



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE CIENCIAS AGRARIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA TOPOGRÁFICA Y
AGRIMENSURA



MODELO ONDULATORIO LOCAL APLICANDO MODELOS
MATEMÁTICOS CON REDES NEURONALES ARTIFICIALES,
REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE EN LA URBANIZACIÓN
TOTORANI PUNO

TESIS

PRESENTADA POR:

Bach. JOEL NEXON VILCA ATENCIO

Bach. JHON WALTER CCOPA GUTIERREZ

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO TOPÓGRAFO Y AGRIMENSOR

PUNO – PERÚ

2022



DEDICATORIA

Dedico este trabajo de investigación a quienes me apoyaron y dieron aliento para completar el sueño de culminar mi carrera universitaria a pesar de las dificultades que se presentaron en el camino, con cariño y respeto a mis padres Walter Ccopa M. y Magdalena Gutiérrez C.

Jhon Walter.

A mis padres Leandro Vilca y Rosa Atencio; por ser mi fuerza, motivo, razón de mi vida quienes han sabido formarme con buenos valores para ser un profesional de excelencia.

A mi hermana Mary Luz Vilca por ser mi ejemplo, mi soporte y mi compañera de infancia quien siempre me apoya y me motiva para poder alcanzar mis metas

Joel Nexon.



AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional del Altiplano – Puno, Facultad de Ciencias Agrarias, Escuela Profesional de Ingeniería Topográfica y Agrimensura, por darnos la oportunidad de formarnos académicamente.

Un agradecimiento especial a todos los docentes de la Escuela Profesional de Ingeniería Topográfica y Agrimensura por sus experiencias y enseñanzas compartidas en las aulas.

A nuestro director/asesor de tesis, D.Sc. Nestor Quispe Condori, por sus sabios consejos y valiosas recomendaciones en la presente investigación.

Jhon & Joel.



ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA

AGRADECIMIENTOS

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

RESUMEN 13

ABSTRACT..... 14

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA..... 15

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA..... 16

1.2.1. Pregunta general 16

1.2.2. Preguntas específicas 16

1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN..... 17

1.3.1. Hipótesis general 17

1.3.2. Hipótesis específicas..... 17

1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO 17

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN 18

1.5.1. Objetivo general..... 18

1.5.2. Objetivos específicos 18

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. MARCO TEÓRICO 19



2.1.1. Sistema geodésico de referencia	19
2.1.2. Sistema de referencia vertical	27
2.1.3. Modelos geoidales	31
2.1.4. Sistema de posicionamiento gnss y aplicaciones.....	34
2.1.5. Ajuste de observaciones	43
2.1.6. Ecuación de regresión.....	51
2.1.7. Red neuronal artificial	55
2.1.8. Pruebas de comparación múltiple de medias.....	71

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. MATERIALES E INSTRUMENTOS	74
3.1.1. Ubicación geográfica	74
3.1.2. Ubicación UTM	74
3.1.3. Ubicación política.....	74
3.1.4. Vías de acceso.....	75
3.1.5. Equipos	75
3.1.6. Materiales	75
3.1.7. Software Empleado.....	76
3.2. PROCEDIMIENTOS	76
3.2.1. Reconocimiento y ubicación del área de estudio.....	76
3.2.2. Método de trabajo	77
3.2.3. Datos existentes	79
3.2.4. Georreferenciación y densificación de puntos de control y test	79
3.2.5. Nivelación geométrica de los puntos de control y test	82
3.2.6. Estimación de variables dependientes	84



3.2.7. Estimación de las variables independientes.....	86
3.3. PROCESAMIENTO DE DATOS PARA EL OBJETIVO 1.....	87
3.3.1. Ecuación de regresión lineal múltiple.....	87
3.3.2. Entrenamiento de la red neuronal artificial	88
3.3.3. Para el objetivo específico 1	98
3.3.4. Modelamiento 2D y 3D de las ondulaciones geoidales predecidas.....	99
CAPÍTULO IV	
RESULTADOS Y DISCUSIÓN	
4.1. TIPO DE INVESTIGACION Y ESTADÍSTICA	102
4.1.1. Hipótesis estadística.....	102
4.1.2. Análisis estadístico	102
4.1.3. Análisis de muestras	103
4.1.4. Variables independientes	103
4.1.5. Variables dependientes	103
4.2. ANALISIS ESTADISTICO.....	104
4.2.1. Para objetivos específico 2	104
4.2.2. Estadística para regresión lineal múltiple	104
4.2.3. Estadística para red neuronal artificial	108
V. CONCLUSIONES	112
VI. RECOMENDACIONES	113
VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	114
ANEXOS.....	118

Área : Ciencias Naturales.

Tema : Topografía, geodesia, cartografía y catastro.

Fecha de sustentación: 09 de febrero del 2022.



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Proceso de nivelación.....	22
Figura 2. Nivelación trigonométrica.....	23
Figura 3. Nivelación geométrica.....	24
Figura 4. Forma tridimensional del geode.....	25
Figura 5. Elipsoide que representa la forma geométrica de la tierra	26
Figura 6. Red de nivelación de alta precisión (NAP) realizada por el IGN	27
Figura 7. Modelo del geode, modificado de heiskanen y moritz (1967).....	28
Figura 8. Comparación de elipsoide y geode	30
Figura 9. Interpolación de ondulaciones geoidales.....	31
Figura 10. Ondulaciones geoidales EGM96 toman todo el mundo en base de una grilla de 15'x15'	32
Figura 11. Ondulación geoidal EGM2008.....	33
Figura 12. Observación método estático	38
Figura 13. Campana de GAUSS desviación estándar	49
Figura 14. Modelo fisiológico de una neurona.....	56
Figura 15. Estructura de una red neuronal artificial	60
Figura 16. Regiones de decisión de una red neuronal de 1, 2 y 3 capas.....	61
Figura 17. Estructura general de una neurona del tipo perceptrón	66
Figura 18. Función de transferencia de una red neuronal.....	67
Figura 19. Arquitectura unidireccional con tres capas de neuronas: una capa de entrada, una capa oculta y una capa de salida	70
Figura 20. Ubicación del área de estudio Google Earth	77
Figura 21. Distribución de puntos de control y test Google Earth	78
Figura 22. Postproceso de línea base de los puntos de control y test	80



Figura 23. Ajuste de la red de nivelación	82
Figura 24. Arquitectura de la red neuronal artificial	91
Figura 25. Importación de datos de entrada, test y malla ondulatoria.....	92
Figura 26. Neural Network/Data Manager, datos importados.....	92
Figura 27. Configuración de la red neuronal para el entrenamiento	93
Figura 28. Configuración grafica de la red neuronal artificial	93
Figura 29. Pesos sinápticos pre entrenamiento.....	94
Figura 30. Parámetros de entrenamiento de la red neuronal artificial.....	95
Figura 31. Datos asignados para la red neuronal artificial	95
Figura 32. Reporte de aprendizaje de la red neuronal artificial.....	96
Figura 33. Generación de la malla de coordenadas Norte y Este	98
Figura 34. Plano de ondulaciones geoidales predecidas por el método de regresión lineal múltiple	99
Figura 35. Modelo 3D de las ondulaciones geoidales predecidas por el método de regresión lineal múltiple	100
Figura 36. Malla 3D, de las ondulaciones geoidales predecidas por el método de regresión lineal múltiple	100
Figura 37. Plano de ondulaciones geoidales predecidas por el método de redes neuronales artificiales.....	100
Figura 38. Modelo 3D de las ondulaciones geoidales predecidas por el método de redes neuronales artificiales	101
Figura 39. Malla 3D, de las ondulaciones geoidales predecidas por el método de redes neuronales artificiales	101
Figura 40 . Región de aceptación t Student para regresión lineal múltiple	106
Figura 41. Comparación de residuos del método de regresión lineal múltiple	107



Figura 42. Región de aceptación t Student para la red neuronal artificial..... 110

Figura 43. Comparación de residuos del método de redes neuronales artificiales 111



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Parámetros para el posicionamiento geodésico estático relativo con receptores del sistema satelital de navegación global	42
Tabla 2. Funciones de activación	68
Tabla 3. Ubicación Geográfica	74
Tabla 4. Ubicación UTM	74
Tabla 5. Vías de acceso al lugar de investigación	75
Tabla 6. Equipos topográficos	75
Tabla 7. Materiales.....	75
Tabla 8. Software	76
Tabla 9. Ubicación del Punto SAT-002.....	79
Tabla 10. Reporte de post proceso de las líneas bases.....	80
Tabla 11. Reporte de coordenadas UTM y alturas geoidales	81
Tabla 12. Reporte de observaciones y residuos ajustados	83
Tabla 13. Reporte de alturas ajustadas y propagación de errores	83
Tabla 14. Reporte de alturas niveladas ajustadas (H)	84
Tabla 15. Cálculo de ondulación geoidal.....	85
Tabla 16. Datos para las variables independientes	86
Tabla 17. Promedio de las variables independientes	86
Tabla 18. Parámetros estimados de la regresión lineal múltiple.....	87
Tabla 19. Ondulaciones geoidales estimadas y residuos	88
Tabla 20. Ondulaciones geoidales predecidas de los puntos test y residuos	88
Tabla 21. Subconjunto para el entrenamiento RNA	89
Tabla 22. Subconjunto para la validación de puntos test.....	89
Tabla 23. Datos para la capa de entrada	90



Tabla 24. Datos para la capa de salida	90
Tabla 25. Pesos sinápticos pre entrenamiento	96
Tabla 26. Pesos sinápticos post entrenamiento.....	97
Tabla 27. Ondulaciones geoidales predecidas de los puntos test por el método de RNA	97
Tabla 28. Cuadro de comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de los métodos GNSS/ nivelación y regresión lineal múltiple.....	104
Tabla 29. Estadístico del método de regresión lineal múltiple	105
Tabla 30. Prueba t para igualdad de medias del método de regresión lineal múltiple.	106
Tabla 31. Cuadro de comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de los métodos GNSS/ nivelación y redes neuronales artificiales	108
Tabla 32. Estadístico del método de redes neuronales artificiales.....	109
Tabla 33. Prueba t para igualdad de medias del método de RNA	110



ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

- DOT** : Dynamic Ocean Topography (Topografía oceánica dinámica).
- EGM 2008** : Earth Gravitational Model 2008 (Modelo gravitacional de la Tierra 2008).
- GNSS** : Global Navigation Satellite System (Sistema Satelital de Navegación Global).
- GPS** : Navigation System with Time and Ranking (Sistema de Posicionamiento global).
- GLONASS** : Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya (Satélite de navegación global).
- IGN** : Instituto geográfico Nacional.
- NAP** : Red de Nivelación de Alta Precisión.
- NASA** : National Aeronautics and Space Administration (Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio).
- PPK** : Post Processed Kinematics (Cinemático Post Procesado).
- RTK** : Real Time Kinematic (Cinemático en Tiempo Real).
- RNA** : Red Neuronal Artificial.
- UTM** : Universal Transverse Mercator (sistema de coordenadas universal transversal de Mercator)
- WGS-84** : Sistema Geodésico Mundial de 1984.



RESUMEN

La presente investigación titulada “Modelo ondulatorio local aplicando modelos matemáticos con redes neuronales artificiales, regresión lineal múltiple en la Urbanización Totorani Puno”, Distrito, Provincia y Departamento de Puno. El objetivo general fue, determinar el modelo geoidal local aplicando modelos matemáticos con redes neuronales artificiales, regresión lineal múltiple (GNSS/nivelación) y los objetivos específicos fueron: determinar la malla ondulatoria mediante los modelos matemáticos y comparar las aproximaciones ondulatorias obtenidas mediante los mismos con respecto a las altitudes conocidas respectivamente. El método utilizado para generar la malla ondulatoria es a través de las predicciones empleando coordenadas Este y Norte. El tratamiento estadístico de la presente investigación fue t Student, el resultado de la prueba estadística para la regresión lineal múltiple, se obtuvo un valor de $t = -0.428$, quedando menor al valor crítico $t_{0.05} = 2.31$, por lo que se acepta la hipótesis nula, de igual forma para las redes neuronales artificiales, se obtuvo un valor de $t = -0.267$, quedando menor al valor crítico $t_{0.05} = 2.31$, por lo que acepta la hipótesis nula. En conclusión, del análisis comparativo estadístico, concluye que el modelo matemático de regresión lineal múltiple es el más próximo a las alturas obtenidas por método GNNS/nivelación, que alcanza una precisión de 0.012m y las redes neuronales artificiales llega a una precisión de 0.020m.

Palabras Clave: GNSS, modelo geoidal, nivelación, red neuronal artificial, regresión.



ABSTRACT

The present investigation entitled "Local wave model applying mathematical models with artificial neural networks, multiple linear regression in the Totorani Puno Urbanization", District, Province and Department of Puno. The general objective is to determine the local geoid model by applying mathematical models with artificial neural networks, multiple linear regression (GNSS/levelling) and the specific objectives: to determine the wave mesh through mathematical models and compare the wave approximations obtained through them with respect to at known altitudes respectively. The method used to generate the wave mesh is through predictions using East and North coordinates. The statistical treatment of the present investigation was t Student, The result of the statistical test for multiple linear regression, a value of $t=0.428$ was obtained, being less than the critical value $t_{0.05} = 2.31$, for which the hypothesis is accepted null, in the same way for artificial neural networks, a value of $t=0.267$ was obtained, being less than the critical value $t_{0.05} = 2.31$, for which the null hypothesis is accepted. In conclusion, from the statistical comparative analysis, it is concluded that the multiple linear regression mathematical model is the closest to the heights obtained by the GNNS/levelling method, which reaches a precision of 0.012m and the artificial neural networks reach a precision of 0.020m.

Keywords: GNSS, geoid model, leveling, artificial neural network, regression.



CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Dentro del estudio de las ciencias de la tierra, la determinación de una superficie de referencia para las alturas ha sido siempre un tema de gran interés, en ese contexto se ha desarrollado múltiples técnicas y metodologías para establecer dichas superficies de referencia sobre la cual es posible plasmar las mediciones de altura a nivel local.

De forma tradicional las alturas y desniveles, se ha medido considerando como superficie de referencia el nivel medio del mar (nmm), es así que cada país se ha valido de los registros de uno o varios mareógrafos localizados en sus costas para la determinación de referencia altitudinal con valor “cero” o punto de partida de la red de nivelación.

La realización de la red de nivelación demanda gran esfuerzo, debido a las características metodológicas para su establecimiento y su uso en la práctica, además presenta ciertos inconvenientes entre los cuales se puede señalar que proporciona únicamente información discreta de variación de altura con respecto al nivel medio del mar. Se puede advertir que no existe compatibilidad entre dos o más redes de nivelación que hayan sido generados partiendo de distintos mareógrafos.

Por los motivos expuestos, las limitaciones de las redes de nivelación clásica, en la actualidad son superadas por las investigaciones que están dirigidas a obtener una superficie de referencia de alturas que tengan características globales, es decir, que la información que proporciona las diferentes redes altimétricas, pueda ser usada en forma



conjunta, con el objetivo de realizar estudios y trabajos a nivel local, regional y nacional, sin que exista discrepancia entre los datos recabados.

Por tanto, es necesario generar modelos matemáticos de redes neuronales artificiales, regresión lineal múltiple, en base a la información obtenida in situ, de una red altimétrica (GNSS/nivelación).

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1. Pregunta general

¿Se puede determinar el modelo ondulatorio local aplicando modelos matemáticos de redes neuronales artificiales, regresión lineal múltiple (GNSS/nivelación) en la Urbanización Totorani Puno?

1.2.2. Preguntas específicas

- ¿Al realizar los cálculos matemáticos de redes neuronales artificiales, regresión lineal múltiple será posible determinar la malla ondulatoria geoidal local?
- ¿Las altitudes conocidas se aproximan a las ondulaciones obtenidas mediante cálculos matemáticos de redes neuronales artificiales, regresión lineal múltiple?



1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1. Hipótesis general

Sera posible obtener el modelo ondulatorio local aplicando modelos matemáticos de redes neuronales artificiales, regresión lineal múltiple (GNSS/nivelación) en la Urbanización Totorani Puno.

1.3.2. Hipótesis específicas

- Es posible realizar los cálculos matemáticos de redes neuronales artificiales, regresión lineal múltiple para obtener la malla ondulatoria geoidal local.
- Existe diferencias al realizar los cálculos mediante los modelos matemáticos de redes neuronales artificiales, regresión lineal múltiple respecto a las alturas conocidas.

1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

Los proyectos de ingeniería contemporánea requieren para su elaboración y ejecución, controles básicos de planimetría y altimetría, y estos datos se obtienen empleando equipos satelitales GNSS.

Los reglamentos y normas técnicas actuales exigen precisiones según la magnitud del proyecto, en las diferentes especialidades de la ingeniería, como saneamiento básico, obras lineales, catastro, minería y otros.

Existe en la actualidad el modelo geoidal global EGM-2008, desarrollado por la Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio (NASA), el cual difiere de la precisión en los trabajos de ingeniería, debido a que fue desarrollado su aplicación a nivel global, mediante el método geopotencial, es decir, mediante las nivelaciones



gravimétricas que aproximadamente están separadas a 1.8km, dentro de esta distancia o separación existen accidentes geográficos, que modifican los resultados geoidales, es decir que no fue desarrollado con particularidad para el territorio Peruano.

Por lo fundamentado, se presenta la investigación titulado “MODELO ONDULATORIO LOCAL APLICANDO MODELOS MATEMÁTICOS CON REDES NEURONALES ARTIFICIALES, REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE EN LA URBANIZACIÓN TOTORANI PUNO”, que tiene importancia dentro del campo de ingeniería, en instituciones públicas y privadas, porque se ha obtenido el grado de precisión del nuevo modelo geoidal local, con tolerancias permitidas, además se ajusta a la orografía de la zona de estudio, que previamente se realizó la toma de datos in situ con un receptor GNSS y nivelación geométrica.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1. Objetivo general

Determinar el modelo ondulatorio local aplicando modelos matemáticos con redes neuronales artificiales, regresión lineal múltiple (GNSS/nivelación) en la urbanización Totorani Puno.

1.5.2. Objetivos específicos

- Determinar la malla ondulatoria mediante los modelos matemáticos redes neuronales artificiales, regresión lineal múltiple.
- Comparar las aproximaciones ondulatorias obtenidas mediante los modelos matemáticos con respecto a las alturas conocidas.



CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. MARCO TEÓRICO

2.1.1. Sistema geodésico de referencia

2.1.1.1. Forma de la tierra

La figura "natural" de la Tierra, excluyendo la topografía o forma externa, se asemeja a la definición de geoide, definida como una superficie de nivel equipotencial del campo gravitatorio terrestre.

Esta superficie equipotencial o de nivel materializado por los océanos cuando se prescinde del efecto perturbador de las mareas (casi la superficie del nivel medio de los mares) es la superficie de referencia para la altitud (IGN., 2016).

2.1.1.2. Geodesia

La Geodesia es la ciencia que estudia la forma y dimensiones de la Tierra. Esto incluye la determinación del campo gravitatorio externo de la tierra y la superficie del fondo oceánico. Dentro de esta definición, se incluye también la orientación y posición de la tierra en el espacio.

Una parte fundamental de la geodesia es la determinación de la posición de puntos sobre la superficie terrestre mediante coordenadas (latitud, longitud, altura). La materialización de estos puntos sobre el terreno constituye las redes geodésicas, conformadas por una serie de puntos (vértices geodésicos o también señales de



nivelación), con coordenadas que configuran la base de la cartografía de un país, por lo que también se dice que es "la infraestructura de las infraestructuras".

Los fundamentos físicos y matemáticos necesarios para su obtención, sitúan a la geodesia como una ciencia básica para otras disciplinas, como la topografía, fotogrametría, cartografía, ingeniería civil, navegación, sistemas de información geográfica, sin olvidar otros tipos de fines como los militares (IGN., 2016).

Con el desarrollo tecnológico, la geodesia ha experimentado grandes avances gracias a las innovaciones en tecnología espacial, particularmente en el desarrollo satelital, como es el caso de la aparición de los Sistemas de Navegación Global por Satélites (GNSS) y el Sistema de Posicionamiento Global (GPS), lo que permite determinar la posición de cualquier punto sobre la superficie terrestre.

Nuevos campos de acción pasaran a formar parte del objeto de la Geodesia, pudiéndose citar entre otros: la determinación de los parámetros definidores de los campos de gravedad, así mismo como las variaciones temporales de las grandes medidas, visto que considerando la rigidez del planeta las deformaciones provenientes de la atracción de fuerzas externas hacen las coordenadas de un punto variables con el tiempo.

Innovaciones como estas, representan importantes avances para los sistemas de referencia geodésicos en la obtención de posiciones planimétricas y altimétricas de gran precisión (Kapquequi, 2012).

2.1.1.2.1. Clasificación de la geodesia

Desde el punto de vista del objetivo de estudio, se puede establecer una división de la geodesia en diferentes especialidades, aunque cualquier trabajo geodésico requiere la intervención de varias de estas subdivisiones (IGN., 2016):



Geodesia Geométrica. Es aquella rama de la Geodesia en la que los datos de observación están constituidos por las medidas de ángulos y distancias en la superficie terrestre. Estos datos son referidos a un elipsoide de referencia para construir las triangulaciones en el caso de la Geodesia clásica bidimensional o bien estudiados en coordenadas cartesianas en el caso de la Geodesia tridimensional.

También son necesarias las determinaciones de altitudes de puntos sobre una superficie de cota cero. El conocimiento de la geometría del elipsoide de revolución es fundamental (Kapquequi, 2012).

Geodesia Astronómica. Es aquella parte de la Geodesia que con métodos y observaciones astronómicas trata fundamentalmente de obtener la dirección de la vertical; determina pues, coordenadas astronómicas, latitud, longitud (o el tiempo) y acimuts astronómicos. Con los datos obtenidos trata de determinar el geoide como figura de la Tierra por el método de nivelación astro-geodésica, y efectuar la reorientación de redes geodésicas en la compensación con puntos Laplace. Las determinaciones astronómicas, tanto su teoría como sus métodos son a veces incluidas dentro de la astronomía de posición.

Los métodos de pasos meridianos y de alturas iguales son los más comúnmente empleados (Kapquequi, 2012).

Geodesia Satelital. Esta nueva rama de la Geodesia, trata principalmente con satélites artificiales cuya observación resulta más cómoda y precisa que la tradicional. Aplica técnicas tridimensionales y resuelve todos los problemas de la Geodesia tanto geométricos como dinámicos. En los cálculos emplea frecuentemente técnicas de colocación por mínimos cuadrados (Kapquequi, 2012).

2.1.1.3. Nivelación

Como se muestra en la Figura 1, la nivelación es el proceso a través de métodos u operaciones de medición de elevaciones o altitudes de los diversos puntos del terreno referidos sobre una superficie de la tierra considerada como referencia considerada como cero y corresponde al nivel medio del mar. En varios puntos del territorio se establecen puntos de elevación referidas a dicha superficie con aproximación hasta el milímetro, y la determinación y localización de cada una de las elevaciones están a cargo del Instituto Geográfico Nacional.

Los trabajos alimétricos, o nivelaciones de terrenos, tienen por objeto determinar la altura de sus puntos sobre una superficie de nivel, que se toma como superficie de comparación y se denominan cotas. La cota de un punto está referida al nivel del mar (altitud), denominado el Marco de Referencia Vertical. En todo trabajo ha de partirse de un punto de origen de altitud conocida o de una cota arbitraria (IGN, 2016).



Figura 1. Proceso de nivelación
Fuente: Elaboración propia.

2.1.1.3.1. Métodos para determinar diferencias de elevación

(Kapquequi, 2012) menciona, la determinación de las diferencias de nivel se las puede realizar por tres métodos diferentes, dando origen respectivamente a tres tipos de nivelación:

Método trigonométrico o indirecto → Nivelación Trigonométrica

Método geométrico o directo → Nivelación Geométrica o Diferencial

Método barométrico → Nivelación Barométrica

Nivelación Trigonométrica. Mediante este sistema se determinan los desniveles a través de la medición de ángulos verticales y las distancias entre los puntos a nivelar. Se puede determinar con una estación total y un bastón con prisma, como se aprecia en la Figura 2.

Este tipo de nivelación se utiliza principalmente en terrenos con pendientes muy pronunciadas (IGN, 2016).

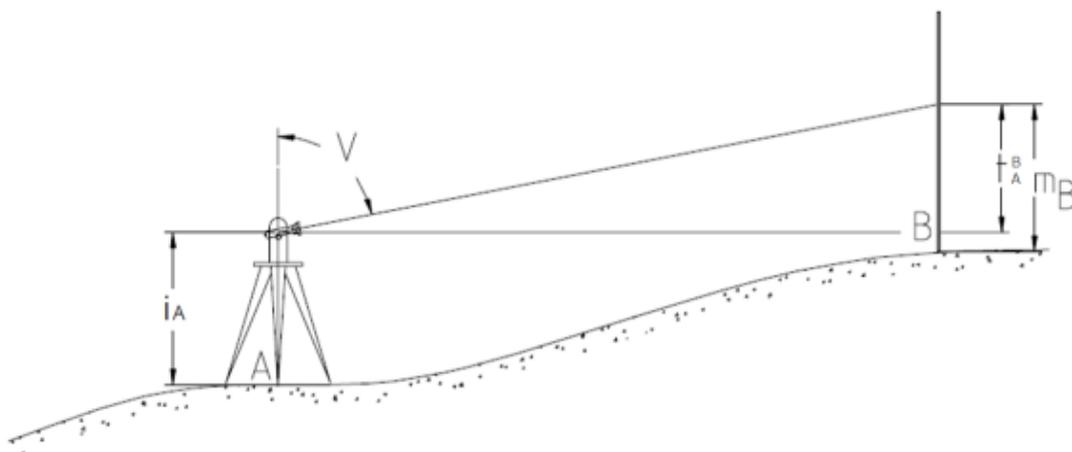


Figura 2. Nivelación trigonométrica
Fuente: (Kapquequi, 2012).

Del gráfico se puede deducir fácilmente la expresión por la que se podrá obtener el desnivel, y que será igual a:

$$\Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B$$

Nivelación Geométrica. La nivelación geométrica consiste en medir diferencias de altitud entre dos puntos separados unos pocos metros por medio de la diferencia de lecturas directas hechas sobre dos reglas graduadas (miras) situadas en ellos, con un instrumento perfectamente horizontal situado en el punto medio (IGN, 2016).

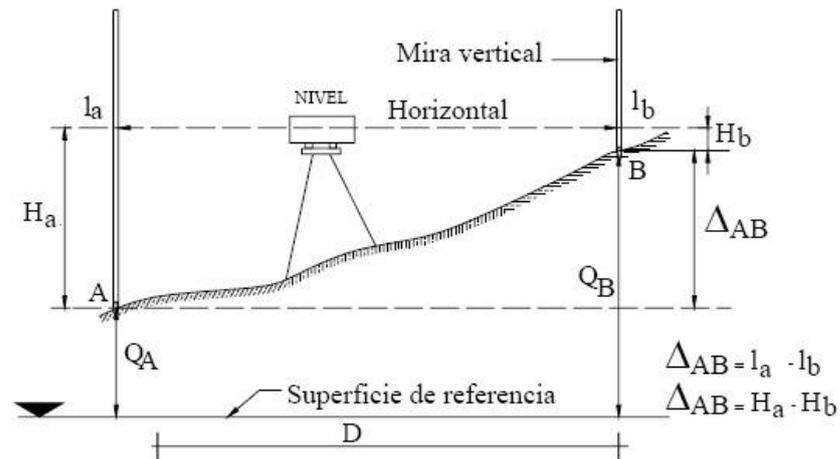


Figura 3. Nivelación geométrica
Fuente: (Sergio, 2015).

En la Figura 3. Se puede observar una nivelación geométrica simple, el desnivel entre los dos puntos se puede estimar con una sola estación, es decir, sin desplazar el nivel óptico de su lugar, mediante una diferencia de cota.

$$\Delta_{AB} = l_a - l_b = H_a - H_b$$

2.1.1.4. Geoide

El Geoide es un modelo físico que busca representar la verdadera forma de la tierra calculándola como una superficie de potencial de gravedad constante, es irregular debido a los efectos de variación en la densidad y distribución de masas de la Tierra como se aprecia en la Figura 4, obedece de manera directa a los cambios en el campo de gravedad. Esta superficie irregular se utiliza convenientemente como la referencia para determinar la altura o elevación del terreno. La distancia vertical entre un punto cualquiera sobre el terreno y el geoide se denomina altura ortométrica y puede ser entendida como altura sobre el nivel medio del mar (H) en este sentido el geoide es parte fundamental de sistema de alturas (IGN, 2016).

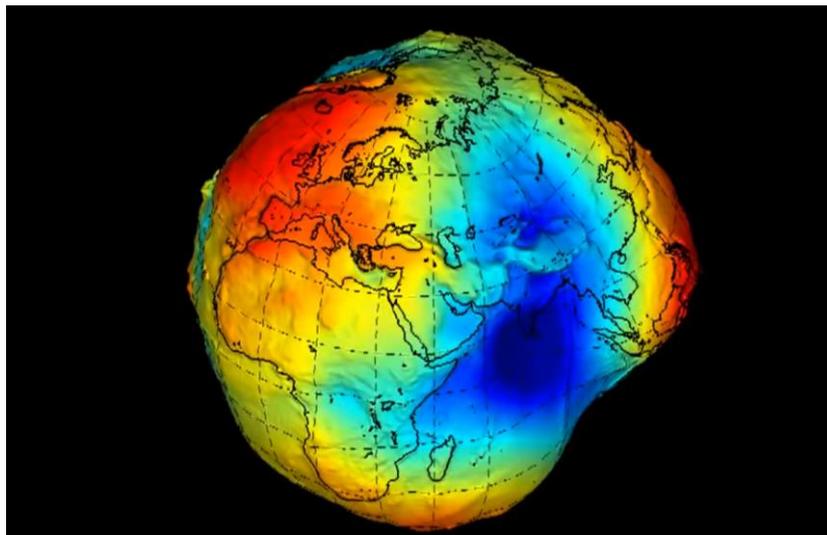


Figura 4. Forma tridimensional del geoide
Fuente: (Vicente, 2018).

El geoide es representado mediante la separación que mantiene el mismo con respecto a un elipsoide de referencia, esta separación se conoce con el nombre de ondulación geoidal, la cual puede tomar valores positivos o negativos. Sus magnitudes varían entre -2 m y +2 m a nivel global (IGN, 2016).

2.1.1.5. Elipsoide de revolución

(IGN, 2016) menciona que, la forma de la tierra se asemeja a un globo esférico comprimido en el eje polar y ligeramente abultado en el ecuador, a este cuerpo se le conoce como elipsoide achatado o elipsoide de revolución como se presenta en la Figura 5, el cual es muy empleado en los cálculos matemáticos que se aplican en Geodesia.

Un elipsoide de revolución está definido por los parámetros siguientes:

- Semi Eje Mayor (a)
- Semi Eje Menor (b)
- Achatamiento (f)
- Excentricidad (E)

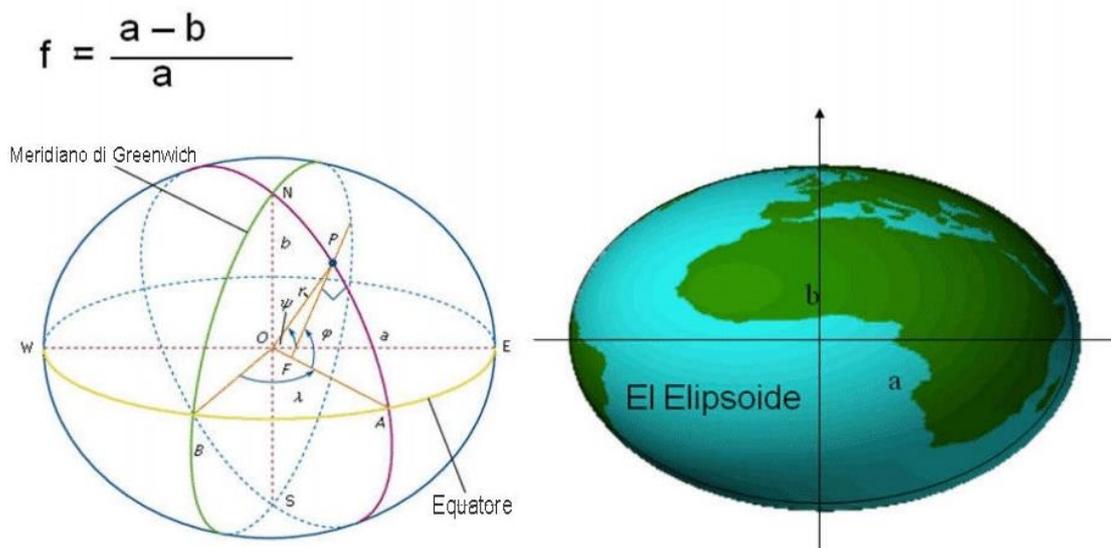


Figura 5. Elipsoide que representa la forma geométrica de la tierra
Fuente: (IGN, Norma Técnica Geodésica, 2016).

2.1.2. Sistema de referencia vertical

2.1.2.1. Alturas geométricas

Estas son obtenidas a través de nivelación geométrica, las diferencias de nivel varían según el campo de gravedad del recorrido de la nivelación. Debido a la forma elipsoidal de la tierra y su distribución irregular de las masas en su interior, las superficies equipotenciales en puntos diferentes no son iguales debido a la distribución de masas en el interior de la Tierra, lo que explica densidades diferentes, generando diferentes campos de gravedad (Garafulic, 2017).

El Perú tiene una red de nivelación de alta precisión como se muestra en la Figura 6, realizada en distintas campañas por el Instituto Geográfico Nacional.



Figura 6. Red de nivelación de alta precisión (NAP) realizada por el IGN
Fuente: (IGN, Norma Técnica Geodésica, 2016).

2.1.2.2. Alturas elipsoidales

Las alturas elipsoidales (h) se muestra en la Figura 7, representan la separación entre la superficie topográfica terrestre y el elipsoide. Dicha separación se calcula sobre la línea perpendicular a este último. Las alturas elipsoidales son obtenidas a partir de las coordenadas geocéntricas cartesianas (X, Y, Z) definidas sobre un elipsoide de referencia (por ejemplo el modelo Geodetic Reference System 1980, GRS80, o el World Geodetic System 1984, WGS84, los cuales, en la práctica, son iguales), y determinadas a partir del posicionamiento satelital de los puntos de interés (IGN, 2016).

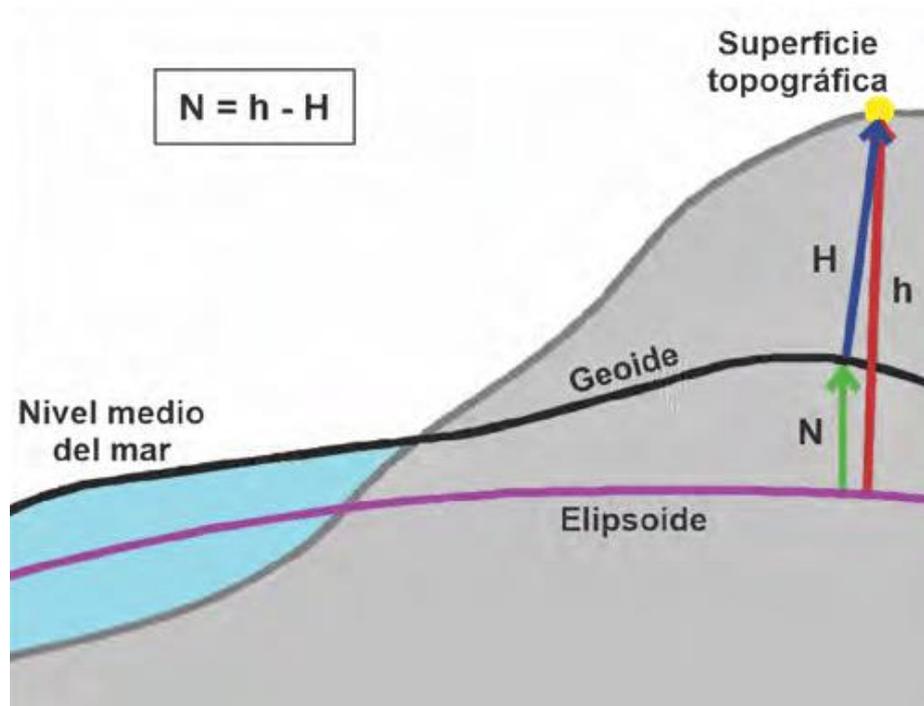


Figura 7. Modelo del geoide, modificado de heiskanen y moritz (1967)
Fuente: (Cappellotto, Acosta, Pérez, Orgenia, & Gomez, 2020).

2.1.2.3. Altura ortométrica

Esta es la altura que existe entre la superficie topográfica y el geoide siendo perpendicular a este último se designa con la letra H , como se muestra en la Figura 7.



Pero lo que será necesario conocer la gravedad verdadera entre el punto evaluado y el geoide.

La gravedad medida en la superficie topográfica es la gravedad real y la verdadera se encuentra referida al geoide, es aquí donde surge el inconveniente de cómo medirla siguiendo la vertical en el punto observado. Existen algunos modelos de cómo poder calcularla a través de modelos geofísicos y aplicar reducciones para trasladar la gravedad al geoide (Garafulic, 2017).

Las alturas ortométricas se pueden calcular a partir de las elipsoidales:

$$H = h - N$$

Donde:

H = Altura ortométrica.

h = Alturas elipsoidal.

N = Ondulaciones geoidal.

2.1.2.4. Ondulación geoidal

La diferencia que existe entre el geoide y el elipsoide se conoce como ondulación del geoide (N), representado en la Figura 8. Gracias a esta variante se puede describir el irregular comportamiento del geoide. Conociendo la ondulación geoidal se puede calcular la altura ortométrica o altura sobre el (nmm) de algún punto de observación en particular todo esto a partir del valor de la altura sobre el elipsoide referida por un equipo GPS, esta situación se expresa mediante la siguiente fórmula (Garafulic, 2017).

$$\Delta H = \Delta h - \Delta N$$

Donde:

ΔH = Desnivel ortométrico.

Δh = Diferencia de alturas elipsoidales.

ΔN = Diferencia de ondulaciones geoidales.

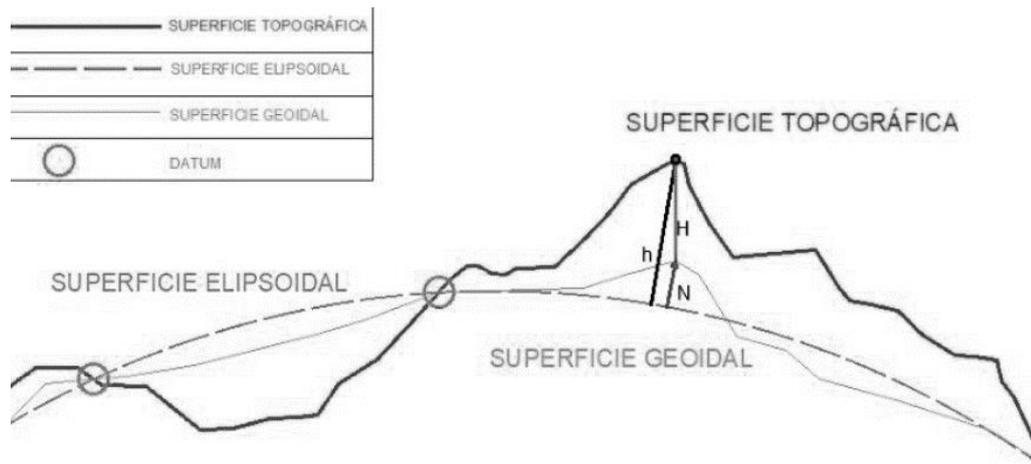


Figura 8. Comparación de elipsoide y geoide
Fuente: (Acero & Serruto, 2018).

2.1.2.4.1. Interpolación de un modelo geoidal

El planteamiento del trabajo es el siguiente, se conocen las ondulaciones geoidales de un sector y puntos tomados con GPS con sus coordenadas respectivas, y se desea interpolar distintas alturas para conocer en un determinado kilometraje la ondulación correspondiente, esto se logra a través de una función polinomial de mínimo tercer grado que para este caso se utiliza un polinomio de cuarto grado como se muestra en la Figura 9, todo esto en función de y , el modelo empleado es el método de ecuación de observaciones indirectas, por el sistema no iterativo (Garafulic, 2017).

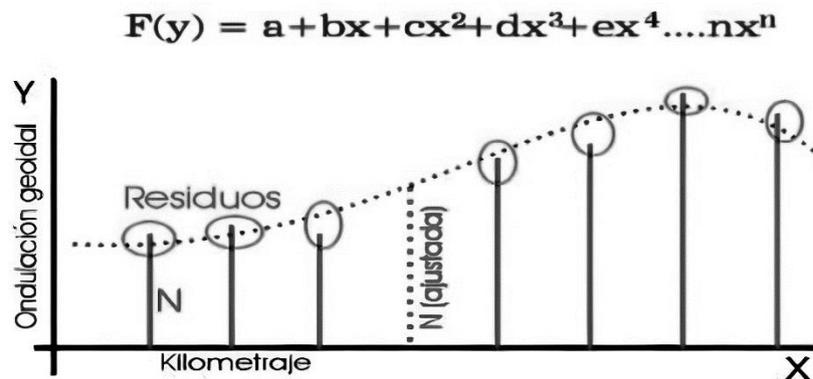


Figura 9. Interpolación de ondulaciones geoidales
Fuente: (Garafulic, 2017).

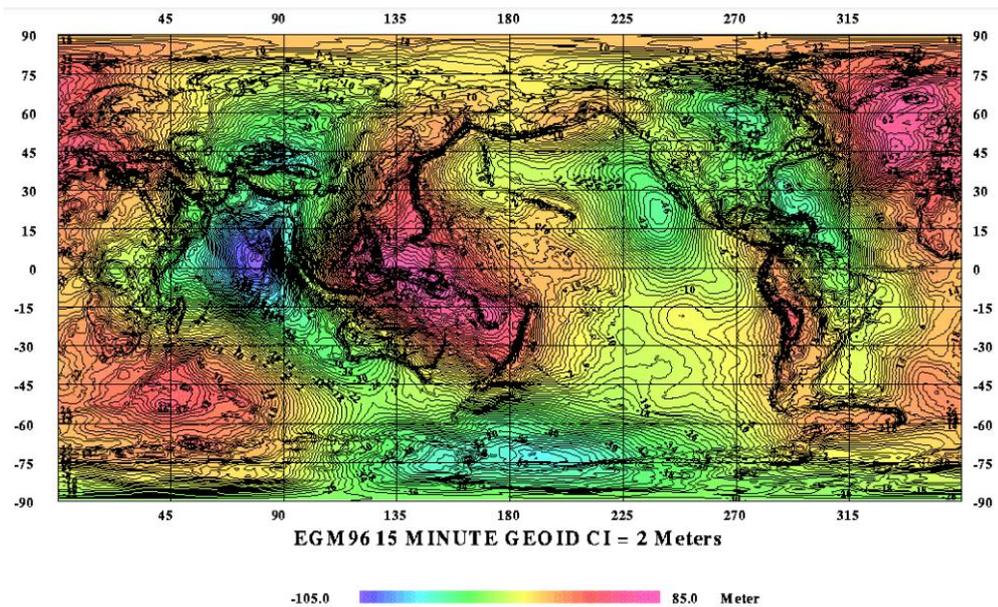
2.1.3. Modelos geoidales

Hasta el momento, los valores más precisos de ondulación geoidal “N”, pueden obtenerse con el procedimiento geométrico mediante el cálculo de la diferencia entre la altura elipsoidal “h” y ortométrica “H” de un mismo punto a través de la sencilla ecuación de diferencia, esta afirmación sólo es válida si las dos magnitudes que intervienen en el cálculo (h y H) fueron determinadas con suficiente precisión.

Otra posibilidad de obtención de modelos de geoide se basa en el cálculo de N a partir del desarrollo en serie de funciones armónicas esféricas del potencial gravitacional. En el cómputo de los coeficientes de dicho desarrollo, que constituyen los llamados modelos de geopotencial, interviene muy variada información integrada de un modo coherente en un único marco de referencia. El marco de referencia para los valores de N que se obtengan de la aplicación de algoritmos de cálculo sobre un modelo de geopotencial quedará en consecuencia establecido por el marco de referencia del modelo adoptado (Kapquequi, 2012).

2.1.3.1. EGM 96

En la Figura 10 se muestra un modelo geopotencial de la superficie terrestre constituido de la suma de armónicos esféricos de hasta 360 en orden y grado desarrollado mediante la colaboración de distintos centros de investigación, fundamentalmente la NASA, (acrónimo de National Aeronautics and Space Administration) a través del Centro de vuelo espacial Goddard (GSFC), sumando esfuerzos con la Agencia Nacional de Mapeo e Imágenes (NIMA por sus siglas en inglés hoy llamado NGA National Geospatial Intelligence Agency), la Universidad del Estado de Ohio en Estados Unidos (OSU), y la Universidad de Texas at Austin. Para su elaboración se obtuvo datos de gravedad de diferentes partes del mundo continental y oceánica; y de datos de diferentes misiones



satelitales (Tierra, 2009).

Figura 10. Ondulaciones geoidales EGM96 toman todo el mundo en base de una grilla de 15'x15'

Fuente: (Yañez, 2018).

2.1.3.2. EGM 2008

En la Figura 11 se muestra el modelo geoidal, que agrupa a las ondulaciones geoidales para tener un solo compendio de datos de distintos puntos, dentro de una misma zona, es así que el Earth Gravitational Model 2008 (EGM08) contiene esféricos armónicos al grado y orden 2159, además de contener también coeficientes adicionales extendidos al grado 2190 y orden 2159. El EGM 08 incorpora también anomalías de la gravedad, obtenidas cada 5' x 5' (9.26 x 9.26 km. aproximadamente), empleando algoritmos que calculan anomalías de gravedad por área media, esto minimiza efectos aleatorios durante el proceso de análisis armónico, haciendo también un énfasis especial en la calibración del error en cuanto a la estimación del modelo. Incluye también como modelo de referencia al Dynamic Ocean Topography (DOT), que toma en cuenta elevaciones y depresiones oceánicas (Tierra, 2009).

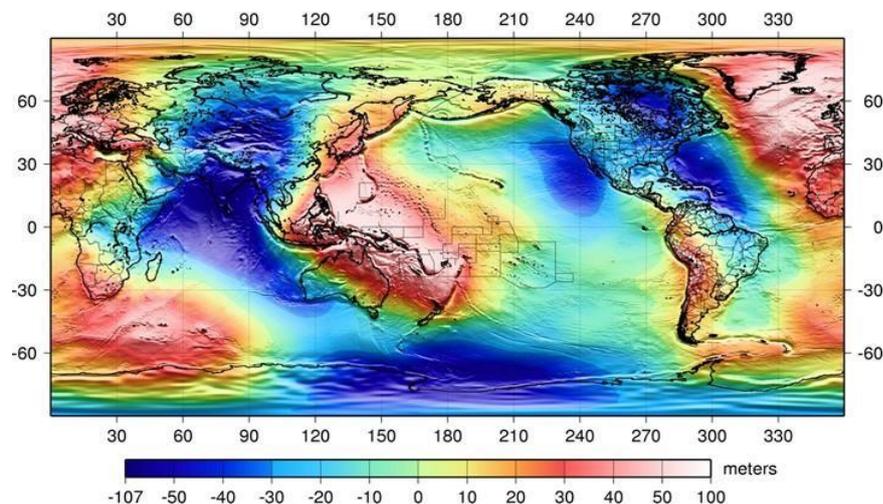


Figura 11. Ondulación geoidal EGM2008
Fuente: (Friederich, 2009).



2.1.4. Sistema de posicionamiento gnss y aplicaciones

2.1.4.1. Posicionamiento satelital

2.1.4.1.1. Constelación GPS U NAVSTAR

La constelación de satélites NAVSTAR (GPS). Actualmente está compuesto por 32 satélites (30 activos y 2 de reserva), cada uno de ellos gira en torno a la Tierra con una frecuencia de 2 veces por día y una velocidad aproximada de 13,300 km/h.

Estos satélites se encuentran distribuidos en seis orbitas elípticas casi circulares y diferentes. Estos seis planos están igualmente espaciados entre sí en 60°.

La posición que ocupan los satélites en sus respectivas orbitas facilita que el receptor GPS reciba, de forma constante y simultánea las señales de por lo menos 6 u 8 de ellos independientemente del sitio donde nos encontremos situados.

El sistema está a cargo del Departamento de Defensa de los Estados Unidos de Norteamérica (Mendoza, 2020).

2.1.4.1.2. Constelación GLONASS U RUSA

El GLONASS (Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema) es el sistema de navegación por satélites artificiales del gobierno de la confederación rusa.

En nuestros días, el sistema de posicionamiento global GLONASS está conformado por 21 satélites artificiales activos y tres satélites artificiales de reserva. Al igual que el sistema NAVSTAR-GPS, el objetivo principal del GLONASS es ubicar cualquier objeto en el planeta, con una precisión de datos en planos (2D, 3D, 4D y 5D); también su uso es infinito pues se puede emplear en la navegación, la investigación, la



meteorología, la educación, la milicia, la geomática, entre otras disciplinas (UNED, 2016).

2.1.4.1.3. Constelación GALILEO

La constelación de satélites GALILEO (UNIÓN EUROPEA). Actualmente está compuesto por 18 satélites, y se proyectan a 30 (24 activos y 6 de reserva) para el año 2020, cada uno de ellos gira en torno a la Tierra con un período de 14 horas y una velocidad aproximada de 13,200 km/h.

El sistema está a cargo de la Unión Europea y la Agencia espacial Europea; a diferencia de las dos constelaciones anteriores, los cuales están monitoreados por instituciones militares, la constelación Galileo está a cargo de instituciones civiles (Mendoza, 2020).

2.1.4.1.4. Constelación BEIDOU

Bidou es un sistema de navegación chino, que consta de dos etapas: La primera generación, BeiDou-1, la cual funcionó desde el 2000, con una constelación de 3 satélites en órbita geoestacionaria y es un sistema de posicionamiento por satélite local dando servicio a China y a sus países vecinos, actualmente ya no se encuentra operativo.

La segunda generación, BeiDou-2 (Compass), actualmente en construcción, su inicio data del año 2000 y empezó a operar el año 2012 con cobertura local (china y las regiones vecinas) se prevé que para el año 2020, deberá contar con 35 satélites, de los cuales 27 se encontrarán en una órbita media (MEO), cinco en órbita geoestacionaria (GEO) y tres en órbita geosincrónica inclinada (IGSO). Una vez completado, el proyecto se convertiría en un equivalente del Sistema estadounidense de Posicionamiento Global



(GPS), el ruso Glonass y el europeo Galileo, con cobertura total para nuestro planeta (Mendoza, 2020).

2.1.4.2. Observaciones GNSS

2.1.4.2.1. Posicionamiento absoluto

Se realiza con un único receptor, y consiste en la solución de una intersección directa de todas las distancias receptor-satélite sobre el lugar de estación en un período de observación dado. La medida y la solución son por lo tanto directas.

Para llevar a cabo el posicionamiento, el receptor recibe las señales de los satélites y determina su posición en coordenadas absolutas y en el sistema de referencia al que están referidos los satélites.

Para resolver un posicionamiento absoluto es necesario recibir la información de al menos cuatro satélites, ya que cada uno de ellos proporciona una ecuación al sistema y nuestras incógnitas son cuatro (X , Y , Z y estado del reloj del receptor) (Capdevila, 2020).

2.1.4.2.2. Posicionamiento diferencial

Es el que se realiza cuando las precisiones requeridas son mayores. Será mejor o peor en función del instrumental utilizado y la técnica de posicionamiento diferencial a la que se recurra.

El posicionamiento diferencial consiste en hallar la posición absoluta de un punto (móvil, objetivo, etc.) mediante las observaciones realizadas desde ese punto a unos determinados satélites, sumadas a las realizadas en ese mismo instante desde otro punto (referencia) a esos mismos satélites. Por lo tanto, aquí aparece el concepto de línea base, que es la línea recta que une el punto de referencia y el punto objetivo.



Esta línea base, no es medida de forma directa, ya que las observaciones son sobre los satélites y no entre los puntos. Por lo tanto, la obtención de la línea base se produce de forma indirecta. Es por esto que las incógnitas no son los incrementos de coordenadas entre los dos puntos, sino que son los diferenciales (dx , dy , dz) que hay que añadir a las coordenadas aproximadas absolutas (X_o , Y_o , Z_o) de cada punto. Si se conocen de partida las coordenadas del punto de referencia, las incógnitas se reducen a las del punto objetivo, que una vez halladas, unidas a las del punto de referencia, darán las componentes y valores de la línea base que los une.

Ya sea que el tipo de medición sea absoluto o relativo, se consideran dos tipos de modalidad en la manera de toma y procesamiento de las mediciones. Estas modalidades son denominadas Estática y Cinemática (Capdevila, 2020).

2.1.4.2.2.1. Observación método estático

Este método se utiliza para distancias largas (por lo general mayores de 20 Km.) y la más alta precisión. Es la medición clásica de líneas bases. Consiste en estacionar dos receptores o más receptores en los puntos los cuales queremos conocer sus coordenadas, almacenar datos y calcular las coordenadas en tiempo diferido (Peñafiel & Zayas, 2001).

Estático. En este tipo de posicionamiento se obtienen soluciones tan redundantes como deseamos, tan solo deberemos prolongar la observación. Es la medición clásica de líneas bases.

Consiste en estacionar dos receptores o más receptores en los puntos los cuales queremos conocer sus coordenadas, almacenar datos y calcular las coordenadas en tiempo diferido. En este tipo de posicionamiento se obtienen soluciones tan redundantes como

deseemos, tan solo deberemos prolongar la observación (Acero Velo & Serruto Flores, 2018).

Estático Rápido. Las distancias máximas que pueden existir entre la referencia y el móvil son de 20 Km. La máscara de elevación que se introduce es, como se ha comentado anteriormente, de 15° de elevación y las épocas de 15 segundos (intervalo de registro de datos, varía de 1 segundo hasta 60 segundos).

Los tiempos breves de observación posibilitan una precisión de 5 a 10mm. \pm 1 ppm, los tiempos de observación son de 5 a 10 minutos para distancias inferiores a 5 Km (Peñañiel & Zayas, 2001).

En la Figura 12, se puede observar el método estático rápido, el receptor “A” permanece fijo en una estación de referencia con coordenadas conocidas y el receptor “B” se instala en el punto que se desea.

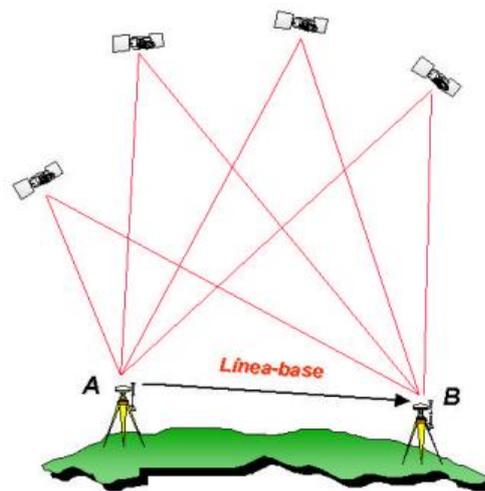


Figura 12. Observación método estático
Fuente: (Peñañiel & Zayas, 2001).



2.1.4.2.2. Observación método cinemático

Cinemático Post Procesado (PPK). (PPK, Post Processed Kinematics) realiza mediciones de diferencias de fase de dos o más receptores que simultáneamente rastrean varios satélites comunes, uno de los receptores recibe datos desde una posición conocida, en nuestro caso, y los otros se sitúan en los puntos cuyas coordenadas se necesitan conocer. Las diferencias de mediciones de fase de las señales satelitales minimizan los errores, obteniendo estimaciones de gran precisión. El posicionamiento PPK es el más fiable de todos los métodos de levantamiento, con este se puede llegar a obtener una precisión de pocos milímetros.

La información recibida es almacenada en la memoria interna de los receptores y ajustada usando correcciones provenientes de una estación base de referencia, más cercana, tras la toma de datos, si es que no nos hemos ubicado en una base de coordenadas conocidas (Dintén, 2020).

Cinemático en Tiempo Real (RTK). (Real Time Kinematic) es una técnica de posicionamiento que se realiza para estimar coordenadas de receptores estáticos o cinemáticos aplicando correcciones a partir de las observaciones de fase. Los sistemas RTK utilizan un receptor como estación base y un número determinado de unidades móviles. La estación base retransmite la fase del portador que hace mediciones, y las unidades móviles comparan sus propias medidas de fase con las que está recibiendo la estación base. Hay varias maneras de transmitir una señal corregida de la estación base a la estación móvil. La manera más popular de alcanzar una transmisión de señales en tiempo real y de bajo coste es utilizar un módem de radio, típicamente en la banda frecuencia ultra alta (UHF). En la mayoría de los países, ciertas frecuencias se asignan específicamente para uso de RTK. Gran parte del equipo topográfico terrestre tiene un



módem de banda UHF integrado como opción estándar. Hoy en día es muy popular el uso de comunicación GPRS (vía internet a través del teléfono móvil) entre la base y el rover, o bien del rover con respecto a una estación de referencia (Dintén, 2020).

2.1.4.3. Especificaciones técnicas para el posicionamiento geodésico estático

El acelerado desarrollo de la tecnología de la información permite en la actualidad la administración digital de datos, entre los que se destaca la información espacial, cuyo almacenamiento, consulta, administración y presentación son una parte esencial de la revolución informática que se adelanta en el ámbito global (IGN, Norma Técnica Geodésica, 2015).

Hoy por hoy, los diferentes proyectos en la planeación y desarrollo de las actividades humanas requieren de su ubicación espacial, la cual está dada por la localización geográfica. Dicha localización se expresa mediante coordenadas geográficas (latitud, longitud) o planas (Norte, Este), las cuales son la base de todos los sistemas de información geográfica (IGN, Norma Técnica Geodésica, 2015).

2.1.4.3.1. Clasificación de los puntos geodésicos

Con el objeto de unificar un marco de referencia geodésico, todos los trabajos de georreferenciación estarán referidos a la Red Geodésica Geocéntrica Nacional (REGGEN). Los puntos geodésicos en el territorio nacional se clasifican de la siguiente manera:

2.1.4.3.1.1. Punto geodésico orden “0”

Este orden es considerado a nivel continental, y están destinados para estudios sobre deformación regional y global de la corteza terrestre, de sus efectos geodinámicos



y trabajos en los que se requiera una precisión a un nivel máximo de 4.00 mm; estos puntos servirán para la densificación de la Red Geodésica Nacional (IGN, Norma Técnica Geodésica, 2015).

2.1.4.3.1.2. Punto geodésico orden “A”

Este orden debe aplicarse para aquellos trabajos encaminados a establecer el sistema geodésico de referencia continental básico, a levantamientos sobre estudios de deformación local de la corteza terrestre y trabajos que se requiera una precisión a un nivel máximo de 6.00 mm (IGN, Norma Técnica Geodésica, 2015).

2.1.4.3.1.3. Punto geodésico orden “B”

Este orden se destina a levantamientos de densificación del sistema geodésico de referencia nacional, conectados necesariamente a la red básica; trabajos de ingeniería de alta precisión, así como de geodinámica y trabajos que se requiera una precisión a un nivel máximo de 8.00 mm. Los trabajos que se hagan dentro de esta clasificación deben integrarse a la red geodésica básica nacional y ajustarse junto con ella (IGN, Norma Técnica Geodésica, 2015).

2.1.4.3.1.4. Punto geodésico orden “C”

Este orden debe destinarse al establecimiento de control suplementario en áreas urbanas y rurales, al apoyo para el desarrollo de proyectos básicos de ingeniería y de desarrollo urbano-rural, así como a trabajos que se requiera una precisión a un nivel máximo de 10.00 mm (IGN, Norma Técnica Geodésica, 2015).



2.1.4.3.1.5. Punto geodésico orden “PFCH”

Estos son puntos geodésicos característicos de los puntos geodésicos de orden “C”, no son monumentados y se destinarán a los puntos de fotocontrol de trabajos básicos de ingeniería en áreas urbanas, rurales y de desarrollo urbano – rural, el nivel de precisión de estos puntos no será mayores a 10.00 mm (IGN, Norma Técnica Geodésica, 2015).

Para los puntos geodésicos de orden “0”, “A” o “B”, la correlación se establecerá realizando observaciones dentro de una figura geométrica circunscrita (en lo posible), con un mínimo de ocho lados para el orden “0” y un mínimo de tres lados para los de orden “A” y “B”; para los puntos geodésicos de orden “C” y los puntos de apoyo, la correlación será a través de una línea base; siguiendo los siguientes parámetros: (IGN, Norma Técnica Geodésica, 2015).

Tabla 1.

Parámetros para el posicionamiento geodésico estático relativo con receptores del sistema satelital de navegación global

Número mínimo de estaciones de control de la Red Geodésica Horizontal que se deben enlazar:	0	A	B		ENLACE
0	8				RED
A	3	3			RED
B	3	3	3		RED
C	1	1	1		LINEA BASE
APOYO (PFCH)	1	1	1		LINEA BASE
Separación de las estaciones	0	A	B	C	APOYO (PFCH)
Separación máxima (km) entre estaciones bases dentro del área del proyecto.	4000	1000	500		



Separación máxima (km) entre estaciones bases y el punto a establecer.	3500	500	250	100	100
--	------	-----	-----	-----	-----

Fuente: (IGN, Norma Técnica Geodésica, 2015).

2.1.5. Ajuste de observaciones

2.1.5.1. Ecuación matemática del modelo lineal

En este modelo matemático corresponde a las observaciones ajustadas, $f(x_a)$ es la función relativa de los parámetros y x_a son los ajustados. Por otra parte, observaciones ajustadas (l_a) pueden definirse como (Acero Velo & Serruto Flores, 2018).

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = L_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = L_2$$

.....

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = L_a$$

$$f(X_a) = l_a$$

$$l_a = l_b + v$$

Donde:

v = vector de residuos

l_a = vector de observaciones

La expresión de la corrección de parámetros esta expresada por:

$$X_a = X_0 + X$$

Siendo X el vector corrección de parámetro y vector observado vector corregido de parámetro

Teniendo la forma matricial.

$$AX = L$$

L no es una combinación lineal de la matriz A, por tanto

$$AX \neq L$$

Entonces debemos sumar a L un vector V, vector corrección tal que L+V pertenezca a la matriz A, quedando de la forma siguiente (Acero Velo & Serruto Flores, 2018).

$$AX = L + V$$

Denotamos en forma matricial las ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{a1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{a2}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{a3}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{au}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{a1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{a2}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{a3}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{au}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_{a1}} & \frac{\partial f_3}{\partial x_{a2}} & \frac{\partial f_3}{\partial x_{a3}} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_{au}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_{a1}} & \frac{\partial f_3}{\partial x_{a2}} & \frac{\partial f_3}{\partial x_{a3}} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_{au}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_{a1}} & \frac{\partial f_3}{\partial x_{a2}} & \frac{\partial f_3}{\partial x_{a3}} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_{au}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{a1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{a2}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{a3}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{au}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{b1} - l_{01} \\ l_{b1} - l_{01} \\ l_{b1} - l_{01} \\ \vdots \\ l_{b1} - l_{01} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_1 \end{bmatrix}$$

Siendo la ecuación 1 la matriz A aplicando la derivada parcial a cada valor quedando entre valores -1 y 1 de los vectores que contiene la ecuación, el cual hace que sea una función lineal.



$$AX = L + V$$

Despejando el residuo de las observaciones queda de la siguiente manera

$$V = AX - L$$

Para resolver el sistema de ecuaciones de las observaciones lineales del modelo para ajustar recurrimos al principio de mínimo (Mínimos cuadrados) si las observaciones son de distintas precisiones de acuerdo a la varianza priori (Acero Velo & Serruto Flores, 2018).

$$\sum_{i=1}^n P_i V_i^2$$

Para expresar vectorialmente denotamos matricialmente:

$$V^T P V = [V_1, \dots, V_n] \begin{bmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n P_i V_i^2$$

Caso 1: $\hat{\sigma}_h^2$ = Error estándar o precisión de una medición

$$\hat{\sigma}_h^2 = \hat{\sigma}_{h_2}^2 = \hat{\sigma}_{h_3}^2 = \hat{\sigma}_{h_4}^2 = \hat{\sigma}_{h_5}^2$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\hat{\sigma}_h^2} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & \frac{1}{\hat{\sigma}_h^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_n \end{bmatrix}$$

Caso 2: distancia el peso será

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{d} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_n \end{bmatrix}$$

Caso 3: Si las observaciones son de una misma condición de observación entonces la matriz de pesos será la identidad y si son de distintas condiciones una observación puede ser observada más de una vez y otras menos se le considera el número de observaciones (Acero Velo & Serruto Flores, 2018).

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_n \end{bmatrix}$$

Caso 4: nivelación “ $\hat{\sigma}_h$ y L ” $\hat{\sigma}_h = \frac{xmm}{\sqrt{1km}} \sqrt{L(km)}$, el peso queda de la siguiente manera.

$$P = \frac{1}{\left(\frac{\hat{\sigma}_h}{1000}\right)^2}$$

Nota: el peso se considera de acuerdo al tipo de observación que se realiza “tener en cuenta según el trabajo”.

Reemplazando el modelo funcional (9) en (11) de la denotación vectorial del mínimo en:

$$V = (AX - L) \text{ en } V^T P V$$

$$(AX - L)^T P (AX - L) = \text{mínimo}$$

$$(AX - L)^T (PAX - PL) = \text{mínimo}$$



$$(X^T A^T - L^T)(PAX - PL) = \text{mínimo}$$

Multiplicando.

$$X^T A^T PAX - X^T A^T PL - L^T PAX + L^T PL = \text{mínimo}$$

El 2° y 3° término es igual por propiedad de matrices.

$$f(X) = X^T A^T PAX - 2X^T A^T PL + L^T PL = 0$$

La condición de mínimo es la derivada parcial $F'(x)=0$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = X^T A^T PAX - 2X^T A^T PL + L^T PL = 0$$

$$2A^T PAX - 2A^T PL = 0$$

$$A^T PAX = A^T PL$$

Finalmente, en vector corrección de los parámetros está determinado por la siguiente fórmula matemática para n ecuaciones de condición.

$$X = (A^T PA)^{-1} A^T PL$$

La matriz normal es

$$N = A^T PA$$



2.1.5.2. Teoría de probabilidades

2.1.5.2.1. Observación de igual precisión

Se considera que las observaciones son tomadas en idénticas condiciones, vale decir con los mismos instrumentos, la misma brigada, las mismas condiciones climatológicas, etc. (Mendoza, 2020).

2.1.5.2.2. Media

Es el valor que tiene a situarse en el centro del conjunto de datos ordenados según magnitud (Mendoza, 2020).

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n}$$

Donde:

\bar{X} : Media

X_i : Mediciones

n : Numero de mediciones

2.1.5.2.3. Desviación V_i

Se le llama también error aparente de una medición, es la diferencia entre la media y el valor correspondiente a una medición.

En realidad, la desviación es el error aproximado para cada medición, dado que no se conoce el valor verdadero (Mendoza, 2020).

$$V_i = X_i - \bar{X}$$

Donde:

V_i : Desviación

X_i : Valor correspondiente a una medición

\bar{X} : Media aritmética

2.1.5.2.3.1. Error medio cuadrático de desviación estándar

“Corresponde al valor del error del punto de inflexión de la curva típica de probabilidad. El área achurada indica que entre los límites $-\sigma$ y $+\sigma$ se puede esperar que estos errores ocurran el 68.27% de veces” (Mendoza, 2020).

Matemáticamente se expresa.

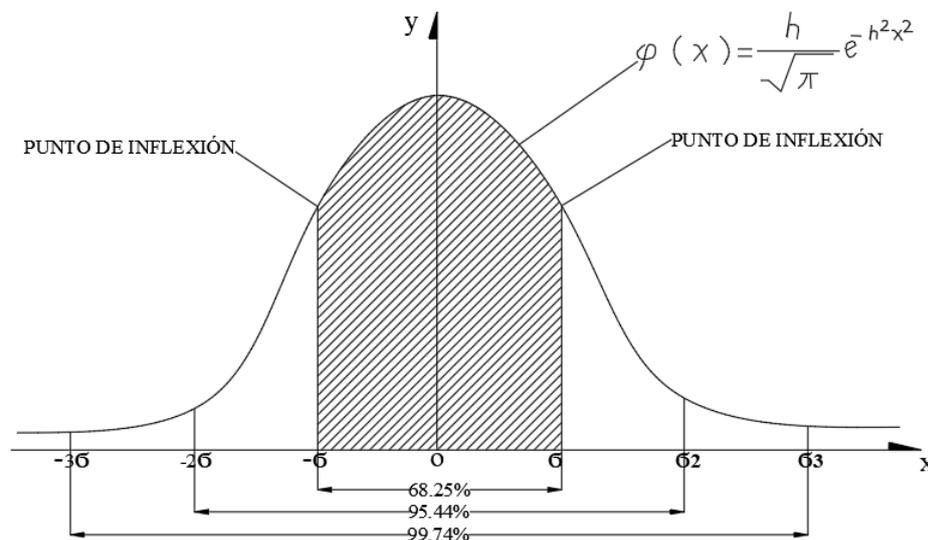


Figura 13. Campana de GAUSS desviación estándar

Fuente: (Acero Velo & Serruto Flores, 2018).

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{n - 1}}$$



$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n V_n^2}{n-1}}$$

Donde:

$\hat{\sigma}_0$: Desviación estándar o desviación típica.

n : Número de observaciones.

V : Residuos o desviación de cada medición.

$V^T P V$: Forma cuadrática fundamental. Mínimos cuadrados.

2.1.5.2.3.2. Error de la media

“está visto que la media, está sujeto a error. Error de media a cualquier porcentaje de probabilidad es aquel intervalo dentro de cuyo límites puede caer en el verdadero error accidental de la media con una probabilidad de p%” (Mendoza, 2020).

$$E_m = \frac{E_p}{\sqrt{n}}$$

Donde:

E_p : Porcentaje de error

E_m : Error de la media

n : Número de mediciones



2.1.5.2.3.3. Valor más probable (V.M.P.)

Es aquel valor que más se aproxima al valor verdadero, se considera la media o promedio de varias mediciones u observaciones que estará entre los rangos de $\pm E_m$ con un E_p con una probabilidad de p% (Mendoza, 2020).

$$V.M.P. = \bar{X} \pm E_m$$

Donde:

V.M.P.: Valor más probable

\bar{X} : Media aritmética

E_m : Error de la media

2.1.6. Ecuación de regresión

2.1.6.1. Regresión múltiple

Muchos problemas de regresión involucran más de una variable regresiva. Tales modelos de regresión se denominan regresión múltiple. La regresión múltiple es una de las técnicas estadísticas más ampliamente utilizadas en la actualidad. En esta oportunidad se presenta las técnicas básicas de la estimación de parámetros conocido como el Métodos de los Mínimos Cuadrados, además se realizará la estimación del intervalo de confianza y de la verificación de la suficiencia del modelo para la regresión múltiple. Se presentará también algunos de los problemas encontrados con frecuencia en el uso práctico de la regresión múltiple, incluyendo la construcción del modelo y la selección de variables y la dependencia casi lineal entre los regresores. El modelo de regresión que involucra más de una variable regresora se llama modelo de regresión múltiple; como un ejemplo,

supóngase Y la variable dependiente, X_1 y X_2 son las variables independientes. Un modelo de regresión múltiple que podría describir esta relación es (Ibañez, 2009):

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

Donde:

Y = Representa la variable dependiente.

X_1 y X_2 = Son las variables independientes o regresaras.

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Son los parámetros desconocidos que será estimado.

ε = Es el error residual o perturbación.

En general puede la variable dependiente puede relacionarse con k -variables independientes. El modelo de ajuste es:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

Se denomina modelo de regresión múltiple con k -variables independientes. Los parámetros = β_j , $j = 0, 1, 2, \dots, n$, son coeficientes de regresión.

2.1.6.2. Estimación de parámetros

Modelo escrito en términos de las observaciones.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Para la solución más simple denotaremos en forma matricial las ecuaciones normales la cual es escrita de la forma.

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Si asignamos a $X_{i0} = 1$ para k-variables X se tiene.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}_{N \times 1}$$

$$Y = \begin{bmatrix} X_{10} & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ X_{20} & X_{20} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{N0} & X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{Nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{20} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{Nk} \end{bmatrix}_{N \times (k+1)}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix}_{(k+1) \times 1} \quad y \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{N \times 1}$$

Propiedades:

$$E(\varepsilon) = \mathbf{0}, E(Y) = X\beta, Y = E(Y) + \varepsilon \rightarrow \varepsilon = Y - E(Y)$$

$$Var(\varepsilon) = E[\varepsilon - E(\varepsilon)][\varepsilon - E(\varepsilon)]' = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_N$$

$$Cov(e_i, e_j) = \mathbf{0}, \quad \forall i \neq j$$

Estimar parámetros utilizaremos el método de mínimos cuadrados minimizar el error.

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \varepsilon' \varepsilon = [Y - E(Y)]' [Y - E(Y)]$$



$$\begin{aligned}
 &= (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \\
 &= (Y' - X'\beta')(Y - X\beta) \\
 &= Y'Y - X'X\beta - \underbrace{\beta'X'Y}_{(Y - X\beta)' = \beta'X'Y} + \beta'X'X\beta \\
 &= Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'X'X\beta \\
 &= Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta
 \end{aligned}$$

Por propiedad se sabe que:

$$\frac{\partial(a'X)}{\partial X} = a, \Rightarrow \frac{\partial(\beta'Y)'}{\partial \beta} = X'Y$$

$$\frac{\partial(X'AX)}{\partial X} = 2AX, \Rightarrow \frac{\partial(\beta'X'X\beta)}{\partial \beta} = 2X'X\beta$$

“Simplificando se tiene que para resolver las ecuaciones normales multiplicamos ambos miembros $X'X\hat{\beta} = X'Y$ por la inversa de $X'X$ de tal modo el estimado de mínimos cuadrados de β es” (Ibañez, 2009).

$$(X'X)^{-1}X'X\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y, \Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Se puede agregar las cantidades de observaciones para cada X_i PESOS la cual quedaría de siguiente forma.

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'PX)^{-1}X'PY$$

Con la expresión obtenida podemos establecer ecuaciones logarítmicas cuadráticas, etc. Estableciendo modelos matemáticos con los coeficientes determinados.

2.1.7. Red neuronal artificial

2.1.7.1. Neurona biológica

La neurona es la célula fundamental y básica del sistema nervioso especializada en conducir impulsos nerviosos.

Las neuronas tienen características propias que le permiten comunicarse entre ellas, lo que la diferencia del resto de las células biológicas.

Se estima que el cerebro humano contiene más de cien mil millones de neuronas cada una con un promedio de 7.000 conexiones sinápticas con otras neuronas.

En las neuronas se pueden distinguir tres partes fundamentales: Dendritas, soma o cuerpo celular y axón como se aprecia en la Figura 14.

Las dendritas actúan como un canal de entrada de señales provenientes desde el exterior hacia el soma de la neurona, mientras que el axón actúa como un canal de salida. La figura 15 muestra una neurona y las distintas partes que la componen.

El espacio entre dos neuronas vecinas se denomina sinapsis. Su funcionamiento es el siguiente, en el soma de las neuronas transmisoras o presinápticas genera un pulso eléctrico llamado potencial de acción. El pulso eléctrico se propaga a través del axón en dirección a las sinapsis, que es la zona de contacto entre otras neuronas (u otro tipo de células, como las receptoras). La sinapsis recoge información electro-química procedente de las células adyacentes que están conectadas a la neurona en cuestión. Esta información llega al núcleo que se encuentra dentro del soma de la neurona, a través de las dendritas, que la procesa hasta generar una respuesta, la cual es posteriormente propagada por el axón. La sinapsis está compuesta de un espacio líquido donde existe una cierta

concentración de iones. Este espacio tiene determinadas características eléctricas que permiten inhibir o potenciar la señal eléctrica a conveniencia (Toral, 2020).

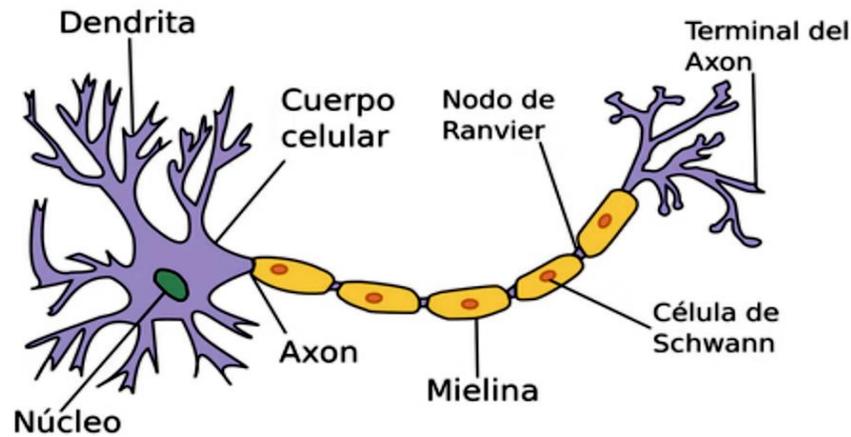


Figura 14. Modelo fisiológico de una neurona
Fuente: (Toral, 2020).

2.1.7.2. Neurona artificial

El concepto de red neuronal artificial se fundamenta en el conocimiento que se tiene sobre la estructura y funcionamiento de las redes neuronales biológicas, el captar información a manera de estímulos, procesarla y transmitirla en un sistema paralelo de elementos constitutivos llamados neuronas, son características que emula la red neuronal artificial de su par biológico, sin embargo existen también algunas particularidades que diferencian a las redes de neuronas artificiales de los sistemas biológicos, principalmente en la complejidad de las sinapsis, en los puntos de interconexión interneuronal, y por el hecho de que los sistemas biológicos tienen miles de componentes y de procesos activos de propagación de impulsos electroquímicos, mientras que en los sistemas artificiales los puntos de conexión son bastante simples y las entradas son procesadas mediante una suma ponderada que luego es transferida a una función umbral.



Además, en los sistemas biológicos la información se transporta por medio de impulsos electroquímicos que llegan a las neuronas en cualquier momento, es decir su funcionamiento es asíncrono, con lo cual se ejecuta la reconfiguración de la red en cualquier instante, mientras que en los sistemas artificiales la actualización de los parámetros de la red se produce en forma periódica y es muy común que se lo haga en forma conjunta.

Dentro de las diferencias existentes entre las redes de neuronas artificiales y las biológicas es importante destacar que estas últimas son capaces de aprender en un período más corto y con una menor cantidad de patrones presentados, al contrario, las redes neuronales artificiales precisan de ser provistas de una gran cantidad de patrones de entrenamiento para poder llegar a un nivel de aprendizaje en el que se consiga un poder de generalización aceptable. Por lo tanto, el tiempo invertido en el aprendizaje que realiza la red es considerablemente superior al que emplearía una red de tipo biológico. En cuanto se refiere a la arquitectura de las redes neuronales, se puede afirmar que los sistemas artificiales presentan una arquitectura sencilla que comprende un conjunto de capas de neuronas interconectadas, mientras en los sistemas biológicos las redes neuronales se conforman por niveles (córtex, circunvoluciones, cerebelo, hipocampo), que constituyen una densa malla de conexiones con una estructura poco definida y que puede variar en el tiempo (Isasi Viñuela & Galván León, 2004).

2.1.7.3. Red neuronal artificial

(Matich, 2001) menciona que, existen numerosas formas de definir a las redes neuronales; desde las definiciones cortas y genéricas hasta las que intentan explicar más detalladamente qué son las redes neuronales. Por ejemplo:

- 1) Una nueva forma de computación, inspirada en modelos biológicos.



- 2) Un modelo matemático compuesto por un gran número de elementos procesales organizados en niveles.
- 3) un sistema de computación compuesto por un gran número de elementos simples, elementos de procesos muy interconectados, los cuales procesan información por medio de su estado dinámico como respuesta a entradas externas.
- 4) Redes neuronales artificiales son redes interconectadas masivamente en paralelo de elementos simples (usualmente adaptativos) y con organización jerárquica, las cuales intentan interactuar con los objetos del mundo real del mismo modo que lo hace el sistema nervioso biológico.

El concepto de red neuronal artificial se fundamenta en el conocimiento que se tiene sobre la estructura y funcionamiento de las redes neuronales biológicas, el captar información a manera de estímulos, procesarla y transmitirla en un sistema paralelo de elementos constitutivos llamados neuronas, son características que emula la red neuronal artificial de su par biológico, sin embargo existen también algunas particularidades que diferencian a las redes de neuronas artificiales de los sistemas biológicos, principalmente en la complejidad de las sinapsis, en los puntos de interconexión interneuronal, y por el hecho de que los sistemas biológicos tienen miles de componentes y de procesos activos de propagación de impulsos electroquímicos, mientras que en los sistemas artificiales los puntos de conexión son bastante simples y las entradas son procesadas mediante una suma ponderada que luego es transferida a una función umbral.

Además, en los sistemas biológicos la información se transporta por medio de impulsos electroquímicos que llegan a las neuronas en cualquier momento, es decir su funcionamiento es asíncrono, con lo cual se ejecuta la reconfiguración de la red en cualquier instante, mientras que en los sistemas artificiales la actualización de los



parámetros de la red se produce en forma periódica y es muy común que se lo haga en forma conjunta.

Dentro de las diferencias existentes entre las redes de neuronas artificiales y las biológicas es importante destacar que estas últimas son capaces de aprender en un período más corto y con una menor cantidad de patrones presentados, al contrario, las redes neuronales artificiales precisan de ser provistas de una gran cantidad de patrones de entrenamiento para poder llegar a un nivel de aprendizaje en el que se consiga un poder de generalización aceptable. Por lo tanto, el tiempo invertido en el aprendizaje que realiza la red es considerablemente superior al que emplearía una red de tipo biológico. En cuanto se refiere a la arquitectura de las redes neuronales, se puede afirmar que los sistemas artificiales presentan una arquitectura sencilla que comprende un conjunto de capas de neuronas interconectadas, mientras en los sistemas biológicos las redes neuronales se conforman por niveles (córtex, circunvoluciones, cerebelo, hipocampo), que constituyen una densa malla de conexiones con una estructura poco definida y que puede variar en el tiempo (Isasi Viñuela & Galván León, 2004).

En cuanto a su funcionamiento, una red de tipo artificial se enfoca en dar solución a un problema en particular para lo cual es entrenada, en tanto las redes de neuronas biológicas son capaces de aprender un número considerable de tareas en forma simultánea.

Como una ventaja de las redes neuronales artificiales en comparación con las biológicas, se tiene que en estas últimas no es posible cuantificar un valor o medida precisa en los impulsos electroquímicos, lo cual sí es posible realizar en las redes artificiales, determinando de forma más o menos precisa los valores que se transfieren de un elemento de procesamiento a otro (Isasi Viñuela & Galván León, 2004).

2.1.7.4. Estructura de una red neuronal artificial

Las partes principales de una red neuronal son: neuronas de entradas, ocultas, salidas y las interconexiones entre las neuronas, como se muestra en la Figura 15.

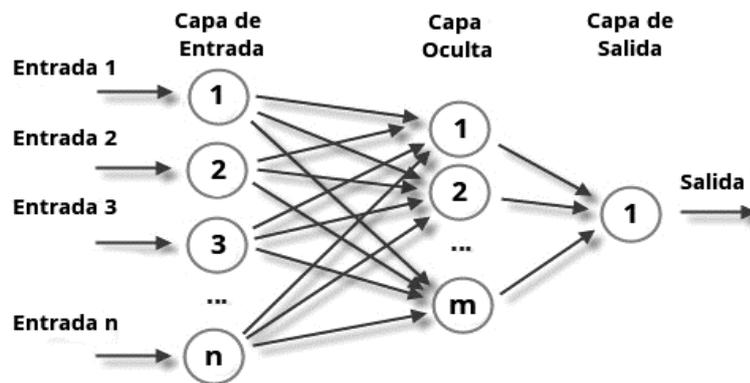


Figura 15. Estructura de una red neuronal artificial
Fuente: (Toral, 2020).

Las neuronas de entrada son transparentes, es decir no realizan ningún proceso, sólo dejan pasar la información que se quiere manejar en la red.

Las neuronas ocultas reciben las entradas y tienen la función de proporcionar un mejor aprendizaje. Las neuronas ocultas pueden o no estar presentes en una red y su incorporación depende de dos factores: Primero la topología con la que se esté trabajando y segundo de la complejidad de los patrones que deben ser aprendidos por la red.

Cuando la red está formada por una única capa de neuronas, se le llama redes monocapa, y las neuronas que conforman dicha capa cumplen la función de neuronas de entrada y salida simultáneamente. Cuando la red está compuesta por dos o más capas hablamos de redes multicapa, como se representa en la Figura 16 (Toral, 2020).

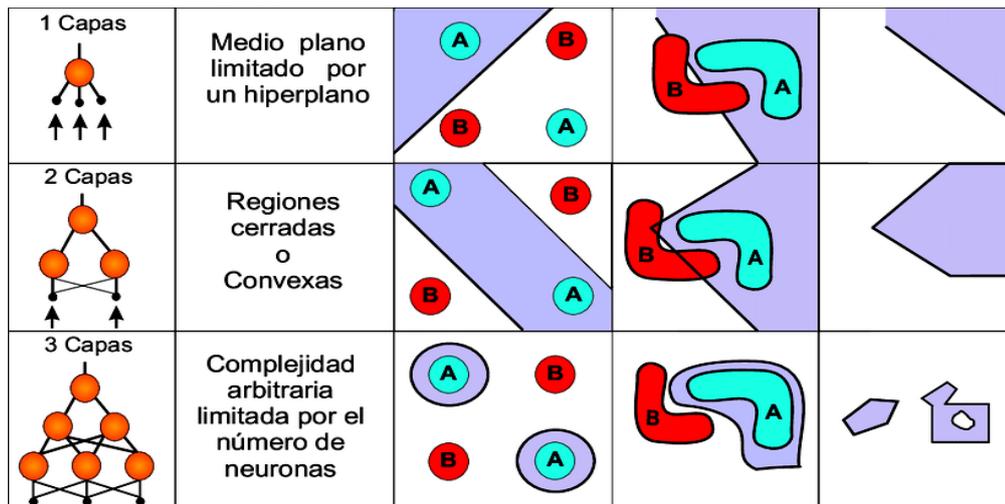


Figura 16. Regiones de decisión de una red neuronal de 1, 2 y 3 capas
Fuente: (Torral, 2020).

Las neuronas de salida se encargan de proporcionar la salida del sistema indicado, según su aprendizaje, una respuesta correcta o incorrecta.

Las interconexiones son las sinapsis de la red, estas tienen asociadas un peso sináptico, y son direccionales.

Cuando la conexión se establece entre dos neuronas de una misma capa hablamos de conexiones laterales o conexiones intra-capa. Por el contrario, si la conexión se establece entre neuronas de distintas capas se la denomina conexión inter-capa. Si la conexión se produce en el sentido inverso al de entrada-salida la conexión se llama recurrente o realimentada.

Una vez definida el tipo de neurona que se utilizará en un modelo de redes neuronales artificiales es necesario definir la topología de la misma.

La organización y disposición de las neuronas dentro de una red neuronal se denomina topología, y viene dada por el número de capas, la cantidad de neuronas por capa, el grado de conectividad, y el tipo de conexión entre neuronas.



A su vez, hablamos de redes neuronales con conexión hacia delante (redes feedforward) cuando las interconexiones entre las distintas neuronas de la red siguen un único sentido, desde la entrada de la red hacia la salida de la misma. Cuando las interconexiones pueden ser tanto hacia delante como hacia atrás hablamos de redes recurrentes (redes feedback) (Toral, 2020).

2.1.7.5. Aprendizaje de la red neuronal artificial

Una de las principales características de las RNA es su capacidad de aprendizaje. El entrenamiento de las RNA muestra algunos paralelismos con el desarrollo intelectual de los seres humanos. No obstante, aun cuando parece que se ha conseguido entender el proceso de aprendizaje conviene ser moderado porque el aprendizaje de las RNA está limitado.

El objetivo del entrenamiento de una RNA es conseguir que una aplicación determinada, para un conjunto de entradas produzca el conjunto de salidas deseadas o mínimamente consistentes. El proceso de entrenamiento consiste en la aplicación secuencial de diferentes conjuntos o vectores de entrada para que se ajusten los pesos de las interconexiones según un procedimiento predeterminado. Durante la sesión de entrenamiento los pesos convergen gradualmente hacia los valores que hacen que cada entrada produzca el vector de salida deseado.

Los algoritmos de entrenamiento o los procedimientos de ajuste de los valores de las conexiones de las ANN se pueden clasificar en dos grupos: Supervisado y No Supervisado (Basogain, 2021).



2.1.7.6. Tipos de esquemas de aprendizaje

2.1.7.6.1. Aprendizaje supervisado

Estos algoritmos requieren el emparejamiento de cada vector de entrada con su correspondiente vector de salida. El entrenamiento consiste en presentar un vector de entrada a la red, calcular la salida de la red, compararla con la salida deseada, y el error o diferencia resultante se utiliza para realimentar la red y cambiar los pesos de acuerdo con un algoritmo que tiende a minimizar el error.

Las parejas de vectores del conjunto de entrenamiento se aplican secuencialmente y de forma cíclica. Se calcula el error y el ajuste de los pesos por cada pareja hasta que el error para el conjunto de entrenamiento entero sea un valor pequeño y aceptable (Basogain, 2021).

2.1.7.6.2. Aprendizaje no supervisado

los sistemas neuronales con entrenamiento supervisado han tenido éxito en muchas aplicaciones y sin embargo tienen muchas críticas debido a que desde el punto de vista biológico no son muy lógicos. Resulta difícil creer que existe un mecanismo en el cerebro que compare las salidas deseadas con las salidas reales. En el caso de que exista, ¿de dónde provienen las salidas deseadas?

Los sistemas no supervisados son modelos de aprendizaje más lógicos en los sistemas biológicos. Desarrollados por Kohonen (1984) y otros investigadores, estos sistemas de aprendizaje no supervisado no requieren de un vector de salidas deseadas y por tanto no se realizan comparaciones entre las salidas reales y salidas esperadas. El conjunto de vectores de entrenamiento consiste únicamente en vectores de entrada. El algoritmo de entrenamiento modifica los pesos de la red de forma que produzca vectores



de salida consistentes. El proceso de entrenamiento extrae las propiedades estadísticas del conjunto de vectores de entrenamiento y agrupa en clases los vectores similares.

Existe una gran variedad de algoritmos de entrenamiento hoy en día. La gran mayoría de ellos han surgido de la evolución del modelo de aprendizaje no supervisado que propuso Hebb (1949). El modelo propuesto por Hebb se caracteriza por incrementar el valor del peso de la conexión si las dos neuronas unidas son activadas o disparadas. La ley de Hebb se representa en la siguiente ecuación (Basogain, 2021).

2.1.7.6.3. Aprendizaje por esfuerzo

Este tipo de aprendizaje garantiza que la red neuronal artificial logre una buena capacidad de generalización, una vez se ha entrenado a la red con un método supervisado, los errores registrados durante la etapa de aprendizaje son calculados con respecto al conjunto de entrenamiento y estos presentarán discrepancias con los errores que resultarán cuando la red opere con entradas que no participaron en el aprendizaje. El obtener un error pequeño durante la etapa de entrenamiento, no implica que la capacidad de generalización de la red esté garantizada, para solucionar este inconveniente se utiliza los esquemas de aprendizaje por refuerzo, consiste en dividir al conjunto de datos que se dispone en dos subconjuntos, uno de entrenamiento y otro de validación, el primero sirve para que la red ajuste sus pesos de la misma forma que se hace en el aprendizaje supervisado, pero el error cometido por la red es calculado con los datos del conjunto de validación, siendo importante el hecho de que estos no participan en el ajuste de los parámetros, de esta manera se consigue una medida más confiable del poder de generalización de la red (Isasi Viñuela & Galván León, 2004).

2.1.7.7. Perceptrón

Es una red de neuronas artificial de tipo Perceptrón está constituida por entradas y neuronas de salida, el número de células se determina dependiendo del tipo de problema que se desea resolver y todas las entradas están conectadas con cada una de las neuronas de salida (Llano Cruz & Gonzales Aceituno, 2018).

Las neuronas de la capa de salida utilizan una función de transferencia tipo umbral o escalón que genera salidas binarias que resultan de determinar si la activación de la célula (Σ) supera o no en valor numérico al umbral.

$$\begin{cases} y = 1 \text{ si } \sum_{i=1}^n X_i * \omega_i > \theta \\ y = -1 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Donde:

y : Salida de la neurona

ω_i : Pesos sinápticos

θ : Umbral

X_i : Número de entradas

Si se incluye al valor umbral como otro de los parámetros de la red y se vincula a este peso sináptico con una entrada constante igual a 1, es posible que el umbral se fije en cero y las ecuaciones anteriormente señaladas cambiarían a la forma (Llano Cruz & Gonzales Aceituno, 2018):

$$\begin{cases} = 1 \text{ si } \left(\sum_{i=1}^n X_i * \omega_i - \theta \right) > 0 \\ y = -1 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Donde:

y : Salida de la neurona

ω_i : Pesos sinápticos

θ : Umbral

X_i : Número de entradas

El umbral o bias pasa a formar parte del operador sumatoria a manera de un peso sináptico asociado a una pseudo entrada (X_0) a la neurona con un valor constante de 1.

Las dos entradas de la red neuronal pueden ser representadas en un espacio bidimensional como se muestra en la Figura 17, y la ecuación de la recta señalada anteriormente actúa en el mismo espacio separando los patrones ingresados en dos categorías o clases. El aprendizaje del perceptrón consiste entonces en encontrar los parámetros de la ecuación de la recta que sirve como discriminante en el problema de clasificación que se trata de resolver (Isasi Viñuela & Galván León, 2004).

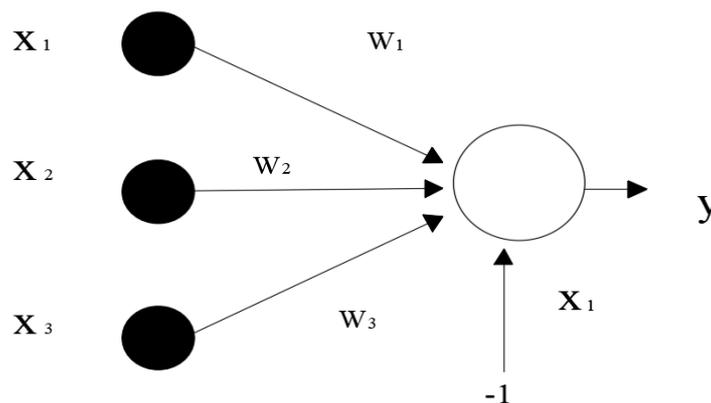


Figura 17. Estructura general de una neurona del tipo perceptrón
Fuente: (Isasi Viñuela & Galván León, 2004).

2.1.7.8. Funciones de transparencia

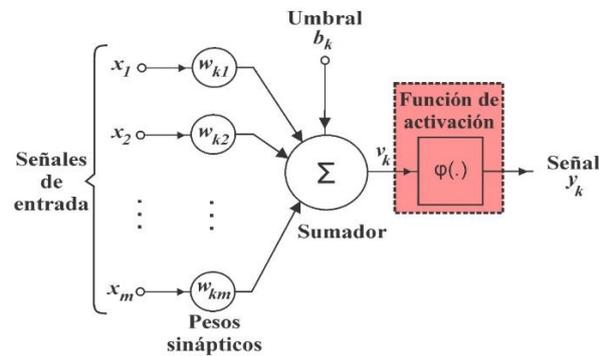


Figura 18. Función de transferencia de una red neuronal
Fuente: (Isasi Viñuela & Galván León, 2004).

En las redes neuronales existe una función sea esta lineal o no lineal, que permite cambiar de nivel de activación a partir de las señales que recibe, esta función es conocida como función de activación o transferencia mostrada en la Figura 18. (Llano Cruz & Gonzales Aceituno, 2018).

$$U_k = \sum_{j=1} W_{kj} X_j + b_k$$

Donde:

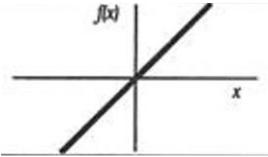
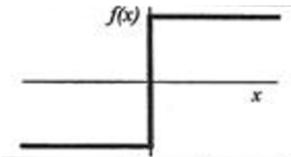
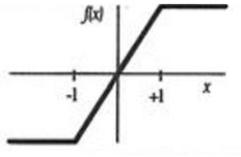
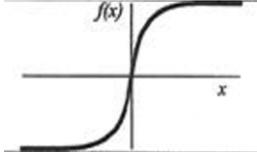
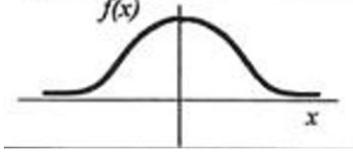
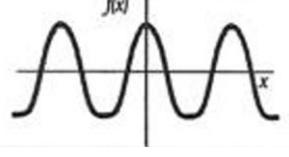
U_k : Función de activación o transferencia de la neurona

$W_{kj} X_j$: Peso de la sinapsis j perteneciente a la neurona k

b_k : Bias aplicado a la neurona k

Tabla 2.

Funciones de activación

	Función	Rango	Grafica
Identidad	$y = x$	$[-\infty, +\infty]$	
Escalón	$y = \text{sing}(x)$ $y = H(x)$	$\{-1, +1\}$ $\{0, +1\}$	
Lineal a tramos	$y = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -1 \\ x, & \text{si } -1 \leq x \leq +1 \\ +1, & \text{si } x > +1 \end{cases}$	$[-1, +1]$	
Sigmoidea	$y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ $y = \text{tgh}(x)$	$[0, +1]$ $[-1, +1]$	
Gaussiana	$y = Ae^{-Bx^2}$	$[0, +1]$	
Sinusoidal	$y = A \text{sen}(\omega x + \varphi)$	$[-1, +1]$	

Fuente: (Palacios, 2003).

Se usa como función de activación una relación lineal (identidad) para neuronas de entrada a la red o sensores. Esto se debe a que un sensor tiene que indicar lo que está percibiendo. Si la función de activación de una neurona es lineal entonces se dice que es una neurona lineal, en caso contrario se dice que es una neurona no lineal.

Las tres primeras funciones presentan una desventaja porque no son derivables en algunos puntos por lo que no pueden aplicarse algunos algoritmos de aprendizaje, es por ello que la tendencia es utilizar funciones que sean diferenciables en todos sus puntos como es el caso de la función sigmoidea la misma que presenta dos formas, una logística y otra tangente hiperbólica.

De acuerdo a la experiencia de varios investigadores en el estudio de las RNA se recomienda la utilización de esta función (Llano Cruz & Gonzales Aceituno, 2018).

2.1.7.9. Arquitectura de una red neuronal artificial

Se denomina arquitectura a la topología, estructura o patrón de conexionado de una red neuronal representada en la Figura 19. En una red neuronal artificial los nodos se conectan por medio de sinapsis, estando el comportamiento de la red determinado por la estructura de conexiones sinápticas. Estas conexiones sinápticas son direccionales, es decir, la información solamente puede propagarse en un único sentido (desde la neurona presináptica a la pos-sináptica). En general las neuronas se suelen agrupar en unidades estructurales que denominaremos capas. El conjunto de una o más capas constituye la red neuronal.

Se distinguen tres tipos de capas: de entrada, de salida y ocultas. Una capa de entrada, también denominada sensorial, está compuesta por neuronas que reciben datos o señales procedentes del entorno. Una capa de salida se compone de neuronas que proporcionan la respuesta de la red neuronal. Una capa oculta no tiene una conexión directa con el entorno, es decir, no se conecta directamente ni a órganos sensores ni a efectores. Este tipo de capa oculta proporciona grados de libertad a la red neuronal gracias a los cuales es capaz de representar más fehacientemente determinadas características del entorno que trata de modelar. Véase la Figura 21 (Larrañaga, Inza, & Moujahid, 2018).

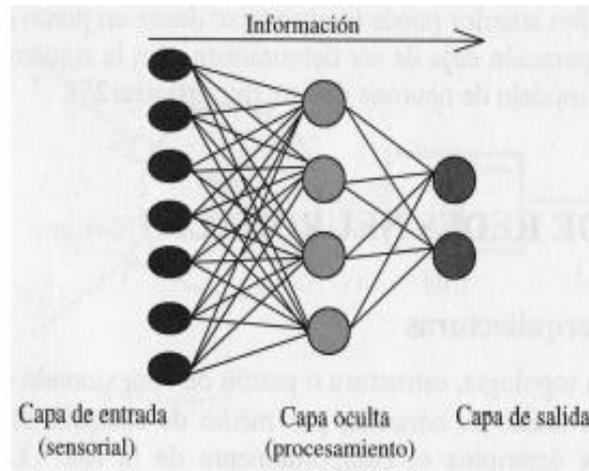


Figura 19. Arquitectura unidireccional con tres capas de neuronas: una capa de entrada, una capa oculta y una capa de salida
Fuente: (Larrañaga, Inza, & Moujahid, 2018).

2.1.7.10. Red neuronal multicapa

Las redes multicapas son aquellas que disponen de un conjunto de neuronas agrupadas en varios (2, 3, etc.) niveles o capas. En estos casos, una forma para distinguir la capa a la que pertenece una neurona, consistiría en fijarse en el origen de las señales que recibe a la entrada y el destino de la señal de salida. Normalmente, todas las neuronas de una capa reciben señales de entrada desde otra capa anterior (la cual está más cerca a la entrada de la red), y envían señales de salida a una capa posterior (que está más cerca a la salida de la red). A estas conexiones se las denomina conexiones hacia adelante o feedforward.

Sin embargo, en un gran número de estas redes también existe la posibilidad de conectar la salida de las neuronas de capas posteriores a la entrada de capas anteriores; a estas conexiones se las denomina conexiones hacia atrás o feedback.

Estas dos posibilidades permiten distinguir entre dos tipos de redes con múltiples capas: las redes con conexiones hacia adelante o redes feedforward, y las redes que



disponen de conexiones tanto hacia adelante como hacia atrás o redes feedforward/feedback (Matich, 2001).

El entrenamiento de un Perceptrón Multicapa utiliza un aprendizaje supervisado con un algoritmo de aprendizaje de retropropagación del error o backpropagation, el cual está basado en la regla de aprendizaje por corrección del error. La retropropagación de los errores medidos en la salida de la red hacia las neuronas ocultas se lo hace a través de una generalización de la regla delta o LMS (Least Mean Square) (Llano Cruz & Gonzales Aceituno, 2018).

2.1.8. Pruebas de comparación múltiple de medias

2.1.8.1. Prueba de t de Student

La prueba "t" de Student es un tipo de estadística deductiva. Se utiliza para determinar si hay una diferencia significativa entre las medias de dos grupos. Con toda la estadística deductiva, asumimos que las variables dependientes tienen una distribución normal. Especificamos el nivel de la probabilidad (nivel de la alfa, nivel de la significación, p) que estamos dispuestos a aceptar antes de que cerco datos ($p < .05$ es un valor común se utiliza que) (SEFO, 2008).

Cuando la diferencia entre dos promedios de la población se está investigando, se utiliza una prueba t. Es decir que se utiliza cuando deseamos comparar dos medias (las cuentas se deben medir en una escala de intervalo o de cociente). Utilizaríamos una prueba t si deseamos comparar el logro de la lectura de hombres y de mujeres. Con una prueba t, tenemos una variable independiente y una dependiente. La variable independiente (género en este caso) puede solamente tener dos niveles (varón y hembra).

Si la independiente tuviera más de dos niveles, después utilizaríamos un análisis de la variación unidireccional.

La prueba estadística para t de Student es el valor t. Conceptualmente, la t-valor representa el número de unidades estándares que están separando las medias de los dos grupos (SEFO, 2008).

“para su análisis se debe tener las siguientes restricciones” (Ibañez, 2009):

- Las comparaciones por estudiar deberán ser seleccionados antes de cualquier análisis de los datos.
- La prueba F del Análisis de Variancia debe ser significativa.

2.1.8.1.1. Análisis Estadístico

1) Planteamiento de Hipótesis:

$$H_0: \mu_i = \mu_i$$
$$\frac{H_0: \mu_i \neq \mu_i}{\text{Bilateral}}$$

2) Nivel de Significación: $\alpha = 0.05$, ó $\alpha = 0.01$

3) Prueba Estadística (t calculado para cada par de tratamientos).

$$t_c = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}; \text{ con } n_1 + n_2 - 2 \text{ GL}$$

Donde:

\bar{X}_1 y \bar{X}_2 : media de las muestras 1 y 2

s_1^2 y s_2^2 : varianzas insesgadas de las muestras 1 y 2

n_1 y n_2 : tamaño de las muestras 1 y 2

T de distribución como una t de Student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.



4) Regla de decisión

Si $-t_{(tabla)} \leq t_c \leq t_{(tabla)}$ se acepta H_0 .

$|t_c| > t_{(tabla)}$ ó $|t_c| < -t_{(tabla)}$ se rechaza H_0 .



CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. MATERIALES E INSTRUMENTOS

3.1.1. Ubicación geográfica

Tabla 3.

Ubicación Geográfica

Ubicación	Latitud	Longitud	(h)	Zona
PUNO-TOTORANI	15°49'34.365"	70°03'20.843"	4152.147	19s

Fuente: Elaboración propia.

3.1.2. Ubicación UTM

Tabla 4.

Ubicación UTM

Ubicación	Norte(m)	Este(m)	(h)	Zona
PUNO-TOTORANI	8250003.762	386936.790	4152.147	19L-Sur

Fuente: Elaboración propia.

3.1.3. Ubicación política

Departamento : Puno

Provincia : Puno

Distrito : Puno



3.1.4. Vías de acceso

Tabla 5.

Vías de acceso al lugar de investigación

Tramo	Tipo de carretera	Distancia (Km)	Tiempo (Min.)
Puno-Totorani	Asfaltado	7.30	20

Fuente: Elaboración propia.

3.1.5. Equipos

Tabla 6.

Equipos topográficos

EQUIPOS	CANTIDAD
02 Receptor GNSS South Galaxy G1	02 und.
02 Nivel electrónico Leica Sprinter 250M	02 und.
Computadora Portátil Alienware Core i9 10° Generación	01 und.
Impresora	01 und.
Cámara fotográfica	01 und.
Calculadora Casio	02 und.

Fuente: Elaboración propia.

3.1.6. Materiales

Tabla 7.

Materiales

DESCRIPCION	CANTIDAD
Cemento	2 bls.
Agregados fino y grueso	0.65 m3.
Varillas de fierro 1/2" h=40cm	22 und.
Clavos	25 und.
Badilejo	01 und.
carretilla	01 und.
Brocha	01 und.
Pincel	01 und.



Pintura /Aerosol	03 und.
Balde	3 und
Agua	15 lts.

Fuente: Elaboración propia.

3.1.7. Software Empleado

Tabla 8.

Software

SOFTWARE	VERSIÓN
Microsurvey Star*Net	v.9-Prueba
Matlab 2017b	v.Prueba
Microsoft Excel	2020
Trimble Bussiness Center	v.5.1Prueba
Civil 3d 2020	v.Estudiante
IBM SPSS Statistics	v.21-Prueba
Microsoft Office	2020
Golden Surfer	v.15-Prueba
Google Earth	v.Pro

Fuente: Elaboración propia.

3.2. PROCEDIMIENTOS

3.2.1. Reconocimiento y ubicación del área de estudio

El área de investigación se muestra en la Figura 20, está ubicada en la zona Nor-Oeste de la ciudad de Puno, en la urbanización Totorani, con una superficie de 304.0386 ha.



Figura 20. Ubicación del área de estudio Google Earth
Fuente: Captura de pantalla Google Earth.

3.2.2. Método de trabajo

En la presente investigación se utilizó un conjunto de puntos de control distribuidos estratégicamente en el interior del área de estudio como se representa en la Figura 21, sobre los puntos de control se realizó los trabajos de posicionamiento GNSS estático y nivelación geométrica.

Estos puntos de control y los puntos test, están enlazados a un punto de control geodésico de orden “C”, validado y certificado por el Instituto Geográfico Nacional (IGN), de fecha 25 de mayo del 2017; sobre los puntos de control y test, se realiza el posicionamiento geodésico, para hallar la diferencia de alturas niveladas y las alturas elipsoidales, obtenida por el método GNSS/nivelación, dicha diferencia nos dará la ondulación geoidal (N).

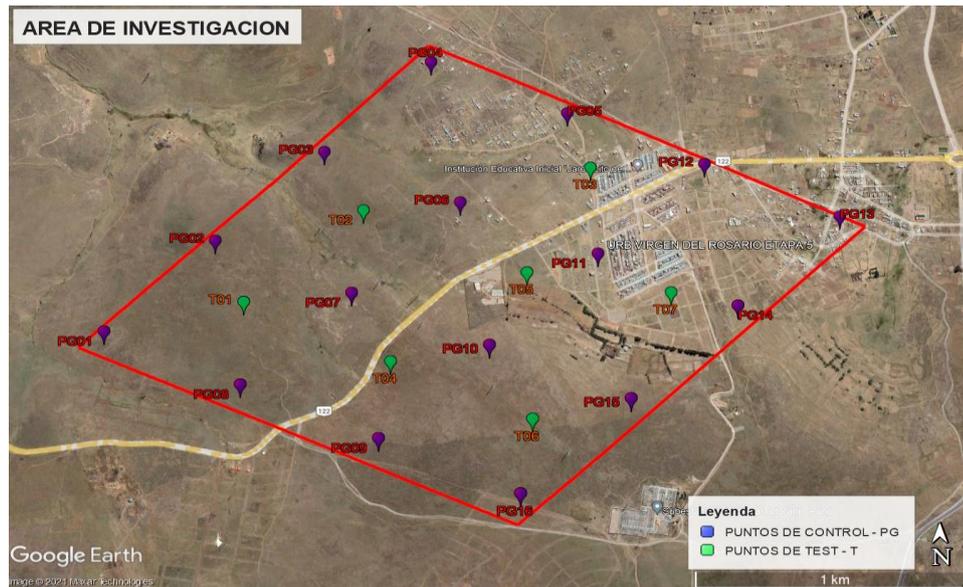


Figura 21. Distribución de puntos de control y test Google Earth
Fuente: Captura de pantalla Google Earth.

3.2.2.1. Monumentación de puntos de control y test

La distribución de los puntos de control y test, se planificó in situ, según el relieve topográfico que existe en el área de intervención. Una vez definido los puntos se procedió con la ejecución del trabajo, utilizando los materiales descritos en la Tabla 5 y con el procedimiento siguiente:

Se materializó la monumentación de 15 puntos de control y 5 puntos de test, estos puntos materializados tienen la forma de una calicata pequeña, cuyas dimensiones son de 30 cm de diámetro y con una profundidad de 40 cm, en esta calicata pequeña se iza en su parte interior y central, una varilla corrugada de fierro de $\frac{1}{2}$ pulgada, con posición vertical. Seguidamente se preparó una mezcla de concreto, el cual se utilizó en el vaciado de la calicata pequeña, cuya parte superior es controlada por una gavera, para evitar derrames de concreto, ver Anexo 5 y 8.

3.2.3. Datos existentes

3.2.3.1. Punto geodésico GPS

La existencia de un punto geodésico de orden “C” denominado en la certificación, por el IGN como SAT-002, sirvió como base de corrección para los puntos de control y test, y para una mejor intervención del área de investigación, el punto geodésico de orden “C” está ubicado en la parte central y cumple la función de un geocentro.

Tabla 9.

Ubicación del Punto SAT-002

Ubicación	Latitud	Longitud	(h)	Zona
Puno-Totorani	15°49'34.365"	70°03'20.843"	4152.147	19L

Fuente: Elaboración propia.

3.2.4. Georreferenciación y densificación de puntos de control y test

Se utilizó 02 equipos GNSS South Galaxy G1 de doble frecuencia, el primer equipo denominado “Base”, se instaló en el punto SAT-002, que se encuentra dentro del área de estudio, se activa el equipo, verificando la recepción de señales satelitales, con un intervalo de 5 segundos entre señal y señal, durante el rastreo, además permanece 12 horas continuas en la recepción de señales satelitales.

Una vez instalada la “Base” e iniciado la recolección de datos, se empieza con el equipo “Rover” en modo estático, el posicionamiento de cada uno de los puntos de control y test, con un intervalo de tiempo de 20 minutos de medición.

Al concluir los trabajos de medición, se procedió con la descarga de la data cruda de cada uno de los puntos medidos, para realizar la transformación de la data nativa al

formato Rinex. Finalmente se procedió con el post proceso en el software especializado Trimble Business Center ver. 5.10 (TBC).

Es necesario realizar la corrección de las líneas bases, para dicho fin se utilizó el punto geodésico SAT-002 como control de mediciones y los puntos materializados se encuentran en calidad desconocida, finalmente se realizó la corrección de las líneas bases dando como resultado soluciones fijas como se muestra en la Figura 22, y el reporte del postproceso se muestra en las Tablas 10 y 11.

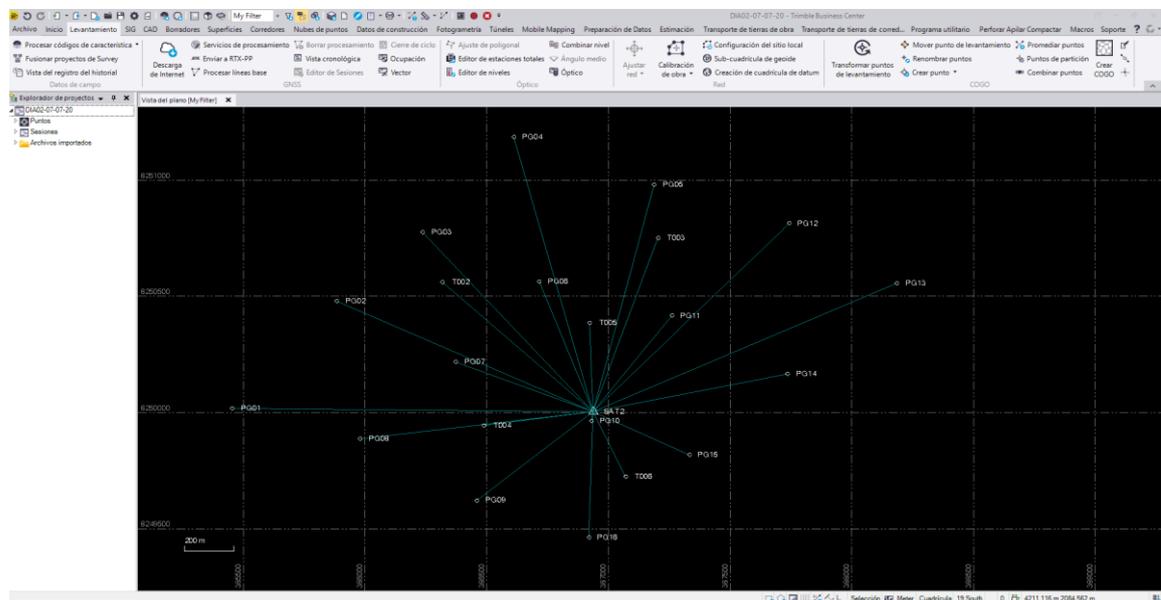


Figura 22. Postproceso de línea base de los puntos de control y test
Fuente: Captura de pantalla Trimble Business Center.

Tabla 10.

Reporte de post proceso de las líneas bases

De	A	Tipo de solución	Precisión Horizontal (metro)	Precisión Vertical (metro)	Acimut geodésico	Distancia elipsoidal (metro)	Δ Altura (metro)
SAT2	PG10	Fija	0.002	0.005	190°50'16"	40.234	4.078
SAT2	PG14	Fija	0.005	0.008	78°45'03"	816.106	-34.35
SAT2	PG15	Fija	0.004	0.006	115°22'55"	435.823	-2.733
SAT2	T006	Fija	0.015	0.019	154°48'14"	310.123	21.475
SAT2	PG16	Fija	0.002	0.003	182°12'22"	541.462	19.05
SAT2	PG09	Fija	0.002	0.006	231°45'16"	611.746	-12.34
SAT2	PG06	Fija	0.002	0.002	338°40'44"	602.552	-51.142



SAT2	T005	Fija	0.003	0.005	358°07'00"	381.242	-46.877
SAT2	PG13	Fija	0.002	0.004	66°24'47"	1365.367	-85.421
SAT2	PG12	Fija	0.002	0.003	45°07'32"	1142.894	-65.579
SAT2	PG11	Fija	0.002	0.002	38°24'23"	524.05	-49.476
SAT2	T003	Fija	0.002	0.003	19°53'40"	793.861	-52.256
SAT2	PG05	Fija	0.004	0.008	14°41'57"	1007.927	-53.248
SAT2	PG04	Fija	0.004	0.013	344°51'35"	1225.746	-49.818
SAT2	PG03	Fija	0.005	0.009	318°05'06"	1042.435	-68.545
SAT2	T002	Fija	0.006	0.005	312°17'19"	832.553	-70.02
SAT2	PG07	Fija	0.004	0.007	290°58'40"	602.39	-58.656
SAT2	PG02	Fija	0.007	0.025	294°35'15"	1154.104	-65.056
SAT2	PG01	Fija	0.006	0.01	270°49'02"	1483.334	-54.038
SAT2	PG08	Fija	0.004	0.006	263°18'35"	964.602	-40.097
SAT2	T004	Fija	0.005	0.007	262°45'18"	452.168	-34.102

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 11.

Reporte de coordenadas UTM y alturas geoidales

ID	Este (metro)	Norte (metro)	Elevación (metro)	Factor de escala de proyección	Factor de escala de altura	Factor de escala combinada
PG09	386458.371	8249622.752	4094.174	0.999759431	0.999349502	0.999109089
PG10	386929.425	8249964.217	4110.575	0.99975811	0.999346924	0.999105192
PG14	387736.212	8250166.946	4072.128	0.999755862	0.999352958	0.999108978
PG15	387331.381	8249818.972	4103.761	0.999756988	0.999347994	0.99910514
PG16	386918.671	8249462.734	4125.560	0.99975814	0.999344573	0.999102872
SAT2	386936.790	8250003.761	4106.497	0.99975809	0.999347564	0.999105812
T006	387070.191	8249723.880	4127.976	0.999757717	0.999344192	0.999102068
PG01	385453.875	8250017.461	4052.485	0.999762264	0.99935605	0.999118467
PG02	385885.184	8250478.567	4041.449	0.999761045	0.99935778	0.999118978
PG03	386236.695	8250775.781	4037.946	0.999760054	0.999358328	0.999118536
PG04	386610.782	8251185.052	4056.657	0.999759003	0.999355387	0.999114545
PG05	387187.581	8250979.737	4053.221	0.999757389	0.999355926	0.999113471
PG06	386714.941	8250563.830	4055.345	0.999758711	0.999355595	0.999114462
PG07	386373.386	8250216.540	4047.846	0.999759669	0.999356775	0.999116599
PG08	385979.564	8249886.596	4066.420	0.999760778	0.999353861	0.999114794
PG11	387260.201	8250415.951	4057.005	0.999757187	0.999355334	0.999112677
PG12	387742.451	8250813.998	4040.883	0.999755845	0.999357862	0.999113864
PG13	388185.020	8250556.246	4021.040	0.999754618	0.999360978	0.999115753
SAT2	386936.790	8250003.761	4106.497	0.99975809	0.999347564	0.999105812
T002	386318.239	8250560.722	4036.475	0.999759825	0.999358559	0.999118538
T003	387203.113	8250751.413	4054.219	0.999757346	0.99935577	0.999113272
T004	386488.632	8249944.498	4072.404	0.999759346	0.999352919	0.999112421
T005	386922.350	8250384.638	4059.611	0.99975813	0.999354925	0.999113212

Fuente: Elaboración propia.

3.2.5. Nivelación geométrica de los puntos de control y test

La nivelación geométrica se planificó, según la red utilizada en el posicionamiento GNSS, con un total de 16 vértices, 1 punto de control, 24 tramos de nivelación cerrada y 9 circuitos.

El método de nivelación en la presente investigación, es la nivelación geométrica compuesta, cumpliendo con la normativa y tolerancias establecido por el Instituto Geográfico Nacional (IGN), iniciando en el punto de control “PG04” y recorriendo todo el circuito planificado.

Finalmente se concluyó con la recolección de datos, seguidamente se realizó la digitalización de libretas de campo, empleando la hoja de cálculo Excel, posteriormente se calculó las diferencias de elevaciones de los puntos medidos. Por último, se realizó la compensación del circuito de nivelación utilizando el software Microsurvey*Starnet v9 representada en la Figura 23 y los reportes de ajuste se muestran en las Tablas 12,13 y 14.

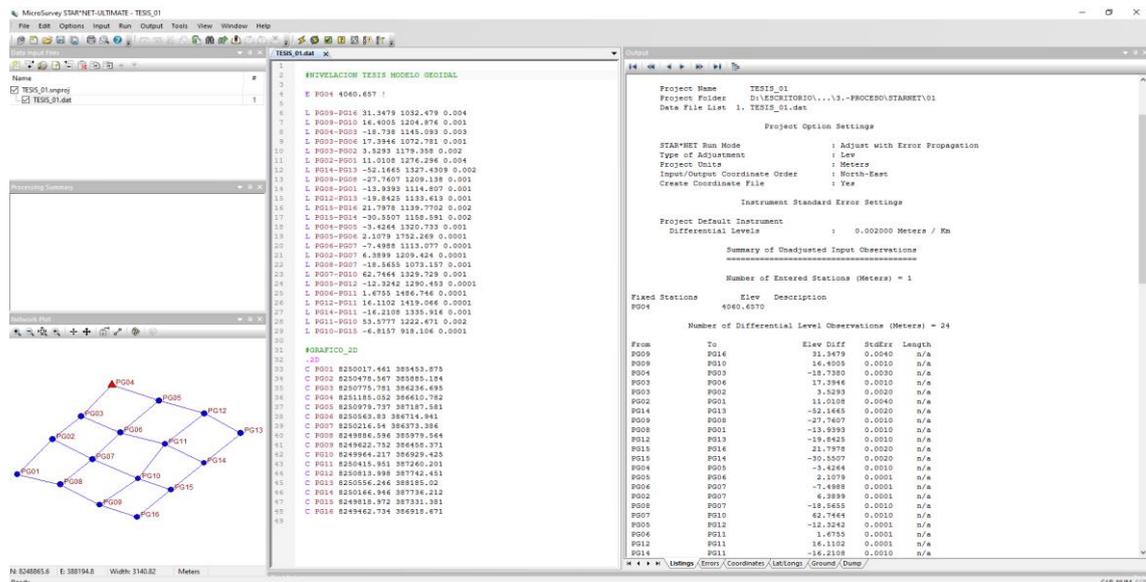


Figura 23. Ajuste de la red de nivelación
Fuente: Captura de pantalla Microsurvey*Starnet.



Tabla 12.

Reporte de observaciones y residuos ajustados

From	To	Elev Diff	Residual	StdErr	StdRes	File:Line
PG09	PG16	31.3794	0.0315	0.004	7.9	01:06
PG09	PG10	16.4051	0.0046	0.001	4.6	01:07
PG04	PG03	-18.7206	0.0174	0.003	5.8	01:08
PG03	PG06	17.4008	0.0062	0.001	6.2	01:09
PG03	PG02	3.5122	-0.0171	0.002	8.5	01:10
PG02	PG01	11.0213	0.0105	0.004	2.6	01:11
PG14	PG13	-52.1628	0.0037	0.002	1.8	01:12
PG09	PG08	-27.7673	-0.0066	0.001	6.6	01:13
PG08	PG01	-13.94	-0.0007	0.001	0.7	01:14
PG12	PG13	-19.8434	-0.0009	0.001	0.9	01:15
PG15	PG16	21.7899	-0.0079	0.002	3.9	01:16
PG15	PG14	-30.5434	0.0073	0.002	3.7	01:17
PG04	PG05	-3.4283	-0.0019	0.001	1.9	01:18
PG05	PG06	2.1085	0.0006	0.0001	6.5	01:19
PG06	PG07	-7.4987	0.0001	0.0001	0.8	01:20
PG02	PG07	6.3899	0	0.0001	0.5	01:21
PG08	PG07	-18.5714	-0.0059	0.001	5.9	01:22
PG07	PG10	62.7438	-0.0026	0.001	2.6	01:23
PG05	PG12	-12.3249	-0.0007	0.0001	6.7	01:24
PG06	PG11	1.6761	0.0006	0.0001	6.3	01:25
PG12	PG11	16.1095	-0.0007	0.0001	6.6	01:26
PG14	PG11	-16.2099	0.0009	0.001	0.9	01:27
PG11	PG10	53.569	-0.0087	0.002	4.4	01:28
PG10	PG15	-6.8157	0	0.0001	0	01:29

* Cuadro de observaciones y residuos ajustados

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 13.

Reporte de alturas ajustadas y propagación de errores

Station	Elev	StdDev	95%
PG04	4060.6570	0.000001	0.000002
PG09	4098.1772	0.010486	0.020552
PG16	4129.5566	0.016782	0.032892
PG10	4114.5823	0.009463	0.018548
PG03	4041.9364	0.009567	0.018752
PG06	4059.3372	0.007452	0.014606
PG02	4045.4486	0.00753	0.014758



PG01	4056.4700	0.012275	0.024059
PG14	4077.2232	0.009926	0.019454
PG13	4025.0604	0.010290	0.020169
PG08	4070.4099	0.009914	0.019431
PG12	4044.9038	0.007456	0.014614
PG15	4107.7666	0.009487	0.018595
PG05	4057.2287	0.007427	0.014557
PG07	4051.8385	0.007491	0.014682
PG11	4061.0133	0.007464	0.014630

* Cuadro de alturas ajustadas y propagación de errores

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 14.

Reporte de alturas niveladas ajustadas (H)

ID	Altura Nivelada (H)
PG04	4060.6570
PG09	4098.1772
PG16	4129.5566
PG10	4114.5823
PG03	4041.9364
PG06	4059.3372
PG02	4045.4486
PG01	4056.4700
PG14	4077.2232
PG13	4025.0604
PG08	4070.4099
PG12	4044.9038
PG15	4107.7666
PG05	4057.2287
PG07	4051.8385
PG11	4061.0133

*alturas ajustadas (H)

Fuente: Elaboración propia.

3.2.6. Estimación de variables dependientes

Al obtener las cotas corregidas con el software Microsurvey*Starnet v9, se realizó la diferencia de cotas ortométricas corregidas respecto a las alturas elipsoidales obtenidas



del software Trimble Business Center, de esta manera se obtuvo la ondulación geoidal (N) representada en la Tabla 15.

$$N = H - h$$

Donde:

N: Ondulación geoidal

h: Altura elipsoidal

H: Altura ortométrica

Tabla 15.

Cálculo de ondulación geoidal

ID	ALTURA ELIPSOIDAL	COTA NIVELADA	N	
PG01	4098.109	4056.467	41.642	
PG02	4087.091	4045.453	41.638	
PG03	4083.602	4041.926	41.676	
PG04	4102.329	4060.657	41.672	
PG05	4098.899	4057.223	41.676	
PG06	4101.005	4059.328	41.677	
PUNTOS DE CONTROL	PG07	4093.491	4051.837	41.654
	PG08	4112.050	4070.409	41.641
	PG09	4139.807	4098.181	41.626
	PG10	4156.225	4114.578	41.647
	PG11	4102.671	4061.002	41.669
	PG12	4086.568	4044.894	41.674
	PG13	4066.726	4025.048	41.678
	PG15	4149.414	4107.756	41.658
	PG16	4171.197	4129.540	41.657
	T002	4082.128	4040.460	41.668
	T003	4099.892	4058.218	41.674
PUNTOS TEST	T004	4118.045	4076.394	41.651
	T005	4105.270	4063.614	41.656
	T006	4173.622	4131.987	41.635

Fuente: Elaboración propia.



3.2.7. Estimación de las variables independientes

Las variables independientes son los valores X, Y representada en la Tabla 16.

Tabla 16.

Datos para las variables independientes

ID	Este(m)	Norte(m)
PG01	385453.875	8250017.461
PG02	385885.184	8250478.567
PG03	386236.695	8250775.781
PG04	386610.782	8251185.052
PG05	387187.581	8250979.737
PG06	386714.941	8250563.830
PG07	386373.386	8250216.540
PG08	385979.564	8249886.596
PG09	386458.371	8249622.752
PG10	386929.425	8249964.217
PG11	387260.201	8250415.951
PG12	387742.451	8250813.998
PG13	388185.020	8250556.246
PG15	387331.381	8249818.972
PG16	386918.671	8249462.734

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 17.

Promedio de las variables independientes

X(metros)	Y(metros)
386751.169	8250317.229

Fuente: Elaboración propia.

3.3. PROCESAMIENTO DE DATOS PARA EL OBJETIVO 1

3.3.1. Ecuación de regresión lineal múltiple

La ecuación de la regresión lineal múltiple, se estimó por el método de mínimos cuadrados con variables dependientes e independientes, logrando un resultado óptimo en el polinomio de grado 5, los parámetros obtenidos se muestran en la Tabla 18; las ondulaciones estimadas se representan en la Tabla 19 y las predicciones de los puntos test se muestran en la Tabla 20.

$$N = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 XY + \beta_4 X^2 + \beta_5 Y^2 + \beta_6 X^3 + \beta_7 Y^3 \dots \beta_i X^n + \beta_{i+1} Y^n + \varepsilon$$

siendo $n=5$, $i=11$ polinomio de grado 5

Tabla 18.

Parámetros estimados de la regresión lineal múltiple

ID	PARAMETROS ESTIMADOS
β_0	41.66367035
β_1	-0.000543557
β_2	-0.001383259
β_3	-0.000166251
β_4	-0.000187184
β_5	-3.67E-05
β_6	-1.69E-05
β_7	-0.000105118
β_8	1.19E-06
β_9	1.29E-07
β_{10}	8.98E-08
β_{11}	1.47E-06

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 19.

Ondulaciones geoidales estimadas y residuos

CODIGO	N	PREDICCION	RESIDUAL
PG01	41.642	41.64146902	0.00053098
PG02	41.638	41.64989302	-0.01189302
PG03	41.676	41.67148764	0.00451236
PG04	41.672	41.67103697	0.00096303
PG05	41.676	41.67902228	-0.00302228
PG06	41.677	41.66823191	0.00876809
PG07	41.654	41.65617728	-0.00217728
PG08	41.641	41.62889595	0.01210405
PG09	41.626	41.63417305	-0.00817305
PG10	41.647	41.65605557	-0.00905557
PG11	41.669	41.66490198	0.00409802
PG12	41.674	41.67632365	-0.00232365
PG13	41.678	41.67736724	0.00063276
PG15	41.658	41.65316236	0.00483764
PG16	41.657	41.65391209	0.00308791

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 20.

Ondulaciones geoidales predecidas de los puntos test y residuos

CODIGO	N	PREDICCION	ERROR
T002	41.668	41.6639	0.0041
T003	41.674	41.6746	-0.0006
T004	41.651	41.6500	0.0010
T005	41.656	41.6655	-0.0095
T006	41.635	41.6479	-0.0129

Fuente: Elaboración propia.

3.3.2. Entrenamiento de la red neuronal artificial

Desde el punto SAT-002, se densifico un conjunto de 20 puntos en el área de estudio, de los cuales se dividen en dos subconjuntos, el primer subconjunto de 15 puntos se destinó para el entrenamiento RNA, y el segundo subconjunto de 05 puntos para la validación de datos del entrenamiento puntos test.



Definido los dos subconjuntos, se procedió a realizar la lista de puntos de entrenamiento, con valores de Este, Norte y ondulación geoidal como se muestran en las Tablas 21 y 22.

Tabla 21.

Subconjunto para el entrenamiento RNA

ID	Este(m)	Norte(m)	N
PG01	385453.875	8250017.461	41.642
PG02	385885.184	8250478.567	41.638
PG03	386236.695	8250775.781	41.676
PG04	386610.782	8251185.052	41.672
PG05	387187.581	8250979.737	41.676
PG06	386714.941	8250563.83	41.677
PG07	386373.386	8250216.54	41.654
PG08	385979.564	8249886.596	41.641
PG09	386458.371	8249622.752	41.626
PG10	386929.425	8249964.217	41.647
PG11	387260.201	8250415.951	41.669
PG12	387742.451	8250813.998	41.674
PG13	388185.020	8250556.246	41.678
PG15	387331.381	8249818.972	41.658
PG16	386918.671	8249462.734	41.657

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 22.

Subconjunto para la validación de puntos test

ID	Este(m)	Norte(m)	N
T002	386318.239	8250560.722	41.668
T003	387203.113	8250751.413	41.674
T004	386488.632	8249944.498	41.651
T005	386922.350	8250384.638	41.656
T006	387070.191	8249723.880	41.635

Fuente: Elaboración propia.

3.3.2.1. Estructura de la red neuronal artificial

La red neuronal tiene como datos de entrada las coordenadas Este, Norte y ondulación geoidal mostradas en las Tablas 23 y 24, se estableció una arquitectura de tres capas, una (01) capa de entrada con 2 neuronas, una (01) capa oculta con 15 neuronas, una (01) capa de salida con una neurona representada en la Figura 24.

Tabla 23.

Datos para la capa de entrada

ID	Este(m)	Norte(m)
PG01	385453.875	8250017.461
PG02	385885.184	8250478.567
PG03	386236.695	8250775.781
PG04	386610.782	8251185.052
PG05	387187.581	8250979.737
PG06	386714.941	8250563.830
PG07	386373.386	8250216.540
PG08	385979.564	8249886.596
PG09	386458.371	8249622.752
PG10	386929.425	8249964.217
PG11	387260.201	8250415.951
PG12	387742.451	8250813.998
PG13	388185.020	8250556.246
PG15	387331.381	8249818.972
PG16	386918.671	8249462.734

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 24.

Datos para la capa de salida

ID	N
PG01	41.642
PG02	41.638
PG03	41.676
PG04	41.672
PG05	41.676
PG06	41.677

PG07	41.654
PG08	41.641
PG09	41.626
PG10	41.647
PG11	41.669
PG12	41.674
PG13	41.678
PG15	41.658
PG16	41.657

Fuente: Elaboración propia.

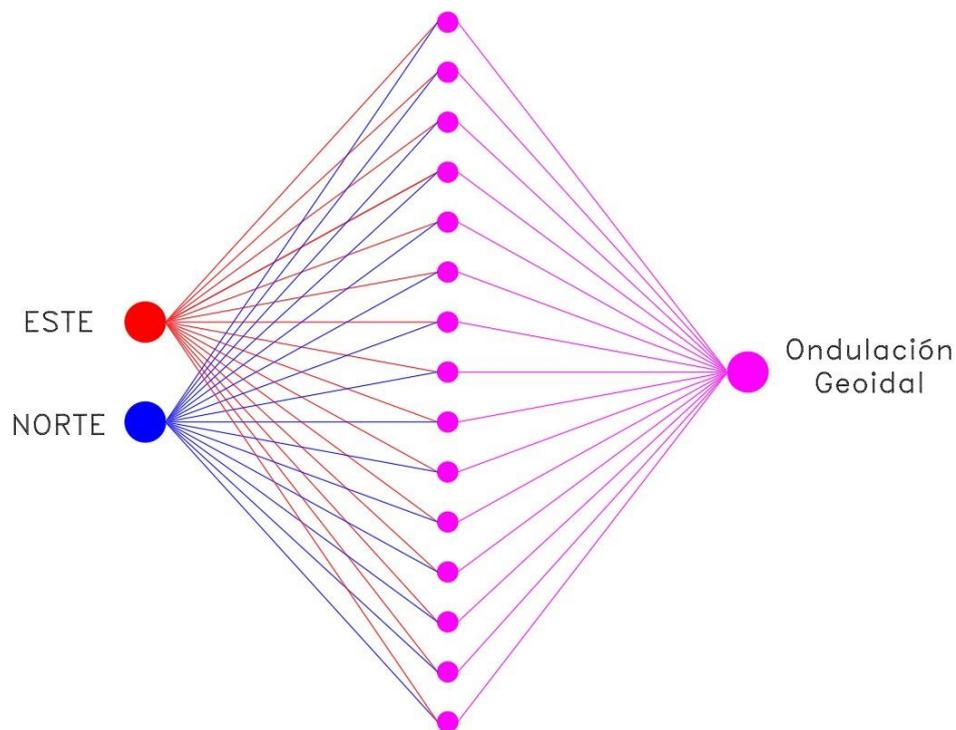


Figura 24. Arquitectura de la red neuronal artificial

Fuente: Elaboración propia.

Se ingresó los datos Este y Norte para la capa de entrada y los datos de ondulación geoidal para la capa de salida, en el software Matlab 2017b. Los datos se adecuaron a la forma matricial transpuesta en formato .xlsx, para utilizar la opción “Import Data”, que se encuentra en el ribbon del software Matlab 2017b, que cumple la función de importar los datos como se evidencia en la Figura 25.

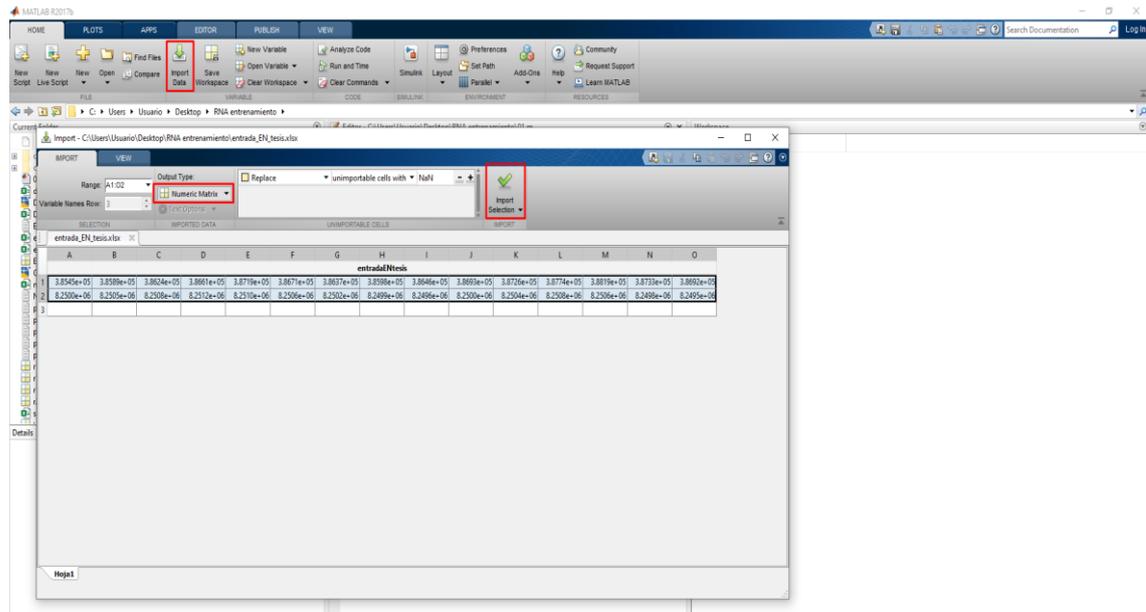


Figura 25. Importación de datos de entrada, test y malla ondulatoria
Fuente: Captura de pantalla Matlab 2017b.

Importado los datos de entrada, test y la malla ondulatoria, se procedió a llamar el comando “nntool”, desde el interfaz de comandos, el cual nos muestra la ventana Neural Network/ Data Manager, que permite crear, importar, exportar, analizar datos y configurar las redes neuronales artificiales como se muestra en la Figura 26.

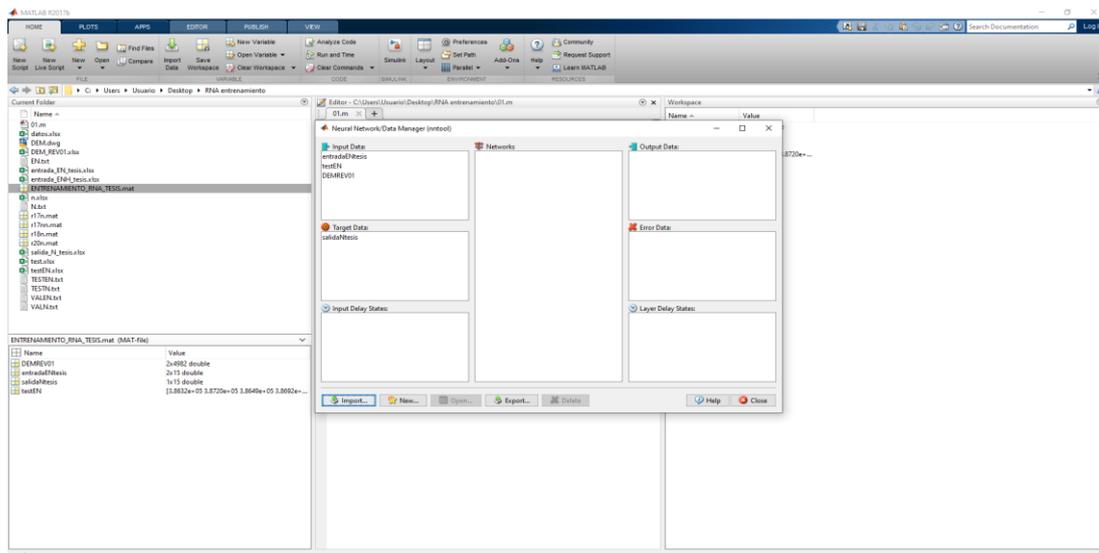


Figura 26. Neural Network/Data Manager, datos importados
Fuente: Captura de pantalla Matlab 2017b.

A continuación, elegimos la opción “new” para crear la red neuronal artificial, se configuro los parámetros de entrenamiento, como se muestra en la figura 27.

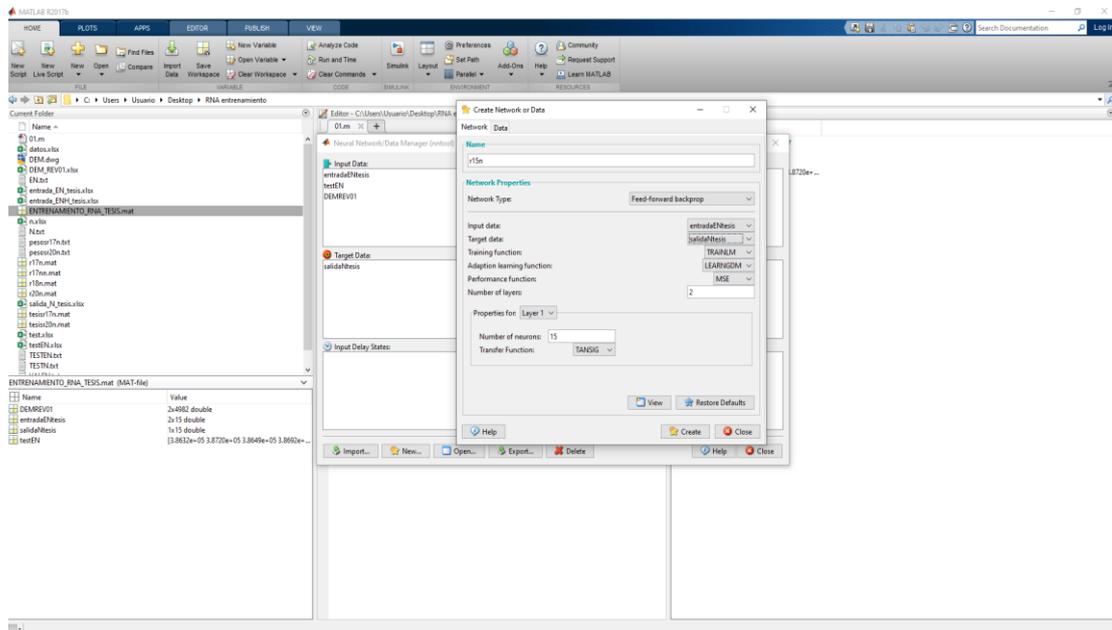


Figura 27. Configuración de la red neuronal para el entrenamiento
Fuente: Captura de pantalla Matlab 2017b.

Al finalizar la configuración de parámetros de la red neuronal artificial se selecciona a la opción “create”, seguidamente en la ventana network se muestra la red neuronal artificial creada con dos (02) capas de entrada, una (01) capa oculta y una (01) capa de salida como se muestra en la Figura 28.

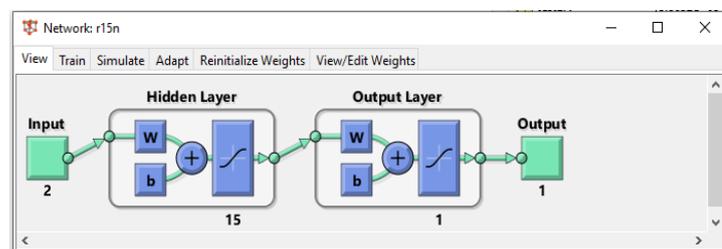


Figura 28. Configuración grafica de la red neuronal artificial
Fuente: Captura de pantalla Matlab 2017b.

En la Figura 29, se muestra la ventana Network y específicamente en la pestaña “view/Edit Weights”, podemos apreciar los pesos sinápticos y las bias o vectores umbrales, pre entrenamiento.

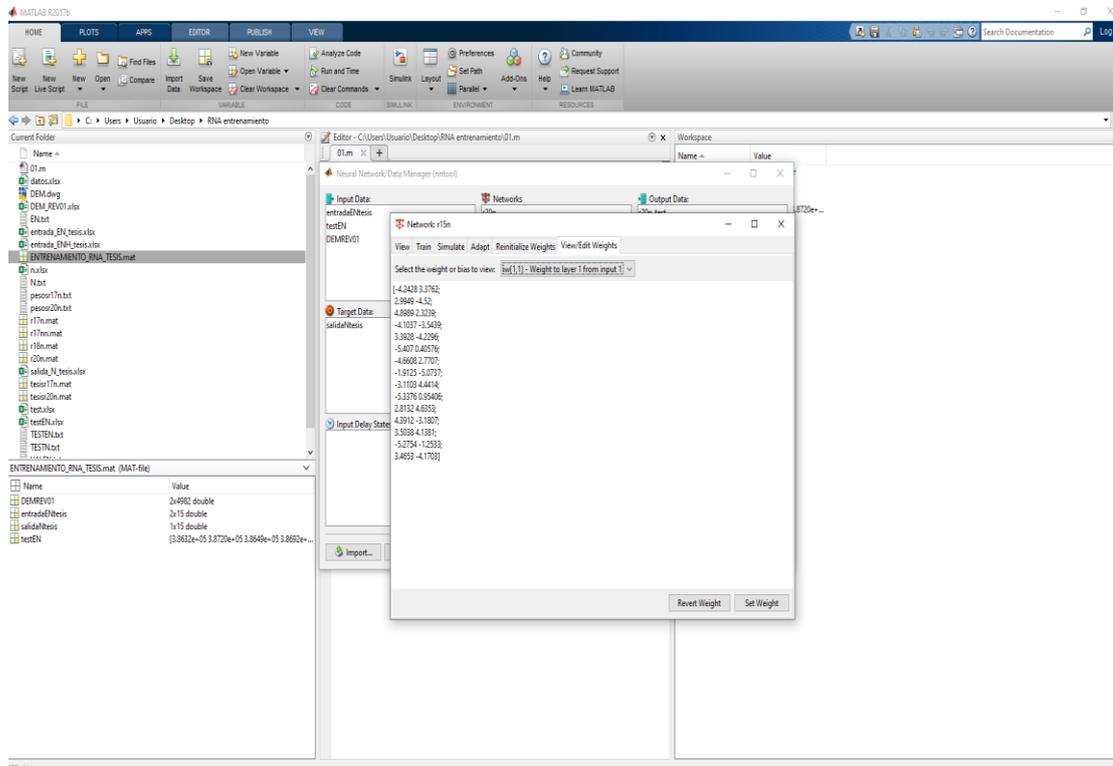


Figura 29. Pesos sinápticos pre entrenamiento
Fuente: Captura de pantalla Matlab 2017b.

Para lograr que la red neuronal artificial se entrene adecuadamente, se consideró una serie de parámetros que permitirá un aprendizaje óptimo, el cual se muestra en la Figura 30.

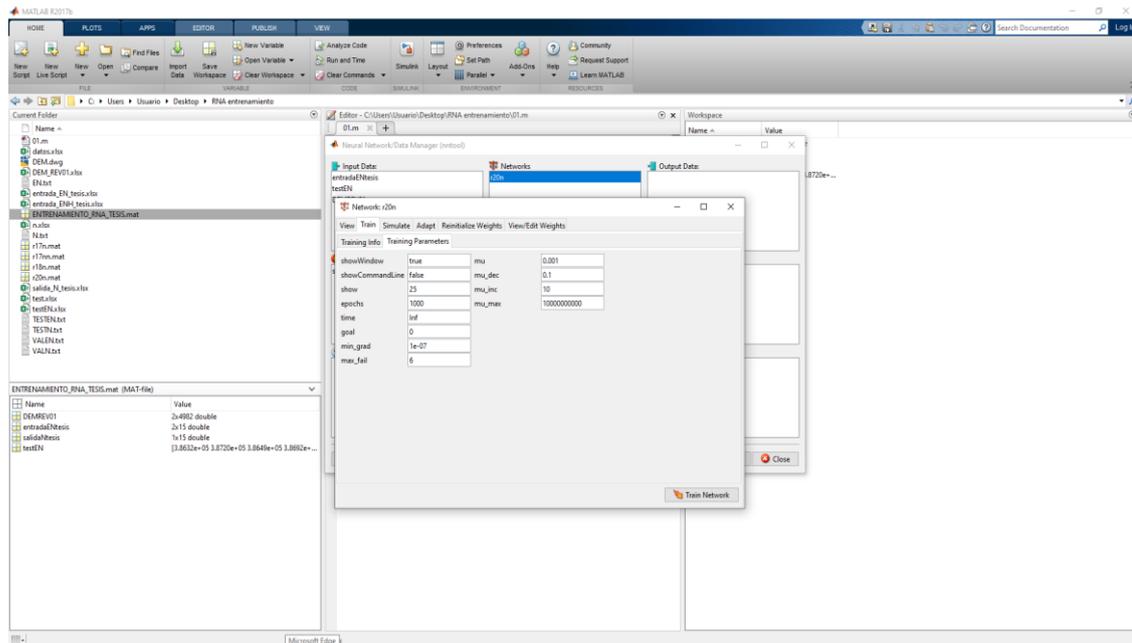


Figura 30. Parámetros de entrenamiento de la red neuronal artificial
Fuente: Captura de pantalla Matlab 2017b.

Concluido la configuración de parámetros, se procedió con la asignación de datos de entrada y salida en la pestaña “train”, como se muestra en la Figura 31, seguidamente iniciamos el entrenamiento dirigiéndonos al botón Trainig Network (entrenar red).

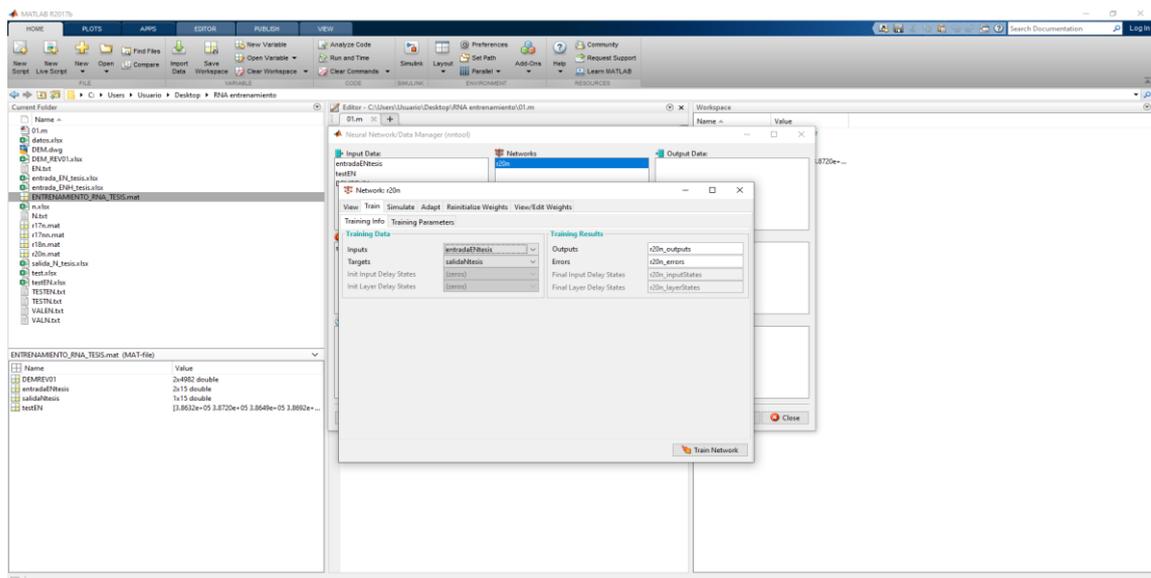


Figura 31. Datos asignados para la red neuronal artificial
Fuente: Captura de pantalla Matlab 2017b.

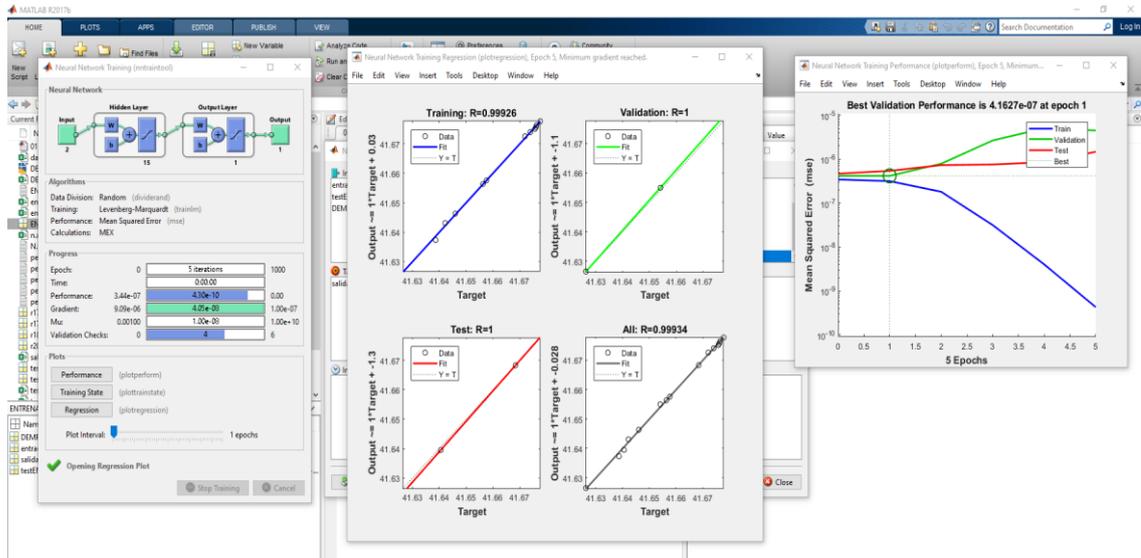


Figura 32. Reporte de aprendizaje de la red neuronal artificial
Fuente: Captura de pantalla Matlab 2017b.

En la Figura 32, se muestra el reporte del entrenamiento la red neuronal artificial, seguidamente se verifico los residuales con el objetivo de evaluar el resultado de las iteraciones, de forma paralela se evaluó la matriz de pesos sinápticos pre y post entrenamiento representados en las Tablas 25 y 26.

Tabla 25.

Pesos sinápticos pre entrenamiento

PESOS SINAPTICOS PRE ENTRENAMIENTO	
-1.0342	5.3226
1.1747	5.2934
3.1884	-4.3857
3.3625	-4.2537
3.9083	3.7583
4.0447	3.6111
4.3787	-3.198
5.3459	0.90608
-5.1618	-1.66
3.7563	-3.9103
-0.5657	5.3926
4.6133	-2.8492
3.989	-3.6726
-4.6256	-2.829



3.6714 -3.99

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 26.

Pesos sinápticos post entrenamiento

PESOS SINAPTICOS POST ENTRENAMIENTO	
-1.0885	5.4732
1.215	5.8069
3.1784	-4.8078
4.2065	-3.5022
3.9082	3.6117
4.0872	3.5901
4.5554	-3.3211
5.2689	1.1982
-5.466	-1.8618
3.8341	-3.9781
-0.61433	5.2343
4.675	-2.7857
4.0716	-3.5924
-4.8699	-2.9069
3.6667	-4.0138

Fuente: Elaboración propia.

3.3.2.2. Predicción de ondulaciones geoidales en los puntos Test

Validado el entrenamiento de la red neuronal artificial, se procedió a realizar la predicción de los puntos test, con entradas Norte y Este, bajo el mismo procedimiento antes descrito, se analizó los residuales de cada punto test, con el objetivo de evaluar la curva de aprendizaje, como se ve en la Tabla 27.

Tabla 27.

Ondulaciones geoidales predecidas de los puntos test por el método de RNA

ID	N	PREDICCIÓN RNA	ERROR
T002	41.668	41.6681	-0.0001
T003	41.674	41.6776	-0.0036
T004	41.651	41.6309	0.0201
T005	41.656	41.6727	-0.0167
T006	41.635	41.6494	-0.0144

Fuente: Elaboración propia.

3.3.3. Para el objetivo específico 1

3.3.3.1. Generación de la malla de coordenadas para la predicción con los modelos matemáticos

Para generar la ondulación geoidal en toda el área de estudio, se obtuvo la malla de coordenadas Norte y Este, equidistantes cada 25 x 25 metros, elaborado en el software civil 3D 2020, obteniendo un total de 4982 puntos como se aprecia en la Figura 33, dichos puntos ingresaron a los modelos matemáticos, para la predicción de la ondulación geoidal.

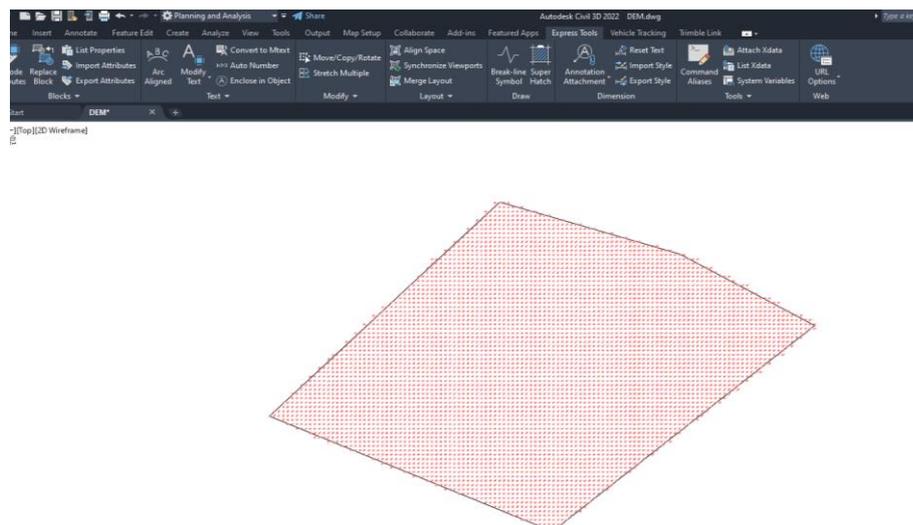


Figura 33. Generación de la malla de coordenadas Norte y Este
Fuente: Captura de pantalla Civil 3D.

3.3.4. Modelamiento 2D y 3D de las ondulaciones geoidales predecidas

Realizado la predicción de la ondulación geoidal con los modelos matemáticos, se procedió con el modelamiento 2D y 3D en el software Golden Surfer 15, previa importación de la malla predecida en las columnas Este, Norte y ondulación geoidal, utilizando el método de interpolación de kriging, obteniendo los resultados siguientes:

3.3.4.1. Modelo obtenido por el método de regresión lineal

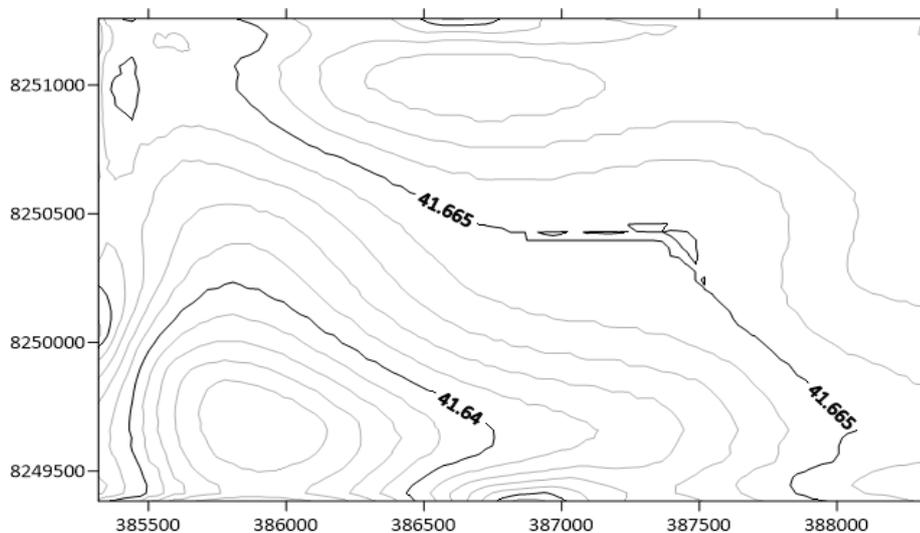


Figura 34. Plano de ondulaciones geoidales predecidas por el método de regresión lineal múltiple
Fuente: Captura de pantalla Golden Surfer 15.

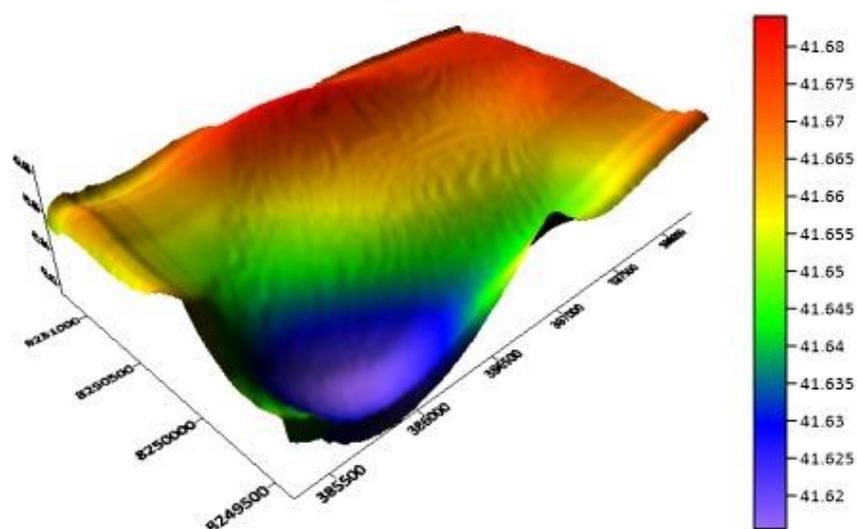


Figura 35. Modelo 3D de las ondulaciones geoidales predecidas por el método de regresión lineal múltiple
Fuente: Captura de pantalla Golden Surfer 15.

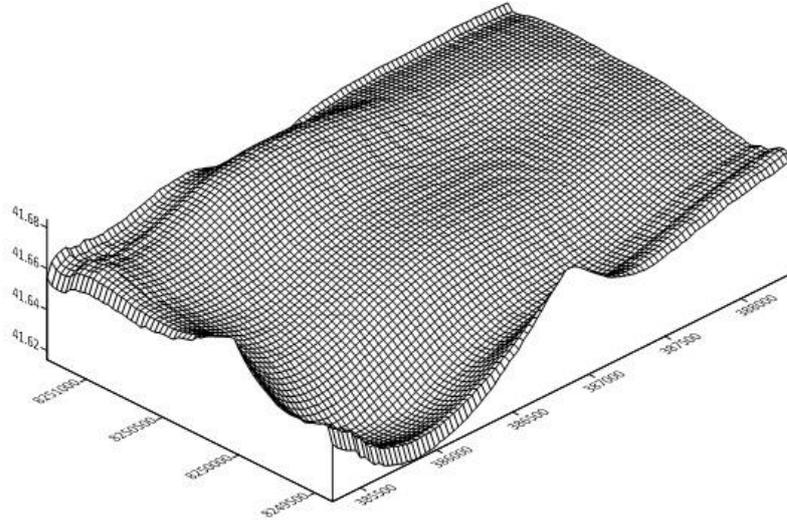


Figura 36. Malla 3D, de las ondulaciones geoidales predecidas por el método de regresión lineal múltiple
Fuente: Captura de pantalla Golden Surfer 15.

3.3.4.2. Modelo obtenido por el método de redes neuronales artificiales

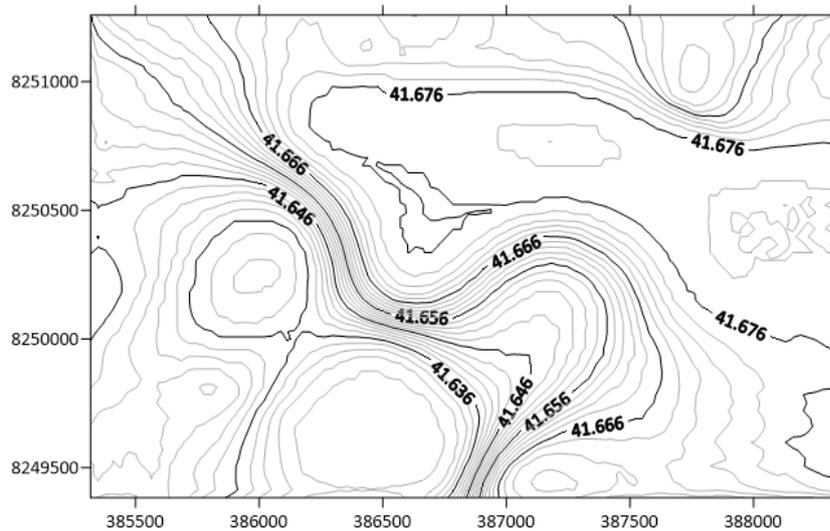


Figura 37. Plano de ondulaciones geoidales predecidas por el método de redes neuronales artificiales
Fuente: Captura de pantalla Golden Surfer 15.

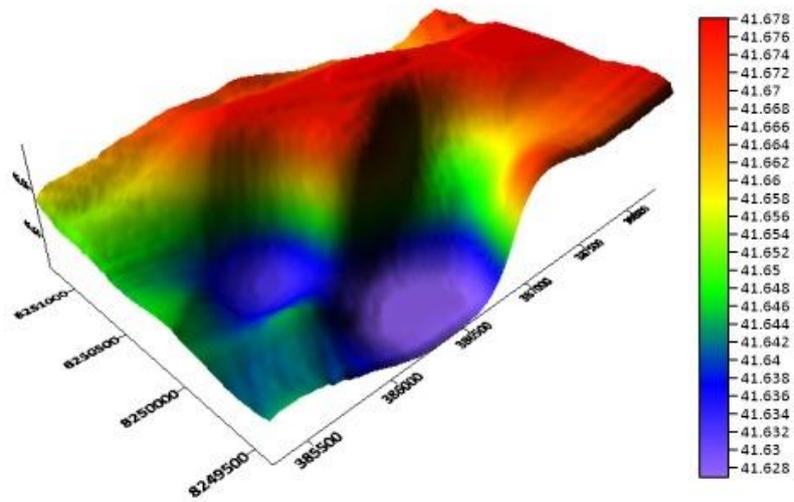


Figura 38. Modelo 3D de las ondulaciones geoidales predecidas por el método de redes neuronales artificiales
Fuente: Captura de pantalla Golden Surfer 15.

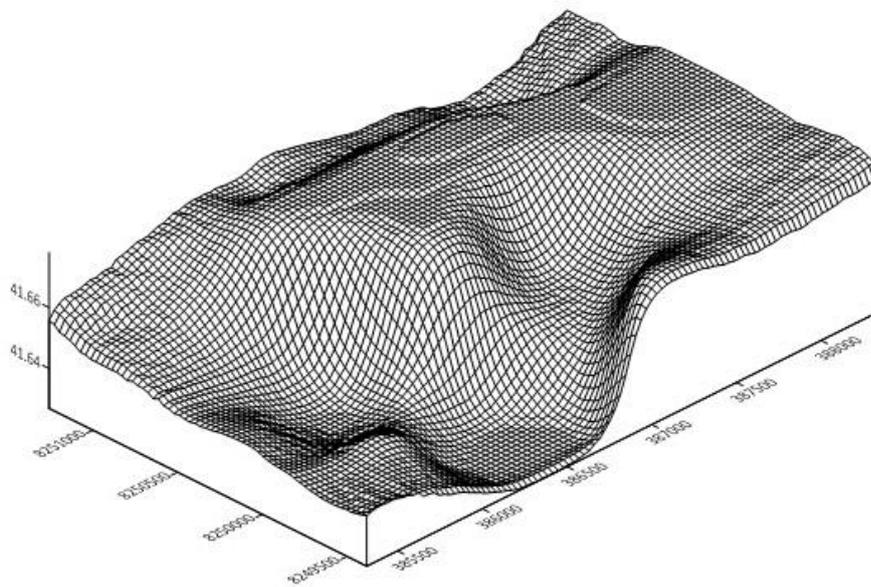


Figura 39. Malla 3D, de las ondulaciones geoidales predecidas por el método de redes neuronales artificiales
Fuente: Captura de pantalla Golden Surfer 15.



CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. TIPO DE INVESTIGACION Y ESTADÍSTICA

La presente investigación es de tipo cuantitativa, porque los datos muestrales provienen de la medición; Es aplicado, porque está centrado en encontrar mecanismos que permiten lograr un objetivo concreto, además está referida a un tiempo y espacio; con un nivel de significancia de 5%; y finalmente se aplica el estadístico de prueba t Student para muestras independientes.

4.1.1. Hipótesis estadística

$H_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$, cuando en la diferencia de los residuos de ondulación geoidal son iguales a 0, la hipótesis es nula.

$H_1 = \mu_1 - \mu_2 \neq 0$, cuando en la diferencia de los residuos de ondulación geoidal son diferentes, la hipótesis es alterna.

4.1.2. Análisis estadístico

Para el análisis del objetivo específico 2, se realiza la prueba estadística t Student de dos grupos independientes con contraste bilateral o de dos colas, para determinar si el modelo matemático difiere o es igual al valor conocido (N).

La prueba de t Student corresponde a la siguiente formula:



$$t_c = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}; \text{ con } n_1 + n_2 - 2 \text{ GL}$$

Donde:

\bar{X}_1 y \bar{X}_2 : media de las muestras 1 y 2

s_1^2 y s_2^2 : varianzas insesgadas de las muestras 1 y 2

n_1 y n_2 : tamaño de las muestras 1 y 2

T de distribución como una T de student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad

4.1.3. Análisis de muestras

\bar{X}_1 y \bar{X}_2 son las diferencias de las medias de las ondulaciones geoidales conocidas y predecidas con los modelos matemáticos.

4.1.4. Variables independientes

Las variables independientes son las coordenadas Este y Norte.

4.1.5. Variables dependientes

Las variables dependientes son las ondulaciones geoidales predecidas.



4.2. ANALISIS ESTADISTICO

4.2.1. Para objetivos específico 2

Comparar las aproximaciones ondulatorias obtenidas mediante los modelos matemáticos respecto a las alturas conocidas, en el cual se utilizó la herramienta IBM SPSS Statistics 21, en su versión educacional.

4.2.2. Estadística para regresión lineal múltiple

4.2.2.1. Hipótesis

H0: Es posible determinar la malla ondulatoria mediante el modelo matemático regresión lineal múltiple, que permite obtener una precisión confiable.

H1: Es posible determinar la malla ondulatoria mediante el modelo matemático regresión lineal múltiple, que no permite obtener una precisión confiable.

Tabla 28.

Cuadro de comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de los métodos GNSS/ nivelación y regresión lineal múltiple

ID	N	PREDICCIÓN	ERROR
T002	41.668	41.6639	0.0041
T003	41.674	41.6746	-0.0006
T004	41.651	41.6500	0.0010
T005	41.656	41.6655	-0.0095
T006	41.635	41.6479	-0.0129

Fuente: Elaboración propia.

Donde la media para la ondulación (N) conocidas es:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n} = 41.6568$$

Su desviación estándar es:

$$S_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (c_i + X_c)^2}{n - 1}} = 0.0147624$$

Donde la media para la predicción de regresión lineal múltiple es:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n} = 41.0664$$

Su desviación estándar es:

$$S_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (c_i + X_c)^2}{n - 1}} = 0.0112253$$

Se compara las medias de las ondulaciones geoidales conocidas (N) y las ondulaciones predecidas por el método de regresión lineal múltiple, con la prueba t Student para dos muestras independientes.

Tabla 29.

Estadístico del método de regresión lineal múltiple

Estadísticos de grupo					
METODO		N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
N	N	5	41.6568	0.01476	0.00660
	R.L.M.	5	41.6604	0.01123	0.00502

Fuente: Reporte de software IBM SPSS Statistics 21.

Tabla 30.

Prueba t para igualdad de medias del método de regresión lineal múltiple

	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas				Prueba T para la igualdad de medias				95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	F	Sig.	t	Gl.	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Inferior	Superior	
Se han asumido varianzas iguales	0.188	0.676	-0.428	8	0.680	-0.00355	0.00829	-0.02267	0.01558	
No se han asumido varianzas iguales			-0.428	7.467	0.681	-0.00355	0.00829	-0.02291	0.01582	

Fuente: Reporte de software IBM SPSS Statistics 21.

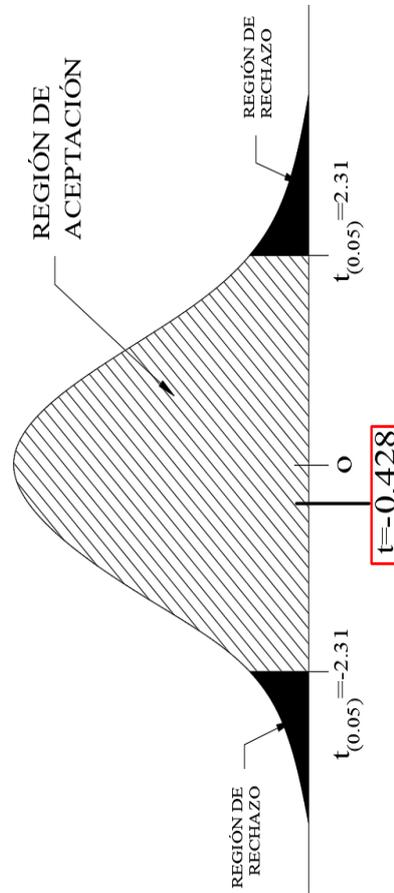


Figura 40. Región de aceptación t Student para regresión lineal múltiple
Fuente: Elaboración propia.

La prueba de t Student para muestras independientes por el método de regresión lineal múltiple; por lo cual, se acepta la hipótesis nula H_0 , es decir que permite obtener un resultado confiable con un ($t_{0.05} = -0.428$; Gl.: 8; $p > 0.05$), encontrándose en la región de no rechazo de la hipótesis nula H_0 , por lo tanto, se rechaza la hipótesis alterna H_1 .

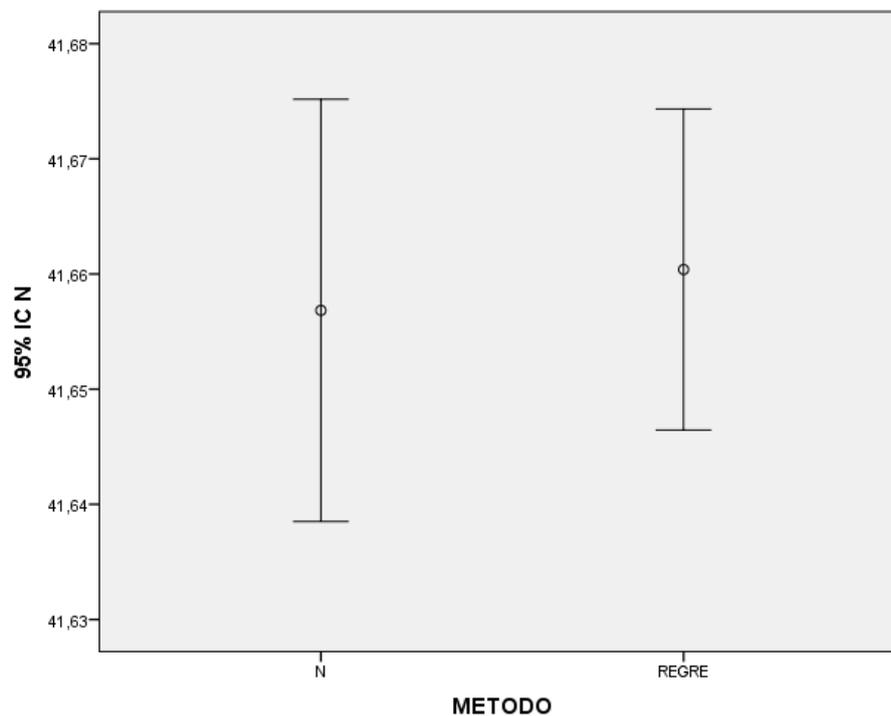


Figura 41. Comparación de residuos del método de regresión lineal múltiple
Fuente: Reporte de software IBM SPSS Statistics 21.

Como se muestra en la figura 42, no existe diferencia significativa entre las medias de las ondulaciones geoidales predecidas por el método de regresión lineal múltiple, respecto a las ondulaciones conocidas obtenidas mediante GNSS/nivelación.

4.2.3. Estadística para red neuronal artificial

4.2.3.1. Hipótesis

H0: Será posible determinar el modelo ondulatorio local aplicando el modelo matemático redes neuronales artificiales, que permite obtener una precisión confiable.

H1: Será posible determinar el modelo ondulatorio local aplicando el modelo matemático redes neuronales artificiales, que no permite obtener una precisión confiable.

Tabla 31.

Cuadro de comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de los métodos GNSS/ nivelación y redes neuronales artificiales

ID	N	PREDICCIÓN RNA	ERROR
T002	41.668	41.6681	-0.0001
T003	41.674	41.6776	-0.0036
T004	41.651	41.6309	0.0201
T005	41.656	41.6727	-0.0167
T006	41.635	41.6494	-0.0144

Fuente: Elaboración propia.

Donde la media para la ondulación (N) conocidas es:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n} = 41.6568$$

Su desviación estándar es:

$$S_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (c_i - X_c)^2}{n - 1}} = 0.0147624$$



Donde la media para la predicción de red neuronal artificial es:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n} = 41.6597$$

Su desviación estándar es:

$$S_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (c_i - X_c)^2}{n - 1}} = 0.0193358$$

Tabla 32.

Estadístico del método de redes neuronales artificiales

Estadísticos de grupo					
METODO		N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
N	N	5	41.6568	0.01476	0.00660
	RNA	5	41.6597	0.01934	0.00865

Fuente: Reporte de software IBM SPSS Statistics 21.

Tabla 33.

Prueba t para igualdad de medias del método de RNA

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas				Prueba T para la igualdad de medias			
	F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	95% Intervalo de confianza para la diferencia Inferior	Superior
Se han asumido varianzas iguales	0.823	0.391	-0.267	8	0.797	-0.00290	0.01088	-0.02799	0.02219
No se han asumido varianzas iguales			-0.267	7.481	0.797	-0.00290	0.01088	-0.02829	0.02249

Fuente: Reporte de software IBM SPSS Statistics 21.

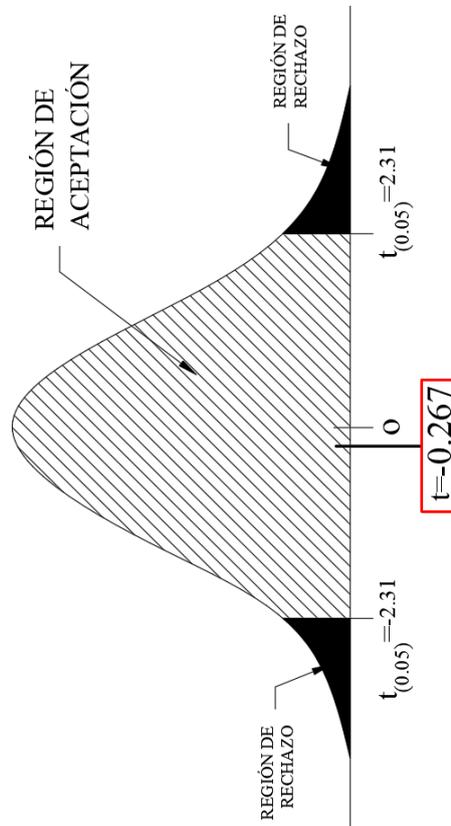


Figura 42. Región de aceptación t Student para la red neuronal artificial
Fuente: Elaboración propia.

La prueba de t Student para muestras independientes del método de redes neuronales artificiales; por lo cual, se acepta la hipótesis nula H_0 , es decir que permite obtener un resultado confiable con un ($t_{0.05} = -0.267$; Gl.: 8; $p > 0.05$), encontrándose en la región de no rechazo de la hipótesis nula H_0 , por lo tanto, se rechaza la hipótesis alterna H_1 .

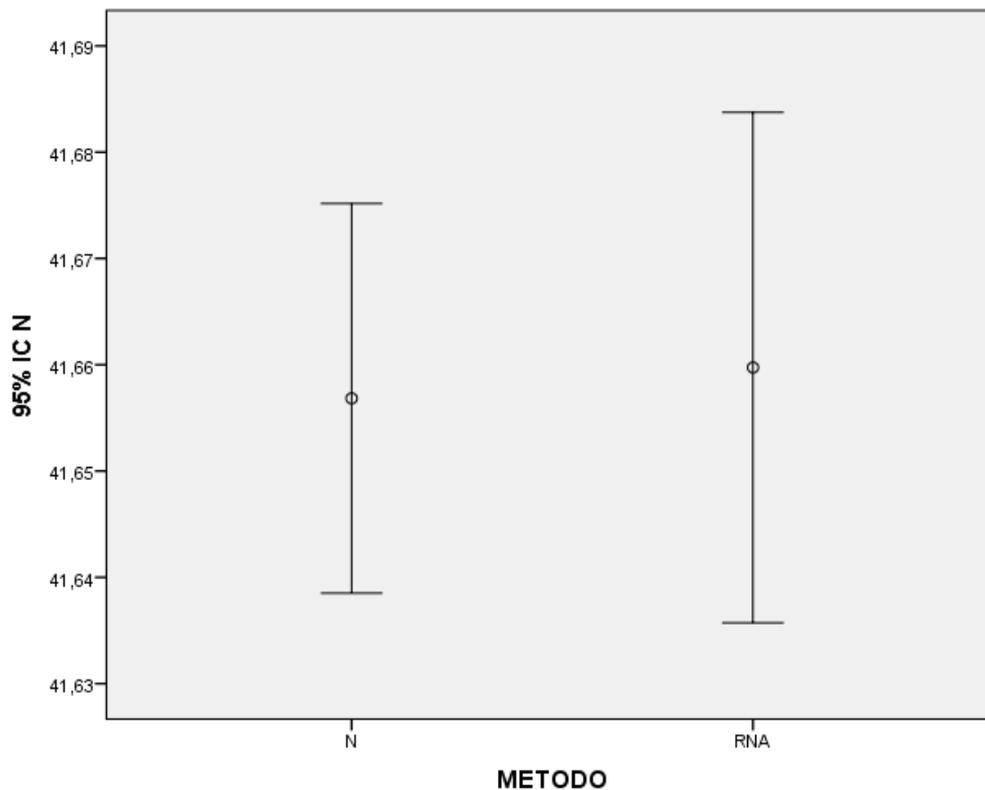


Figura 43. Comparación de residuos del método de redes neuronales artificiales
Fuente: Reporte de software IBM SPSS Statistics 21.

Como se muestra en la figura 43, no existe diferencia significativa entre las medias de las ondulaciones geoidales predecidas por el método de redes neuronales artificiales, respecto a las ondulaciones geoidales conocidas obtenidas mediante GNSS/nivelación.



V. CONCLUSIONES

Ha sido posible obtener el modelo de ondulación geoidal en la Urbanización Totorani Puno, con el método GNSS/Nivelación y los modelos matemáticos de regresión lineal múltiple y redes neuronales artificiales.

Se determinó la malla de ondulación geoidal mediante el modelo matemático de regresión lineal múltiple, que alcanzo una precisión de 0.012 m. y el modelo matemático de redes neuronales artificiales alcanzo la precisión de 0.020 m. Del análisis de resultados se observó que el método de regresión lineal carece de detalle en su modelamiento 3D, sin embargo, el método de redes neuronales artificiales muestra un detalle más sobresaliente que el método anterior. Finalmente, del análisis de modelamiento 3D se concluye que ambos métodos pueden ser empleados de acuerdo a la envergadura y criterio del proyectista.

Se logró correlacionar ambos resultados, con la prueba estadística t Student, entre los modelos matemáticos regresión lineal múltiple y redes neuronales artificiales, respecto a las alturas conocidas obtenidas por el método GNSS/Nivelación. Se determinó que la desviación estándar obtenida por el método de regresión lineal múltiple es más próxima a las alturas conocidas que fueron obtenidas mediante el método de GNSS/Nivelación puesto que se llegó a obtener un error máximo de 0.012 m.



VI. RECOMENDACIONES

Para la distribución de puntos en el área de estudio, se recomienda realizar una planificación estratégica para lograr resultados óptimos, también recomendamos usar equipos topográficos de alta precisión, con su respectivo certificado de operatividad, porque de ellos depende los resultados, para crear el modelo digital de elevaciones.

Se recomienda a los proyectistas buscar y analizar funciones matemáticas adecuadas de regresión lineal múltiple, que más se ajusten a la ondulación geoidal conocida, obtenida con el método GNSS/nivelación, con el fin de obtener residuos mínimos y un modelamiento 3D óptimo.

Para el uso de las redes neuronales artificiales, se recomienda investigar técnicas de mejor entrenamiento; en la presente investigación se inició pruebas con 10, 11, 12,...,16, 17, 18 neuronas en la capa oculta, de los cuales, el grupo de 10 a 14 y el grupo de 16 a 18, los resultados residuales se ubicaron fuera de las tolerancias, mientras con la capa oculta de 15 neuronas, los residuales se ubicaron dentro de las tolerancias.

La elección óptima del número de neuronas en la capa oculta, nos permite realizar un número mínimo de iteraciones y así, se obtiene una mejor aplicación de la red neuronal artificial.



VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acero Velo, L., & Serruto Flores, J. C. (2018). *Modelo Geoidal con Receptores GNSS en Método Cinematico y Nivelación Geométrica para la estimación de Alturas Ortométricas en la Ciudad Universitaria UNA-Puno*. Universidad Nacional del Altiplano, Puno, Puno, Perú.
- Basogain, O. X. (2021). *Redes Neuronales Artificiales y sus Aplicaciones*. Escuela Superior de Ingeniería de Bilbao.
- Capdevila, J. A. (2020). *Repositorio de Materiales Educativos Ansenuza* . Obtenido de El Sistema de Posicionamiento Global G.P.S.: <https://ansenuza.unc.edu.ar/comunidades/bitstream/handle/11086.1/1258/El%20Sistema%20de%20Posicionamiento%20Global.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Cappellotto, L., Acosta, A., Pérez, D., Orgenia, M., & Gomez, D. (2020). Determinación de alta precisión de la altura del nivel del mar alcanzada por la ingresión Belgranense para el sector norte de Buenos Aires y sur de Santa Fe y Entre Ríos. *Revista de la Asociacion Geologica Argentina*, 132.
- Dintén, Á. (2020). *Hito1*. Obtenido de Sistema de Posicionamiento PPK Para Levantamiento Fotogramétrico con Drones: <https://www.hito1.es/drones/sistema-de-posicionamiento-ppk-para-levantamiento-fotogrametrico-con-drones/>
- Friederich, J. (2009). *Mission - Data - Collaboration*. Obtenido de 2009 Workshop on Monitoring North America.



- Garafulic, C. P. (2017). *Geodesia Teoria y Practica*. Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile.
- Ibañez, Q. V. (2009). *Análisis y Diseño de Experimentos*. Puno: Editorial Universitaria.
- IGN, I. G. (diciembre de 2015). Norma Técnica Geodésica. *Especificaciones Técnicas Para Posicionamiento Geodésico Estático Relativo con Receptores del Sistema Satelital de Navegación Global*. Lima, Lima, Perú.
- IGN, I. G. (Junio de 2016). Norma Técnica Geodésica. *Especificaciones Técnicas para Levantamientos Geodésicos Verticales*. Lima, Lima, Perú.
- IGN., I. G. (2016). *Centro Nacional de Información Geográfica*. Obtenido de Geodesia: <http://www.ign.es/ign/main/index.do>
- Isasi Viñuela, P., & Galván León, I. (2004). *Redes de Neuronas Artificiales. un Enfoque Práctico*. Madrid: Pearson Prentice Hall.
- Kapquequi, T. R. (2012). *Obtención de Alturas Pseudo Ortometricas, Aplicando la Tecnología GPS*. Universidad Mayor de San Andres, La Paz, Bolivia. Obtenido de <https://repositorio.umsa.bo/xmlui/bitstream/handle/123456789/15392/PG-1158-Ticono%20Kapquequi%20c%20Ronald%20Fabio.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Larrañaga, P., Inza, I., & Moujahid, A. (2018). *Redes Neuronales*. Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea.
- Llano Cruz, H., & Gonzales Aceituno, J. L. (2018). *Generación de Modelo Digital de Elevaciones (MDE) de Ondulaciones Geoidales Usando el Metodo*



GNSS/Nivelacion y Redes Neuronales Artificiales a Partir de Datos Dipersos.

Universidad Nacional del Altiplano, Puno, Puno, Perú.

Matich, D. J. (2001). *Redes Neuronales: Conceptos Básicos y Aplicaciones*. Universidad Tecnológica Nacional. Obtenido de https://www.frro.utn.edu.ar/repositorio/catedras/quimica/5_anio/orientadora1/moograias/matich-redesneuronales.pdf

Mendoza, D. J. (2020). *Topografía y Geodesia*. Lima, Lima, Perú: Maraucano E.I.R.L.

Palacios, B. F. (2003). *Herramientas en GNU/Linux para estudiantes universitarios*. Obtenido de *Redes Neuronales con GNU/Linux*: https://www.ibiblio.org/pub/linux/docs/LuCaS/Presentaciones/200304curso-glisa/redes_neuronales/curso-glisa-redes_neuronales-html/x38.html

Pedro, G. C. (2017). *Geodesia Teoria y Practica*. Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile.

Peñafiel, J., & Zayas, J. (2001). *Fundamentos del Sistema GPS y Aplicaciones en la Topografía*. Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía.

SEFO, S. E. (2008). *Metodología de la Investigación*. Obtenido de Prueba “t” de Student: <https://www.scientific-european-federation-osteopaths.org/wp-content/uploads/2019/01/Prueba-t-de-Student.pdf>

Sergio, O. (2015). *Ingeniería y Medio Ambiente Axisima (Imagen)*. Obtenido de Nivelación: <http://axisima.com/en-que-consiste-la-nivelacion-topografica/>

Tierra, C. A. (2009). evaluación del EGM08 y EGM96 en el ecuador a partir de datos de GPS y nivelación geométrica. *Revista Geospacial*, 70-78.



Toral, B. J. (2020). *Universidad de Guadalajara*. Obtenido de Redes Neuronales:
http://www.cucei.udg.mx/sites/default/files/pdf/toral_barrera_jamie_areli.pdf

UNED, U. E. (Abril de 2016). *Montañismo*, 1.0. Recuperado el 15 de Enero de 2021, de
Redes de Sistemas de Posicionamiento Global:
https://multimedia.uned.ac.cr/pem/montanismo/1navegacion/sistema_navegacion_satelite.html#sidr-id-menu-button

Vicente, D. J. (28 de mayo de 2018). *CatalunyaPRESS*. Obtenido de Asi es La Verdadera
Forma de la Tierra: <https://www.catalunyapress.es/texto-diario/mostrar/1094551/asi-verdadera-forma-planeta-tierra>

Yañez, Y. A. (2018). *El Modelo Gravimétrico Mundial EGM96 en la determinación de cotas ortométricas y su relación con las cotas geométricas de los pilares de nivelación de la Red Geodésica Nacional*.



ANEXOS

Anexo1. Ficha técnica del IGN



INSTITUTO GEOGRÁFICO NACIONAL CENTRO DE PROCESAMIENTO GEODÉSICO



CERTIFICADO DE PUNTO GEODÉSICO

El Instituto Geográfico Nacional, certifica el establecimiento del punto geodésico **PUN01003** de orden "C", de la empresa **SAMANTHA S.R.LTDA**, el cual cumple con los requisitos establecidos según Norma Técnica Geodésica, de acuerdo las siguientes características:



CÓDIGO DEL PUNTO GEODÉSICO		PUN01003	
COORDENADAS WGS-84			
UTM		GEODÉSICAS	
NORTE	8250003.762 m	LATITUD	15°49'34.36480" S
ESTE	386936.790 m	LONGITUD	70°03'20.84310" O
ZONA	19 Sur	ALT. ELIPSOIDAL	4152.147 m
Datos Generales:			
- ORDEN: C			
- UBICACIÓN (Prov. – Dpto.): PUNO - PUNO			
- ESTACIÓN GNSS BASE: JULIACA (PU02) - 2016			
- ÉPOCA DE OBSERVACIÓN: SEPTIEMBRE 2016			
- NÚM. CORRELATIVO: 280 -2017/IGN/DGC/DG/CPG			



Lima, 25 de mayo de 2017

DNI 44530996
MARIO CESAR MENDOZA DEL AGUILA
CAS
Especialista GNSS del CPG



S. 00060206-O
HECTOR SAAVEDRA CHAVEZ
TICSUS EP
Sub Jefe del CPG

Anexo 2. Certificación de operatividad del receptor GNSS

- SERVICIOS TOPOGRÁFICOS
- CARRETERAS - CANALES
- TUBERÍAS - MONTAJE
- REPRESAS - FUENTES - LINEAS
- MINERÍA SUPERFICIAL
- MINERÍA SUBTERRÁNEA
- PUNTOS GEODÉSICOS (fast static)

CERTIFICADO DE OPERATIVIDAD

CERTIFICATE OF OPERATION

Mant. General

Reparación

Operatividad

Garantía

Nuevo

DATOS DEL EQUIPO

Equipo	RECEPTOR GNSS	Persona Natural o Jurídica	JASMANI YOVANI FLORES TEVES
Fabricante	SOUTH	Dirección	JR. GAMALIEL CHURATA N° 351 - PUNO
Modelo	GALAXY G1	RUC / DNI	20601761174
N° Serie	S82554117134095		

DATOS DEL CLIENTE

CERTIFICADO DE OPERATIVIDAD

Nro	06-02/2020	Imagen de Receptor	
Fecha	15/02/2020		

Geotop AQP E.I.R.L.:

Certifica que el equipo topografico arriba descrito cumple con las especificaciones técnicas de la fábrica y los estándares internacionales establecidos.

En las pruebas efectuadas en Tiempo real los equipos, estos se encuentran dentro de las tolerancias del fabricante.

PRECISIÓN LEVANTAMIENTO GPS Post Proceso (Estatic & Fast Estatic)

HORIZONTAL	0.25 mm + 1 ppm RMS
VERTICAL	0.5 mm + 1 ppm RMS

FECHA DE MANTENIMIENTO

Fecha	Mantenimiento	Prueba de Operatividad	Fecha de Vencimiento	Observación
15/02/2020	x	x	15/07/2020	% 100 OPERATIVO

Responsable Técnico J. Pio Vitorino Andrade	GERENTE GENERAL GEOTOP AQP E.I.R.L.
 Ing. J. Pio Vitorino Andrade GERENTE SERV. TÉCNICO	

ORD. N° 06-02/2020

Calle Paucarpata N° 397 Cercado Arequipa Telf: 054-232410 RPC: 997956688 MOV. 95997621 RPM #264460 RPC: 959918325
geotopaqp@hotmail.com www.geotopaqp.com

Anexo 3. Certificación de operatividad del receptor GNSS



GEO TOP AQP

la casa del ing. topógrafo

SERVICIOS-VENTA-CALIBRACION-REPARACION

- SERVICIOS TOPOGRÁFICOS
- CARRETERAS - CANALES
- TUBERÍAS - MONTAJE
- REPRESAS - FUENTES - LINEAS
- MINERÍA SUPERFICIAL
- MINERÍA SUBTERRÁNEA
- PUNTOS GEODÉSICOS (fast static)

CERTIFICADO DE OPERATIVIDAD
CERTIFICATE OF OPERATION

Mant. General
Reparación
Operatividad
Garantía
Nuevo

DATOS DEL EQUIPO

DATOS DEL CLIENTE

Equipo : RECEPTOR GNSS	Persona Natural o Jurídica : JASMANI YOVANI FLORES TEVES
Fabricante : SOUTH	Dirección : JR. GAMALIEL CHURATA N° 351 - PUNO
Modelo : GALAXY G1	RUC / DNI : 10457469107
N° Serie : S82554117134092	

CERTIFICADO DE OPERATIVIDAD

Nro : 05-02/2020
Fecha : 15/02/2020

Imagen de Receptor



Geotop AQP E.I.R.L.:

Certifica que el equipo topografico arriba descrito cumple con las especificaciones técnicas de la fábrica y los estándares internacionales establecidos.

En las pruebas efectuadas en Tiempo real los equipos, estos se encuentran dentro de las tolerancias del fabricante.

PRECISIÓN LEVANTAMIENTO GPS Post Proceso (Estatic & Fast Estatic)

HORIZONTAL	0.25 mm + 1 ppm RMS
VERTICAL	0.5 mm + 1 ppm RMS

FECHA DE MANTENIMIENTO

Fecha	Mantenimiento	Prueba de Operatividad	Fecha de Vencimiento	Observación
15/02/2020	x	x	15/07/2020	% 100 OPERATIVO

Responsable Técnico J. Pio Vitorino Andrade	GERENTE GENERAL GEO TOP AQP E.I.R.L.
 Ing. J. Pio Vitorino Andrade GERENTE SERV. TÉCNICO	 www.geotopaqp.com La solución GPS/GNSS

ORD. N° 05-02/2020

Calle Paucarpatá N° 397 Cercado Arequipa Telf: 054-232410 RPC: 997956688 MOV. 95997621 RPM #264460 RPC: 959918325
geotopaqp@hotmail.com www.geotopaqp.com

Anexo 4. Certificación de operatividad del nivel electrónico



0014806-2020 NIV

CERTIFICADO DE CALIBRACIÓN CERTIFICATE OF CALIBRATION

OTORGADO A: JOEL NEXON VILCA ATENCIO

DATOS DEL EQUIPO

Equipo	Marca	Modelo	Serie
NIVEL ELECTRONICO	LEICA	SPRINTER 250M	2211065

EQUIPO DE CALIBRACIÓN UTILIZADO Y RESULTADOS:

Equipo/Marca	Valor de Patrón	Valor de Patrón	Precisión En 1km Doble de Nivelación	Error al Corregir
Multi Collimators F420-3	90°00'00"	90°00'00"	+/- 0.5 mm	0.05 en milímetros

PROCEDIMIENTO DE CALIBRACIÓN:

Por medio del cierre angular en directa y en tránsito enfocado al infinito a través del Colimador.

INGENIEROS COIPSA ICT E.I.R.L. A través de su servicio de técnico CERTIFICA que el equipo en mención se encuentra totalmente revisado, controlado, calibrado y 100% operativo; Cumpliendo con las especificaciones técnicas de fábrica y los estándares internacionales establecidos.

INGENIEROS COIPSA ICT E.I.R.L. Ha registrado la Calibración en nuestro Servicio Técnico el 01 de Junio del 2020; sugiriéndose una recalibración en un periodo de 06 meses, aproximadamente el 01 de Diciembre del 2021.



Fecha de Emisión 01 de Junio del 2020	Próxima Calibración 01 de Diciembre del 2020	Validez del Certificado 01 de Diciembre del 2020
--	---	---

Técnico Calificado:

Atte
Jasmani Yovani Flores Teves
Gerente Operaciones - Representante Legal
INGENIEROS COIPSA ICT E.I.R.L.



Anexo 5. Monumentación y pintado de los puntos de control “PG”



Anexo 6. Vista panorámica del punto de control PG 10



Anexo 7. Vista panorámica del punto de control PG 11



Anexo 8. Monumentación y pintado de los puntos test “T”



Anexo 9. Vista Panorámica del punto de control “T03”



Anexo 10. Vista Panorámica del punto de control “T05”



Anexo 11. Punto geodésico SAT002 certificado por el IGN



Anexo 12. Trabajos de lectura GNSS de los puntos de control y test





Anexo 13. Trabajos de nivelación geométrica de los puntos de control y test

