grupo control

	Diferencias emparejadas					
	Media	**Desv. Desviación**	**Desv. Error Promedio**	**t**	**gl**	**Sig (Bilateral)**
P. entrada-P. salida	.8929	3.2585	.6158	1.45	27	.159

d) Regla de decisión

Considerando el valor calculado de la prueba t para muestras relacionadas, en la Tabla 10 se obtuvo $t = 1.45$.

e) Toma de decisión

Mediante el valor del t calculado se puede apreciar en la Figura 15 que $t = 1.45 < t_{0.95} = 1.70$, donde el estadístico cae en la zona de aceptación, de manera que rechazamos H_1 y aceptamos H_0.

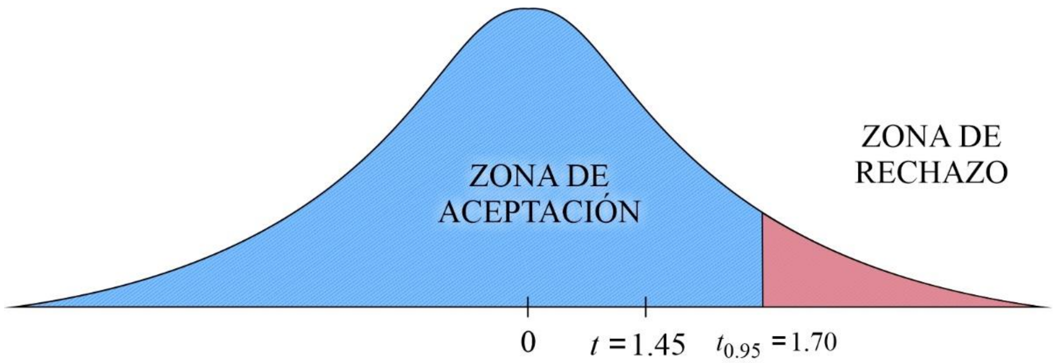


Figura 15. Campana de Gauss de la prueba t en el grupo control

Por lo tanto, podemos concluir que el nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida es el mismo antes y después de la investigación en el grupo control, así se verifica que la enseñanza tradicional no es eficaz en el aprendizaje de la integral definida e indefinida.

4.1.5 Aprendizaje sobre la integral definida e indefinida después del experimento

4.1.5.1 Aprendizaje sobre la integral definida después del experimento

a) Prueba de igualdad de varianzas

Para esta prueba consideramos las siguientes hipótesis:

Hipótesis Nula (H_0):

Las varianzas del grupo experimental y control son iguales.

Hipótesis Alterna (H_1):

Las varianzas del grupo experimental y control son diferentes.

Para contrastar este resultado se consideró la significancia de la prueba de Levene mostrada en la Tabla 11, donde $p_v = 0.197$.

Tabla 11

Prueba t para muestras independientes después del experimento

	Prueba de Levene de igualdad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias		
	F	Sig	t	gl	Sig (Bilateral)
GE-GC	1.706	0.197	2.808	56	.007

Ya que $p_v > \alpha = 0.05$, entonces aceptamos la hipótesis nula.

Así concluimos que las varianzas del grupo experimental y control son iguales; por tanto, queda probado el supuesto de igualdad de varianzas.

b) Hipótesis Estadísticas

Para probar el primer objetivo específico, con respecto al aprendizaje de la integral definida en la investigación, planteamos las siguientes hipótesis:

Hipótesis Nula (H_0) $[\mu_E = \mu_C]$:

El nivel de aprendizaje de la integral definida es el mismo en el grupo experimental y control después de la aplicación del experimento.

Hipótesis Alterna (H_1) $[\mu_E > \mu_C]$:

El nivel de aprendizaje de la integral definida mejora en el grupo experimental después de la aplicación del experimento.

c) Elección del nivel de significancia

Se consideró de forma arbitraria un nivel de significancia del 5%, $\alpha = 0.05$ con grados de libertad determinado de la siguiente forma: $gl = n_1 + n_2 = 30 + 28 - 2 = 56$.

d) Selección del estadístico de prueba

Según las muestras consideradas se aplicó la prueba t para muestras independientes, con 56 grados de libertad.

e) Regla de decisión

Para verificar la hipótesis se consideró el valor de $t = 2.808$ mostrado en la Tabla 11.

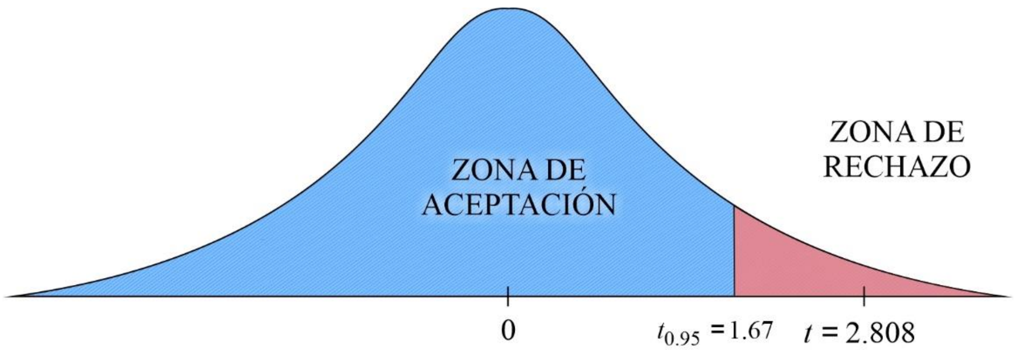


Figura 16. Campana de Gauss de la prueba t después del experimento

f) Toma de decisión

Como se puede observar en la Figura 16 $t = 3.49 > t_{0.95} = 1.67$, el estadístico cae en la zona de rechazo, lo cual indica que se debe rechazar H_0 y aceptar H_1 En conclusión, afirmamos que el nivel de aprendizaje de la integral definida mejora en el grupo experimental luego de la aplicación del experimento.

4.1.5.2 Aprendizaje sobre la integral indefinida después del experimento

a) Prueba de igualdad de varianzas

Para esta prueba consideramos las siguientes hipótesis:

Hipótesis Nula (H_0):

Las varianzas del grupo experimental y control son iguales.

Hipótesis Alterna (H_1):

Las varianzas del grupo experimental y control son diferentes.

Para contrastar este resultado se consideró la significancia de la prueba de Levene mostrada en la Tabla 12, donde $p_v = 0.333$.

Tabla 12

Prueba t para muestras independientes después del experimento

	Prueba de Levene de igualdad de varianzas		**Prueba t para la igualdad de medias**		
	F	Sig	t	gl	Sig (Bilateral)
GE-GC	0.954	.333	3.41	56	.001

Como el p-valor es mayor al nivel de significancia $p_v > \alpha = 0.05$, entonces aceptamos la hipótesis nula.

Así concluimos que las varianzas del grupo experimental y control son iguales; por tanto, queda probado el supuesto de igualdad de varianzas.

b) Hipótesis Estadísticas

Para probar el segundo objetivo específico, con respecto al aprendizaje de la integral indefinida en la investigación, planteamos las siguientes hipótesis:

Hipótesis Nula (H_0) $[\mu_E = \mu_C]$:

El nivel de aprendizaje de la integral indefinida es el mismo en el grupo experimental y control después de la aplicación del experimento.

Hipótesis Alterna (H_1**)** $[\mu_E > \mu_C]$**:**

El nivel de aprendizaje de la integral indefinida mejora en el grupo experimental después de la aplicación del experimento.

c) Elección del nivel de significancia

Se consideró de forma arbitraria un nivel de significancia del 5%, $\alpha = 0.05$ con 56 grados de libertad.

d) Selección del estadístico de prueba

Según las muestras consideradas se aplicó la prueba t para muestras independientes, con 56 grados de libertad.

e) Regla de decisión

Para comprobar la hipótesis se consideró el valor de $t = 3.41$ mostrado en la Tabla 12.

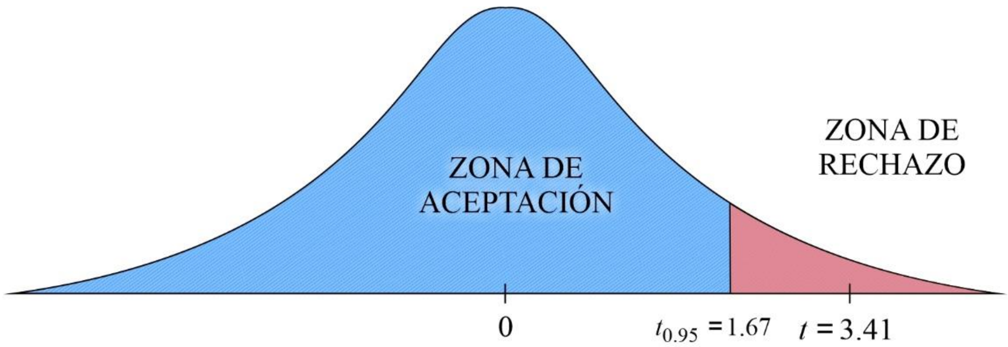


Figura 17. Campana de Gauss de la prueba t después del experimento

f) Toma de decisión

Como se puede observar en la Figura 16, $t = 3.41 > t_{0.95} = 1.67$ el estadístico cae en la zona de rechazo, lo cual indica que se debe rechazar H_0 y aceptar H_1

En conclusión, podemos afirmar que el nivel de aprendizaje de la integral indefinida mejora en el grupo experimental después de la aplicación del experimento.

4.1.6 Prueba del Objetivo General de la investigación

El objetivo principal de la investigación está centrado en el análisis de la influencia del uso de GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida; primero en la Tabla 13 presentamos los principales estadígrafos para su análisis respectivo.

Tabla 13

Principales estadígrafos después del experimento

Estadígrafos	**Grupo Experimental**	**Grupo Control**
Media	14.14	11.21
Mediana	14.00	12.00
Varianza	12,051	8.101
Desviación Est.	3.471	2.846
Mínimo	8	6
Máximo	20	16
Rango	12	10
Asimetría	.055	-.316
Curtosis	-.819	-.569

En la Tabla 13, se observa que los estudiantes correspondientes al grupo experimental de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional del Altiplano – Puno en el resultado final referente al uso de GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida obtuvieron como promedio de calificación 14.14 puntos, mientras que los estudiantes del grupo control con un método tradiciona en el aprendizaje de integrales definidas e indefinidas lograron obtener una media de 11.21 puntos; razón para evidenciar el significativo impacto que produce el uso del GeoGebra como recurso didáctico. Por otra parte, en el grupo experimental se presentó una variabilidad de 3.5 puntos y 2.85 puntos en el grupo control. La calificación de la mitad de los estudiantes del grupo experimental estuvo por debajo de los 14 puntos y en el grupo control debajo de los 12 puntos; entre los estudiantes con mayor calificación y menor calificación hay una diferencia de 12 puntos en el grupo experimental y 10 puntos en grupo control.

La distribución de la calificación de los estudiantes del grupo experimental presentó una ligera asimetría positiva y una curtosis platicurtica; es decir, hay una menor concentración de notas en torno al promedio de calificación. Así mismo la distribución de la calificación en los estudiantes en el grupo control presentó una ligera asimetría negativa y una curtosis platicurtica; es decir; hay una menor concentración de notas en torno al promedio de calificación.

a) Prueba de igualdad de varianzas

Para esta prueba consideramos las siguientes hipótesis:

Hipótesis Nula (H_0):

Las varianzas del grupo experimental y control son iguales.

Hipótesis Alterna (H_1):

Las varianzas del grupo experimental y control son diferentes.

Para contrastar este resultado se consideró la significancia de la prueba de Levene mostrada en la Tabla 14, donde $p_v = 0.299$.

Tabla 14

Prueba t para muestras independientes después del experimento

	Prueba de Levene de igualdad de varianzas		**Prueba t para la igualdad de medias**		
	F	Sig	t	gl	Sig (Bilateral)
GE-GC	1.097	.299	3.49	56	.001

Como el p-valor es mayor al nivel de significancia $p_v > \alpha = 0.05$, entonces aceptamos la hipótesis nula. Así concluimos que las varianzas del grupo experimental y control son homogéneas.

b) Hipótesis Estadísticas

Para probar el objetivo principal de la investigación, planteamos las siguientes hipótesis:

Hipótesis Nula (H_0 **)** $[\mu_E = \mu_C]$

El nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida es el mismo en el grupo experimental y control después de la aplicación del experimento.

Hipótesis Alterna (H_1 **)** $[\mu_E > \mu_C]$

El nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida mejora en el grupo experimental después de la aplicación del experimento.

c) Elección del nivel de significancia

Se consideró de forma arbitraria un nivel de significancia del 5%, $\alpha = 0.05$ con grados de libertad determinado de la siguiente forma: $gl = n_1 + n_2 = 30 + 28 - 2 = 56$

d) Selección del estadístico de prueba

Según las muestras consideradas se aplicó la prueba t para muestras independientes, con 56 grados de libertad.

e) Regla de decisión

Para verificar la hipótesis planteada se consideró el valor $t = 3.49$ mostrado en la Tabla 14.

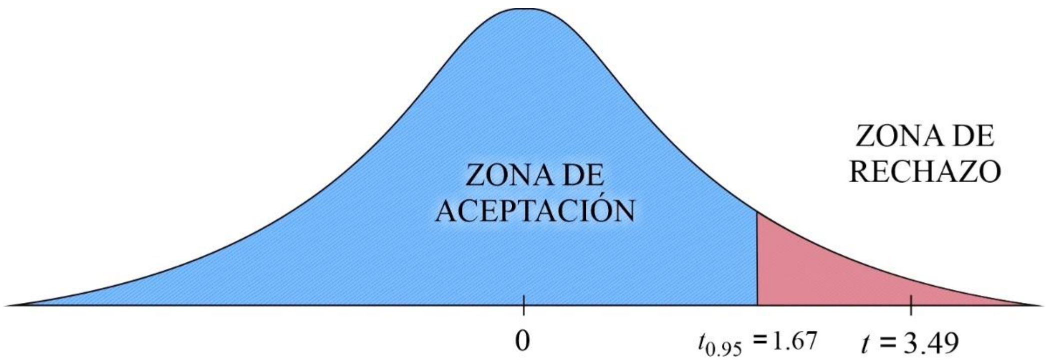


Figura 18. Campana de Gauss de la prueba t después del experimento

f) Toma de decisión

Como se puede observar en la Figura 18, $t = 3.49 > t_{0.95} = 1.67$ el estadístico cae en la zona de rechazo, lo cual indica que se debe rechazar H_0 y aceptar H_1

En conclusión, podemos afirmar con un 95% de confianza que el nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida mejora en el grupo experimental después de la aplicación del experimento por tanto el GeoGebra como recurso didáctico es eficaz en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.

4.2 Discusión

Luego de la aplicación del GeoGebra en el aprendizaje de la integral definida e indefinida los resultados nos permitieron alcanzar los objetivos previstos. Respecto al objetivo general mediante la prueba t Student para muestra independientes se demostró que existe un efecto significativamente positivo entre la aplicación del GeoGebra como recurso didáctico y el aprendizaje de la integral definida e indefinida, lo cual se justifica en el post test donde se obtuvo una media de 14.14 en el grupo experimental mientras que en el grupo control 11.21 notándose una diferencia aproximada de 3 puntos a favor del grupo experimental, estos resultados concuerdan con los trabajos referenciados como Baltodano (2019) en su tesis de grado afirma que el uso del software GeoGebra, influye significativamente en el aprendizaje de secciones cónicas en matemática básica en la facultad de ingeniería de una Universidad Privada de Lima Metropolitana, donde en el grupo experimental y grupo control se obtuvo una media de 16.06 y 11.17 respectivamente; así también Florecin (2017) refiere que aplicada la prueba de U de Mann Whitney en el grupo control y grupo experimental en el post test indica que existe una diferencia significativa con una media de 10.47 en el grupo control y 15.28 en el grupo control evidenciando que el GeoGebra tiene efectos significativos en el aprendizaje de programación lineal en estudiantes del quinto grado de educación secundaria de la I.E. Manuel Gonzales Prada, Huaycan Vitarte; lo propio en el trabajo de Castillón (2019), coincide con los resultados obtenidos en nuestra investigación con respecto a la aplicación de esta estrategia metodológica. A su vez Rivero (2018) muestra en su investigación luego del post test una media de 11.68 en el grupo control y 17.52 en el grupo experimental validado mediante la prueba Z, que el GeoGebra es eficaz en el aprendizaje de las funciones cuadráticas en los estudiantes de la Escuela Profesional de Educación Primaria de la Universidad Nacional Federico Villarreal lo cual en relación al presente trabajo muestra un resultado semejante en la investigación en estudiantes de formación universitaria.

Por otra parte, la tesis desarrollada por Palacios (2013), sobre el uso del software Geogebra en el aprendizaje de geometría analítica en el 5° grado de educación secundaria de la I.E. Julio Cesar Escobar San Juan de Miraflores Lima, demuestra que la aplicación del GeoGebra coadyuvó a mejorar el aprendizaje de la asignatura, articulando actividades pedagógicas y recursos didácticos, con una muestra de 22 en cada uno de los grupos: control y experimental, obteniéndose una media de 12.14 en el grupo experimental y 8.27 en el grupo control estos resultados son relativamente análogos al nuestro, debido a que en las pruebas de entrada y salida se consideraron categorías de aprendizaje y evaluación similares.

Otra condición concordante establece Allca (2018), en su investigación el Geogebra en el aprendizaje de funciones matemáticas en estudiantes del 3° grado de la I.E. Libertador San Martín Independencia de Lima, utilizando la prueba t Student para la validación de la hipótesis planteada obteniéndose como resultado en el post test una media de 14.5 en el grupo experimental y 12.5 en el grupo control, esto respalda los hallazgos en nuestra investigación en cuanto se refiere al objetivo principal en la elección del tipo de prueba estadística y los datos registrados.

Las guías didácticas propuestas en el presente trabajo facilitaron a los estudiantes el manejo del GeoGebra influenciando positivamente en el interés por la aplicación de las integrales sobre el cálculo de áreas, técnicas de integración e interpretación gráfica de estos conceptos, lo cual se verifica también en diversos estudios orientados a la implementación de talleres didácticos utilizando el GeoGebra (Espina & Santana, 2015; Narváez, 2015; Pabón Gómez et al., 2015; Tamayo, 2013) ponen de manifiesto que es fundamental el uso de estos recursos en ambientes interactivos ya que favorecen la visualización de los objetos matemáticos estudiados motivando la creatividad e investigación. Por otro lado Esguerra et al. (2018), sostiene que el GeoGebra no es el único software utilizado para la enseñanza de las matemáticas ya que el Matlab ofrece similares características, sin embargo dentro del contexto educativo donde se desarrolló esta investigación es más factible trabajar con el GeoGebra por su accesibilidad y comodidad para los estudiantes.

Según Rodriguez (2018) en el análisis de la influencia del GeoGebra en el aprendizaje de la circunferencia analítica en las dimensiones: ecuación canónica, ecuación ordinaria, ecuación general, ecuación tangencial donde precisa un resultado positivo en cada una de estas, además que la diferencia de 5.43 en las medias del post test a favor del grupo experimental corroboran la hipótesis propuesta; en contraste con el segundo objetivo específico la presente investigación muestra la eficacia del GeoGebra en el aprendizaje de la integral definida donde la media de calificaciones del grupo experimental es superior respecto al otro, similar situación presentada en el tercer objetivo específico donde la diferencia de medias de las calificación es aún mayor, así pues esto apoya y confirma la hipótesis general que nos planteamos.

En relación al tercer objetivo específico, para determinar el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental y control antes de la investigación se evaluó en la prueba de entrada se pudo observar una diferencia mínima en las medias del grupo control y experimental lo cual coincide con Allca (2018), donde en su investigación presenta un resultado en el pre test de 10.7 en el grupo control y 10.8 en el grupo experimental, lo mismo que Baltodano (2019) encontró una media de 10.06 en el grupo control y 10.20 en el grupo experimental, así también Florecin (2017) muestra una diferencia de 0.3 entre las medias de los grupos considerados. Similarmente en los estudios presentados (Rivero, 2018; Rodriguez, 2018) se muestran las mismas tendencias en el resultado del pre test con una mínima diferencia en cuanto a las medias de los grupos: control y experimental; sin embargo, Palacios (2013) utiliza un muestreo aleatoria estratificado, así en la prueba de entrada evidencia un resultado con una diferencia marcada de 4 puntos en las medias del grupo control y experimental lo cual en comparación a esta investigación realizada con un muestreo no probabilístico intencionado refleja las diferencias en los resultados de la prueba de entrada. En síntesis, la mayoría de referencias confirman la hipótesis sostenida en nuestra investigación que ambos grupos iniciaron en igualdad de condiciones

De acuerdo a los resultados con respecto al cuarto objetivo específico se muestra que la diferencia de medias en el grupo experimental de la prueba de entrada y salida es de 3.61, ello muestra una mejoría notable en el aprendizaje de la integral definida e indefinida; por el contrario, para el quinto objetivo específico en el grupo control esta evolución no fue favorable donde los datos obtenidos son de 10.32 en la prueba de entrada y 11.21 en la prueba de salida; esto apoya el principal objetivo planteado en nuestra investigación.

CONCLUSIONES

De acuerdo a la estrategia didáctica expuesta en este trabajo se determinó que en relación al método tradicional aplicado en el grupo control existe una evidente eficacia del uso del GeoGebra como recurso didáctico en el grupo experimental permitiendo relacionar la parte geométrica y algebraica con facilidad, lo cual posibilitó la mejora significativa del aprendizaje de la integral definida en los estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.

Respecto al segundo objetivo específico se encontró una diferencia más relevante en la media de calificaciones a favor del grupo experimental, esto refleja la inmediata adaptación con el manejo del GeoGebra que fue plasmada en la mejora del aprendizaje de la integral indefinida en los estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.

Luego de evaluar la tercera hipótesis específica a través de la prueba t de Student con un 95% de confiabilidad se demostró que en la prueba de entrada no hubo una diferencia notable respecto a la media de las calificaciones siendo ésta apenas de 0.2 puntos, lo cual muestra que ambos grupos de estudiantes iniciaron en igualdad de condiciones acerca de conocimientos de la integral definida e indefinida.

Teniendo en cuenta las guías y actividades didácticas implementadas en el grupo experimental como se esperaba se demostró que la aplicación del GeoGebra como recurso didáctico permitió diseñar gráficas de funciones dinámicamente que contribuyeron a mejorar el aprendizaje de la integral definida e indefinida en los estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.

Así mismo conforme a los resultados obtenidos en referencia al nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo control este indicador fue ínfimo, concluyéndose la poca efectividad de la enseñanza tradicional en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje.

Con la estrategia didáctica propuesta en la presente investigación, la implementación del GeoGebra desde un enfoque dinámico rompe el esquema tradicional de su tratamiento en textos y en el currículo universitario ya que permitió a los estudiantes construir gráficas de funciones, representación geométrica de la integral definida, integrales indefinidas, cálculo de áreas, manejo interactivo de parámetros posibilitando mantener una relación directa con estos objetos matemáticos que fueron manipulados con mayor independencia, de esta manera en base a los resultados obtenidos se demostró la efectividad del uso del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en los estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.

RECOMENDACIONES

A los profesionales que se encuentren inmersos en el área de educación en didáctica de la matemática continuar con el estudio orientado a la incorporación este tipo de estrategias didácticas de tal forma que permita un mejor análisis y comprensión de otros factores que intervienen en el aprendizaje de los conceptos matemáticos en los estudiantes.

Se recomienda a los docentes antes de la implementación del GeoGebra en una sesión de clase, estandarizar la versión del software a utilizar, realizar un cuestionario para identificar las dificultades de los estudiantes respecto a los conocimientos previos y al manejo del software, así como también realizar una clase introductoria explicando el correcto uso de cada una de sus herramientas.

Se considera necesario que se proponga una mayor implementación de recursos didácticos que alcancen otros contenidos matemáticos del currículo que se desarrolla en la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno, por lo que sugerimos a los docentes implementar estos recursos en el desarrollo de las sesiones de clase acompañados con sus respectivas guías didácticas, tal como fue presentado en este trabajo a fin de mejorar el aprendizaje de estos temas en los estudiantes.

Sugerimos a las autoridades universitarias regular y evaluar la calidad de los materiales educativos que producen los docentes e incentivar la edición de guías educativas impresas previa validación de estudios experimentales, además de implementar cursos talleres, capacitaciones dirigido a los docentes sobre la aplicación del GeoGebra en los cursos del área de matemática, también adecuar los salones de clase con proyectores multimedia e internet de alta velocidad para facilitar el uso de estas herramientas y así consolidar el aprendizaje de estos cursos en los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

Allca, S. (2018). *Aplicación del software GEOGEBRA y su efecto en el nivel de aprendizaje de Funciones Matemáticas en estudiantes de Tercer grado de Educación Secundaria de la I.E. "Libertador San Martín" UGEL 02-Tahuantinsuyo, Independencia, Lima*. Universidad Nacional Enrique Guzman y Valle.

Arias, F. (2012). *El Proyecto de Investigación Introducción a la metodología científica* (Sexta Edic). Caracas: EPISTEME, C.A.

Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Teoría del aprendizaje significativo*. Trillas.

Ayala, E., & Gonzales, S. (2015). *Tecnologías de la Información y la Comunicación* (Universidad Inca Garcilazo de la Vega, Ed.). Lima.

Baltodano, W. (2019). *El uso del software Geogebra en el aprendizaje de las secciones cónicas en matemática básica en la Facultad de Ingeniería de una Universidad Privada de Lima Metropolitana*. Universidad Nacional Enrique Guzman y Valle.

Bonilla, G. (2013). *Influencia del uso del programa Geogebra en el rendimiento académico en geometría analítica plana de los estudiantes del tercer año de bachillerato, especialidad físico matemático, del colegio Marco Salas Yépez del ciudad de Quito en el año lectivo 2012-2*.

Brunner, J. (2004). *Desarrollo Congnitivo y Educación*. Madrid: Morata.

Cabero, J. (1998). *Impacto de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en las organizaciones educativas*. Granada: Grupo Editorial Universitario.

Cabero, J. (2006). Bases pedagógicas del e-learning. *RUSC. Universities and Knowledge Society Journal*, *3*(1), 1–10. https://doi.org/10.7238/rusc.v3i1.265

Carretero, M. (2009). Constructivismo y Educación. In *Paidos*.

Castillón, A. (2019). *El Software Educativo GeoGebra en el aprendizaje de Geometría*

Plana en los estudiantes del tercer grado de secundaria en la Institución Educativa 7041, distrito de San Juan de Miraflores, 2014.

Castro, S., Guzmán, B., & Casado, D. (2007). Las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Laurus*, *23*(23), 213–234. https://doi.org/10.33262/cienciadigital.v3i2.6.575

Choque, G. (2013). *Influencia del uso del software Geogebra en la resolución de problemas de geometría de los estudiantes de cuarto de secundaria en la I.E. La Cantuta, Distrito San Luis 2013*.

Condori, L. (2016). *Aplicación del Geogebra y Matlab para optimizar el rendimiento académico en matrices y geometría analítica en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la I.E. Jose Carlos Mariategui, Distrito de Paucarpata - 2014*.

Córdova, I. (2014). *El Informe de investigación Cuantitativa*. Editorial San Marcos.

Cotic, N. (2014). GeoGebra como puente para aprender matemática. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación GeoGebra*, 1–9. Retrieved from https://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1179.pdf

Dongo, A. (2008). La teoría del aprendizaje de Piaget y sus consecuencias para la praxis educativa. *Revista de Investigación En Psicología*, *11*(1), 167–181. https://doi.org/10.15381/rinvp.v11i1.3889

Duval, R. (2004). *Los registros semióticos de representación en matemática*. Colombia: Universidad del Valle.

Esguerra, B., González, N., & Acosta, A. (2018). Mathematical software tools For teaching of complex numbers TT - Ferramentas de software matemático para o ensino de números complexos TT - Herramientas de software matemático para la enseñanza de números complejos. *Revista Facultad de Ingeniería*, *27*(48), 79–89. https://doi.org/10.19053/01211129.v27.n48.2018.8403

Espina, P., & Santana, N. (2015). *III Encuentro GeoGebra Canarias*. *89*, 137–148.

Florecin, M. (2017). *Efectos del programa informático Geogebra en el aprendizaje de programación lineal en estudiantes del quinto grado de secundaria de la Institución*

Educativa Manuel Gonzales Prada, Huaycán, Vitarte, 2016.

Giubergia, M., Socolovsky, S., & Ré, M. (2017). Incorporación de TICs a las clases de Análisis matemático. *Revista Iberoamericana de Tecnología En Educación y Educación En Tecnología*, (19), 16–23. Retrieved from https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6068130

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para maestros* (2nd ed.). Granada: Universidad de Granada.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2)*(January 2002), 127–135.

González, M., & Garde, R. (2014). Perfiles de resiliencia y estrategias de afrontamiento en la universidad: Variables contextuales y demográficas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *12*(3), 621–648. https://doi.org/10.14204/ejrep.34.14032

Hall, J., & Lingefjärd, T. (2017). *Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra*. Nueva York: Wiley.

Hernández, E., Briones, A., Serdeira, P., & Medina, F. (2016). Geogebra y TIC en matemáticas de enseñanza secundaria. *Anuario de Jóvenes Investigadores*, *9*(9), 212–215.

Hernandez, R., Fernandez, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta Edic; Interamericana, Ed.). Mexico: McGraw-Hill.

Hohenwarter, M., & Hohenwarter, J. (2009). Documento de Ayuda de GeoGebra Manual Oficial de la versiòn 3.2. *Geogebra.Org*, (45), 13.

Lopez, F., Nieto, N., Antolin, A., & Lopez, P. (2013). Arribando a la Integral definida con Geogebra. *Culcyt Educación*, *1*(49), 60–66. Retrieved from http://erevistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt/article/view/141

Mota, A., Oliveira, H., & Henriques, A. (2017). El desarrollo de la capacidad de Resiliencia Matemática: La voz de los estudiantes sobre el uso de las TIC en la aula. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, *14*(38), 67–88.

https://doi.org/10.25115/ejrep.38.15041

Muñoz, O. (2012). *Diseñar e implementar una estrategia didáctica para la enseñanzaaprendizaje de la función lineal modelando situaciones problema a través de las TIC: Estudio de caso en el grado noveno de la I. E. la Salle de Campoamor*.

Narváez, J. (2015). Estudiando las funciones polinómicas con el software educativo Geogebra. *Opcion*, *31*(Special Issue 3), 897–906.

Pabón, J., Nieto, Z., & Gómez, C. (2015). Modelación matemática y GeoGebra en el desarrollo de competencias en jóvenes investigadores. *Revista Logos, Ciencia & Tecnología*, *7*(1), 65–70. https://doi.org/10.22335/rlct.v7i1.257

Padilla, F. (2014). *Aplicación del software Geogebra y la resolución de problemas de geometría euclidiana plana en estudiantes del I ciclo de Ingeniería Civil de la Universidad Peruana de los Andes 2013-II Sede Lima*.

Palacios, C. (2013). *Uso del software Geogebra en el aprendizaje de la Geometría Analítica, en el 5° grado de educación secundaria de la I.E. "Julio Cesar Escobar" S.J.M. en el 2012*. Universidad Nacional de Educacion Enrique Guzman y Valle.

Paz, S., Arancibia, D., Padilla, J., & Torrejón, S. (2009). Las TiC en la docencia universitaria. *Anfora*, *16*(26), 111–130.

Piaget, J., & Chomsky, N. (1983). *Teorías del lenguaje, teorías del aprendizaje*. Barcelona: Grijalbo.

Pita, C. (1998). *Cálculo en una variable*. México: Prentice-Hall Hispanoamerica.

Prieto, V., Quiñonez, I., Ramirez, G., Fuentes, Z., Labrada, T., Perez, O., & Montero, M. (2011). Impacto de las tecnologías de la información y las comunicaciones en la educación y nuevos paradigmas del enfoque educativo. *Educación Médica Superior*, *25*, 95–102.

Rivera, J. (2011). Impacto De Las Tecnologías De Información Y Comunicación En Los Procesos De Enseñanza-Aprendizaje. *Investigación Educativa*, *15*(27), 127–138. Retrieved from https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/5192

Rivero, Y. (2018). *Eficacia del programa Geogebra en el aprendizaje de las funciones cuadráticas de los estudiantes de la Escuela Profesional de Educación Primaria de la Universidad Nacional Federico Villarreal*. Universidad Nacional de Educacion Enrique Guzman y Valle.

Rodriguez, V. (2018). *Aplicación Software Geogebra en el aprendizaje de la circunferencia analítica en estudiantes del II ciclo de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Enrique Guzmán y Valle*. Universidad Nacional de Educacion Enrique Guzman y Valle.

Rué, J. (2015). *Entornos de aprendizaje digitales y calidad en la educación superior*. Barcelona: Oberta UOC.

Sánchez, A., & Boix, J. (2009). La Sociedad del Conocimiento y las TIC: Una inmejorable oportunidad para el cambio docente. *Revista de Medios y Educación*, 179–204.

Spiegel, A. (2006). *Planificando clases interesantes. Itinerarios para combinar recursos didacticos*. Buenos Aires.

Tamayo, E. (2013). Implicaciones didácticas de Geogebra sobre el aprendizaje significativo de los tipos de funciones en estudiantes de secundaria. *Apertura*, *5*, 58–69.

Tamayo, M. (1997). *El proceso de la investigación cuantitativa*. México: Limusa.

Tello, E. (2017). Las tecnologías de la información y comunicaciones (TIC) y la brecha digital: su impacto en la sociedad de México. *Universities and Knowledge Society Journal*, *4*, 1–8. Retrieved from http://rusc.uoc.edu/rusc/es/index.php/rusc/article/view/v4n2-tello.html

ANEXOS

Anexo 1. Matriz de Consistencia

Problema	Objetivo	Hipótesis	Variable
Problema General ¿Cuál es el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno?	**Objetivo General** Determinar el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.	**Hipótesis General** El GeoGebra como recurso didáctico es eficaz en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.	**Variable Independiente** El uso del GeoGebra
Problemas específicos ¿Cuál es el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno? ¿Cuál es el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno?	**Objetivos Específicos** Determinar el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno. Determinar el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.	**Hipótesis Específicas** El GeoGebra como recurso didáctico es eficaz en el aprendizaje de la integral definida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno. El GeoGebra como recurso didáctico es eficaz en el aprendizaje de la integral indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno.	**Variable Dependiente** El aprendizaje de la integral definida e indefinida

¿Cuál es el nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental y control antes de la aplicación del experimento?	Determinar el nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental y control antes de la aplicación del experimento.	El nivel de aprendizaje de la integral definida e indefinida es el mismo en ambos grupos antes de la aplicación del experimento.	
¿Cuál es el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental?	Determinar el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental.	El GeoGebra como recurso didáctico es eficaz en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo experimental.	
¿Cuál es el efecto de la aplicación de la enseñanza tradicional en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo control?	Determinar la efecto de la enseñanza tradicional en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo control..	La enseñanza tradicional no es eficaz en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en el grupo control.	

Anexo 2. Instrumento de recolección de datos

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA DE SISTEMAS

PRUEBA DE ENTRADA

Nombres y Apellidos: ____

1. Defina el concepto derivada de una función real.

2. Explique la interpretación geométrica de la derivada de una función real

3. De un ejemplo de la antiderivada de una función

4. Relacione correctamente las siguientes alternativas:

	Función		Antiderivada	
1	$f(x) = e^{2x}$		$\ln\lvert x\rvert$	**A**
2	$f(x) = x$		$-\cos x$	**B**
3	$f(x) = 3$		$\frac{e^{2x}}{2}$	**C**
4	$f(x) = \frac{1}{x}$		$3x$	**D**
5	$f(x) = sen\, x$		$\frac{x^2}{2}$	**E**

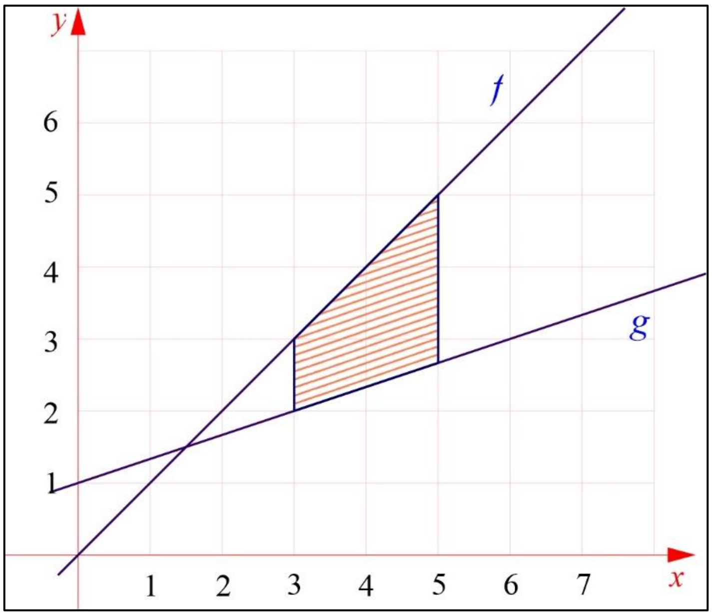
5. Aplicando un método apropiado resuelva la siguiente integral indefinida:

$$\int e^x sen\left(4e^x + 2\right) dx$$

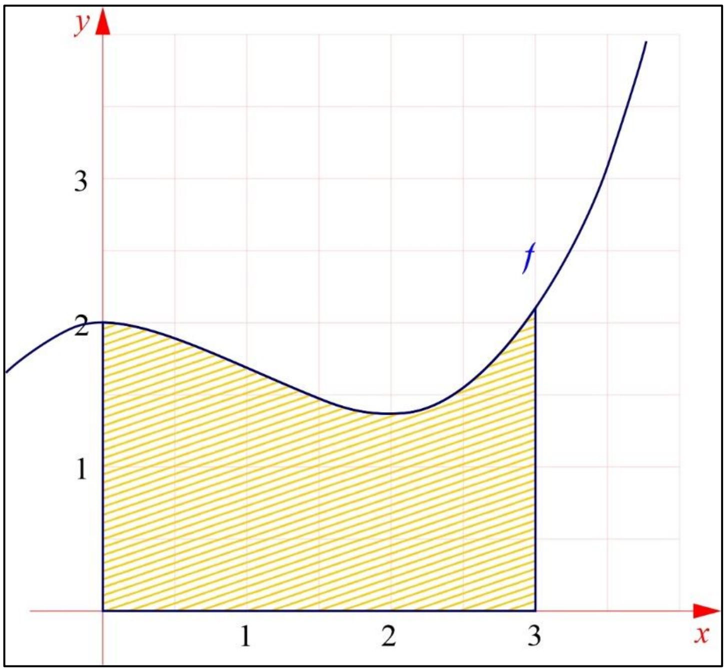
6. Aplicando un método apropiado resuelva la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^3}$$

7. Halle el área de la región sombreada, si $f(x)=x$ y $g(x)=\frac{x}{3}+1$

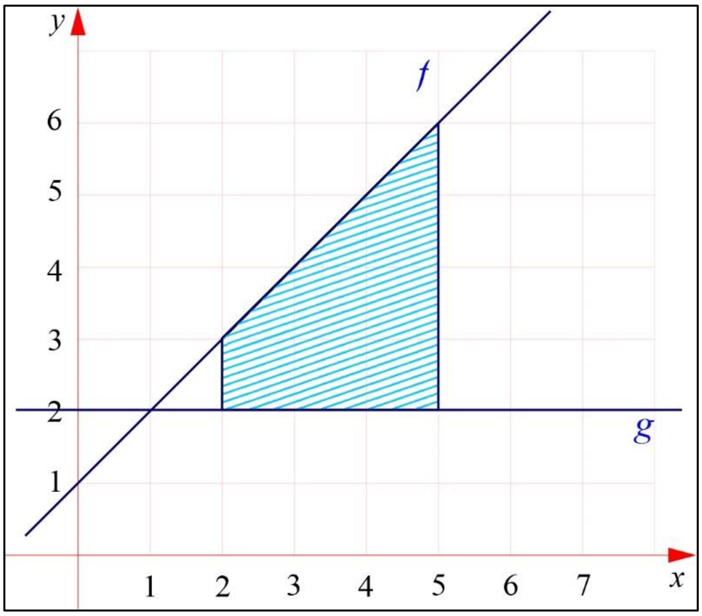


8. En la siguiente gráfica de la función $f(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+2$

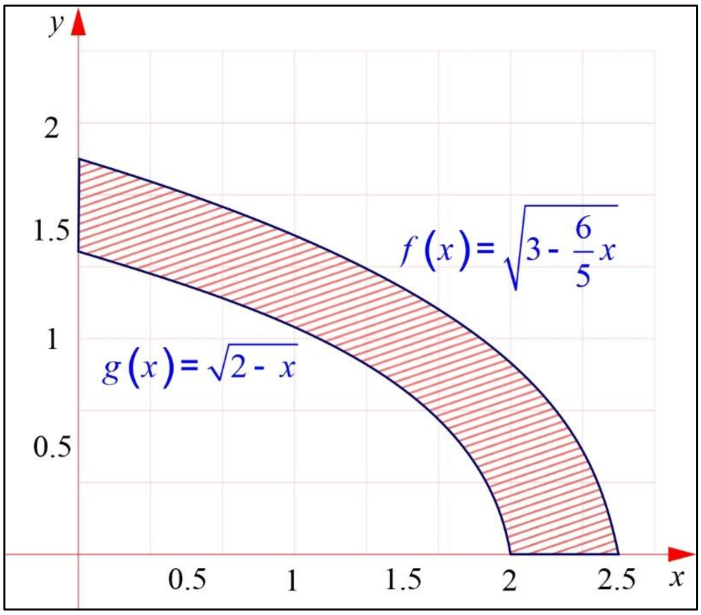


¿es posible calcular el área de la región sombreada?, justique su respuesta.

9. Adapte la integral definida para determinar el área de la siguiente región sombreada



10. Se desea pintar un camino que tiene la siguiente forma



si para cada m^2 se utiliza medio galón de pintura, ¿cuántos galones se emplearán para pintar todo el camino?

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA DE SISTEMAS

PRUEBA DE SALIDA

Nombres y Apellidos: ____

1. Defina el concepto integral indefinida de una función real.

2. Explique la interpretación geométrica de la integral indefinida de una función real

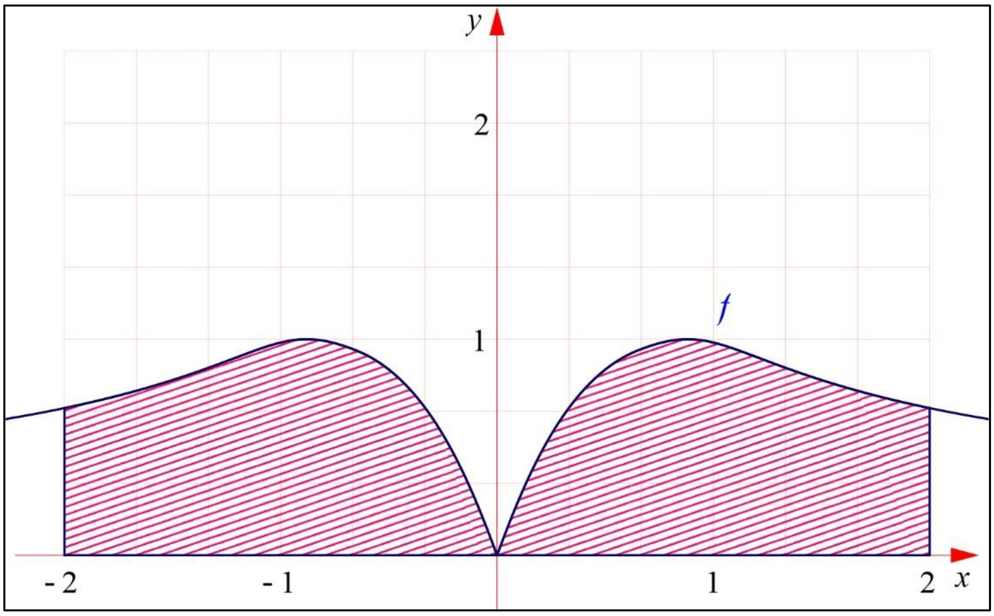
3. Relacione correctamente las siguientes alternativas:

	Función		Integral	
1	$f(x) = e^{2x}$		$\ln\lvert x\rvert$	**A**
2	$f(x) = x$		$-\cos x$	**B**
3	$f(x) = 3$		$\frac{e^{2x}}{2}$	**C**
4	$f(x) = \frac{1}{x}$		$3x$	**D**
5	$f(x) = sen\, x$		$\frac{x^2}{2}$	**E**

4. Calcule la siguiente integral: $\int \left(\sec^3 x + \sec x\right) dx$

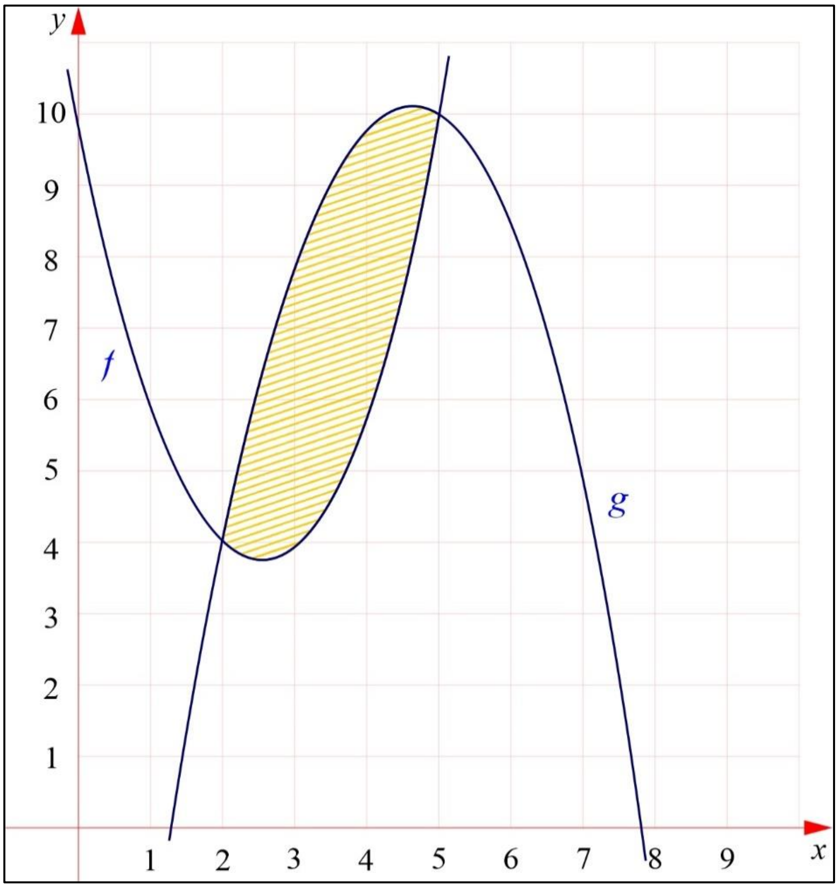
5. Sea $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1}$, determine $\int f(x)\, dx$

6. En la siguiente gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2|x|}{1+x^2}$



Calcule el área de la región sombreada.

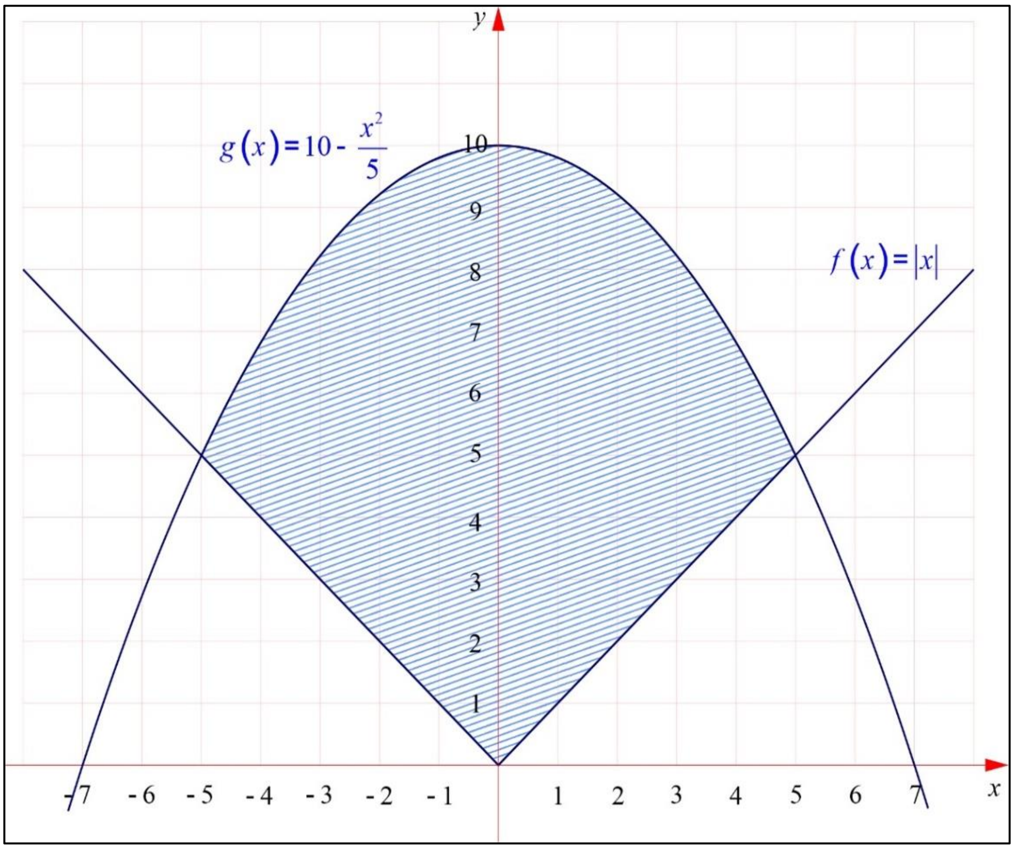
7. Halle el área de la región sombreada, si $f(x)=x^2-5x+10$ y $g(x)=-x^2+9x-10$



8. Calcule el área de la figura delimitada por la parábola $y^2 = x+4$ y la recta $y = \frac{1}{2}x - 2$

9. Calcule el área de la figura delimitada por la gráfica de $y = \frac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y = \frac{x^2}{2}$

10. Se desea pintar una region plana que tiene la siguiente forma



si para cada m^2 se utiliza dos galones de pintura, ¿cuántos galones se emplearán para pintar toda la región sombreada?

Anexo 3. Base de datos

Estudiante	Aprendizaje de integrales definidas e indefinidas			
	Grupo Experimental		Grupo Control	
	Prueba de Entrada	Prueba de Salida	Prueba de Entrada	Prueba de Salida
01	12	10	10	12
02	10	16	14	14
03	08	18	12	14
04	06	08	12	10
05	12	12	10	12
06	14	14	10	14
07	12	08	10	10
08	10	18	08	16
09	14	18	12	08
10	04	20	14	16
11	06	12	10	14
12	12	20	08	10
13	08	16	09	12
14	16	14	11	06
15	16	18	12	06
16	12	14	10	06
17	08	10	08	10
18	10	16	06	08
19	12	12	10	12
20	10	10	10	10
21	12	12	11	08
22	08	12	12	12
23	08	12	12	12
24	10	10	10	12
25	10	15	10	10
26	12	15	08	14
27	10	20	13	14
28	10	14	07	12
29	12	16		
30	12	14		

Resultados de la Prueba de Entrada

Estudiante	Aprendizaje de integrales definidas e indefinidas			
	Integrales Indefinidas		Integrales Definidas	
	G. Experimental	G. Control	G. Experimental	G. Control
01	12	10	12	10
02	10	14	10	14
03	08	12	08	12
04	06	12	06	12
05	12	10	12	10
06	14	10	14	10
07	12	10	12	10
08	10	08	10	08
09	14	12	14	12
10	04	14	20	14
11	06	10	06	10
12	12	08	12	08
13	08	09	08	09
14	16	11	16	11
15	16	12	16	12
16	12	10	12	10
17	08	08	08	08
18	10	06	10	07
19	12	10	12	10
20	10	10	10	10
21	12	11	12	11
22	08	12	08	12
23	08	12	08	12
24	10	10	10	10
25	10	10	10	10
26	12	08	12	08
27	10	13	10	13
28	10	07	10	07
29	12		12	
30	12		12	

Resultados de la Prueba de Salida

Estudiante	Aprendizaje de integrales definidas e indefinidas			
	Integrales Indefinidas		Integrales Definidas	
	G. Experimental	G. Control	G. Experimental	G. Control
01	10	12	10	12
02	18	14	14	14
03	20	14	16	14
04	06	10	10	10
05	12	12	12	12
06	12	14	16	14
07	10	10	06	10
08	18	16	18	16
09	20	08	16	08
10	20	16	20	16
11	14	14	10	14
12	20	10	20	10
13	16	12	16	12
14	14	06	14	06
15	18	06	18	06
16	14	06	14	06
17	10	10	10	10
18	16	08	16	08
19	12	12	12	12
20	10	10	10	10
21	12	08	12	08
22	12	12	12	12
23	12	12	12	12
24	10	12	10	12
25	15	10	15	10
26	15	14	15	14
27	20	14	20	14
28	14	12	14	12
29	16		16	
30	14		14	

Anexo 4. Sílabo

S I L A B O

FACULTAD	: INGENIERÍA MECANICA ELECTRICA, ELECTRÓNICA Y SISTEMAS
ESCUELA PROFESIONAL	: INGENIERÍA DE SISTEMAS
PROGRAMA DE ESTUDIOS	: INGENIERÍA DE SISTEMAS

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Identificación Académica

a) Curso	**:** Cálculo Integral
b) Código	: MAT108
c) Prerrequisito	: MAT104
d) Número de horas	: Teóricas: 2 Prácticas: 2 Total: **4**
e) N° de Créditos	: 4
f) N° de horas virtuales/unidad	: 2
g) Área curricular	: Estudios Generales
h) Ciclo del plan de estudios	: III
i) Características del curso	: Investigación, desarrollo e innovación (I+D+i)
j) Duración	: 17 semanas
k) Semestre Académico	: 2019 – II

1.2 Docente

a) Nombres y Apellidos	: Miguel Ángel Rivas Mamani
b) Condición y Categoría	: Contratado – B2
c) Especialidad (mencionar)	: Licenciado en Cs. Físico Matemáticas

1.3 Ambiente donde se realiza el aprendizaje.

Aula 104 – E.P. Ingeniería de Sistemas

II. SUMILLA

El curso de Calculo Integral corresponde al área de estudios generales, es de naturaleza teórica y práctica; se desarrolla con el propósito de fortalecer las capacidades de análisis, síntesis y comprensión por parte de los estudiantes que se inician en su formación profesional, con respecto al cálculo del área bajo una función, siendo una de las herramientas básicas en todas las ramas de la ciencia y tecnología. Los contenidos a desarrollar son:

- Antiderivadas
- Integrales Indefinidas
- Métodos de Integración
- Integrales Definidas
- Cálculo de áreas y superficies con integrales

III. PERFIL DEL EGRESADO EN RELACIÓN AL CURSO

Capacidad para tomar decisiones (resolver problemas).

Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.

IV. COMPETENCIA

Resuelve problemas considerando alternativas y desarrollando estrategias lógico-matemáticas.

V. LOGRO DE APRENDIZAJE DEL CURSO

Resuelve problemas y ejercicios aplicando conceptos y propiedades de las integrales definidas e indefinidas sobre áreas y superficies.

VI. UNIDADES DE APRENDIZAJE

UNIDAD I	**INTEGRALES INDEFINIDAS**
LOGROS DE APRENDIZAJE DE LA UNIDAD: **Logro 1:** Resuelve ejercicios de integrales indefinidas aplicando métodos y técnicas de integración, orientadas a un pensamiento crítico y formal.	
TIEMPO DE DESARROLLO	Del 19 de agosto al 25 de octubre del 2019. Total de horas: 40
HORAS DE ENSEÑANZA VIRTUAL/UNIDAD	2 horas
FECHA DE INGRESO DE NOTAS AL SISTEMA	25 de octubre
CRITERIOS DE DESEMPEÑO	**CONOCIMIENTO Y COMPRENSIÓN ESENCIALES**
El estudiante es competente si: Identifica un determinado método de integración para cada ejercicio de integrales indefinidas.	ANTIDERIVADAS E INTEGRALES INDEFINIDAS • Antiderivada de una función. METODOS DE INTEGRACIÓN • Integrales inmediatas • Método de sustitución • Integrales trigonométricas • Integración por partes • Sustitución trigonométrica • Integración por fracciones parciales
PORCENTAJE DE AVANCE ACADÉMICO DE LA UNIDAD: 50 %	

UNIDAD II	**INTEGRALES DEFINIDAS**
LOGROS DE APRENDIZAJE DE LA UNIDAD: **Logro 2:** Interpreta y resuelve problemas integrales definidas, áreas de regiones planas, volúmenes de revolución aplicando estrategias de integración aprendidas en la anterior unidad.	
TIEMPO DE DESARROLLO	Del 28 de octubre al 20 de diciembre del 2019. Total de horas: 32
HORAS DE ENSEÑANZA VIRTUAL/UNIDAD	2h
FECHA DE INGRESO DE NOTAS AL SISTEMA	20 de diciembre
CRITERIOS DE DESEMPEÑO	**CONOCIMIENTO Y COMPRENSIÓN ESENCIALES**

El estudiante es competente si:	INTEGRALES DEFINIDAS
Analiza, abstrae y propone solución a situaciones que involucren cálculo de áreas de regiones, volúmenes de revolución, empleando como herramienta fundamental la integración.	• Aproximación de áreas por rectángulos con sumas inferiores y superiores • Teorema fundamental del cálculo • Propiedades de integrales definidas • Aplicaciones de la integral definida • Áreas de regiones planas. • Volumen de solidos de revolución
PORCENTAJE DE AVANCE ACADÉMICO DE LA UNIDAD: 50 %	

VII. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

7.1 De Enseñanza.

Clase magistral interrogativa

Inductivo - deductivo

7.2 De Aprendizaje.

Discusión dirigida

Trabajo en equipo

7.3 De Investigación Formativa

Investigación bibliográfica

Modelación matemática

7.4 Responsabilidad social universitaria

Realización de un seminario de repaso de matemática para los estudiantes de la E.P. de Educación Inicial.

VIII. MEDIOS Y MATERIALES DIDÁCTICOS

- Textos
- Gráficos
- Pizarra
- Palabra hablada
- Programas para computadoras

IX. PRODUCTO DE APRENDIZAJE

FECHA DE PRESENTACIÓN	PRODUCTO
La última semana del semestre académico	Portafolio de resolución de problemas

X. EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE.

10.1 Evidencias, indicadores, técnicas e instrumentos de evaluación.

UNIDAD	LOGROS DE APRENDIZAJE	EVIDENCIAS DE DESEMPENO Acción/objeto /producto (%)	PONDERACIÓN (Obligatorio en base al 100%)	TECNICAS	INSTRUMENTOS
I	Logro 1	Portafolio de resolución de problemas	100 %	Observación Examen Resolución de problemas	Rúbrica. Ficha de observación. Prueba de ejecución Prueba escrita
II	Logro 2	Portafolio de resolución de problemas	100 %	Observación Examen Resolución de problemas	Rúbrica. Ficha de observación. Prueba de ejecución Prueba escrita

10.2 Calificación: La fórmula para la obtención del promedio parcial de cada unidad de aprendizaje es la siguiente:

La fórmula para la obtención del promedio final del curso es la siguiente:

$$Promedio\ final\ = \frac{I\ UPP\ + II\ UPP}{2}$$

I UPP = Promedio Parcial de la Primera Unidad

II UPP = Promedio Parcial de la Segunda Unidad

XI. Referencias bibliográficas.

- Pita Ruiz, C. (1998). *Cálculo de una Variable*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.
- Piskunov N. (1997). *Cálculo Diferencial e Integral Tomo I.* Moscú: Editorial MIR
- Howard E. (1967). *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial LIMUSA.
- Casteleiro, Jose (2002). *Cálculo Integral*. Madrid: Editorial ESIC.
- Zill, D. (2011). *Matemáticas 2 - Cálculo Integral.* Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- Kong, M. (2010). *Cálculo Integral.* Lima: Fondo Editorial PUCP.

Puno, 07 de octubre 2019

Anexo 5. Sesiones y guías de aprendizaje

SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 01

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1.Carrera Profesional : Ingeniería de Sistemas
1.2.Asignatura : Cálculo Integral
1.3.Unidad de Aprendizaje : Primera Unidad:
1.4.Tiempo : 02 horas
1.5.Año y semestre académico : 2019-II
1.6.Ciclo de plan de estudio : III
1.7.Ambiente : Aula Nº 104
1.8.Docente : Lic. Miguel Ángel Rivas Mamani

II. ELEMENTOS DE COMPETENCIA

2.1.Valora la importancia del estudio de la antiderivada general e integral indefinida.
2.2.Expresa con claridad y de manera concisa sus ideas.
2.3.Se integra y participa en forma individual y grupal.
2.4.Analiza la antiderivada de una función

III. EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE Y CRITERIOS DE DESEMPEÑO

3.1.Participación activa de los estudiantes en el desarrollo de la sesión.
3.2.Originalidad en las propuestas.
3.3.Manifestación de interés por el análisis y desarrollos algebraicos.

IV. TITULO DE LA SESIÓN

La antiderivada general de una función.

V. PROCESO DIDÁCTICO

MOMENTOS	CONTENIDOS Y ESTRATEGIAS	TIEMPO
Iniciación	- Inicio de la clase mediante preguntas referentes al tema: a) ¿Cómo se define una derivada? b) ¿Cómo se puede determinar una función F cuya derivada sea igual a la función f? c) ¿Cómo se llama a este tipo de funciones F? - Seguidamente el profesor, plantea una situación problemática acerca de la derivada de una función, y pide a los estudiantes ideas para la posible solución, luego del debate resuelve con ellos el ejercicio. - Exploración de conocimientos previos	10 min

Desarrollo	- Exposición teórica por medios audiovisuales: Introducción a las antiderivadas generales y su relación con las integrales indefinidas. - Exposición práctica por parte del profesor mediante la pizarra en la solución de ejercicios referentes al tema tratado. - Estrategia didáctica: Afianzamiento del aprendizaje mediante la Guía Didáctica 01 y el GeoGebra.	60 min
Culminación	- Síntesis: La antiderivada como integral indefinida - Actividad práctica para ser desarrollada en forma individual. - El profesor complementará y de ser necesario corregirá los ejercicios que son resueltos por los estudiantes.	50 min

VI. EVALUACION FORMATIVA

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
- Observación - Formulación de preguntas	Portafolio de ejercicios Pruebas orales y escritas

GUÍA DIDÁCTICA 01

ANTIDERIVADA DE UNA FUNCIÓN

I. OBJETIVOS

Utilizar adecuadamente el GeoGebra para representar e interpretar gráficamente la antiderivada de una función.

Interpretar correctamente la antiderivada de una función como la operación inversa de la derivada.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

Dada una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se denomina antiderivada de f en I, si

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in I$$

La función $F(x) + C$ es llamada antiderivada general de f en el intervalo I, donde C es una constante real.

III. DESARROLLO

Gráfica de una función

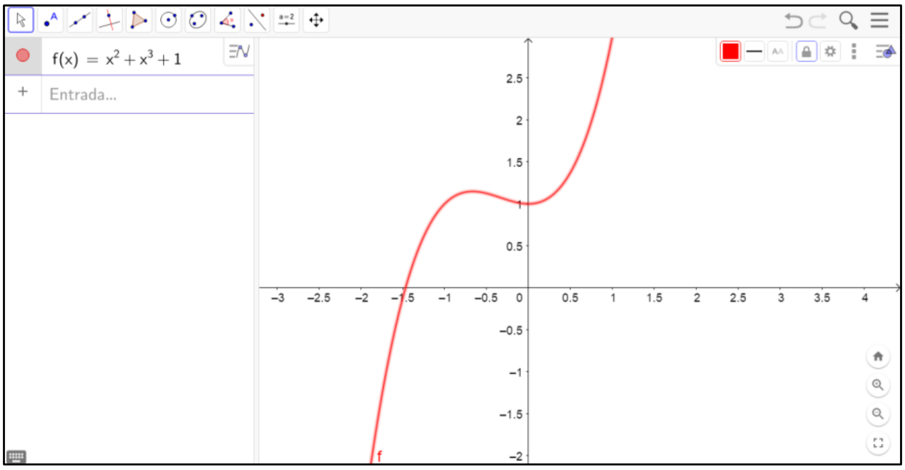
Para construir la gráfica de una función real, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

Paso 2: Verifique que se muestren los ejes coordenados, para esto elija el Menú *Vista* y marque la opción *Ejes*.

Paso 3: Digite en la barra de entrada directamente cualquier regla de correspondencia de una función.

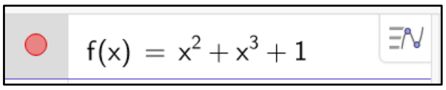
Luego de hacer *Enter*, automáticamente el programa asignará la etiqueta de $f(x)$ a la función como se muestra.



Para funciones con reglas de correspondencia donde se utilicen, raíces, potencias, valor absoluto, logaritmos, etc. Utilice como asistente el *Teclado Virtual*, ubicado en la parte inferior de la pantalla.

Paso 4: Para modificar el color, grosor y estilo del trazo, hacer *Clic Derecho* sobre la gráfica de la función, luego en la ventana emergente seleccionar la opción *Configuración.*

Paso 5: Haciendo *Clic* sobre el botón rojo ubicado a la izquierda de la regla de correspondencia de la función en la barra de entrada, se podrá ocultar o exponer la gráfica de la función seleccionada.



Antiderivada de una función

Para encontrar o recuperar la antiderivada $F(x)$ a partir de su derivada $f'(x)$ seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Dada una función $f(x) = 2x + \cos x$, necesitamos pensar en sentido contrario. ¿Qué función que conocemos tiene una derivada igual a la función dada?

$$F(x) = x^2 + \operatorname{sen} x$$

Paso 2: Verificamos el resultado mediante la definición de la antiderivada

$$F'(x) = 2x + \cos x = f(x)$$

Antiderivada general de una función

Para obtener la antiderivada general $F(x)$ de una función $f(x)$, seguiremos los siguientes pasos:

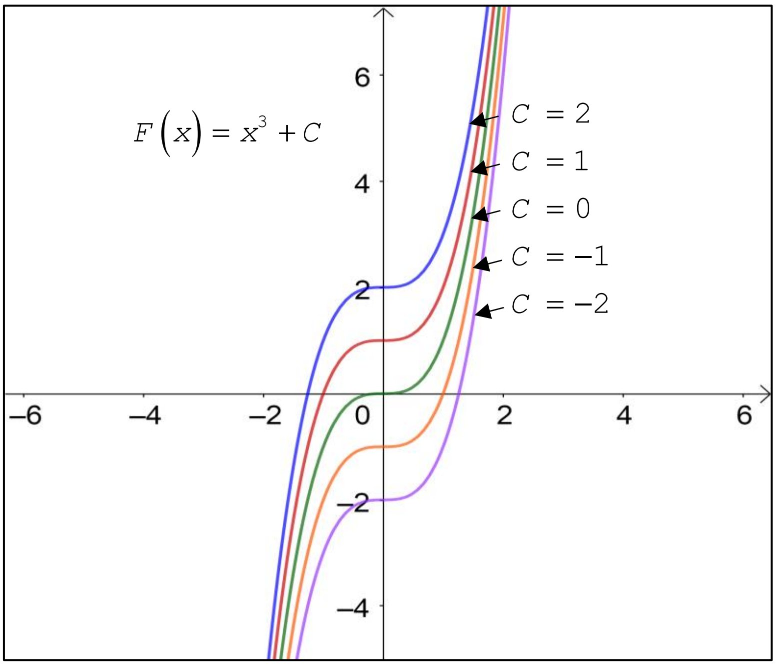
Paso 1: Dada una función $f(x) = 3x^2$ ¿Qué función que conocemos tiene una derivada igual a la función dada?

$$F(x) = x^3 + C$$

Paso 2: Verificamos la definición de la antiderivada general

$$F'(x) = 3x^2 = f(x)$$

Paso 3: En el GeoGebra graficamos $F(x)$ para analizar lo que sucede con el valor de C .



IV. ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) En los siguientes ejercicios determine una antiderivada de la función dada luego compruebe sus resultados mediante la definición.

1. $f(x) = 4e^x$
2. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = 2x^3 + 4\cos x$
4. $f(x) = sen\,x + \cos x$
5. $f(x) = 2\sec^2 x + x^4$

b) Utilizando el GeoGebra represente gráficamente la antiderivada general de las siguientes funciones.

c) Analice y explique qué sucede en la gráfica de la antiderivada cuando se cambia el valor de la constante C .

1. $f(x) = -\cos x$
2. $f(x) = 6x^2 + 4x$
3. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$
4. $f(x) = \sin x + x$
5. $f(x) = sen\,x - \cos x$

SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 02

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1. Carrera Profesional : Ingeniería de Sistemas
1.2. Asignatura : Cálculo Integral
1.3. Unidad de Aprendizaje : Primera Unidad
1.4. Tiempo : 02 horas
1.5. Año y semestre académico : 2019-II
1.6. Ciclo de plan de estudio : III
1.7. Ambiente : Aula Nº 104
1.8. Docente : Lic. Miguel Ángel Rivas Mamani

II. ELEMENTOS DE COMPETENCIA

2.1. Analiza la definición de la integral indefinida en base al estudio antiderivada general de una función.
2.2. Analiza, abstrae y propone una solución a un problema de integrales indefinidas utilizando la propiedad y sustitución adecuada.
2.3. Claridad y congruencia en la redacción.

III. EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE

3.1. Participación activa de los estudiantes en el desarrollo de la sesión.
3.2. Describe de manera clara la definición de la integral indefinida.
3.3. Propuesta de conjeturas sobre problemas y ejercicios nuevos.

IV. TITULO DE LA SESIÓN

Definición de la integral indefinida y propiedades básicas

V. PROCESO DIDÁCTICO

MOMENTOS	CONTENIDOS Y ESTRATEGIAS	TIEMPO
Iniciación	- El docente, plantea la definición de la integral indefinida en base a la antiderivada de una función - Inicio de la clase mediante preguntas referentes al tema: ¿Es posible encontrar la antiderivada de cualquier función? ¿Es posible encontrar la integral de cualquier función? - Exploración de conocimientos previos.	10 min

Desarrollo	- Exposición teórica por medios audiovisuales: Definición de la integral indefinida y sus propiedades básicas. - Exposición práctica mediante la pizarra por parte del docente en la solución de ejercicios referente al tema tratado. - Estrategia Didáctica: Afianzamiento del aprendizaje mediante la Guía Didáctica 02 y el GeoGebra	60 min
Culminación	- Síntesis: La integral definida y sus propiedades. - Actividad práctica para ser desarrollada en forma individual. - El docente complementará y de ser necesario corregirá los ejercicios que son resueltos por cada uno de los estudiantes.	50 min

VI. EVALUACION FORMATIVA

TÉCNICAS	**INSTRUMENTOS**
- Observación - Formulación de preguntas	Portafolio de ejercicios Pruebas orales y escritas

GUÍA DIDÁCTICA 02

LA INTEGRAL INDEFINIDA

I. OBJETIVOS

Utilizar adecuadamente el GeoGebra para representar gráficamente y determinar la integral indefinida de funciones elementales.

Analizar y proponer una solución a un problema de integral indefinida utilizando las propiedades básicas.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

Sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$ en un intervalo I, entonces la integral indefinida de $f(x)$ es la antiderivada general de $f(x)$ que es representada:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde C es denominada constante de integración.
Las propiedades a considerar son las siguientes

- $\int [k\,f(x)]\,dx = k\int f(x)\,dx$
- $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Principales fórmulas de integración

1. $\int du = u + C$

2. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C\ ,\ n \neq -1$

3. $\int e^u du = e^u + C$

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

6. $\int sen\,u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = sen\,u + C$

8. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

9. $\int \cot u\,du = \ln|\sec u| + C$

10. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

11. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

12. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

13. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

14. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

15. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

16. $\int senh\,u\,du = \cosh u + C$

17. $\int \cosh u\,du = senh\,u + C$

18. $\int \tanh u\,du = \ln|\cosh u| + C$

19. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

20. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

21. $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{u}{a} + C$

22. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

23. $\int \dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + C$

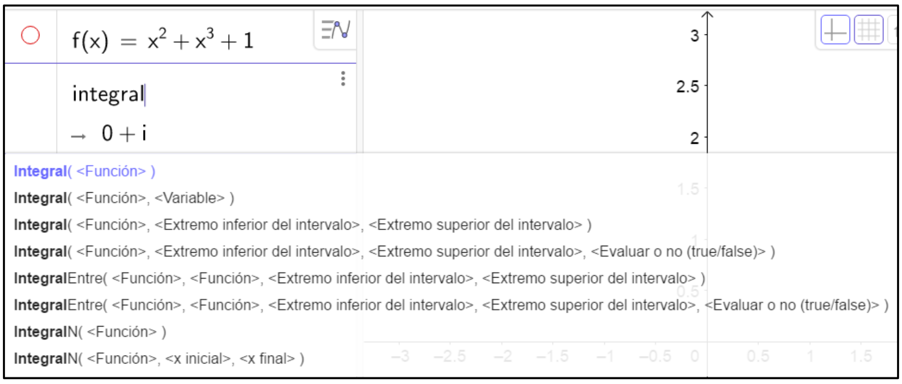
III. DESARROLLO

Para calcular la integral indefinida de una función en el GeoGebra, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

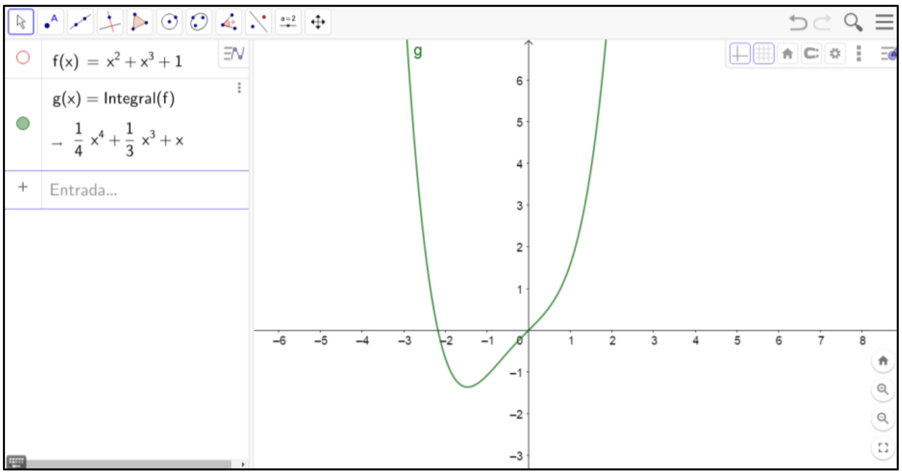
Paso 2: En la barra de entrada defina una función como se mostró anteriormente.

Paso 3: Digite en la barra de entrada directamente la palabra *Integral*, automáticamente aparecerá una lista de opciones sugerentes, de las cuales elegiremos la primera.

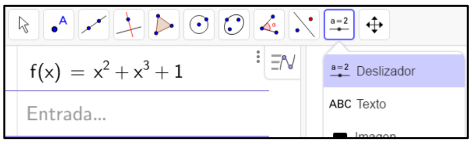


Paso 4: Reemplazaremos la expresión *<Función>* por la letra f, que representa a la función que definimos al inicio, luego pulsamos la tecla *Enter*.

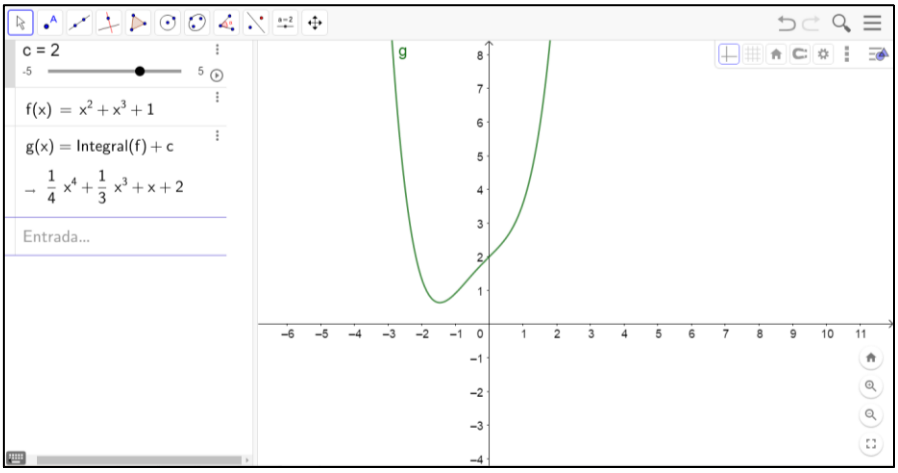
Al resultado mostrado se le etiquetará automáticamente con la letra $g(x)$ que representará a la integral de f.



Paso 5: Para notar la variación de la constante c en la integral indefinida, en la barra de herramientas creamos un deslizador con una variación de -5 a 5 e incremento de 1.



Cambiamos los valores de c y observamos lo que ocurre gráficamente con la integral.



IV. ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) Utilizando el GeoGebra, en las siguientes funciones encuentre la integral indefinida, analice e interprete gráficamente.

b) Mediante las propiedades básicas de integración compruebe sus resultados de forma algebraica.

1. $\int \left(3 + 7x + x^2\right) dx$
2. $\int \dfrac{sen\, x - 1}{\cos x} dx$
3. $\int \cos^2 x\, dx$
4. $\int \left(2^x + x^2\right) dx$
5. $\int \left(4 sen\, x + 5\cos x\right) dx$
6. $\int \dfrac{\left(4 - x^2\right)}{x} dx$
7. $\int x\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^2 dx$
8. $\int \left(e^x + 3x + 2\right) dx$

SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 03

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1.Carrera Profesional : Ingeniería de Sistemas
1.2.Asignatura : Cálculo Integral
1.3.Unidad de Aprendizaje : Primera Unidad
1.4.Tiempo : 02 horas
1.5.Año y semestre académico : 2019-II
1.6.Ciclo de plan de estudio : III
1.7.Ambiente : Aula Nº 104
1.8.Docente : Lic. Miguel Ángel Rivas Mamani

II. ELEMENTOS DE COMPETENCIA

2.1.Analiza, abstrae y propone una solución a un problema de integrales indefinidas utilizando sustitución adecuada.
2.2.Claridad y congruencia en la redacción.

III. EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE

3.1.Participación activa de los estudiantes en el desarrollo de la sesión.
3.2.Presenta la solución de un ejercicio de integral indefinida de manera clara y secuencial.
3.3.Propuesta de conjeturas sobre problemas y ejercicios nuevos.

IV. TITULO DE LA SESIÓN

Métodos de integración: Integrales por Partes

V. PROCESO DIDÁCTICO

MOMENTOS	CONTENIDOS Y ESTRATEGIAS	TIEMPO
Iniciación	- El docente, plantea un ejercicio de integral definida de una función compuesta. - Inicio de la clase mediante preguntas referentes al tema: ¿Es posible encontrar la integral de cualquier función? - Exploración de conocimientos previos.	10 min
Desarrollo	- Exposición teórica por medios audiovisuales: Teorema de integración por partes - Exposición práctica mediante la pizarra por parte del profesor en la solución de ejercicios referentes al tema tratado. - Estrategia didáctica: Afianzamiento del aprendizaje mediante la Guía Didáctica 03 y el GeoGebra	60 min

Culminación	- Síntesis: Integración por partes - Actividad práctica para ser desarrollada en forma grupal. - El docente complementará y de ser necesario corregirá los ejercicios que son resueltos por cada uno de los estudiantes.	50 min

VI. EVALUACION FORMATIVA

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
- Observación - Formulación de preguntas	Portafolio de ejercicios Pruebas orales y escritas

GUÍA DIDÁCTICA 03

INTEGRACIÓN POR PARTES

I. OBJETIVOS

Utilizar el GeoGebra de forma adecuada para representar gráficamente y determinar la integral indefinida de funciones que se ajusten a la propiedad de integración por partes.

Analizar y proponer una solución a un problema donde intervenga la integración por partes

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

Utilizaremos la siguiente fórmula de integración, donde en el integrando se encuentra el producto de dos funciones.

$$\int u\,dv = uv - \int v du$$

La función dv debe ser aquella que se pueda integrar inmediatamente, en algunos casos se tiene que integrar por partes más de una vez, a este tipo de problemas se denomina integral circular.

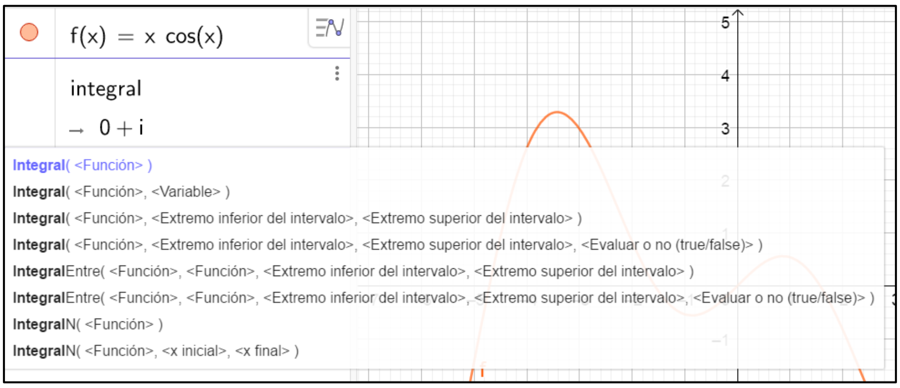
III. DESARROLLO

Para calcular la integral indefinida por el método de integración por partes seguiremos los siguientes pasos:

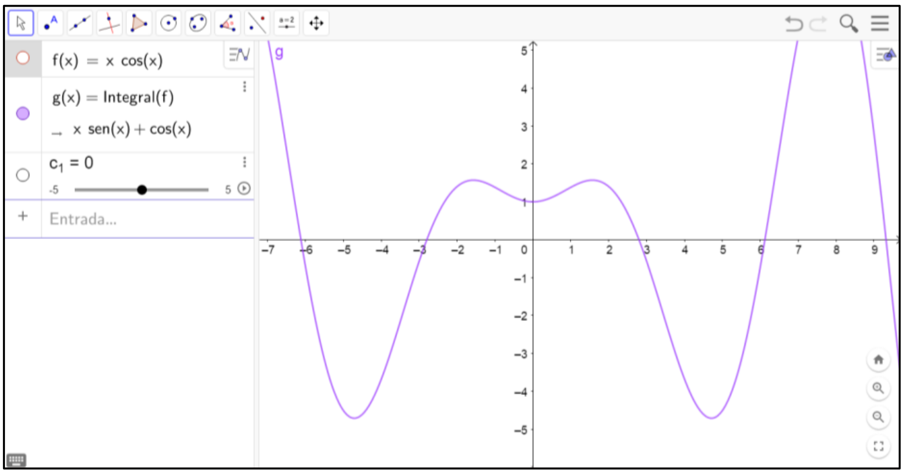
Paso 1: Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

Paso 2: En la barra de entrada defina una función como se mostró anteriormente.

Paso 3: Digite en la barra de entrada directamente la palabra *Integral*, automáticamente aparecerá una lista de opciones sugerentes, de las cuales elegiremos la primera.



Paso 4: Reemplazaremos la expresión <*Función*> por la letra f, que representa a la función que definimos al inicio, luego pulsamos la tecla *Enter*. Al resultado mostrado se le etiquetará automáticamente con la letra $g(x)$ que representará a la integral de f.



IV. ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) Utilizando el GeoGebra, en las siguientes funciones encuentre la integral indefinida, analice e interprete gráficamente.

b) Mediante la propiedad de integración por partes compruebe sus resultados de forma algebraica.

1. $\int x \operatorname{sen} x\, dx$
2. $\int xe^{x} dx$
3. $\int x\sqrt{1+x}\, dx$
4. $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$
5. $\int x^{2} \arctan(3x)\, dx$
6. $\int x \ln x\, dx$
7. $\int x^{2} \operatorname{sen} x\, dx$
8. $\int e^{x} \operatorname{sen} x\, dx$
9. $\int e^{-x} \operatorname{sen}^{2} x\, dx$
10. $\int x \sec^{2}(3x)\, dx$

SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 04

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1. Carrera Profesional : Ingeniería de Sistemas
1.2. Asignatura : Cálculo Integral
1.3. Unidad de Aprendizaje : Primera Unidad
1.4. Tiempo : 02 horas
1.5. Año y semestre académico : 2019-II
1.6. Ciclo de plan de estudio : III
1.7. Ambiente : Aula Nº 104
1.8. Docente : Lic. Miguel Ángel Rivas Mamani

II. ELEMENTOS DE COMPETENCIA

2.1. Analiza, abstrae y propone una solución a un problema de integrales indefinidas utilizando una identidad trigonométrica apropiada.
2.2. Claridad y congruencia en la redacción.

III. EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE Y CRITERIOS DE DESEMPEÑO

3.1. Participación activa de los estudiantes en el desarrollo de la sesión.
3.2. Presenta la solución de un ejercicio de integral indefinida de manera clara y secuencial.
3.3. Propuesta de conjeturas sobre problemas y ejercicios nuevos.

IV. TITULO DE LA SESIÓN

Método de integración: Funciones trigonométricas

V. PROCESO DIDÁCTICO

MOMENTOS	CONTENIDOS Y ESTRATEGIAS	TIEMPO
Iniciación	- El docente, plantea un ejercicio de integral definida de una función trigonométrica. - Inicio de la clase mediante preguntas referentes al tema: ¿Es posible encontrar la integral de cualquier función trigonométrica? - Exploración de conocimientos previos.	10 min
Desarrollo	- Exposición teórica por medios audiovisuales: Presentación de las propiedades de las funciones trigonométricas. - Exposición práctica mediante la pizarra por parte del docente en la solución de ejercicios referentes a la integración de funciones trigonométricas.	60 min

	- Estrategia didáctica: Afianzamiento del aprendizaje mediante la Guía Didáctica 04 y el GeoGebra	
Culminación	- Síntesis: Integración de funciones trigonométricas. - Actividad práctica para ser desarrollada en forma grupal. - El profesor complementará y de ser necesario corregirá los ejercicios que son resueltos por cada uno de los estudiantes.	50 min

VI. EVALUACION FORMATIVA

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
- Observación - Formulación de preguntas	Portafolio de ejercicios Pruebas orales y escritas

GUÍA DIDÁCTICA 04

INTEGRACIÓN POR IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

I. OBJETIVOS

Utilizar de forma adecuada el GeoGebra para graficar y determinar la integral indefinida de funciones trigonométricas.

Analizar y proponer una solución a un problema de integrales de funciones trigonométricas.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

Consideraremos las siguientes identidades trigonométricas

1. $sen^2 u + \cos^2 u = 1$

2. $\sec^2 u - \tan^2 u = 1$

3. $\csc^2 u - \cot^2 u = 1$

4. $sen^2 u = \dfrac{1-\cos 2u}{2}$

5. $\cos^2 u = \dfrac{1+\cos 2u}{2}$

6. $\cosh^2 u - senh^2 u = 1$

7. $\operatorname{sech}^2 u + \tanh^2 u = 1$

8. $\coth^2 u - \operatorname{csch}^2 u = 1$

9. $senh^2 u = \dfrac{\cosh 2u - 1}{2}$

10. $\cosh^2 u = \dfrac{\cosh 2u + 1}{2}$

Para funciones trigonométricas con ángulos múltiples consideraremos:

1. $sen\left(m\,x\right)\cos\left(nx\right) = \dfrac{1}{2}\left[sen\left(m-n\right)x + sen\left(m+n\right)x\right]$

2. $sen\left(m\,x\right)sen\left(nx\right) = \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(m-n\right)x - \cos\left(m+n\right)x\right]$

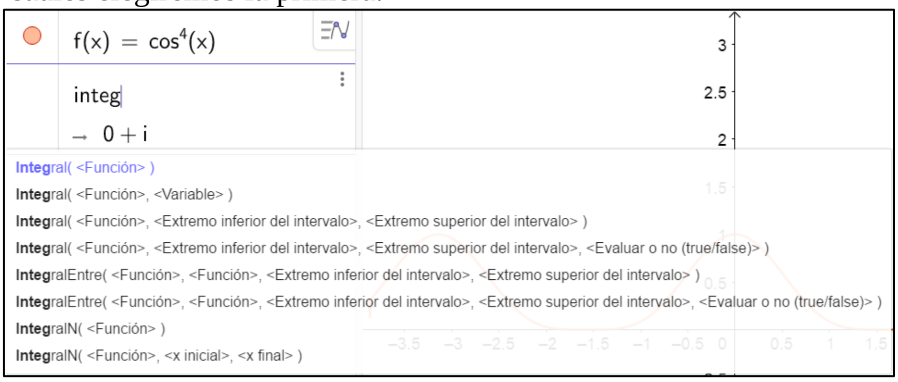
3. $\cos\left(m\,x\right)\cos\left(nx\right) = \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(m-n\right)x + \cos\left(m+n\right)x\right]$

III. DESARROLLO

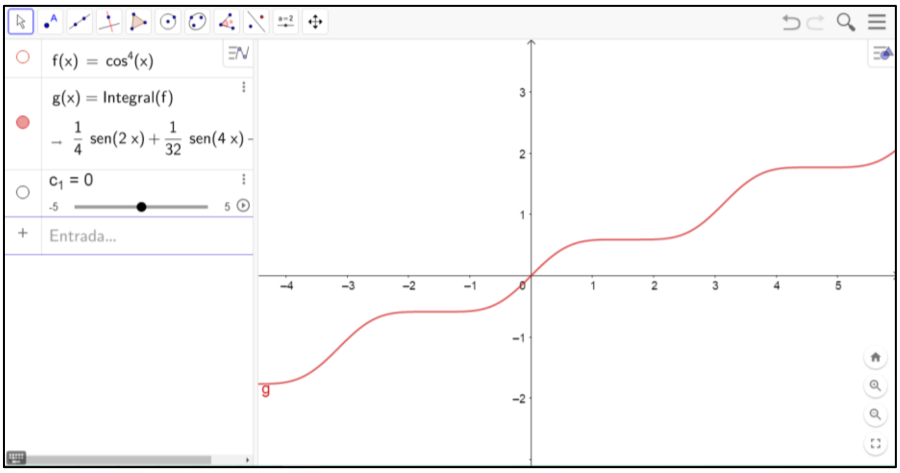
Para calcular la integral indefinida utilizando el GeoGebra, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Abra un nuevo archivo en GeoGebra. En la barra de entrada defina una función como se mostró anteriormente.

Paso 2: Digite en la barra de entrada directamente la palabra *Integral*, automáticamente se mostrará una lista de opciones sugerentes, de las cuales elegiremos la primera.



Paso 3: Reemplazaremos la expresión <*Función*> por la letra f, que representa a la función que definimos al inicio, luego pulsamos la tecla *Enter*. Al resultado mostrado se le etiquetará automáticamente con la letra $g(x)$ que representará a la integral de f.



IV. ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) Utilizando el GeoGebra, en las siguientes funciones encuentre la integral indefinida, analice e interprete gráficamente.

b) Mediante las identidades trigonométricas compruebe sus resultados de forma algebraica.

1. $\int sen^4 x\,dx$
2. $\int x\cos^3\left(x^2\right)dx$
3. $\int \cot^3\left(2x\right)dx$
4. $\int \tan^3 x\sec^3 x\,dx$
5. $\int \dfrac{sen^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$
6. $\int sen\left(3x\right)sen\left(5x\right)dx$
7. $\int \cos\left(4x\right)\cos\left(5x\right)dx$
8. $\int sen\left(20x\right)\cos\left(30x\right)dx$
9. $\int sen\left(4x+7\right)\cos\left(5x+8\right)dx$
10. $\int sen\left(x\right)\cos\left(7x\right)sen\left(11x\right)dx$

SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 05

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1.Carrera Profesional : Ingeniería de Sistemas
1.2.Asignatura : Cálculo Integral
1.3.Unidad de Aprendizaje : Primera Unidad
1.4.Tiempo : 02 horas
1.5.Año y semestre académico : 2019-II
1.6.Ciclo de plan de estudio : III
1.7.Ambiente : Aula Nº 104
1.8.Docente : Lic. Miguel Ángel Rivas Mamani

II. ELEMENTOS DE COMPETENCIA

2.1.Analiza, abstrae y propone una solución a un problema de integrales indefinidas utilizando una sustitución trigonométrica apropiada.
2.2.Claridad y congruencia en la redacción.

III. EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE Y CRITERIOS DE DESEMPEÑO

3.1.Participación activa de los estudiantes en el desarrollo de la sesión.
3.2.Presenta la solución de un ejercicio de integral indefinida de manera clara y secuencial.
3.3.Propuesta de conjeturas sobre problemas y ejercicios nuevos.

IV. TITULO DE LA SESIÓN

Métodos de integración: Integrales por sustitución trigonométrica

V. PROCESO DIDÁCTICO

MOMENTOS	CONTENIDOS Y ESTRATEGIAS	TIEMPO
Iniciación	- El docente, plantea un ejercicio de integral definida de una función irracional. - Inicio de la clase mediante preguntas referentes al tema: ¿Es posible encontrar la integral de cualquier función irracional? - Exploración de conocimientos previos.	10 min

Desarrollo	- Exposición teórica por medios audivisuales: Presentación de los diferentes casos de integrales por sustitución trigonométrica. - Exposición práctica mediante la pizarra por parte del docente de la solución de ejercicios referentes a integración por sustitución trigonométrica. - Estrategia didáctica: Afianzamiento del aprendizaje mediante la Guía Didáctica 05 y el GeoGebra	60 min
Culminación	- Síntesis: Integración por sustitución trigonométrica - Actividad práctica para ser desarrollada en forma individual. - El docente complementará y de ser necesario corregirá los ejercicios que son resueltos por cada uno de los estudiantes.	50 min

VI. EVALUACION FORMATIVA

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
- Observación - Formulación de preguntas	Portafolio de ejercicios Pruebas orales y escritas

GUÍA DIDÁCTICA 05

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

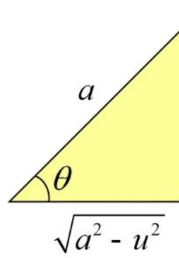
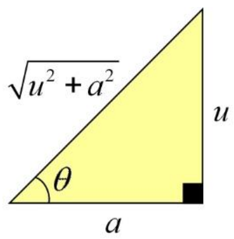
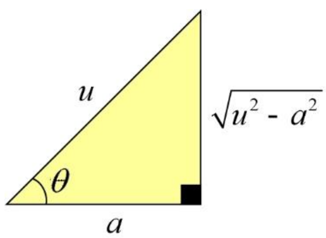
I. OBJETIVOS

Utilizar el GeoGebra de forma idónea para representar gráficamente y encontrar la integral indefinida de funciones por sustitución trigonométrica.

Analizar y proponer una solución a un problema de integrales de funciones por sustitución trigonométrica.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

Para el cálculo de integrales mediante sustitución trigonométrica, consideraremos los siguientes triángulos notables.

<table>
<tr><td>
</td><td>$\frac{u}{a} = \operatorname{sen}\theta \rightarrow u = a\operatorname{sen}\theta$
$du = a\cos\theta d\theta$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\frac{u}{a} = \tan\theta \rightarrow u = a\tan\theta$
$du = a\sec^2\theta\, d\theta$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\frac{u}{a} = \sec\theta \rightarrow u = a\sec\theta$
$du = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$</td></tr>
</table>

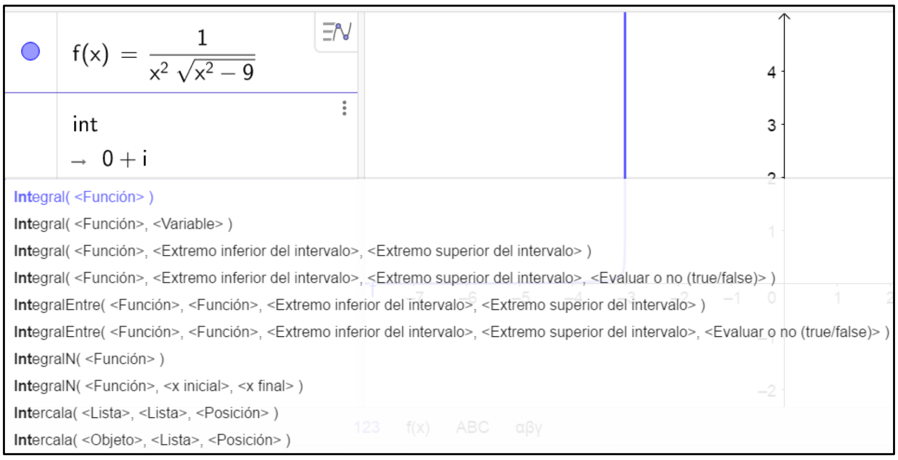
III. DESARROLLO

Para calcular la integral indefinida utilizando el GeoGebra, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

Paso 2: En la barra de entrada defina una función como se mostró anteriormente.

Paso 3: Digite en la barra de entrada directamente la palabra *Integral*, automáticamente aparecerá una lista de opciones sugerentes, de las cuales elegiremos la primera.



Paso 4: Reemplazaremos la expresión *<Función>* por la letra f, que representa a la función que definimos al inicio, luego pulsamos la tecla *Enter*. Al resultado mostrado se le etiquetará automáticamente con la letra $g(x)$ que representará a la integral de f.

IV. ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) Utilizando el GeoGebra, en las siguientes funciones encuentre la integral indefinida, analice e interprete gráficamente.

b) Mediante una sustitución trigonométrica apropiada compruebe sus resultados de forma algebraica.

1. $\int \frac{x^2 dx}{\left(16 - x^2\right)^{3/2}}$
2. $\int \frac{\sqrt{25 - x^2}\, dx}{x}$
3. $\int \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}\, dx}{\left(x^2 + 1\right)^{3/2}}$
4. $\int \frac{dx}{\left(x^2 + 5\right)^{3/2}}$
5. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}\, dx}{x}$
6. $\int \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)\sqrt{x^2 + 1}}$
7. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$
8. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
9. $\int \sqrt{x}\sqrt{1 - x}\, dx$
10. $\int \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 1}}\, dx$

SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 06

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1.Carrera Profesional : Ingeniería de Sistemas
1.2.Asignatura : Cálculo Integral
1.3.Unidad de Aprendizaje : Primera Unidad
1.4.Tiempo : 02 horas
1.5.Año y semestre académico : 2019-II
1.6.Ciclo de plan de estudio : III
1.7.Ambiente : Aula Nº 104
1.8.Docente : Lic. Miguel Ángel Rivas Mamani

II. ELEMENTOS DE COMPETENCIA

2.1.Analiza, abstrae y propone una solución a un problema de integrales indefinidas utilizando una descomposición racional adecuada.
2.2.Claridad y congruencia en la redacción.

III. EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE Y CRITERIOS DE DESEMPEÑO

3.1.Participación activa de los estudiantes en el desarrollo de la sesión.
3.2.Presenta la solución de un ejercicio de integral indefinida de manera clara y secuencial.
3.3.Propuesta de conjeturas sobre problemas y ejercicios nuevos.

IV. TITULO DE LA SESIÓN

Método de integración: Integrales de funciones racionales

V. PROCESO DIDÁCTICO

MOMENTOS	CONTENIDOS Y ESTRATEGIAS	TIEMPO
Iniciación	- El docente, plantea un ejercicio de integral definida de una función racional. - Inicio de la clase mediante preguntas referentes al tema: ¿Es posible encontrar la integral de cualquier función racional? - Exploración de conocimientos previos.	10 min
Desarrollo	- Exposición teórica por medios audiovisuales: Presentación de los diferentes casos de integrales por descomposición de funciones racionales. - Exposición práctica mediante la pizarra por parte del docente en la solución de ejercicios referentes al tema tratado.	60 min

	- Estrategia didáctica: Afianzamiento del aprendizaje mediante la Guía Didáctica 06 y el GeoGebra.	
Culminación	- Síntesis: Integración de funciones racionales - Actividad práctica para ser desarrollada en forma individual. - El docente complementará y de ser necesario corregirá los ejercicios que son resueltos por cada uno de los estudiantes.	50 min

VI. EVALUACION FORMATIVA

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
- Observación - Formulación de preguntas	Portafolio de ejercicios Pruebas orales y escritas

GUÍA DIDÁCTICA 06

INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSCIONES RACIONALES

I. OBJETIVOS

Utilizar adecuadamente el GeoGebra para graficar y determinar la integral indefinida de funciones racionales.

Analizar y proponer una solución a un problema de integración de funciones racionales.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

Para la integración de funciones racionales de la siguiente forma

$$\int f(x)dx; \; f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \; m > n$$

consideraremos los siguientes casos:

Caso 1: El polinomio $Q_m(x)$ tiene factores lineales simples no repetidos, la función será descompuesta en m fracciones simples como se muestra $$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_m}{x-a_m}$$
Caso 2: El polinomio $Q_m(x)$, tiene algunos factores lineales repetidos, el factor repetido será descompuesto de la siguiente forma: $$f(x) = \frac{P_n(x)}{\ldots(x-a)^k\ldots} = \ldots + \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \ldots$$
Caso 3: El polinomio $Q_m(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles no repetidos: $$f(x) = \frac{P_n(x)}{\ldots(x^2+ax+b)\ldots} = \ldots + \frac{Ax+B}{x^2+ax+b} + \ldots$$
Caso 4: El polinomio $Q_m(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles repetidos, el factor repetido será descompuesto de la siguiente manera: $$f(x) = \frac{P_n(x)}{\ldots(x^2+ax+b)^k\ldots} = \ldots + \frac{A_1x+B_1}{(x^2+ax+b)} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+ax+b)^k} + \ldots$$

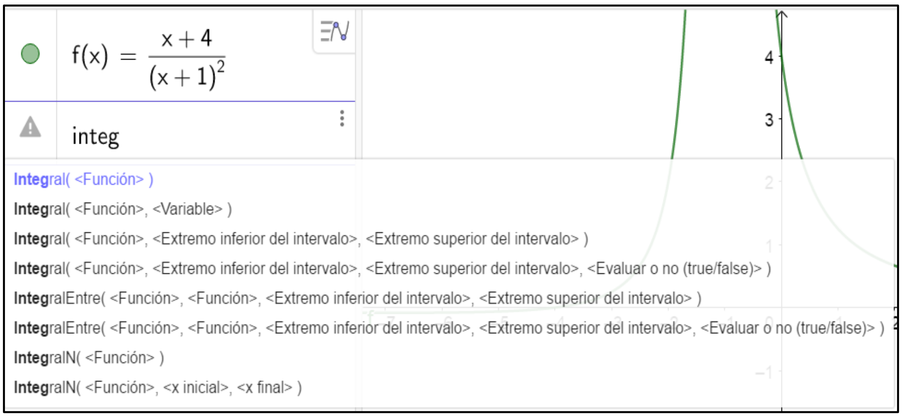
III. DESAROLLO

Para calcular la integral indefinida utilizando el método de descomposiciones racionales (fracciones parciales) seguiremos los siguientes pasos:

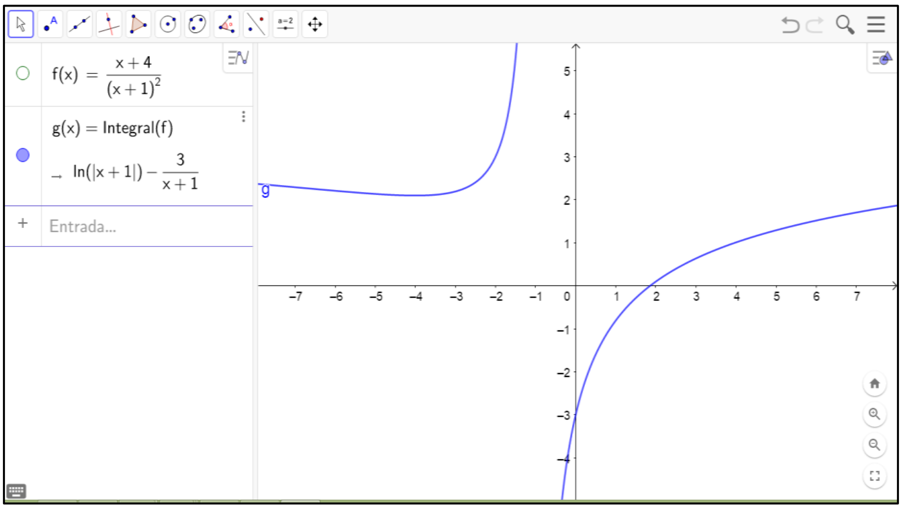
Paso 1: Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

Paso 2: En la barra de entrada defina una función como se mostró anteriormente.

Paso 3: Digite en la barra de entrada directamente la palabra *Integral*, automáticamente aparecerá una lista de opciones sugerentes, de las cuales elegiremos la primera.



Paso 4: Reemplazaremos la expresión *<Función>* por la letra f, que representa a la función que definimos al inicio, luego pulsamos la tecla *Enter*. Al resultado mostrado se le etiquetará automáticamente con la letra $g(x)$ que representará a la integral de f.



IV. ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) Utilizando el GeoGebra, en las siguientes funciones encuentre la integral indefinida, analice e interprete gráficamente.

b) Mediante una descomposición racional apropiada compruebe sus resultados de forma algebraica.

1. $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$

2. $\int \frac{(3x-2)}{(x+1)(x+2)(x-1)} dx$

3. $\int \frac{5x^2 - 11x + 5}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx$

4. $\int \frac{x-1}{x^3 + 4x} dx$

5. $\int \frac{x^2 - 3x - 7}{(2x+3)(x+1)^2} dx$

6. $\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}$

7. $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x^2} dx$

8. $\int \frac{dx}{x(x^4 - 1)}$

9. $\int \frac{y^2 + 2y + 1}{(y^2 + 1)} dy$

10. $\int \frac{sen\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta - 2} d\theta$

SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 07

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1.Carrera Profesional : Ingeniería de Sistemas
1.2.Asignatura : Cálculo Integral
1.3.Unidad de Aprendizaje : Segunda Unidad
1.4.Tiempo : 02 horas
1.5.Año y semestre académico : 2019-II
1.6.Ciclo de plan de estudio : III
1.7.Ambiente : Aula Nº 104
1.8.Docente : Lic. Miguel Ángel Rivas Mamani

II. ELEMENTOS DE COMPETENCIA

2.1.Valora la importancia del estudio de las sumas superiores e inferiores de la gráfica de una función.
2.2.Expresa con claridad y de manera concisa sus ideas.
2.3.Se integra y participa en forma individual y grupal.
2.4.Analiza las aproximaciones del área bajo la curva de una función mediante rectángulos.

III. EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE

3.1.Participación activa de los estudiantes en el desarrollo de la sesión.
3.2.Originalidad en las propuestas
3.3.Análisis de problemas para reforzar sus ideas.
3.4.Manifestación de las ideas propias.

IV. TITULO DE LA SESIÓN

Sumas superiores e inferiores

V. PROCESO DIDÁCTICO

MOMENTOS	CONTENIDOS Y ESTRATEGIAS	TIEMPO
Iniciación	- El docente, plantea una situación problemática acerca de las sumas inferiores y superiores mediante rectángulos sobre la gráfica de una función. - Inicio de la clase mediante preguntas referentes al tema: a) ¿Dada la gráfica de una función es posible encontrar con precisión el área bajo la curva? b) ¿Utilizando la aproximación de los rectángulos superior e inferiormente respecto a una partición es posible calcular el área bajo la curva? - Exploración de conocimientos previos.	10 min

Desarrollo	- Exposición teórica por medios audiovisuales: Sumas superiores e inferiores de una función continua respecto a una partición - Exposición práctica mediante la pizarra por parte del docente en la solución de ejercicios referentes al tema tratado. - Estrategia didáctica: Afianzamiento del aprendizaje mediante la Guía Didáctica 07 y el GeoGebra	60 min
Culminación	- Resumen: Aproximación del área bajo la gráfica de una función mediante sumas superiores e inferiores - Actividad práctica para ser desarrollada en forma grupal. - El docente complementará y de ser necesario corregirá los ejercicios que son resueltos por cada uno de los estudiantes.	50 min

VI. EVALUACION FORMATIVA

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
- Observación - Formulación de preguntas	Portafolio de ejercicios Pruebas orales y escritas

GUÍA DIDÁCTICA 07

SUMAS SUPERIORES E INFERIORES

I. OBJETIVOS

Representar gráficamente las sumas superiores e inferiores de una función en un determinado intervalo, utilizando el GeoGebra.

Analizar y proponer una solución a problemas que involucren áreas de regiones utilizando como herramienta la aproximación de sumas superiores e inferiores.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

Una partición del intervalo $[a,b]$ es un subconjunto finito de puntos

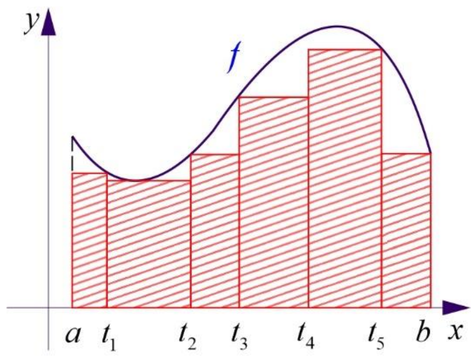
$$P=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}\subset[a,b] \text{ tal que } a\in P \text{ y } b\in P.$$

Dada una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, usaremos la notación

$$m=\inf\{f(x);x\in[a,b]\} \text{ y } M=\sup\{f(x);x\in[a,b]\}$$

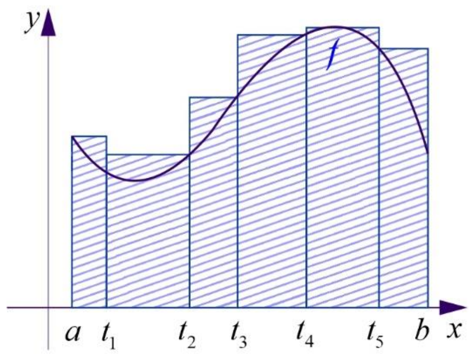
La suma inferior de f respecto a la partición P es el número

$$s(f;P)=m_1(t_1-t_0)+\dots+m_n(t_n-t_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1})$$



La suma superior de f respecto a la partición P es el número

$$S(f;P)=M_1(t_1-t_0)+\dots+M_n(t_n-t_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1})$$



La integral inferior y superior de una función acotada $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$, se definen como sigue:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P S(f;P), \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P s(f;P)$$

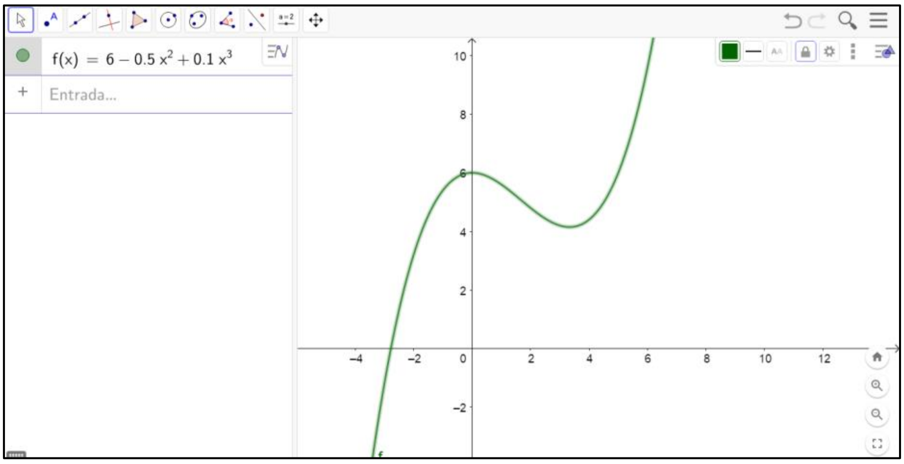
donde el supremo e ínfimo se toman en el conjunto de todas las particiones P de intervalo $[a,b]$.

III. DESARROLLO

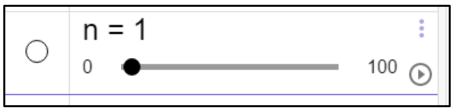
Para visualizar las sumas superiores e inferiores de la gráfica de una función mediante rectángulos en le GeoGebra, se procederá de la siguiente manera:

Paso 1: Abra un nuevo archivo en GeoGebra

Paso 2: En la *Barra de Entrada*, defina una función continua cualquiera.



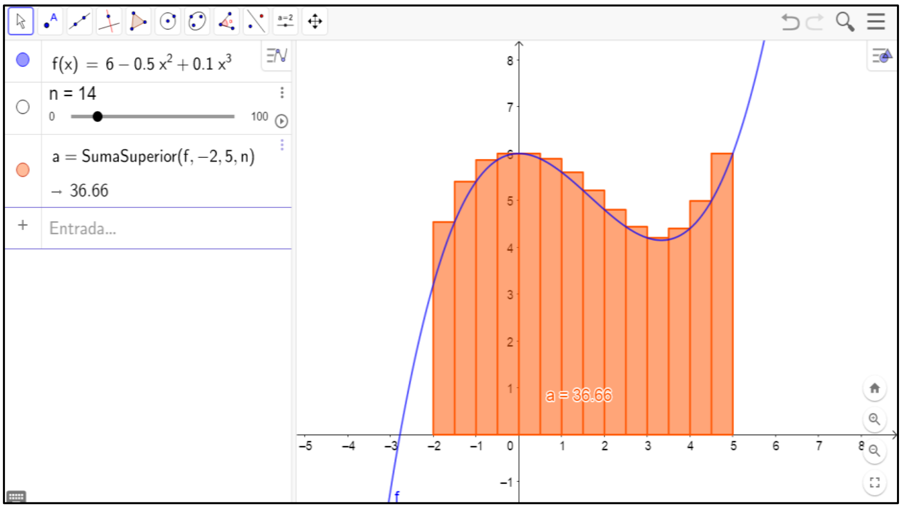
Paso 3: Creamos un deslizador *n*, con una variación de 1 a 100 y un incremento de 1 punto.



Paso 4: Seguidamente en la *Barra de entrada*, digite *SumaSuperior*

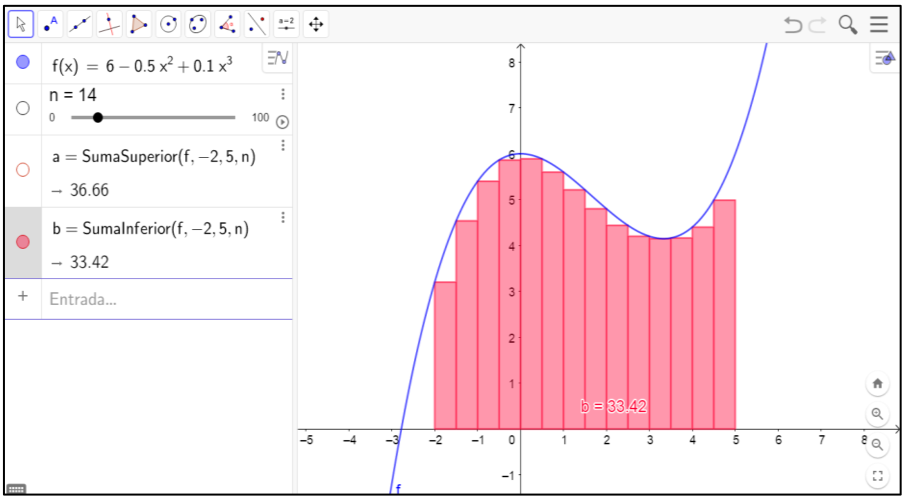
Reemplace los valores pedidos con la función *f*, desde -2 a 5, con número de rectángulos igual a *n* (valor del deslizador creado).

Paso 5: Haga variar el valor de *n*, para notar el área aproximada con la suma superior.



Paso 6: Para visualizar la aproximación del área mediante suma inferior de rectángulos, en la *Barra de Entrada*, digite *SumaInferior*

Luego siga los mismos pasos realizados anteriormente.



IV. ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) Utilizando el GeoGebra, en las siguientes funciones encuentre el área aproximada por sumas superiores e inferiores, interprete gráficamente ¿qué ocurre a medida que se aumenta el número de rectángulos?

b) Mediante la definición de sumas superiores e inferiores compruebe sus resultados de forma algebraica.

1. $f(x) = sen\,x$, desde -3 a 3
2. $f(x) = \ln x$, desde 0 a 10
3. $f(x) = x^3 + \cos x$, desde -2 a 5
4. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, desde -5 a 5
5. $f(x) = sen\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$, desde -2 a 2
6. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$, desde 2 a 6
7. $f(x) = x^3\sqrt{\cos x}$, desde -2 a 5
8. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$, desde 0 a 10

SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 08

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1. Carrera Profesional : Ingeniería de Sistemas
1.2. Asignatura : Cálculo Integral
1.3. Unidad de Aprendizaje : Segunda Unidad
1.4. Tiempo : 02 horas
1.5. Año y semestre académico : 2019-II
1.6. Ciclo de plan de estudio : III
1.7. Ambiente : Aula Nº 204
1.8. Docente : Lic. Miguel Ángel Rivas Mamani

II. ELEMENTOS DE COMPETENCIA

2.1. Analiza la definición de la integral definida en base al estudio de las sumas superiores e inferiores de la gráfica de una función.
2.2. Claridad y congruencia en la redacción.

III. EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE

3.1. Participación activa de los estudiantes en el desarrollo de la sesión.
3.2. Describe de manera clara la definición de la integral definida.
3.3. Propuesta de conjeturas sobre conceptos nuevos.

IV. TITULO DE LA SESIÓN

Definición de la integral definida

V. PROCESO DIDÁCTICO

MOMENTOS	CONTENIDOS Y ESTRATEGIAS	TIEMPO
Iniciación	- El docente, plantea la definición de la integral definida en base a las sumas superiores e inferiores. - Inicio de la clase mediante preguntas referentes al tema: ¿Es posible aproximar con exactitud el área bajo la gráfica de una función? - Exploración de conocimientos previos.	10 min

Desarrollo	- Exposición teórica por medios audivisuales: Definición de la integral definida y sus propiedades. - Exposición práctica mediante la pizarra por parte del docente en la solución de ejercicios referentes al tema tratado. - Estrategia didáctica: Afianzamiento del aprendizaje mediante la Guía Didáctica 08 y el GeoGebra.	60 min
Culminación	- Resumen: Integral definida como sumas de Riemann - Actividad práctica para ser desarrollada en forma individual. - El docente complementará y de ser necesario corregirá los ejercicios que son resueltos por cada uno de los estudiantes.	50 min

VI. EVALUACION FORMATIVA

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
- Observación - Formulación de preguntas	Portafolio de ejercicios Pruebas orales y escritas

GUÍA DIDÁCTICA 08

LA INTEGRAL DEFINIDA

I. OBJETIVOS

Representar y analizar gráficamente la integral definida en las operaciones entre funciones en un determinado intervalo, utilizando el GeoGebra.

Analizar e interpretar algebraicamente las propiedades de la integral definida.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

Una función f se dice que es integrable en $[a,b]$ si f está acotada sobre $[a,b]$ y si coinciden la integral superior e inferior de f

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

en tal caso, a este valor común se le denomina integral definida y es denotada

$$\int_a^b f(x)dx$$

Condición suficiente para la integrabilidad

Toda función continua $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

2. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

4. Si $f(x)\geq 0$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

5. Si $f(x)\geq g(x)$, $\forall x\in[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

6. Si $c\in[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

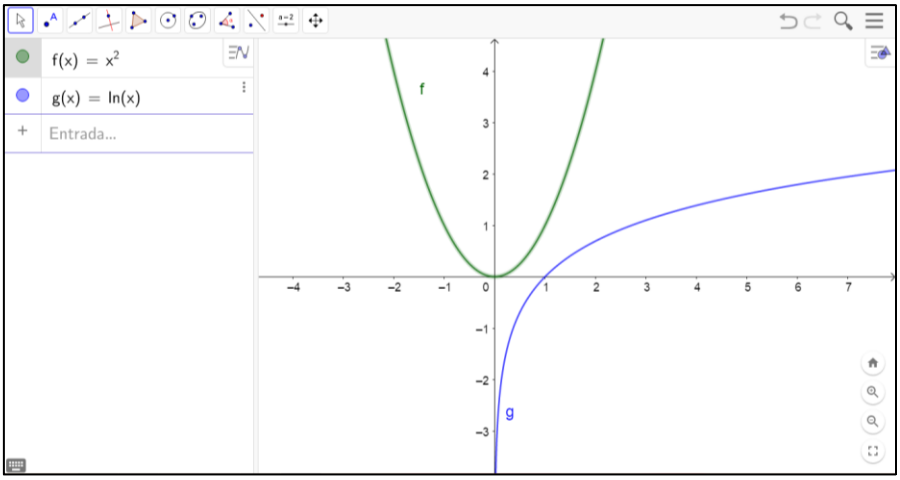
7. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

III. DESARROLLO

Con el fin de analizar las propiedades de la integral definida, graficaremos las funciones y sus integrales en un mismo plano con la ayuda del GeoGebra, para ello procederemos de la siguiente forma:

Paso 1: Abra un nuevo archivo en GeoGebra

Paso 2: En la *Barra de Entrada,* defina dos funciones cuya intersección de dominios sea no vacía.

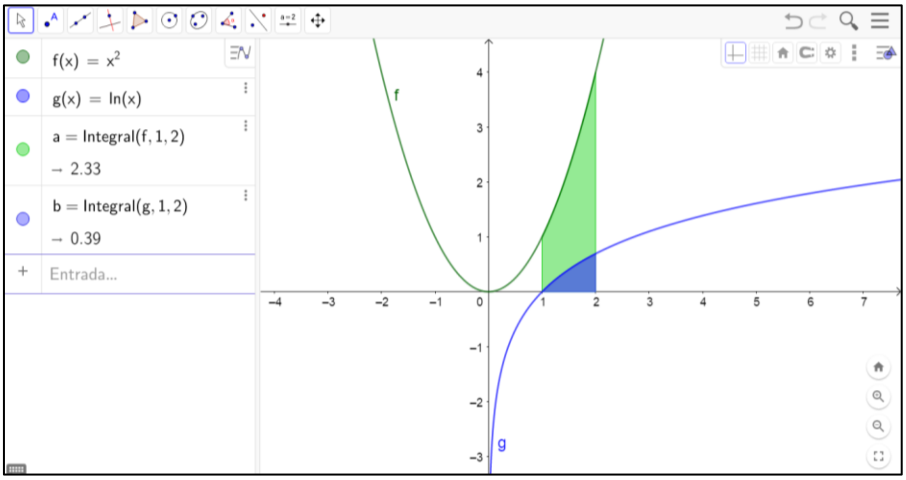


Paso 3: Calcule la integral definida de las funciones f y g sobre el intervalo $I = \left[1,2\right]$ que es tomado de la intersección de sus dominios.

En la *Barra de Entrada* escriba *Integral* y elija la opción que se muestra

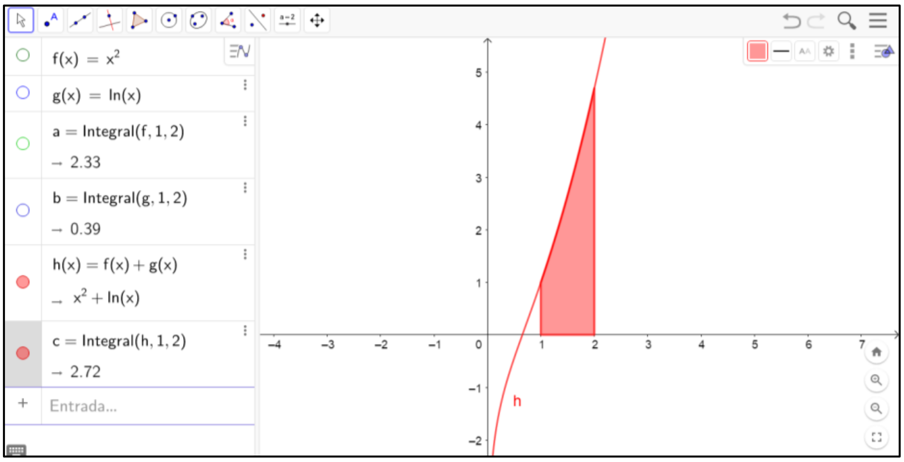
Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)

Reemplace los valores pedidos de la siguiente forma



Observe que ambas funciones son continuas e integrables sobre este intervalo.

Paso 4: Sobre el intervalo $I = \left[1,2\right]$ defina una función h como la suma de las funciones f y g luego calcule la integral definida de h sobre este intervalo.



Paso 6: Compare los resultados de las integrales de f, g y h

$$a = Integral(f,1,2) = 2{,}33, \quad b = Integral(g,1,2) = 0{,}39$$
$$c = Integral(h,1,2) = 2{,}72$$

A partir de esta observación realice una conclusión respecto a la integral definida de una suma de funciones.

Paso 7: Repita el proceso realizado anteriormente para analizar la integral definida sobre un intervalo $\left[a,b\right]$ en la resta, el producto y el cociente de dos funciones.

IV. ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) En las siguientes proposiciones utilizando el GeoGebra represente geométricamente la integral definida de las funciones dadas, luego analice y establezca si son verdaderas o falsas.

b) Mediante las propiedades de la integral definida analice estas proposiciones y contraste sus resultados con la parte (a)

1. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en $\left[a,b\right]$, entonces su suma es integrable en $\left[a,b\right]$, y la integral de su suma es la suma de las integrales de cada una de las funciones.
2. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en $\left[a,b\right]$, entonces su producto es integrable en $\left[a,b\right]$.
3. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en $\left[a,b\right]$, entonces su cociente es integrable en $\left[a,b\right]$.
4. Si $f(x)$ es una función integrable y no negativa en el intervalo $\left[a,b\right]$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
5. Utilizando argumentos geométricos calcule el área bajo la gráfica de la función $f(x) = 2x + 1$, en el intervalo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 09

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1. Carrera Profesional : Ingeniería de Sistemas
1.2. Asignatura : Cálculo Integral
1.3. Unidad de Aprendizaje : Segunda Unidad
1.4. Tiempo : 02 horas
1.5. Año y semestre académico : 2019-II
1.6. Ciclo de plan de estudio : III
1.7. Ambiente : Aula Nº 104
1.8. Docente : Lic. Miguel Ángel Rivas Mamani

II. ELEMENTOS DE COMPETENCIA

2.1. Analiza, abstrae y propone una solución a un problema de área de regiones planas utilizando las propiedades de forma adecuada.
2.2. Claridad y congruencia en la gráfica y redacción.

III. EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE Y CRITERIOS DE DESEMPEÑO

3.1. Participación activa de los estudiantes en el desarrollo de la sesión.
3.2. Presenta la solución de un ejercicio de área de manera clara y secuencial.
3.3. Propuesta de conjeturas sobre problemas y ejercicios nuevos.

IV. TITULO DE LA SESIÓN

Aplicación sobre áreas de figuras planas

V. PROCESO DIDÁCTICO

MOMENTOS	CONTENIDOS Y ESTRATEGIAS	TIEMPO
Iniciación	- El docente, plantea un ejercicio de área de una figura irregular sobre el plano cartesiano - Inicio de la clase mediante preguntas referentes al tema: ¿Es posible encontrar el área de cualquier región en el plano cartesiano? - Exploración de conocimientos previos.	10 min

Desarrollo	- Exposición teórica por medios audiovisuales: Presentación de los diferentes casos de cálculo de áreas mediante integrales definidas. - Exposición práctica mediante la pizarra por parte del docente en la solución de ejercicios referentes al tema tratado. - Estrategia didáctica: Afianzamiento del aprendizaje mediante la Guía Didáctica 09 y el GeoGebra	60 min
Culminación	- Síntesis: Aplicación sobre áreas de figuras planas. - Actividad práctica para ser desarrollada en forma grupal. - El docente complementará y de ser necesario corregirá los ejercicios que son resueltos por cada uno de los estudiantes.	50 min

VI. EVALUACION FORMATIVA

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
- Observación - Formulación de preguntas	Portafolio de ejercicios Pruebas orales y escritas

GUÍA DIDÁCTICA 09

APLICACIÓN SOBRE AREAS DE FIGURAS PLANAS

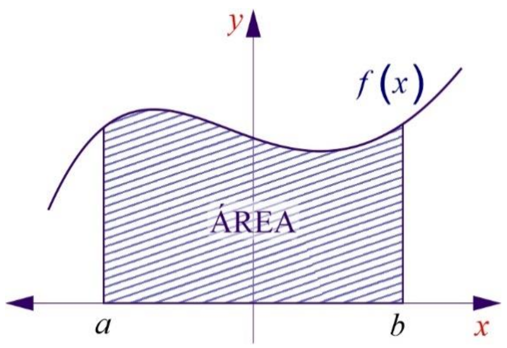
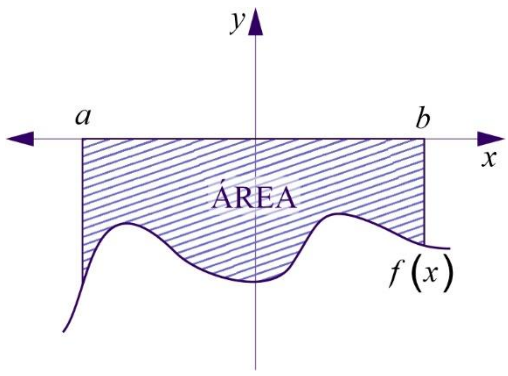
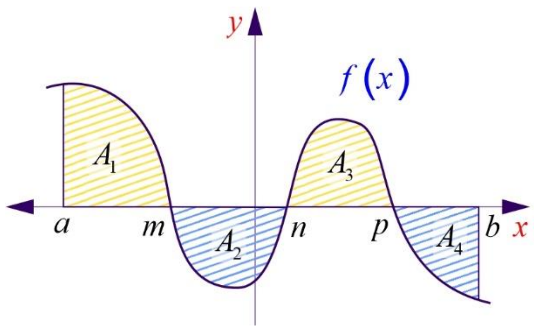
I. OBJETIVOS

Utilizar el GeoGebra de forma adecuada para graficar y determinar el área de una región limitada por una función continua.

Analizar y proponer una solución a los problemas del cálculo de áreas de regiones planas utilizando las propiedades de la integral definida.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

Para encontrar el área de figuras planas limitadas por funciones aplicaremos la integral definida donde se presentan los siguientes casos:

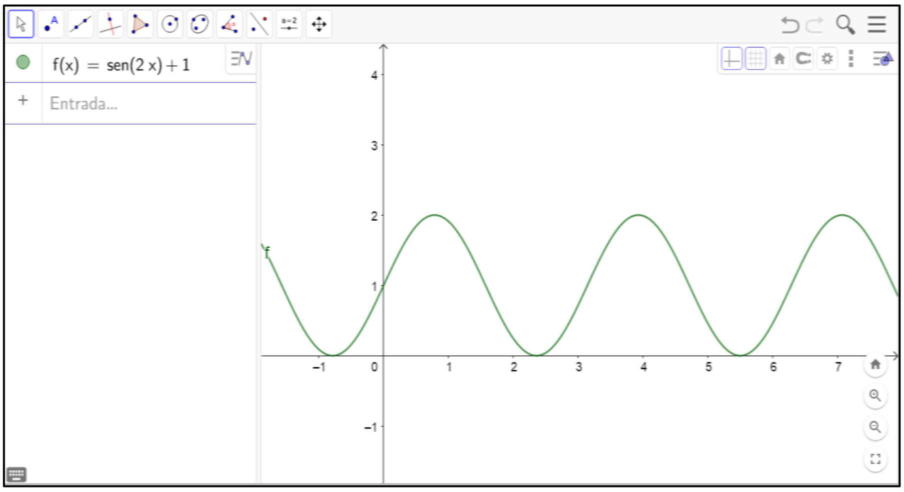
	Dada la función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$ $A = \int_a^b f(x)dx$
	Dada la función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $f(x) \leq 0,\ \forall x \in [a,b]$ $A = -\int_a^b f(x)dx$
	En forma general se tiene: $A = \int_a^m f(x)dx - \int_m^n f(x)dx +$ $+ \int_n^p f(x)dx - \int_p^b f(x)dx$

III. DESARROLLO

Para hallar el área bajo la gráfica de una función con el GeoGebra, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Abra un nuevo archivo en GeoGebra

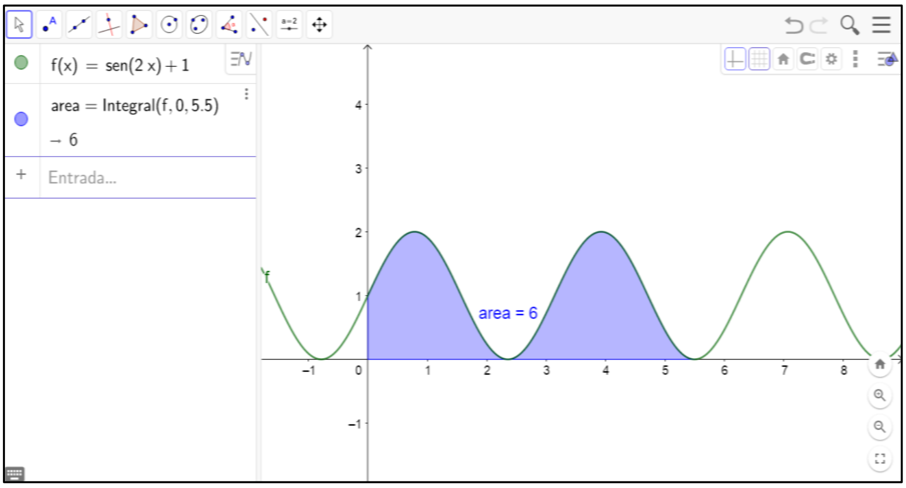
Paso 2: En la *Barra de Entrada*, defina la función dada.



Paso 3: Luego digite *Integral*, elija la opción que se muestra:

Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)

Paso 4: Reemplace los valores, con los datos del problema dado.



IV. ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) Utilizando el GeoGebra calcule el área bajo la gráfica de cada función en el intervalo dado.

b) Mediante las propiedades establecidas de la aplicación de la integral definida en el cálculo de áreas, compruebe sus resultados de forma algebraica.

1. $y = sen^3 x$, en en $[0,\pi]$
2. $y = x\sqrt{3x^2 + 4}$, en $[0,1]$
3. $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, en $[-1,1]$
4. $y = sen^2 x \cos x$, en $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$
5. $y = xe^{1-x^2}$, en $[0,2]$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$, en $[5,6]$
7. $f(x) = \cos^7 x \; sen^3 x$, en $[0,1]$
8. $f(x) = x\,sen\,x \cos x$, en $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$
9. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, en $[-1,1]$
10. $f(x) = x\,sen\,x + \cos x$, en $[-2,2]$

SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 10

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1.Carrera Profesional : Ingeniería de Sistemas
1.2.Asignatura : Cálculo Integral
1.3.Unidad de Aprendizaje : Segunda Unidad
1.4.Tiempo : 02 horas
1.5.Año y semestre académico : 2019-II
1.6.Ciclo de plan de estudio : III
1.7.Ambiente : Aula Nº 104
1.8.Docente : Lic. Miguel Ángel Rivas Mamani

II. ELEMENTOS DE COMPETENCIA

2.1.Analiza, abstrae y propone una solución a un problema de área de regiones planas utilizando las propiedades de forma adecuada.
2.2.Claridad y congruencia en la gráfica y redacción.

III. EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE Y CRITERIOS DE DESEMPEÑO

3.1.Participación activa de los estudiantes en el desarrollo de la sesión.
3.2.Presenta la solución de un ejercicio de área de manera clara y secuencial.
3.3.Propuesta de conjeturas sobre problemas y ejercicios nuevos.

IV. TITULO DE LA SESIÓN

Ejercicios diversos en áreas de figuras planas

V. PROCESO DIDÁCTICO

MOMENTOS	CONTENIDOS Y ESTRATEGIAS	TIEMPO
Iniciación	- El docente, plantea un ejercicio de área de una figura irregular sobre el plano cartesiano. - Inicio de la clase mediante preguntas referentes al tema: ¿Es posible encontrar el área de cualquier región en el plano Euclidiano? - Exploración de conocimientos previos.	10 min
Desarrollo	- Exposición teórica por medios audiovisuales: Presentación de los diferentes problemas en área de figuras planas con integrales definidas. - Exposición práctica mediante la pizarra por parte del docente en la solución de ejercicios referentes al tema tratado. - Estrategia didáctica: Afianzamiento del aprendizaje mediante la Guía Didáctica 10 y el GeoGebra.	60 min

Culminación	- Resumen: Diversos problemas referentes al cálculo de áreas con integrales definidas. - Actividad práctica para ser desarrollada en forma individual. - El docente complementará y de ser necesario corregirá los ejercicios que son resueltos por cada uno de los estudiantes.	50 min

VI. EVALUACION FORMATIVA

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
- Observación - Formulación de preguntas	Portafolio de ejercicios Pruebas orales y escritas

GUÍA DIDÁCTICA 10

AREAS DE ENTRE DOS FUNCIONES

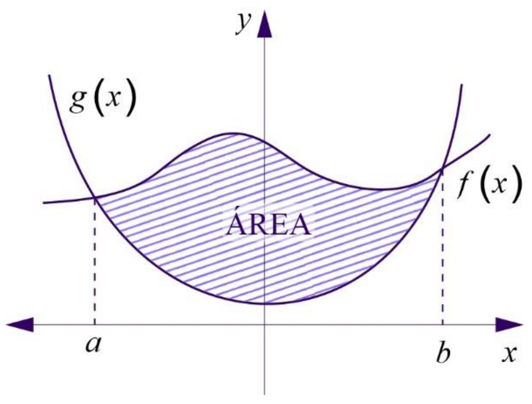
I. OBJETIVOS

Utilizar adecuadamente el GeoGebra para representar gráficamente y determinar el área de una región limitada por dos funciones continuas.

Analizar y proponer una solución a los problemas del cálculo de áreas de regiones planas utilizando las propiedades de la integral definida.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

Para encontrar el área entre dos funciones f y g, consideramos la siguiente propiedad, además es necesario tomar en cuenta que los puntos de intersección de ambas funciones en algunos casos se deben hallar algebraicamente.



Dadas las funciones

$$f,g:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$$

Si $f(x)\geq g(x),\ \forall x\in[a,b]$

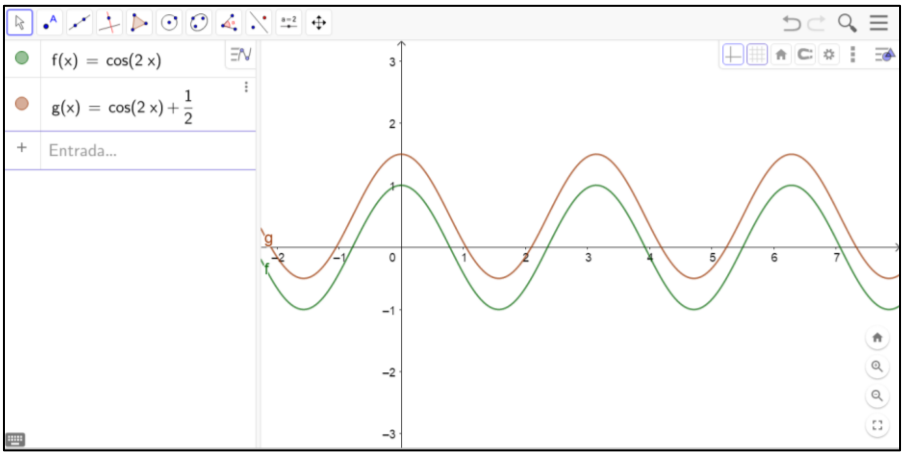
$$A=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

III. DESARROLLO

Para calcular el área entre las gráficas de dos funciones continuas en el GeoGebra, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

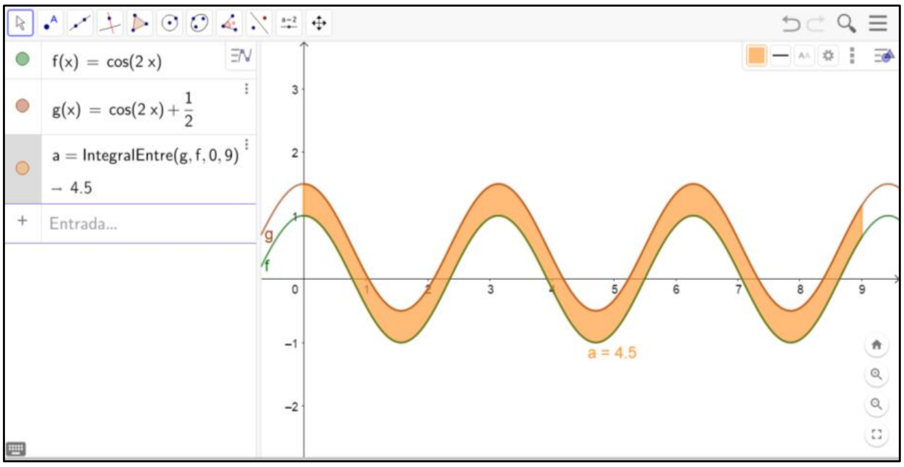
Paso 2: En la *Barra de Entrada*, defina las funciones dadas.



Paso 3: Ingrese el comando *IntegralEntre*, elija la opción que se muestra:

IntegralEntre(<Función>, <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>

Paso 4: Reemplace los valores con los datos del ejercicio planteado



encontrándose de esta manera el valor del área con precisión.

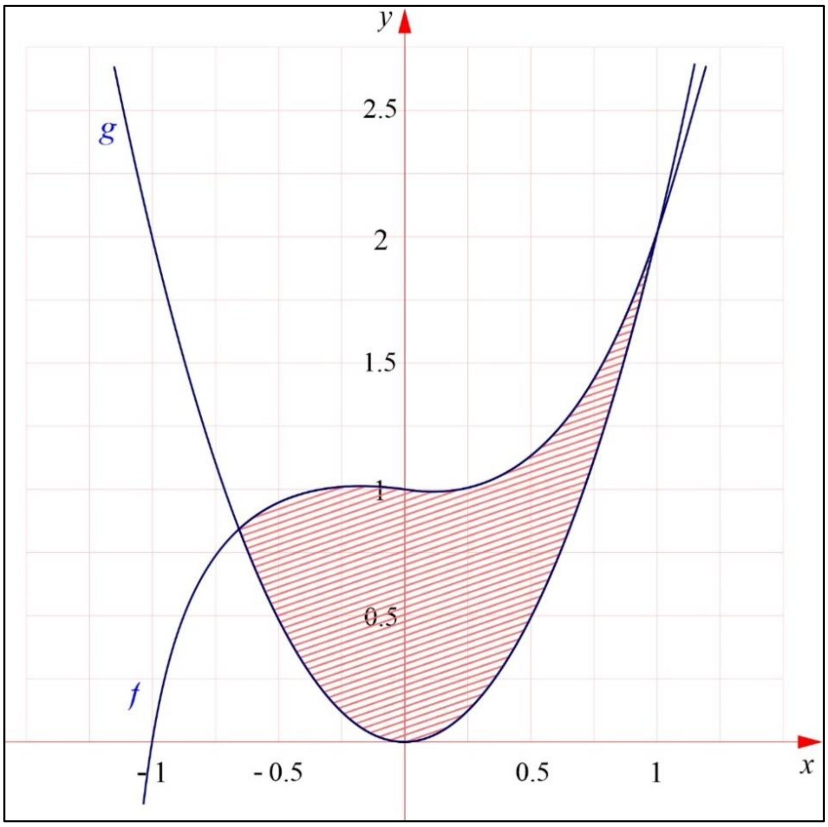
IV. ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) Utilizando el GeoGebra determine el área entre las gráficas de las siguientes funciones en el intervalo indicado.

b) Mediante la propiedad establecida de la aplicación de la integral definida en el cálculo de áreas, compruebe sus resultados de forma algebraica.

1. $f(x) = \sin x, \; g(x) = \cos x$ entre $x = \dfrac{\pi}{4}$ y $x = \dfrac{5\pi}{4}$
2. $y^2 = x + 4, \; y = \dfrac{1}{2}x - 2$
3. $y = 2x^2 + 17x + 20, \; y = -x^2 - x - 4$
4. $y = 2x^2 - 4x + 10, \; y = x^2 + 2x + 2$
5. $y = 3x^2 - 4x - 40, \; y = -2x^2 + x + 20$
6. $x = 2y^2 + 3y - 1, x = (y+1)^2$
7. $x = y^2 - 5y + 10, \; x = -y^2 + 6y - 5$
8. $y^2 = 2x, \; y = \dfrac{21}{8} - x$
9. $y^2 = \dfrac{3}{2}x, \; y = \dfrac{55}{24} - x$

10. Se desea encontrar el área de la siguiente región



donde $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = 2x^2$

Anexo 6. Constancia de trabajo

Universidad Nacional del Altiplano - Puno

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y SISTEMAS

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA DE SISTEMAS

CONSTANCIA

EL QUE SUSCRIBE DIRECTOR DE DEPARTAMENTO DE LA ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA DE SISTEMAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO DE PUNO.

HACE CONSTAR:

Que, el Lic.: MIGUEL ANGEL RIVAS MAMANI, identificado con D.N.I. Nº 71981622, Docente de Servicio de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas, durante el II semestre del año académico 2019 ha asumido la siguiente Carga Académica:

2019-II Asignatura	Sem.	Grupo	H.T.	H.P.	T.H
Calculo Integral	III	B	4	0	4

Asimismo, el mencionado Docente ha realizado su trabajo de investigación con el grupo A y la carga académica es la siguiente:

2019-II Asignatura	Sem.	Grupo	H.T.	H.P.	T.H
Calculo Integral	III	A	4	0	4

Se le expide la presente Constancia a solicitud del interesado para los fines que considere conveniente.

Puno, diciembre 02 de 2019.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - ESCUELA PROFESIONAL INGENIERÍA DE SISTEMAS

M.Sc. EDGAR HOLGUIN HOLGUIN
INGENIERO DE SISTEMAS
C.I.P. 58478

CIUDAD UNIVERSITARIA - PUNO - PERÚ