UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION

ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACION SECUNDARIA

ANÁLISIS HERMENÉUTICO DE LA COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS EN CINCO ESTUDIANTES DEL CUARTO SEMESTRE DEL PROGRAMA DE ESTUDIO DE MFCI DE LA UNA PUNO 2020-II

TESIS

PRESENTADA POR:

Bach. COYLA TILA ERICK NILVER

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN EDUCACIÓN, ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA, COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA

PUNO – PERÚ

2022

DEDICATORIA

A Dios, por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos. A mi padre WILBER y a mi madre FIDELA, por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada por su amor. A mi hermano Heber y hermana Maritza, por su apoyo incondicional. Y por último a Aydeé la persona incomparable e incondicional que siempre estuvo a mi lado.

ERICK COYLA

AGRADECIMIENTO

A la Universidad Nacional del Altiplano, por haberme cobijado en sus claustros, alimentándonos con sabias enseñanzas, que servirán como fuertes pilares en nuestra vida profesional.

A los docentes de la facultad Ciencias de la Educación y en especial a las docentes de la Escuela Profesional de Educación Secundara, Especialidad de Matemática, computación e informática por habernos brindado orientaciones de alta calidad en la enseñanza y aprendizaje en los estudiantes.

A mi asesor el Dr. Wenceslao Quispe Yapo y jurados por el tiempo, dedicación y paciencia en la elaboración de esta tesis.

ERICK COYLA

ÍNDICE GENERAL

Área **:** Interdisciplinariedad en la dinámica educativa: Teoría y Métodos de Investigación de la Didáctica de la Matemática.

Tema **:** La caracterización de significados institucionales y personales de los objetos matemáticos.

Fecha de sustentación: 04/ abr /2022

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

MFCI	: Matemática, Física, Computación e Informática
MINEDU	: Ministerio de Educación
APOE	: Acción- Proceso-Objeto- Esquema
UNA	: Universidad Nacional del Altiplano
PISA	: Informe del programa internacional para la Evaluación de Estudiantes

RESUMEN

La investigación está compuesta por los antecedentes sobre el círculo hermenéutico de la comprensión matemática, donde se hizo una investigación sobre un enfoque semiótico, fenómeno-epistemológico y dialógico, evaluando las diferentes interpretaciones o significados de las funciones cuadráticas que muestran los cinco estudiantes. Este trabajo de investigación tuvo como objetivo Evaluar la comprensión del significado de las funciones cuadráticas, bajo la propuesta del círculo hermenéutico, que muestran cinco estudiantes del cuarto semestre del Programa de Estudio de Matemática, Física, Computación e Informática de la Universidad Nacional del Altiplano Puno en el año del 2020-II. El trabajo de investigación es de tipo de estudio de casos, el cual se estudió una muestra de cinco estudiantes. Para la recolección y análisis de datos se aplicó una prueba donde mostraron su comprensión del significado de las gráficas y propiedades elementales de las funciones cuadráticas, y para la conciliación de las interpretaciones realizadas por el investigador a los investigados, se utilizó la entrevista no estructurada. Los resultados que se obtuvieron del análisis de las respuestas de los estudiantes, sobre la comprensión del significado de las funciones cuadráticas, bajo la propuesta del círculo hermenéutico, es que la estudiante E4L está ubicado en el estrato de Observación, mientras que los estudiantes E4N, E4W y E4C están ubicados en el estrato de creación de la imagen y por último el estudiante E4U está ubicado en el estrato de conocimiento primitivo, los cuales se basan solamente en la obtención de la gráfica a partir de la determinación del vértice y la tabla de valores que permiten identificar puntos de la gráfica, para así bosquejar la gráfica.

Palabras clave: Círculo hermenéutico, Comprensión matemática, funciones cuadráticas.

ABSTRACT

The research is composed of the background on the hermeneutic circle of mathematical understanding, where an investigation was made on a semiotic, epistemological-phenomenon and dialogical approach, evaluating the different interpretations or meanings of the quadratic functions shown by the five students. The objective of this research work was to evaluate the understanding of the meaning of quadratic functions, under the proposal of the hermeneutic circle, shown by five students of the fourth semester of the Study Program of Mathematics, Physics, Computing and Informatics of the Universidad Nacional del Altiplano Puno. in the year of 2020-II. The research work is of the case study type, which studied a sample of five students. For the collection and analysis of data, a test was applied where they showed their understanding of the meaning of the graphs and elementary properties of the quadratic functions, and for the reconciliation of the interpretations made by the researcher to those investigated, the unstructured interview was used. The results obtained from the analysis of the students' answers, on the understanding of the meaning of the quadratic functions, under the hermeneutic circle proposal, is that the E4L student is located in the Observation stratum, while the E4N students, E4W and E4C are located in the image creation stratum and finally the student E4U is located in the primitive knowledge stratum, which are based solely on obtaining the graph from the determination of the vertex and the table of values that allow you to identify points on the graph, in order to sketch the graph.

Keywords: Hermeneutical circle, Mathematical comprehension, quadratic functions,

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Una de la problemática más sobre saliente es implícita en el desarrollo de las sesiones, todo surge a raíz de que los docentes diseñas o planifican sus sesiones para obtener un mayor aprendizaje, el cual pocos de ellos logran un aprendizaje satisfactorio de memorización, sin embargo, mucho de los estudiantes no comprenden lo que aprendieron, por eso es importante evaluar la comprensión de los aprendizajes.

En este sentido, la presente investigación tuvo como objetivo principal evaluar la comprensión del significado de las funciones cuadráticas, bajo la propuesta del círculo hermenéutico, que muestran cinco estudiantes del cuarto semestre del programa de estudio de MFCI de la UNA Puno 2020-II. Y como objetivos específicos se tuvo los siguientes: a) Interpretar los rastros de comprensión del significado de las funciones cuadráticas, en el registro de naturaleza escrita por los estudiantes, b) Deducir los usos del conocimiento Matemático que se desprenden de los rastros de comprensión emergentes de los registros escritos por los estudiantes, y c) Indagar la intención que muestran en el registro de naturaleza escrita por los estudiantes, a través del dialogo.

De este modo, a partir de las diferentes resoluciones que se vieron en el momento de la interpretación, se encontraron diversos indicadores sobre la comprensión de cada uno de los cinco estudiantes. Para tal efecto se evaluó la comprensión utilizando el Circulo Hermenéutico de la comprensión planteado por Gallardo y Quintanilla (2019).

La organización del presente informe de investigación corresponde al esquema propuesto por el vicerrectorado de investigación, siendo el siguiente: El primer capítulo Abarca el planteamiento de problema, como también se formularon las interrogantes como son la justificación, y los objetivos de la investigación. En el segundo capítulo hace referencia al marco teórico de la investigación, donde se resumen los antecedentes investigados como son de las tesis y artículos científicos relacionados con el tema de investigación. También es parte de este capítulo las bases teóricas, el mismo que se desarrolla considerando los ejes como tema y las unidades de análisis, como subtemas. Cada aspecto que se desarrolla se sustenta con autores con referencias bajo las normas APA. El tercer Capítulo se refiere a los materiales y métodos, donde se define el tipo y diseño de investigación, la población y muestra, como también las técnicas e instrumentos de recolección de datos utilizados durante la investigación. En el cuarto capítulo plantea el análisis e interpretación de datos. La organización de este capítulo se realiza en función de los objetivos planteados, empezándose por el objetivo general, seguido por los objetivos específicos. La conclusión aborda en función de los objetivos; mientras que, en las recomendaciones, se alcanzan en función de las conclusiones como también la referencia bibliográfica y finalmente los anexos.

1.1. Planteamiento del problema

Se afirma con frecuencia que la cultura matemática que necesita actualmente el ciudadano va mucho más allá del tradicional contar. Según Michéle (2004) afirma. “en muchos países se reduce la cantidad de horas dedicadas a la enseñanza de la matemática” (p. 06).

De la misma manera a nivel nacional vemos una situación problemática, donde con ayuda de las pruebas PISA podemos identificar las deficiencias en nuestros estudiantes como se manifiesta a continuación:

> En los dos años para los que se cuenta con información, 2015 y 2016, aproximadamente dos de cada tres no logran dominar los aspectos evaluados

> en la prueba (es decir, logran los calificativos de «previo al inicio» o «en inicio»), tanto en comprensión lectora (62,7%) como en matemática (77,8%), y solo uno de cada diez logra dominarlos en comprensión lectora (14,7%) y matemática (9,5%). Estos resultados muestran los bajos niveles de aprendizaje que alcanzan los estudiantes evaluados. (Guadalupe et. al, 2017, p. 99)

Tambien, nuestra region Puno según la evaluacion PISA del 2018 a los estudiantes del segundo grado de secundaria a nivel de la region Puno tenemos que el 41,3% se encuentran en el nivel Previo al Inicio, 34.9% en Inicio, 13.2% en proceso y solo el 10.6% en el nivel de satisfactorio.

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es una actividad esencialmente interpretativa. Los procesos cognitivos y discursivos involucrados en las prácticas matemáticas demandan ejercicios permanentes de interpretación por parte de los estudiantes y del profesor. Esta interpretación transcurre en entornos compartidos donde la comprensión matemática, propia y ajena, interactúa de manera compleja. En particular, cada protagonista se enfrenta al desafío constante de obtener información sobre la comprensión matemática de su interlocutor. Esta situación, que pone en evidencia el problema fundamental del acceso a la comprensión matemática del otro, justifica la pertinencia de realizar esfuerzos encaminados a esclarecer la naturaleza de la interpretación de la comprensión que acontece durante la actividad matemática y configurar procedimientos operativos con los que llevar a cabo esta interpretación.

De acuerdo a lo expuesto, es importante y necesario encontrar un procedimiento adecuado para evaluar la compresión del significado de diferentes temas de la matemática. En este caso, se ha utilizado el circulo hermenéutico de la comprensión como un procedimiento para evaluar la comprensión en cinco estudiantes del cuarto semestre del programa de estudio de MFCI de la UNA Puno 2020-II.

El problema de investigación que se acaba de describe se resume en la siguiente pregunta:

1.2. Enunciado del problema

¿Cuál es la comprensión del significado de las funciones cuadráticas, bajo la propuesta del círculo hermenéutico, que muestran cinco estudiantes del cuarto semestre del programa de estudio de MFCI de la UNA Puno 2020-II?

1.3. Hipótesis de la investigación

La comprensión de los significados de las funciones cuadráticas, bajo la propuesta del círculo hermenéutico, que muestran cinco estudiantes del cuarto semestre del programa de estudio de MFCI de la UNA Puno 2020-II, se basa en la obtención de la gráfica que representa la situación problemática planteada sin ningún tipo de interpretación del significado del gráfico.

1.4.Justificación del estudio

Que mediante el Decreto de Urgencia 026-2020 se establecen medidas excepcionales y temporales para prevenir la propagación del coronavirus(COVID-19) en el territorio nacional; en cuyo artículo 21 se autoriza al Ministerio de Educación (MINEDU) a establecer disposiciones normativas y/u orientaciones, según corresponda, que resulten pertinentes para que las instituciones públicas y privadas bajo el ámbito de competencia del sector, en todas sus niveles, etapas y modalidades, presenten el servicio educativo utilizando mecanismos no presenciales o remotos bajo cualquier otra modalidad. Es por eso que el presente trabajo de investigación fue ejecutado de forma virtual mediante diversas herramientas virtuales que garantizaron la correcta aplicación de esta investigación.

Este trabajo de investigación, conllevara a proponer una alternativa de evaluación sobre la comprensión de los significados matemáticos que tienen los estudiantes durante en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje. Una de la problemática más sobre saliente es implícita en el desarrollo de las sesiones, todo surge a raíz de que los docentes diseñas o planifican sus sesiones para obtener un mayor aprendizaje, el cual pocos de ellos logran un aprendizaje satisfactorio de memorización, sin embargo, mucho de los estudiantes no comprenden lo que aprendieron, por eso es importante evaluar la comprensión de los aprendizajes.

Con la realización del presente trabajo de investigación se pretendió proponer modelos de innovación en el proceso pedagógico basándose en los errores comunes y permanentes que mostraron los estudiantes durante la evaluación. Todo ello para formar una mayor comprensión de los significados matemáticos en los estudiantes, mediante las respuestas o conclusiones a la que se llegó.

En esta investigación se evaluó la naturaleza de la comprensión del significado de las funciones cuadráticas (resolución y las propiedades elementales) a cinco estudiantes del nivel Universitario. Todo ello se evaluó en base al enfoque hermenéutico el cual plantea Gallardo y Quintanilla (2019). Para esta investigación se ha planteado el siguiente problema de investigación ¿Cuál es la comprensión del significado de las funciones cuadráticas, bajo la propuesta del círculo hermenéutico, que muestran cinco estudiantes del cuarto semestre del programa de estudio de MFCI de la UNA Puno 2020-II?

1.5.Objetivos de investigación

1.5.1. Objetivo general

Evaluar la comprensión de los significados de las funciones cuadráticas, bajo la propuesta del círculo hermenéutico, que muestran cinco estudiantes del cuarto semestre del programa de estudio de MFCI de la UNA Puno 2020-II.

1.5.2. Objetivos específicos

- Interpretar los rastros de comprensión del significado de las funciones cuadráticas, en el registro de naturaleza escrita por los estudiantes.
- Deducir los usos del conocimiento Matemático que se desprenden de los rastros de comprensión emergentes de los registros escritos por los estudiantes.
- Indagar la intención que muestran en el registro de naturaleza escrita por los estudiantes, a través del dialogo.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ANTECEDENTES

Los antecedentes que sustentan este proyecto de investigación, son artículos de investigación publicadas en revistas científicas internacionales y trabajos de investigación desarrollados en las universidades del extranjero, como son:

2.1.1. Ámbito internacional

El trabajo de investigación, realizado por Gallardo y Quintanilla (2019), denominado "El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula", el cual tuvo como objetivo Sugerir una propuesta integradora con la que acceder de forma operativa a la comprensión matemática de los estudiantes. Fundamentan dicha propuesta al configurar las bases teóricas y metodológicas de lo que denominaron el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas. En donde se concluyó que se han enfrentado al reto fundamental de acceder a la comprensión matemática de una estudiante al intentar resolver una tarea de divisibilidad de números naturales. Para ello, han llevado a cabo una interpretación multifacética de su comprensión tomando como referencia distintos rastros visibles, provenientes de los planos semióticos, fenómeno-epistemológico y dialógico del círculo hermenéutico. Este círculo lo presentan como un método integrador, por cuanto en él se ven reflejadas distintas orientaciones de la interpretación en matemáticas.

El trabajo de investigación, realizado por Gallardo et. al (2014), denominado "Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los sistemas de numeración" el cual tuvo como objetivo de utilizar y poner a prueba un modelo operativo para la interpretación de la comprensión. La última fase del estudio, de la que se presenta aquí un resumen, consiste en una aproximación semiótica y hermenéutica en la que se identifican los errores, las estrategias, los rastros de comprensión, los usos dados al conocimiento y los niveles reales de comprensión de los sujetos de las muestras examinadas. En donde concluyen que las entrevistas mejoran sustancialmente la información que se obtiene de los registros escritos obtenidos en los cuestionarios.

El trabajo de investigación, realizado por Gallardo y Quintanilla (2016) denominado "El Consentimiento con el Otro en la Interpretación de la Comprensión en Matemáticas" el cual tuvo como objetivo de situar en el consentimiento con el otro, un rastro visible complementario al uso del conocimiento matemático que incorporamos a la dimensión hermenéutica de un modelo en desarrollo para la interpretación de la comprensión en matemáticas. En donde concluye que las interacciones discursivas que evidencian el consentimiento contribuyen a la interpretación con nuevos rastros de comprensión complementarios a los usos del conocimiento matemático. De este modo, situamos la referencia para la interpretación de la comprensión en matemáticas en el propio conocimiento matemático, a través de los usos dados y de los consentimientos adquiridos durante la actividad matemática

El trabajo de investigación, realizado por Gallardo et. al (2013) denominado "Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental" el cual tuvo como objetivo de Presentar progresos en la configuración de un modelo en desarrollo para la interpretación de la comprensión en matemáticas, En donde menciona la consideración final que partir de conocimientos matemáticos sobre los cuales exigimos un análisis epistemológico y fenomenológico para determinar conjuntos reducidos de situaciones representativas pertinentes para ser empleadas en labores de diagnóstico y valoración de la comprensión

El trabajo de investigación, realizado por Gallardo y Gonzales (2006) denominado "Una aproximación operativa del diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático" el cual presentan las bases de una aproximación centradas en los efectos observables de la comprensión que utiliza el análisis de conocimientos y respuestas adaptadas a situaciones expresamente planificadas derivadas del análisis fenoimeno-epistemologico del conocimiento matemático. En donde concluye dada la complejidad que encierra dicho fenómeno y el estado actual en el que se encuentra los conocimientos relacionados con él, consideramos más factible y adecuado aproximarnos a su estudio desde 7una perspectiva integradora, que contemple todos los aspectos relevantes vinculados a la comprensión, y al mismo tiempo operativa, con el énfasis puesto en aquellos aspectos que permiten ser observados por el investigador.

Para finalizar este trabajo de investigación, realizado por Gallardo y Quintanilla (2018) denominado "presencia del círculo hermenéutico de la comprensión en la interpretación matemática de los alumnos" el cual tiene como objetivo describir el recorrido que propone el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas para acceder de un modo operativo a la comprensión matemática del otro. En donde concluye que el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas expuesto en este trabajo se evidencia en las interpretaciones que realizan los escolares en contextos de actividad matemática conjunta en el aula.

2.1.2. Ámbito Local

El trabajo de investigación, realizado por Llerena (2017) denominado "comprensión de contenidos matemáticos y su Relación con la resolución de problemas" el cual tubo como objetivo Determinar la relación entre la Comprensión de Contenidos Matemáticos y la Resolución de Problemas en estudiantes del primer ciclo de Estudios Generales en la asignatura de Matemática I de la Universidad San Martín de Porres, 2016. En donde concluye que la Comprensión Contenidos Matemáticos en el nivel Conjetura se relaciona con la Ejecución de Problemas. Pero, existe una baja relación entre las variables tipificada por el coeficiente de correlación calculado r = 0.376, lo cual se puede interpretar que existen otros factores que influyen en la correlación de las dimensiones Conjetura y Ejecución.

Para finaliazar el presente trabajo de investigación, realizado por Castro (2018) denominado "Comprensión del concepto de fracción y de sus significados de los estudiantes de segundo grado de secundaria en la Evaluación Censal, 2015 y 2016" el cual tubo como objetivo Interpretar la comprensión del concepto de fracción con sus significados en los estudiantes de segundo grado de secundaria en la Evaluación Censal, 2015 y 2016. En donde concluye que las tareas referidas a fracciones, de la ECE 2015 y 2016 de segundo grado de secundaria, abordan los diferentes significados de fracción como parte todo, cociente, medida, operador y razón como se ha presentado en las tareas analizadas en esta investigación. En ellas se pudo apreciar que los estudiantes no logran identificar dichos significados trabajándolos con dificultad y poco acierto, estando 14 de las 15 tareas de fracciones ubicadas en los niveles más altos de logro, Satisfactorio (menos del 49% de tasa de acierto) y por Encima del satisfactorio (menos del 33% de tasa de acierto).

2.2. MARCO TEÓRICO

2.2.1. Comprensión en matemáticas

según Gómez (2000) tamando en cuenta lo que menciona Sierpinska en su libro *Undertanding in mathematics* y algunas conclusiones por su parte, Comprender es organizar o adecuar nuestras formas de conocimiento, de tal forma que estos conocimientos sean coherentes con las experiencias que vivimos diariamente. El sujeto comprende algo (objeto de comprensión) cuando logra relacionarlo con algún contenido en sus estructuras mentales, es decir con las experiencias vividas (base de comprensión) a través de una serie de operaciones mentales dentro de un proceso de comprensión compuesto por actos de comprensión que se relacionan entre sí. Algunos de estos actos de comprensión y los significativos, requieren que se reorganicen las estructuras mentales. De esta forma, el sujeto sobrepasa obstáculos epistemológicos (formas de conocimiento).

Para Gallardo y Gonzáles (2015) por su parte indican que una sujeto manifiesta una cierta comprension cuando tiene relacion con el obejto concreto(conocimiento), cuando elabora y emtie a su satisfaccion una respuesta adaptada asu realidad, centrada en dicho objeto, ante una situacion de desequilibrio cognitvo que decide voluntariamente abordar. Tomado en consideracion todo lo mencionado anteriormente se define que comprender es sinonimo de responder o de elaborar y emitir una respuesta adaptada. Si un sujeto emite una respuesta adaptada, podemos decir que comprende en los terminos de la situacion o del problema propuesto. Alternativamente, si el individuo no responde o la respuesta no es adaptada, no podremos afirmar nada sobre la situacion sobre su comprension por desconocer los verdaderos motivos de ese proceder. Sin embargo,todo lo que un individuo utiliza y como lo utliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situacion, proporciona informacion especifica sobre lo que comprende y como lo comprende.

Por otro lado, Diaz (2017) indica que *la* comprensión se refiere más bien al dominio y manejo de los aspectos conceptuales y discursivos del conocimiento, pero también se habla de comprensión instrumental, es decir al desarrollo de competencias.

2.2.2. Aproximaciones al fenómeno de la comprensión

Las aproximaciones del fenómeno de la comprensión en matemáticas que veremos en esta parte son dos; el modelo recursivo de Pirie y Kieren y la teoría del APOE de Dubinsky, de cada una de ellas presentamos un breve resumen, con la finalidad de conocer las teorías que nos presentan los autores mencionados sobre la comprensión en matemáticas.

A) El modelo recursivo de Pirie y Kieren

Según Pirie & Kieren (1989), Conceptualizan su modelo sobre la evolución de la comprensión matemática como poseedor de 7 niveles potenciales denominados cada uno de ellos como estratos de comprensión. El proceso de llegar a comprender inicia en el centro del modelo llamado el estrato del *conocimiento primitivo*. Primitivo se refiere al punto inicial; no a un bajo nivel de matemáticas. Es decir que el contenido central a toda la información que el estudiante atrae a la situación de aprendizaje. Estos contenidos se han analizado con distintos nombres como conocimiento intuitivo, conocimiento situado y conocimiento previo o informal.

En un segundo estrato llamado *creación de imagen* el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores. Las acciones que se realizan en este estrato se relacionan con que el estudiante realice algo, mental o físico, para obtener una idea sobre un concepto. En el siguiente estrato llamado *comprensión de la imagen,* las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente imágenes orientadas por un proceso mental, libera las matemáticas del estudiante a partir de las necesidades de realizar acciones físicas particulares. Como cuarto estrato que se conoce como *observación de la propiedad,* el estudiante puede examinar una imagen mental y determinar los distintos atributos asociados con dicha imagen. Además de observar las propiedades internas de una imagen específica, el estudiante es capaz de observar distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales. El quinto estrato de comprensión, es llamado la *formalización,* aquí el estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes. En este estrato el estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona. La descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas. El siguiente estrato es la *observación,* permite la capacidad de considerar y utilizar como referencia el pensamiento formal de la persona. Más allá de la relación del estudiante en la meta-cognición, el estudiante también es capaz de observar, estructurar y organizar los procesos de pensamiento personales, así como reconocer manifestaciones de los procesos del pensamiento. En este estrato el estudiante puede producir verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado. Una vez que se capaz de organizar las observaciones formales de una persona, después de que el estudiante logró dicha conciencia, puede explicar la inter relación de dichas observaciones mediante un sistema axiomático el cual es el siguiente estrato de la comprensión, la *estructuración,* En este estrato la comprensión del estudiante trasciende el tema particular para la comprensión que se encuentra en una estructura mayor. Y como último estrato tenemos la *invención,* el uso de la inversión no implica que una persona no puede invitar en otros niveles, sino que se utiliza para indicar la capacidad de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crear preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo.

B) Teoría de Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE)

En estas propuestas del APOE Dubinsky (como se citó en Meel, 2003) indica que la comprensión comienza con la manipulación de los objetos físicos y mentales, previamente construidos para formar acciones, y estas acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan según la información adquirida, con el objetivo de formar objetos de conocimiento. Los objetos se pueden volver a des encapsular para llegar al proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas. El mecanismo de la construcción de estos esquemas, la abstracción reflexiva, es lo que más prevalece en la teoría APOE debido a que separa propiedades conectadas e identifica los elementos salientes que comprenden el concepto en forma separada del contexto.

2.2.3. Nociones vinculadas a la comprensión en matemáticas

Algunas nociones vinculadas a la comprensión en matemáticas que se ha previsto mencionar son las siguientes:

a. Comprensión y significados

Las comprensiones con el significado se relacionan complementariamente para cumplir un solo fin, el cual es llegar a conocer el significado de un determinado tema mediante la comprensión; Según Davison (1980) sostiene que es la comprensión quien da vida al significado, y no al revés. En lo mencionado hace alusión al hecho de que solamente es posible referirse al significado, si la comprensión es considera como posibilitadora del mismo. En otras palabras, no tendría sentido referirse al significado si no fuera en el contexto de la relación intersubjetiva que se da en el proceso de interpretación, de lo contrario, en el contexto de la interpretación el significado no tiene razón de ser.

Sosteniendo lo mencionado anteriormente sobre la comprensión y el significado, Sierpinska, 1994 (citado por Gallardo, 2004) indica que es el significado el que debe ser explicado a través de la comprensión y no al revés. El significado de algo será una cierta forma de comprender ese algo, una clase de comprensión, puesto que se necesita al menos alguna comprensión de un objeto para comenzar a tener un significado de él. Por otro lado, mantiene que la comprensión es una experiencia mental; es algo que siempre sucede en el interior de la mente, a diferencia del significado que es de naturaleza pública. No obstante, admite que los objetos de comprensión y de significado son coincidentes y expresa la relación entre ambos aspectos indicando que la comprensión de un concepto será concebida entonces como el acto de captar su significado.

b. Comprensión e interpretación

Según Montes (2013) menciona que se interpreta cuando no se comprende, así los sujetos también tienen que decir conclusiones y evidentemente tiene que aportar algo respecto un conocimiento. No solo de los conocimientos teóricos, si no también que hacemos con ese conocimiento y que elementos se nos presenta como valioso, más allá de lo que dicen tal o cual enfoque teórico.

c. Comprensión y aprendizaje

La relación entre comprensión y el aprendizaje es unitario, es decir inseparables porque no se puede aprender algo sin comprenderlo, Según Kieren ,1994 (citado por Gallardo, 2004). Hace referencia de que está en desacuerdo con la posibilidad de un aprendizaje sin comprensión o de una capacidad de hacer algo sin saber el porqué. Al menos los sujetos deben tener algún nivel de comprensión o conocer el porqué de algún modo, aunque no se corresponda con el que tiene el observador externo encargado del diagnóstico.

d. Comprensión y obstáculos epistemológicos

Tomando en cuenta que comprender es reorganizar nuestas formas de conocimiento de tal forma que estos modelos sean coherentes con las experiencias que vivimos, en este caso Gomez (2000) mencina que la comprensión que un sujeto tiene de un concepto es siempre un obstáculo epistemológico. Lo es porque esa forma de conocimiento es parcial. Es decir, en un proceso de comprensión al introducir un objeto matemático hay contradicciones entre el nuevo conocimiento y los conocimientos previos a sus experiencias vividas, y Cuando el sujeto vive estas experiencias contradictorias se ve obligado a reorganizar su forma de conocimiento lo que implica que tiene un acto de comprensión significativo.

e. Comprensión y semiótica.

El análisis cognitivo de la comprensión matemática propuesto por Duval (2006) contribuye en parte a la resolución de esta problemática, al introducir un cambio de estatus en las representaciones semióticas, y presentarlas como entidades de carácter externo e interno. Esta circunstancia impone un inevitable traslado al ámbito de lo semiótico, también a nivel interno, en el estudio de los procesos de pensamiento requeridos para comprender los objetos matemáticos.

2.2.4. Circulo hermenéutico de la comprensión matemática

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es una actividad esencialmente interpretativa. Los procesos cognitivos y discursivos involucrados en las prácticas matemáticas demandan ejercicios permanentes de interpretación por parte de los estudiantes y del profesor, por tal motivo Gallarado y Quintanilla (2019) plantean la posibilidad de configurar una visión extendida de la interpretación de la comprensión donde distintas orientaciones como los planos cognitivos, semióticos, fenómeno-epistemológicos y dialógico, contribuyan de forma complementaria a una misma propuesta interpretativa denominada *"el circulo hermenéutico de la comprensión en matemáticas",* con el cual buscan acceder de una forma operativa a la comprensión matemática de los escolares. Los planos del círculo hermenéutico de la comprensión matemática toman atención al estudio de lo que comprenden los sujetos y como lo comprenden, tratándose de ello como una aproximación positiva a la comprensión, en la que la especificidad del propio conocimiento matemático desempeña un papel esencial. En este parte mencionaremos los cuatro planos interpretativos planteados por Gallardo y quintanilla (2019) los cuales son:

a) Plano cognitivo

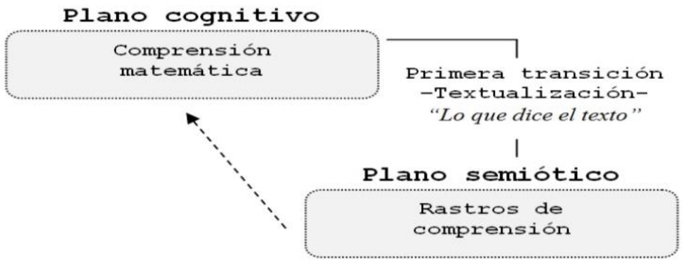
Este plano pone la atención en la subjetividad del alumno y determina como propósito fundamental responder algunas de sus complejidades internas. Suele aparecer reflejada en aquellas aproximaciones que contempla la comprensión como su principal objeto de estudio. Se caracteriza por concebir la comprensión matemática como un fenómeno cognitivo y por reconocer la posibilidad de su acceso y capacitación en las mentes ajenas de los escolares. Al mismo tiempo planteando la interpretación centrando la atención, en un primer momento, en el ámbito semiótico de las producciones externas, sin necesidad de traspasar la frontera de lo observable hacia el interior (de lo cognitivo a lo semiótico)

b) Plano semiótico

La interpretación en este plano demanda la textualización de lo observable en registros de naturaleza escrita. La inscripción textual de lo observable hace patente el progresivo distanciamiento entre lo mental, lo verbal y, finalmente, lo escrito, en donde se pone de manifiesto la

Figura 1

Círculo de la Comprensión en Matemáticas (parte I)



inaccesibilidad directa de los aspectos internos de la comprensión. Otro objetivo en esta fase inicial es identificar y delimitar entre todo lo observado y registrado de la actividad matemática los rastros de comprensión del estudiante que podrían considerarse indicadores de algún uso tipificado dado al conocimiento matemático.

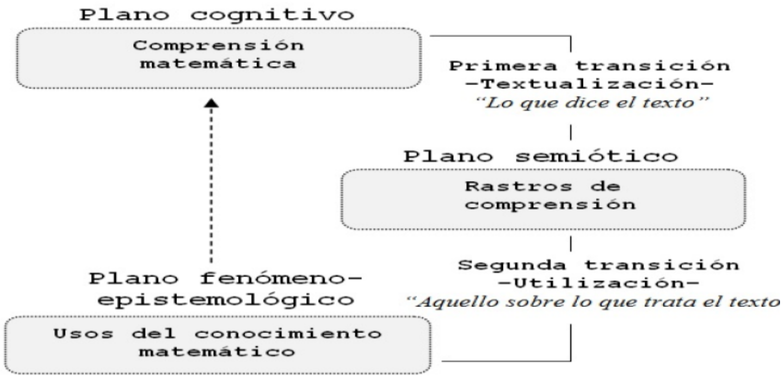
Nota: desde el plano cognitivo (comprensión matemática) del estudiante hacia el plano semiótico (rastros de comprensión) ocurre la primera transición denominada textualización, es decir lo que dice el texto. por Gallarado y Quintanilla (2019).

c) Plano fenómeno-epistemológico

La interpretación en esta fase se dirige a la exteriorización y la caracterización de los usos del conocimiento matemático que se desprenden de los rastros de comprensión emergentes de los registros escritos. La propia estructura fenómeno-epistemológica de las situaciones asociadas planteadas seguirá siendo la que actúe como referencia para certificar tales usos.

Figura 2

Círculo de la Comprensión en Matemáticas (parte II)



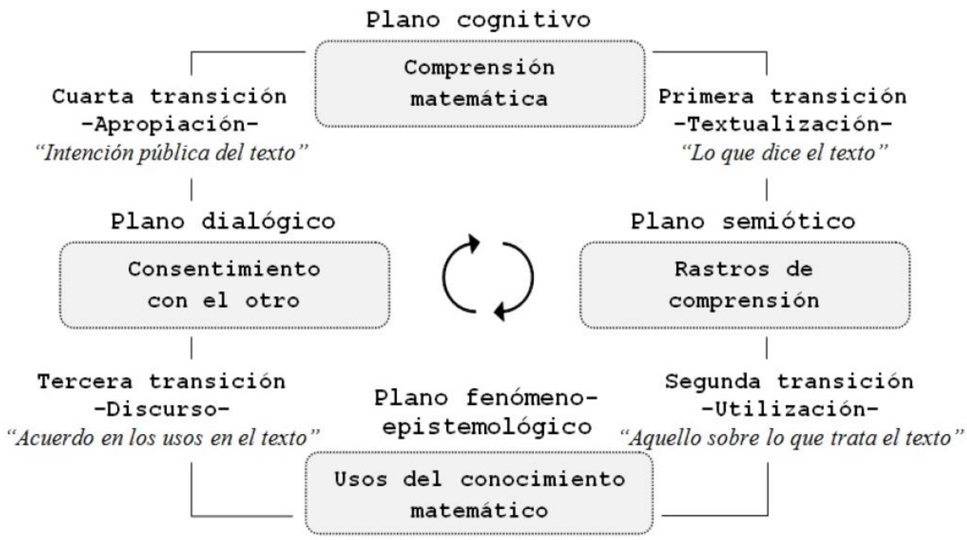
Nota: desde el plano semiótico (rastros de comprensión) hacia el plano fenómeno-epistemológico (usos del conocimiento matemático) ocurre la segunda transición denominada utilización, es decir aquello sobre lo que trata el texto. por Gallarado y Quintanilla (2019).

d) Plano dialógico

En esta fase, la comprensión interpretada se contrasta discutiendo con el propio alumno, directa o indirectamente, sobre los usos del conocimiento matemático evidenciado. Este intercambio finalizará cuando las respuestas sean consideradas suficientes por quien las da y aceptables como tales por quien las recibe. Hablamos de alcanzar el consentimiento con el otro en el ejercicio de la interpretación de su comprensión matemática. En esta fase de consentimiento, de carácter esencialmente dialógica, exige primero la explicitación de la intención del estudiante a través de sus acciones matemáticas, y segundo, la apropiación por parte del agente intérprete de los usos de conocimientos intencionales identificados.

Figura 3

Círculo de la Comprensión en Matemáticas (parte III)



Nota: desde el plano fenómeno-epistemológico (usos del conocimiento matemático) hacia el plano dialógico (consentimiento con el otro) ocurre la tercera transición denominada discurso, es decir acuerdo en el uso de texto. Así mismo ocurre una cuarta transición denominada apropiación, es decir intención pública del texto. por Gallarado y Quintanilla (2019).

2.2.5. Estudio epistemológico de la noción funciones cuadráticas

Algunas nociones del término cuadrático estuvieron presentes desde los mismos inicios de las matemáticas, según Kline (1992) afirma . "La matemática, entendida como disciplina racional bien organizada e independiente, no existía antes de que entraran en escena los griegos de la época clásica"(p.18). Para presentar las ideas de diferentes autores sobre la noción de funciones cuadráticas se realizará una clasificación en seis grandes momentos que caracterizaron su desarrollo: Las Ecuaciones cuadráticas, Las cónicas, Las Funciones, las funciones cuadráticas, grafica de las funciones cuadráticas y las propiedades básicas de las funciones cuadráticas.

a. Ecuaciones cuadráticas

El concepto de ecuación es uno de los conocimientos más importantes del análisis actual en la matemática, y ha estado presente en casi todo el recorrido histórico de la matemática en diversas culturas. Para este análisis se ha identificado algunas culturas o civilizaciones y épocas que evidenciaron el trabajo con ecuaciones de tipo cuadrático pretendiendo inferir el concepto o noción de cuadrado que manejaban en la antigüedad.

- *Babilonios*

  En la civilización de los babilonios se ha encontrado registros de producciones de los cuales se puede inferir que tenían ciertas concepciones de los elementos del álgebra. También, se encontraron situaciones asociadas, en donde el concepto de cuadrado tenía una concepción aritmética con ciertos niveles básicos de generalización.

  De esta manera se observa una aproximación a la noción del concepto de función, aunque haciendo referencia a sus observaciones astronómicas, sin embargo, una mirada a partir de las ecuaciones es posible identificar la forma en que trataban con situaciones de tipo cuadrático como lo veremos a continuación:

  Hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado. En la notación moderna se puede escribir que lo que buscaban los babilonios eran dos números x y $\bar{\bar{x}}$ tales que $x.\bar{\bar{x}} = 1$ y $x + \bar{\bar{x}} = b$. Estas dos ecuaciones dan como resultante la ecuación cuadrática en x, $x^2 - bx + 1 = 0$. Los babilonios calculaban b/2, y luego$(b/2)^2$ y por último $\sqrt{(b/2)^2 - 1}$; entonces $\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}$

y $\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}$. Son los valores buscados de x y $\bar{\bar{x}}$. (Kline, 1992, p. 26)

Se evidencia entonces, que los babilonios disponían, en efecto, de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, según kline (1992) menciona que los babilonios no conocían los números negativos, nunca se le vino a la mente frecuentar con posibles raíces negativas de las ecuaciones de segundo grado.

- *Griegos*

Los griegos marcaron un hito aún más especial en la construcción de las nociones cuadráticas, según Mesa y Villa-ochoa (2008) afirman que se puede hablar en la cultura griega dos aspectos: uno de carácter aritmético y el otro geométrico. Con respecto a lo aritmético, la escuela pitagórica establece razonamientos numéricos para sucesiones y progresiones, haciendo un empalme con la geometría en relación con los números figurados. Se observa también en sus trabajos cierta captación de algunas variaciones y predicciones a través de pequeños incrementos. Para obtener más detalle presentamos las nociones que obtuvieron Euclides y Diofanto.

Euclides

Euclides en su obra “Los Elementos” se observa el manejo y tratamiento de las relaciones cuadráticas o nociones cuadráticas, a manera de ejemplo presentamos la proposición 5 del libro II:

> Si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera, junto con el cuadrado de la (recta que está) los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad. (Puertas, 1991, p. 272)

De esta proposición se realiza una demostración de forma retórica y deductiva de una de las propiedades de la división de segmentos. En la situación se evidencia un razonamiento puramente geométrico, las expresiones "el cuadrado" y "es al cuadrado de" se describen de forma retórica dentro de un sistema deductivo que se desarrolla con el fin de darle generalidad a sus procedimientos, precisamente la deducción permite generar unas premisas generales para ser útil a los casos particulares, y son referidas a áreas y superficies. El cuadrado se da a conocer en los siguientes términos Según Puertas (1991). Afirma que para dibujar un cuadrado a partir de un lado la expresión dada es *anagrápsai apó* que indica la acción de dibujar repetidamente a partir de una recta dada (un lado) las demás rectas (lados) que cierran un cuadrado. Exactamente la misma definición la retoma en su libro sobre áreas en donde se evidencia los vínculos entre la aritmética y la geometría dado que la noción de cuadrado aparece como figura y área a la vez. obviamente teniendo en cuenta los ángulos rectos, es decir, una cantidad multiplicada por sí misma sería la interpretación a la luz del álgebra geométrica y coherentemente como se ha mostrado en este trabajo que para la época un segmento no correspondía necesariamente a una cantidad fija si no a una generalidad.

Diofanto

Las nociones de Diofanto según Mesa y Villa-ochoa (2008). Afirma que el punto culminante del álgebra, greco-alejandrina, se alcanzó con Diofanto que no se basa en significados geométricos si no en las relaciones geométricas. Siendo esta última una relación entre las propiedades permitiendo verlas desde un punto de vista algebraico. Diofanto plantea y resuelve ecuaciones indeterminadas de segundo grado, es decir, con varias soluciones, con lo que se podría observar en Diofanto la idea de variable. Plantea ecuaciones cuadráticas de la forma[1]: $ax^2 = 0$, $ax^2 + bx = c$ y $ax^2 = bx$. Resuelve problemas de este tipo:

> Encontrar dos números, tales que su suma sea 20 y su producto sea 96, Diofanto procede así: sea 20 la suma, 96 el producto y 2x la diferencia ente los números buscados. Luego los números buscados son 10+x, 10-x. por tanto, $100 - x^2 = 96$, entonces x=2, los numero buscados son 12 y 8. (Kline, 1999, p. 193)

También es posible observar que la noción de forma cuadrática no era ajena a la matemática de la época, sin embargo, en la mayoría de los casos se observa que se encuentra ligada a problemas relacionados con la solución de ecuaciones más que a la modelización de situaciones de variación y cambio, pero es un avance en cuanto se evidencia un desprendimiento del razonamiento meramente geométrico acercándose a un álgebra sincopada y con carácter de generalidad. De esta manera podríamos identificar una conceptualización lo cual permite identificar en Diofanto un tratamiento aritmético de una relación que conduce a una forma de ecuación cuadrática. Se evidencia un tratamiento de la incógnita en la búsqueda de un número que debe hallarse de acuerdo con unas condiciones dadas en la expresión. Pero también en ese caso particular las ecuaciones pueden admitir varias soluciones, aunque optara por las positivas, para la incógnita permitiendo deducir una comprensión de la incógnita que se comporta de una manera cuadrática asociada con una segunda potencia en un contexto aritmético.

- *Árabes*

Según Boyer (1969). Afirma que se tenia que construir un álgebra geométrica que generalizase y ocupase el lugar de la vieja álgebra aritmética, aunque esto lo menciona en relación con los griegos, aplica también para los árabes en tanto se valieron de los trabajos de Euclides para el desarrollo del álgebra, por ello la concepción cuadrática remite a su representación geométrica, como la propuesta en los Elementos. En este sentido los árabes logran darles generalidad a sus procedimientos aritméticos recurriendo a la geometría para demostrar la validez de sus razonamientos. Esto supone un avance en tanto el paso a la generalidad, y permite evidenciar un obstáculo en la concepción de las raíces de una ecuación, ya que éstas eran referidas a segmentos y las cantidades negativas carecen de representación, aunque conocían por influencias hindúes el trabajo con los negativos.

Es necesario precisar que las ecuaciones para esta época se presentaban de manera retórica. Algunos investigadores sugieren una vía similar para la introducción del álgebra escolar. Por otro lado, se puede observar que, en muchas instituciones educativas, el concepto de lo cuadrático es introducido inicialmente desde una perspectiva geométrica, sin que necesariamente se realice un vínculo con situaciones relativas a ecuaciones. Vale la explorar las ventajas o desventajas que una introducción al concepto de función cuadrática por la vía de las ecuaciones pueda ocasionar conceptualmente en los estudiantes.

b. Las cónicas

En cuanto a la gráfica de las funciones cuadráticas o las cónicas, Kline (1992) citando a Platón afirma: " antes de estudiar la astronomía, que trata de sólidos en movimiento, se necesita una ciencia que estudie tales sólidos"(p. 77). A raíz de esta afirmación él y sus discípulos se dedicaron a la geometría del espacio, de la que demostraron teoremas y estudiaron propiedades de los sólidos, entre ellos, el cono. Al respecto Kline (1992) dice. "El descubrimiento más importante quizás de la escuela platónica fue el de las secciones cónicas, atribuido por el alejandrino Eratóstenes a Menecmo, un geómetra y astrónomo que fue discípulo de Eudoxo y miembro de la Academia platónica" (p. 77).

Aunque no se sabe con exactitud lo que llevó al descubrimiento de las secciones cónicas, lo anterior evidencia que nace de la necesidad griega de estudiar el espacio físico en el que estaban inmersos. En la lectura de la historia de la matemática se afirma que las secciones cónicas son el resultado de algunas de las soluciones a los problemas típicos de la antigua Grecia tales como la duplicación del cubo, construcción de un cuadrado de igual área de un círculo y la trisección de un ángulo agudo.

- *Griegos*

Llama particularmente la atención la formulación de las secciones cónicas por Apolonio quien a la vez las estudia aproximándose de una forma sorprendente al estudio de coordenadas. Según Mesa & Villa-ochoa (2008) afirma. Que en la literatura revisada se puede inferir que de no ser por los pocos recursos conceptuales de los que disponía Apolonio hubiese dado un paso importante a la creación de la geometría analítica. Es importante además el significado de parábola como equiparación, similar al concepto de paralelogramo de Euclides en los que, por supuesto se encuentra la figura cuadrilátera, cabe inferir como la concepción cuadrática se refiere a un proceso también de conversión de áreas.

En relación con la búsqueda de solución a alguno de los tres problemas típicos de la Grecia Clásica, Hipócrates de Chíos afirma que el problema de la duplicación del cubo "puede reducirse a encontrar dos medias proporcionales entre la arista dada y su doble. En nuestra notación algebraica, sean x e y tales que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. Entonces$x = ay$ e $y^2 = 2ax$" (Kline, 1972, p. 70). Esta afirmación conduce a una ecuación cuadrática de lo que puede deducirse que cuadrado es el producto que se desprende de la media proporcional, pero a su vez ésta se evidencia como un segmento que es nombrada como raíz, por lo tanto, también como una solución.

Según Kline (1992), Hipócrates debió haber razonado con base en la geometría, en particular en las secciones cónicas, este razonamiento remite a la geometría analítica que permite ver que x e y son las coordenadas del punto de intersección de dos parábolas o de una parábola y de una hipérbola.

- *Siglo XVI*

Descartes (como se citó en Mesa y Villa-ochoa, 2008). Afirma que una parábola se construía punto a punto ante la imposibilidad de su construcción con regla y compás, hecho que permite relacionar a esta cónica con el concepto de función al observarse en esta afirmación una idea relación unívoca, para algunos casos, en el plano pero que se supera posteriormente al abordarla desde la generalidad.

- *Siglo XVII*

Esta época se caracteriza por tratar de definir las cónicas como curvas correspondientes a ecuaciones de segundo grado, en *x* e *y,* así se establece el estudio de los lugares geométricos estableciendo un puente para transitar entre la Geometría y el Álgebra, lo que permite asociar curvas y ecuaciones. Es importante recalcar además la importancia aritmética en esta transición.

Según Mesa y Villa-ocho (2008). Las cónicas y en particular la parábola se considera en la actualidad como referentes importantes de relaciones cuadráticas, sin embargo, se observa que históricamente surgieron de forma independiente a las nociones de variación y cambio relativas al concepto de función. Vale la pena generar las reflexiones pertinentes sobre las implicaciones que tendría en el aula de clase continuar replicando esta parte de la historia abordando dichos conceptos de manera independiente o, por el contrario, evaluar las implicaciones que tendría para la comprensión de ambos conceptos de manera conjunta.

c. Las Funciones

Muchas referencias a la historia de las matemáticas han establecido que el concepto de función como tal, es un concepto con unas raíces muy antiguas pero con una consolidación muy reciente en el campo formal de la Matemática, esto permite identificar procesos de variación en su constitución y formalización que dé cuenta de procesos inherentes al concepto mismo, permitiendo establecer la relaciones que aportaron a la consolidación del concepto de función cuadrática como objeto matemático a partir de su naturaleza y sus propiedades. Para detallar mejor este tema lo explicaremos desde distintos puntos de vistas de diferentes autores:

- *Newton*

Newton representa la transición entre el estudio del movimiento y por lo tanto las variaciones, entre las ideas y representaciones intuitivas que se validan dentro del desarrollo algebraico. Por tal motivo presentamos la Proposición XXX. Problema XXII. "Descubrir en cualquier tiempo asignado el lugar de un cuerpo que se mueve en una parábola dada" (Newton, 1687, p.345).

Este tipo de proposiciones es una muestra de la sinergia entre la geometría euclidiana, las cónicas y la geometría analítica, como objeto de estudio el movimiento, ya que la demostración de esta proposición ubica un plano cartesiano muy primitivo, que sólo consta de la intersección de dos rectas en ángulo recto pero donde cada eje está tomado como eje de referencia en tanto abscisa u ordenada, donde no está segmentado por cantidades numéricas, pero el tratamiento que se le hace es igual, traza curvas sobre él, y la proposición es clara en el sentido en que se dice cualquier tiempo, éste adopta una cualidad variable a la que corresponde un lugar geométrico que bien podría ser un punto en el espacio. Por tal motivo Newton (como se citó en Mesa & Villa-ochoa, 2008) conceptualiza que las funciones es un paso entre el concepto de función en tanto es posible hallar una relación para cualquier instante (variable) y un punto de la parábola (variable), y como fue visto anteriormente la parábola está dada por una ecuación de segundo grado.

- *Descartes*

El desarrollo de esta geometría fue esencial para la noción de función que se fue construyendo en esta misma época. Se acentúa el interés en la resolución geométrica de las ecuaciones algebraicas con dos variables y como señala Descartes (como se citó en Del Rio 1996, p. 38) ″encontró métodos para construir geométricamente los valores de una variable fijados los de la otra″ por lo que ya tiene dos propiedades de la definición de función, la primera el considerar dos cantidades variables y la segunda una cierta relación de dependencia. Sin duda un aporte muy valioso de la Geometría analítica fue el estudio de los lugares geométricos estableciendo un puente para transitar entre la Geometría y el Álgebra, lo que permite asociar curvas y ecuaciones. Según Mankiewicz (2001) afirma.: ″Descartes también rompió con la tradición al tratar las potencias como números y no como objetos geométricos. Ya no era un área si no un número surgido de la segunda potencia; su equivalente geométrico era la parábola; no el cuadrado" (p. 84). De esta manera *cuadrado* es concebido como una cantidad a diferencia de la tendencia mantenida al considerarla como un área al ser el resultado de una segunda potencia, por lo que se logra un desprendimiento al concebir x^2 no como un área si no como una cantidad.

Descartes (citado por Kline, 1992), acerca de la parábola dice que ″no se puede construir con regla y compás, si no punto a punto y se debe, por tanto, utilizar la ecuación para dibujar la curva exactamente″ (p. 414). La ecuación a la que hace referencia Descartes es la asignada por la curva, sea cual fuere. Esta afirmación dejaba a los descubridores del concepto de función una relación unívoca en el plano, es decir, que la función después que fue concebida como tal y como ahora habita en el desarrollo del análisis matemático y del cálculo, estudió las diferentes representaciones en el plano con base en las relaciones entre las variables.

- *Dirichelt:*

Las aportaciones de Dirichelt fueron muy relevantes como cuando ofreció la definición de función más empleada ahora “es una función de x cuando el valor de x en un intervalo dado le corresponde un número y. agregó que no importa si en todo este intervalo *y* depende de *x* de acuerdo a una ley o más, si la dependencia puede expresarse por medio de una operación matemática" (Kline, 1992, p. 1252). De la misma forma Cauchy (citado por Kline,1992) afirma:

> Cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que, estando dado el valor de una de estas, se puedan determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se considera a estas cantidades diversas expresadas por medio de la que está entre ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente y las

otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas que uno llama funciones de esa variable. (p.1254)

La relación de dependencia entre estas variables facilita la relación en el plano cartesiano por medio de la expresión analítica (ecuación), y según Euler toda función es una expresión analítica. Es decir, que las situaciones cuadráticas después de ser estudiadas en el plano, al darle una generalidad por medio de su expresión analítica donde A, por ejemplo, deja de ser un punto como es usual notarlos en la geometría griega pasa a ser el punto donde se relacionan dos magnitudes en una determinada cantidad siendo *A* una pareja ordenada (x,y), una vez analizado este comportamiento de la curvas construidas por medio de una ecuación cuadrática se podía Distinguir un tipo de relación unívoca entre cantidades que posteriormente fue llamada función cuadrática.

- *Fermat*

Fermat en sus investigaciones sobre las curvas partió del estudio de los geómetras griegos, sobre todo de Apolonio, con el fin de "inaugurar un estudio general de los lugares geométricos que los griegos no habían llegado a hacer, logró plantear ecuaciones algebraicas y su correspondiente gráfico en un plano que no contaba con coordenadas negativas"(Kline,1992, p. 403). Al respecto Collete (1986), afirma que Fermat "investiga la forma general de las ecuaciones de 1° y 2° grado, mediante transformaciones de coordenadas (traslado del origen y rotación de ejes) las reduce a sus formas canónicas simplificando así su tratamiento geométrico” (p. 165).

Sin lugar a duda y como lo afirma Diudonné (citado por Ruiz, 1998), "el método de las coordenadas constituye también el fundamento de los otros dos grandes progresos realizados en el siglo XVII; la introducción de la noción de función y el cálculo infinitesimal" (p. 119). Puesto que el sistema de coordenadas relaciona dos variables en un conjunto numérico que posteriormente por algunas características especiales de estas relaciones construirían el concepto de función indispensable para el estudio del análisis matemático y el desarrollo del cálculo.

Es decir, que las situaciones cuadráticas después de ser estudiadas en el plano, al darle una generalidad por medio de su expresión analítica donde A (por ejemplo) deja de ser un punto como es usual notarlos en la geometría griega (Euclides y Apolonio) pasa a ser el punto donde se relacionan dos magnitudes en una determinada cantidad curvas construidas por medio de una ecuación cuadrática se podía distinguir un tipo de relación unívoca entre cantidades que posteriormente fue llamada función cuadrática.

- *Carvajal*

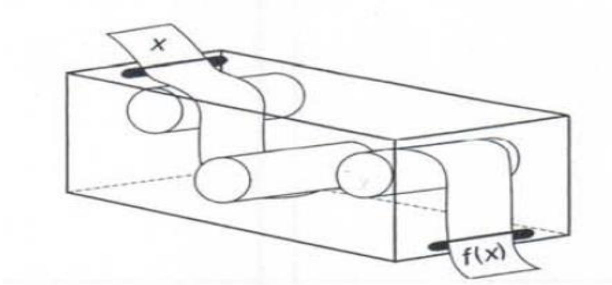
Ahora en la actualidad contamos con una definición exacta de las funciones como las que muestra Carbajal y Espinoza:

Un conjunto de dos pares ordenados (x, y) tales que $x \in A$ y $y \in B$ es una función o aplicación de A en B si a cada $x \in A$ le corresponde un único elemento $y \in B$; es decir, una relación que tiene la propiedad de que a cada elemento de su dominio le corresponde uno y solo un elemento de su codominio, se llama función

Podemos imaginar que una función es como una máquina que toma una alimentación (entrada) x y la transforma o convierte en alguna salida f(x), como se muestra en la siguiente figura, (Carvajal, 2006, pág. 19)

Figura 4

Función como Maquina Transformadora



Nota: la figura hace referencia lo que menciona Carvajal (2006) sobre de que la función es como una maquina transformadora

- *Espinoza*

Por su parte Espinoza (2012) afirma los sigiente:

Consideremos dos conjuntos cualesquiera A y B, a la relación binaria f de A en B le llamaremos función de A en B, si y solo si, verifica.

i) $f \subseteq A \times B$

ii) $(a, b) \in f \ \wedge (a, c) \in f \ \Rightarrow b = c$

Esto quiero decir, que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente. (p.223)

d. Funciones cuadráticas

Para desarrollar esta parte de esta investigación se tomó como referencia en lo siguiente Nava et. al (2013), Jiménez (2011) y Espinoza (2012).

La función cuadrática tiene la siguiente ecuación general:

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$

Donde a, b y c son constantes que pueden tomar cualquier valor, excepto la constante a que no puede valer cero, pues en ese caso la ecuación se convierte en la de una función lineal.

- *Grafica de las funciones cuadráticas*

  La grafica de las funciones cuadráticas tiene la forma cónica. Puede ser cónica hacia arriba o cónica hacia abajo. Para reforzar seste argumento vemos el siguiente análisis.

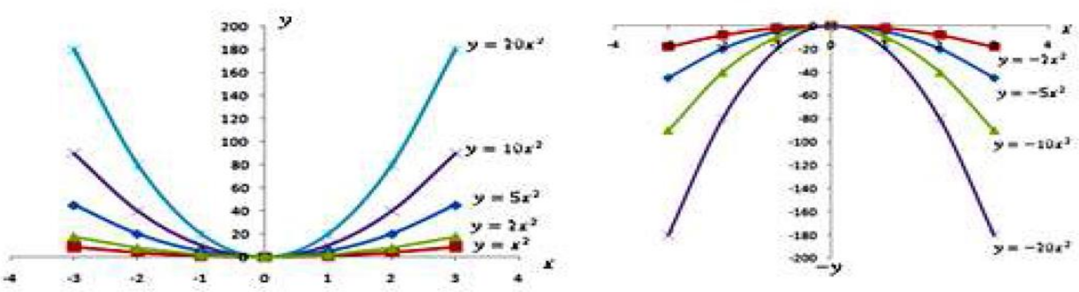
Análisis de los parámetros A, B, C en la función cuadrática.

El estudio de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ y su grafo depende de los Parámetros $a, b\ y\ c, a \neq 0$. El parámetro "a" determina la concavidad de la parábola. Si $a > 0$, la parábola se considera cóncava hacia arriba, el vértice en este caso (0,0) es el mínimo absoluto. Si $a > 0$, la parábola se considera cóncava hacia abajo y el vértice, en este caso (0,0) es el máximo absoluto como se observa en la Figura 5.

Figura 5

Análisis del Comportamiento de la Función $y = f(x) = ax^2 + c$

$a > 0$ $a < 0$



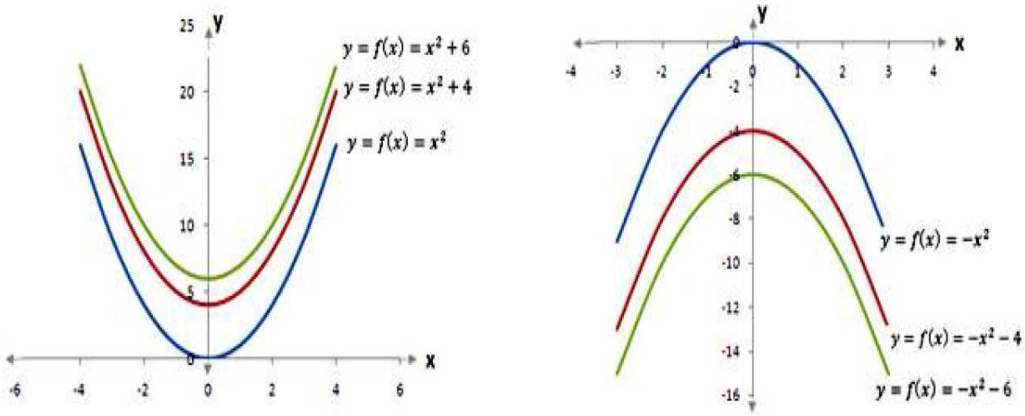
Nota: la figura se ilustra el comportamiento del grafico al tener coeficiente cuadrática positivo o negativo

El parámetro “c” determina cuanto se desplaza la grafica $y = f(x) = ax^2$ en el eje vertical. Si $c > 0$, se desplaza c unidades hacia arriba y si i $c < 0$, se desplaza $|c|$unidades hacia abajo. Las coordenadas del vértice siempre se encontrarán en $V(0, c)$, como se observa en la Figura

Figura 6

Análisis del Comportamiento en la Función $y = f(x) = ax^2 + c$

$c > 0$ $c < 0$



6.

Nota: la figura se ilustra el comportamiento del grafico al tener el parámetro “c”

Para estudiar el comportamiento de la función, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ se hace uso de la completación de cuadrados y se transforma en:

$$y = f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4ac}$$

Sustituyendo los valores $h = \frac{-b}{2a}$ y $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$ se obtiene:

$$y = f(x) = a(x - h)^2 + k$$

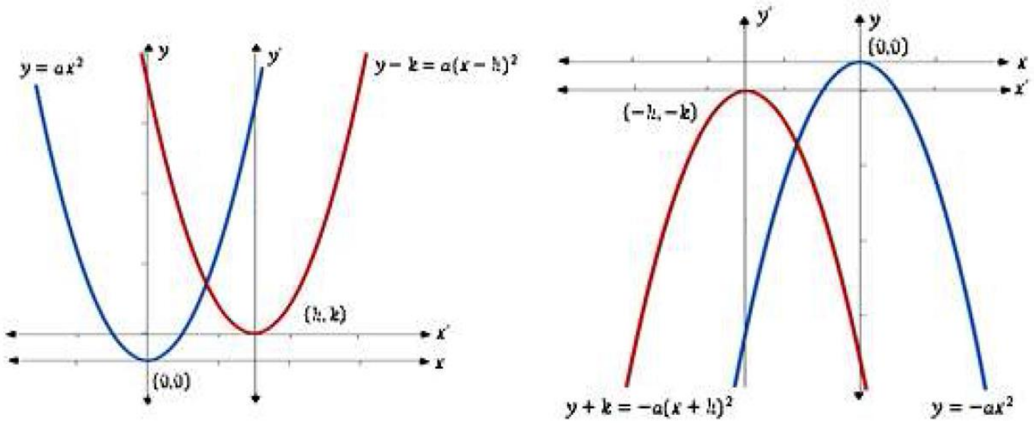
Equivalente a la expresión:

$$y - k = a(x - h)^2$$

El punto de coordenadas (h, k) corresponde al vértice de la parábola y la recta vertical $x = h$, se denomina eje de simetría. El parámetro b, determina un desplazamiento horizontal de $|h|$ unidades, como se observa en la Figura 7.

Figura 7

Estudio de la Función $y = f(x) = ax^2 + bx + c$



Nota: la figura se ilustra el comportamiento del grafico al tener la ecuación cuadrática completa

- *Propiedades básicas de las funciones cuadráticas*

Intersección en los ejes coordenados

Para determinar la intersección con el eje y, se hace $x = 0$, entonces $y = f(0) = a(0)^2 + b(0) + c$; por lo tanto, se tiene que $x = f(x) = c$, la interccion con el eje "y" está en la coordenada $(0, c)$.

Para hallar la intersección con el eje x, se hace $y = 0$, es decir, se encuentra las raíces de la ecuación cuadrática $0 = ax^2 + bx$+c.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de discriminante y a partir de este se puede determinar cómo van a ser las soluciones. Si el valor de $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes, es decir, la parábola cruza el eje x en dos puntos.

Si el valor de $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene una solución real, es decir la parábola toca el eje x en un punto.

Si el valor de $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tiene raíces reales, es decir que la gráfica no toca ni cruza el eje x.

Vértice de la parábola (valor máximo mínimo)

la función $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ y obteniendo sus raíces por medio de la ecuación cuadrática:

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Es posible conocer también las coordenadas del vértice, haciendo el promedio entre estos dos puntos. En el eje x será:

$$\frac{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2}=\frac{-2b}{4a}=\frac{-b}{2a}$$

Y en el eje y es $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$, la coordenada del vértice es entonces $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$, el eje de simetría será la recta $x = \frac{-b}{2a}$.

Mediante el siguiente ejemplo se muestra cómo se puede hallar el vértice, completando Cuadrados.

Ejemplo: Considerando la función $y = f(x) = 2x^2 + 12x + 20$, las coordenadas del vértice se hallan completando cuadrados así:

$$y = 2(x^2 + 6x + \_\_) + 20$$

$$y = 2(x^2 + 6x + 9) + 20 - 18$$

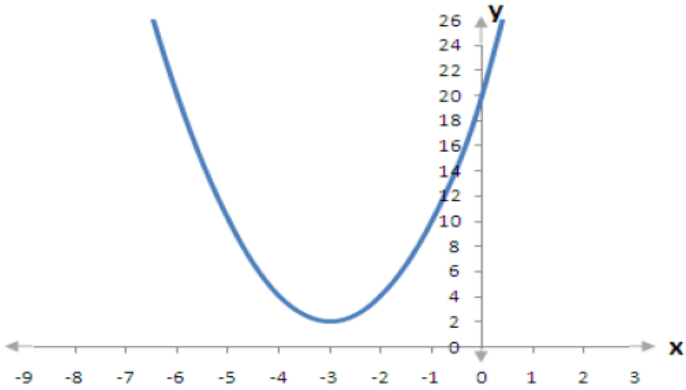
$$y = 2(x + 3)^2 + 2$$

$$y - 2 = 2(x + 3)^2 = 2(x - (-3))^2$$

Entonces, las coordenadas de los vértices $V(h, k)$ con $h = -3$ y $k = 2$ son, $V(-3, 2)$. como $a = 2 > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba, y el vértice es el punto mínimo de la gráfica, el punto de corte con el eje y es (0,20). Como $2x^2 + 12x + 20 = 0$ no tiene soluciones reales entonces, la gráfica no corta en el eje x. la gráfica correspondiente es como se muestra en la figura.

Figura 8

Representación Gráfica de $y = f(x) = 2x^2 + 12x + 20$



Dominio y rango

El dominio de la función cuadrática es: $D_f = R$, EL rango se determina completan cuadrado.

Como $f(x) = ax^2 + bx + c$, enonces:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x \ + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Luego si $a > 0$ entonces:

$$D_f = R, \ \ R_f = [\ \frac{4ac - b^2}{4a}, +\propto \ >$$

Si $a < 0$ entonces:

$$D_f = R, \ \ R_f = < \ -\propto, \frac{4ac - b^2}{4a} \ ]$$

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Ubicación geográfica de estudio

El programa de estudios está ubicado en las inmediaciones de la facultada de Ciencias de la Educación y esta ala ves está situado dentro de la Universidad Nacional del Altiplano el cual está ubicado en el Av. Floral N°1153 de la ciudad de Puno. El programa de estudios cuenta con 10 semestres quienes laboran virtualmente por las mañanas. En cuanto al grupo de estudio que se investigara solo son cinco estudiantes del cuarto semestre del programa de estudio de MFCI de la UNA Puno 2020-II. Tales estudiantes tienen distintas clases sociales, económicas, ya que en dicha institución con respectos las áreas académicas son pocos participativos.

3.2. Periodo de duración del estudio

La duración del presente informe de investigación, tuvo una duración de 5 meses, a partir de la aprobación del proyecto de tesis y elaboración del informe.

3.3. Procedencia del material utilizado

Para evaluar la comprensión del significado de las funciones cuadráticas los instrumentos que se utilizó se adecuado tomando en referencia la propuesta del circulo hermenutico de la comprension en matematicas, planteado por de Gallarado y Quintanilla (2019).

3.4. Diseño metodológico de la investigación

3.4.1. Tipo

La investigación es de tipo estudio de caso. Según Eisenhardt (1989) un estudio de caso contemporáneo es “una estrategia de investigación dirigida a comprender las dinámicas presentes en contextos singulares”, la cual podría tratarse del estudio de un único caso o de varios casos, es por eso que designamos esta investigación como de estudio de casos; porque se evaluara la comprensión de los significados matemáticos de cinco estudiantes de manera detallada desde diferentes aspectos como los del plano semiótico, plano fenómeno-epistemológico y plano dialógico.

3.4.2. Diseño

El diseño de la investigación es de estudio de casos, donde según Hernández et. al (2014). Indican que en este diseño el proceso para cada paso se repite en los demás. La revisión de los casos es similar.

- **Diseños de múltiples casos**

En estos diseños, el proceso para cada caso se repite en los demás. La revisión de los casos es similar (se consideran las mismas variables o aspectos, al igual que los instrumentos para recolectar los datos y el proceso en general, aunque puede haber variantes). Por ejemplo, varios hospitales, escuelas o enfermos con características equivalentes. A veces se eligen casos significativos, lo que en términos prácticos resulta muy difícil, ya que encontrar varios casos que compartan similitudes es complicado. Es importante remarcar que cada caso deberá servir a un propósito específico dentro del alcance total. Asimismo, es necesario insistir que el conocimiento generado por los diversos casos no es aditivo

3.5. Muestreo

En el caso de la investigación de estudio de casos, según Hernández et. al (2014) menciona lo siguiente “la decisión del número de casos que conformen la muestra es del investigador “(p.385). Tomando de referencia lo mencionado y muy aparte de ello propone una muestra reducida 3 a 5 personas si la investigación es realmente extensa. Es por tal motivo que la muestra que se trabajó en esta investigación es de cinco estudiantes del cuarto semestre del programan de estudios Matemática, Física, Computación e Informática de la UNA Puno en el 2020-II, debido a que el estudio de cada caso será realmente extenso, puesto que se les evaluó desde diferentes planos interpretativos para determinar una aproximación a la comprensión de cada individuo. Para la selección de los estudiantes se realizó un muestreo de caso de tipo el cual consistió en agrupar a todos los estudiantes del cuarto semestre en cinco grupos según el nivel respuestas que brindaron, luego de aplicar el primer instrumento de evaluación (prueba escrita) la misma que fue interpretada posteriormente de su selección, y a partir de ahí se seleccionaron un represéntate de cada grupo para ser estudiados.

3.6. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

3.6.1. Examen

Consiste en la formulación de preguntas, con el fin de determinar, concretamente, los primeros indicios de comprensión que tiene el sujeto sobre un determinado aspecto. Es donde se evaluó los rastros de comprensión y se hizo el estudio epistemológico.

f. Instrumento

La prueba escrita Es un conjunto de preguntas que se deducen de los indicadores de la variable a investigarse.

3.6.2. Entrevista no estructurada

Se utilizó para recabar información exacta sobre las complejidades que tuvieron y el por qué realizaron dichos procedimientos, ya que esta técnica se utiliza como medio para obtener datos o informaciones que solo pueden aportar los sujetos sobre un determinado problema.

g. Instrumento

Hoja de registro de datos es donde registraran toda la información que obtendrá durante la entrevista o la grabación.

3.7. Procedimiento

a) se tomó una evaluación a los a todos los estudiantes asistentes del cuarto semestre, en donde cada estudiante tenía la necesidad de utilizar su conocimiento natural sobre las funciones cuadráticas, para ello se utilizará la técnica del examen y como instrumento la prueba escrita, la herramienta virtual que utilizaremos será la del Google Meet. Siempre verificando que los resultados sean los más fidedigno posible.

b) se revisó en primera instancia la resolución de los estudiantes para luego agruparos en cinco grupos y en seguida seleccionar un representante de cada grupo. Luego de tener seleccionado a los individuos se revisó sus exámenes correspondientes desde un plano semiótico en donde se intentó analizar y puntualizar los rastros de comprensión del significado de las funciones cuadráticas.

c) se revisó los 5 exámenes seleccionados desde un plano fenómeno-epistemológico, en el cual pretendí deducir los usos del conocimiento Matemático que se desprenden de los rastros de comprensión emergentes de los registros escritos por los estudiantes

d) se hizo una un dialogo con los estudiantes seleccionados para indagar la intención que muestran en el registro de naturaleza escrita (examen), para ello utilizare la técnica de entrevista no estructurada y como instrumento la hoja de registro de datos, así mismo se grabó la entrevista.

e) se interpretó la grabación de la entrevista, todo ello con el fin de relacionar con la información adquirida en el plano semiótico y fenómeno-epistemológico, para poder deducir una aproximación de la comprensión del significado de las funciones cuadráticas que tiene los sujetos investigados.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1.RESULTADOS

4.1.1. Escenario básico de interpretación y actividad matemática

Pretendemos evaluar la comprensión del significado de las funciones cuadráticas mediante la metodología del círculo hermenéutico a través de su aplicación en uno de los escenarios básicos de interpretación con estudiantes de la especialidad de Matemática, Física, Computación e Informática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Altiplano- Puno. Nos referimos a la interpretación que realizare de la comprensión matemática desplegada por 5 estudiantes del cuarto semestre cuyos códigos son: E4L, E4N, E4W, E4C Y E4U, en su intento por resolver una tarea escrita de 4 preguntas sobre funciones cuadráticas. En esta ocasión, este trabajo de investigación interpretativo lo realizo para obtener el grado de licenciado en Educación Secundaria. Los 5 estudiantes protagonistas y sus demás compañeros participaron en este contexto de trabajo como alumnos propios mientras cursaban la asignatura de algebra Moderna. El estudio de caso que presentamos ejemplifica el tipo de actividad matemática que desarrollaron los estudiantes en su ambiente natural de aula, que involucraba la descripción y explicación de los procesos y resultados obtenidos durante la resolución, propia y ajena, de tareas matemáticas escritas.

4.1.2. Tarea

La tarea sobre funciones cuadráticas, son tareas seleccionadas de diferentes libros universitarios y preuniversitarios. Elegimos de forma intencionada 4 preguntas de diferentes libros con el propósito de asignar a los libros de texto una utilidad didáctica alternativa y complementaria a la tradicional usualmente extendida. En seguida mostramos la interrogante de la tarea y las estrategias de resolución.

- ***Primera pregunta***

En la siguiente función cuadrática:

A) investiga si los valores dados de "y" pertenecen al Rango de la función

B) ¿Cuál es el dominio de una función cuadrática?

$y = x^2 + 2x - 8$ Para y = 0; y = -10. (Nava et. al, 2013, p. 87)

De acuerdo al modelo interpretativo se requiere un análisis fenómeno-epistemológico del registro escrito sobre las funciones cuadráticas como referencia previa para la aplicación de las dos primeras fases del círculo hermenéutico. En este caso se trata de una evaluación que pertenece a la esfera fenómeno- epistemológico de varios conocimientos matemáticos distintos y susceptibles de emplearse de manera relacionada durante el proceso de resolución. En concreto, la evolución atiende diferentes vínculos de situación –conocimiento con los principales conocimientos incluidos en la tabla 1.

Tabla 1

Análisis Fenómeno Epistemológico de la primera pregunta

Conocimientos Matemáticos	Concepto de función cuadrática
	Concepto de dominio y rango de una función cuadrática
	El Dominio en una función cuadrática (R: reales)
	Procedimiento para la Ubicación del vértice de la gráfica
	Valor numérico de una función
	Identificación de los parámetros
	Concepto de función cuadrática: Coeficiente cuadrático (a>0 es cónica hacia arriba y Si a<0 es cónica hacia abajo)
	Rango de una función cuando a>o ($\left[f(-\frac{b}{2a}), +\infty\right\rangle$)

Relaciones	Relaciones de pertenencia Ecuaciones cuadráticas Recta real
Estrategias heurísticas	Dominio de la función cuadrática son los números Reales, rango propiedad cuando el coeficiente cuadrático es mayor que cero

Asimismo, la tarea también exige para su resolución establecer diferentes relaciones adicionales de estos conocimientos básicos sobre funciones cuadráticas. Entre las fundamentales se encuentran la relación del concepto de funciones cuadráticas y las cónicas, la relación entre dominio y rango, relación de pertenencia y propiedades referidos al tema como la propiedad vértice. Finalmente, la resolución de la tarea requiere el empleo de estrategias heurísticas y de conocimiento teórico que permitan resolver las dos sub preguntas. Un ejemplo de posible estrategia de resolución seria utilizando la propiedad del rango y dominio cuando el coeficiente cuadrático es mayor que cero las cuales son: $D_f = \mathbb{R}$ y $R_{f=}\left[f(-\frac{b}{2a}), +\propto\right\rangle$ ó $R_{f=}\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\propto\right\rangle$. Una vez ya identificado el dominio el cual es todos los números reales, procedemos averigua el rango de la función cuadrática primeramente reconociendo los coeficientes de la función y luego remplazando en las fórmulas ya mencionadas, Ejemplo:

$$y = \underbrace{1}_{a}x^2 + \underbrace{2x}_{b} - \underbrace{8}_{c}$$

Remplazando

$$R_{f=}\left[f(-\frac{2}{2(1)}), +\propto\right\rangle$$

$$R_{f=}[f(-1), +\propto\rangle$$

Identifico f (-1):

$$y = f(x) = x^2 + 2x - 8$$
$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 8$$
$$f(-1) = 1 - 2 - 8$$
$$f(-1) = -9$$

Determinamos el rango de la función:

$$R_{f=}[f(-1), +\propto\rangle$$
$$R_{f=}[-9, +\propto\rangle$$

Para finalizar identificamos si los valores de $y = 0 \wedge y = -10$ dados pertenecen a la función:

$$y = 0 \ \in \ [-9, +\propto\rangle$$
$$y = -10 \ \notin [-9, +\propto\rangle$$

Entonces concluimos que la respuesta de la interrogante a). Es que solamente y=0 pertenece al rango de la función mientras que y=-10 no pertenece. Y respeto a la pregunta b). El dominio de la función seria todos los números reales.

- ***Segunda pregunta***

Determina el valor máximo o mínimo de la función cuadrática.
$f\ (x)\ =\ 4x\ -\ x^2$. P 76 ejemplo 1 (Jiménez, 2011, p. 76)

Para esta interrogante de igual manera requiere un análisis fenómeno-epistemológico del registro escrito sobre las funciones cuadráticas como referencia previa para la aplicación de las dos primeras fases del círculo hermenéutico. En concreto, esta interrogante atiende diferentes vínculos de situación –conocimiento con los principales conocimientos incluidos en la tabla 2.

Tabla 2

Análisis Fenómeno -epistemológico de la Segunda Pregunta

Conocimientos Matemáticos	Concepto de función cuadrática
	Idea de los coeficientes de una función cuadrática
	Propiedad para identificar el rango de la función cuadrática
	Concepto de función cuadrática: Coeficiente cuadrático (a>0 es cónica hacia arriba y Si a<0 es cónica hacia abajo)
	Idea de máximo y mínimo de una función cuadrática
	Procedimiento para determinar el vértice de la gráfica de una función cuadrática

	$v = \left(-\frac{b}{2}; f\left(-\frac{b}{2}\right)\right)$ Valor numérico de una función
Relaciones	Ecuaciones cuadráticas Dado un valor “x” calcular el valor de “y”
Estrategias heurísticas	Considerando a<0 determinamos el máximo valor, utilizando las fórmulas para determinar el vértice o la fórmula para determinar el rango.

De la misma forma, esta pregunta también exige para su resolución establecer diferentes relaciones adicionales de estos conocimientos básicos sobre funciones cuadráticas. Entre las fundamentales se encuentran la relación del concepto de funciones cuadráticas y las cónicas, y propiedades referidas al tema como la propiedad del vértice. Finalmente, la resolución de la tarea requiere el empleo de estrategias heurísticas y de conocimiento teórico que permitan resolver la pregunta. Una estrategia de resolución seria utilizando la propiedad del vértice considerando que es una cónica hacia abajo puesto que el coeficiente cuadrático es menor que cero, dichas formula es la siguiente: $v\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

Para utilizar la fórmula del vértice debemos ordenar de forma decreciente e identificar los coeficientes cuadráticos, lineal e independiente.

$$f\,(x) \;=\; 4x \;-\; x^2$$
$$f\,(x) = \underbrace{-1}_{a}x^2 + \underbrace{4x}_{b} + \underbrace{0}_{c}$$

Utilizamos la propiedad del vértice y averiguando el valor que toma “x” en el vértice

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Remplazamos

$$x = -\frac{4}{2(-1)}$$

$$x = 2$$

En seguida determinamos el valor de $y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(2)$

$$y = f(x) = 4x - x^2$$
$$f(2) = 4(2) - (2)^2$$

$$f(2) = 8 - 4$$
$$f(2) = 4$$

Entonces de decimos que el vértice de la ecuación cuadrática es $V(2; 4)$ siendo el 4 el máximo valor puede tomar la función f(x).

- ***Tercera pregunta***

En un papel cuadriculado bosqueja las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas:

$y = x^2 - x - 6$ (Nava et. al, 2013, p. 103)

En esta interrogante de igual manera requiere un análisis fenómeno-epistemológico del registro escrito sobre las funciones cuadráticas como referencia previa para la aplicación de las dos primeras fases del círculo hermenéutico. En concreto, esta interrogante atiende diferentes vínculos de situación –conocimiento con los principales conocimientos incluidos en la tabla 3.

Tabla 3

Análisis fenómeno-epistemológico de la tercera pregunta

Conocimientos Matemáticos	Concepto de función cuadrática Orientación de a gráfica: Coeficiente cuadrático (a>0 es cónica hacia arriba y Si a<0 es cónica hacia abajo) Procedimiento para la Ubicación del vértice de la gráfica Concepto de cómo obtener Puntos de intersección en los ejes coordenados eje de simetría en la gráfica de la función cuadrática
Relaciones	Transformaciones Ecuación cuadrática
Estrategias heurísticas	Determinar la orientación de la gráfica, el vértice, eje de simetría y los puntos de intersección en los ejes coordenados

Como las anteriores, esta pregunta también exige para su resolución establecer diferentes relaciones adicionales de estos conocimientos básicos sobre funciones cuadráticas. Entre las fundamentales se encuentran la relación del concepto de funciones cuadráticas y las cónicas, propiedad del vértice. Finalmente, la resolución de la tarea requiere el empleo de estrategias heurísticas y de conocimiento teórico que permitan resolver la pregunta. Una estrategia de resolución seria utilizando la estrategia de bosquejo planteada por Nava , Vázquez, Cuellar, Leal, & Rodríguez, (2013). El cual consite en 1) orientacion de la Gráfica, 2) hallar el vertice, 3)determinar interseccion en el eje "y", 4) determinar el eje de simetria, 5) determinar la interseccion en el eje "x", en tal sentido utilizaremos la secuencia corespondiente

A. Orientacion de la grafica

Determinamos la orientacion de la grafica de una funcion cuadratica identificando el coeficiente del termino cuadrático el cual es simbolizado con la letra "a"

$$y = \overset{a}{1}.x^2 - \overset{b}{1}\,x - \overset{c}{6}$$

Como el $a > 0$, entonces decimos que la orientación de la cónica será hacia arriba.

B. El vértice

Para determinar el vértice aplicamos la formula siguiente: $v\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

Para utilizar la fórmula del vértice debemos ordenar de forma decreciente e identificar los coeficientes cuadráticos, lineal e independiente

$$y = 1.x^2 - x - 6$$
$$f(x) = \underset{a}{1.x^2} \underset{b}{- x} \underset{c}{- 6}$$

Utilizamos la propiedad del vértice y averiguando el valor que toma "x" en el vértice

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Remplazamos

$$x = -\frac{-1}{2(1)}$$

$$x = \frac{1}{2}$$
$$x = 0.5$$

En seguida determinamos el valor de $y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(2)$

$$y = f(x) = x^2 - x - 6$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1(2)}{2(2)} - \frac{6(4)}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{25}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -6{,}25$$

Entonces, decimos que el vértice de la ecuación cuadrática es $V(0{,}5;\ -6{,}25)$

C. Intersección en "Y"

Para Calcula las coordenadas del punto donde la gráfica corta el eje Y. toma x = 0, sustituye este valor en la ecuación de la función dada y calcula la intersección "y".

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

Para X=0

$$f(0) = 0^2 - 0 - 6$$

$$f(0) = -6$$

Entonces decimos que el punto de intersección en el eje Y es en el punto B (0; -6)

D. Eje de simetría

Conociendo la posición del vértice de la gráfica, puedes trazar el eje de simetría que pasa por el vértice y es paralelo al eje Y. La ecuación del eje de simetría es x = h.

Conociendo el vértice $V(0{,}5;\ -6{,}25)$

Entonces el eje de simetría seria x=0,5

E. Intersección en "x"

Para determinar las intersecciones en el eje "x", tomamos y = 0, y sustituimos este valor en la ecuación dada; después resuélvela para encontrar los valores de x, ya sea por factorización o empleando la fórmula general cuadrática. Si los valores de la intersección "x" no son valores reales, significa que la gráfica no corta al eje X.

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

Para Y=0

$$0 = x^2 - x - 6$$

$$\begin{array}{cc} x & -3 \\ x & +2 \end{array}$$

$$0 = (x-3)(x+2)$$

$$x - 3 = 0 \ \lor \ x + 2 = 0$$

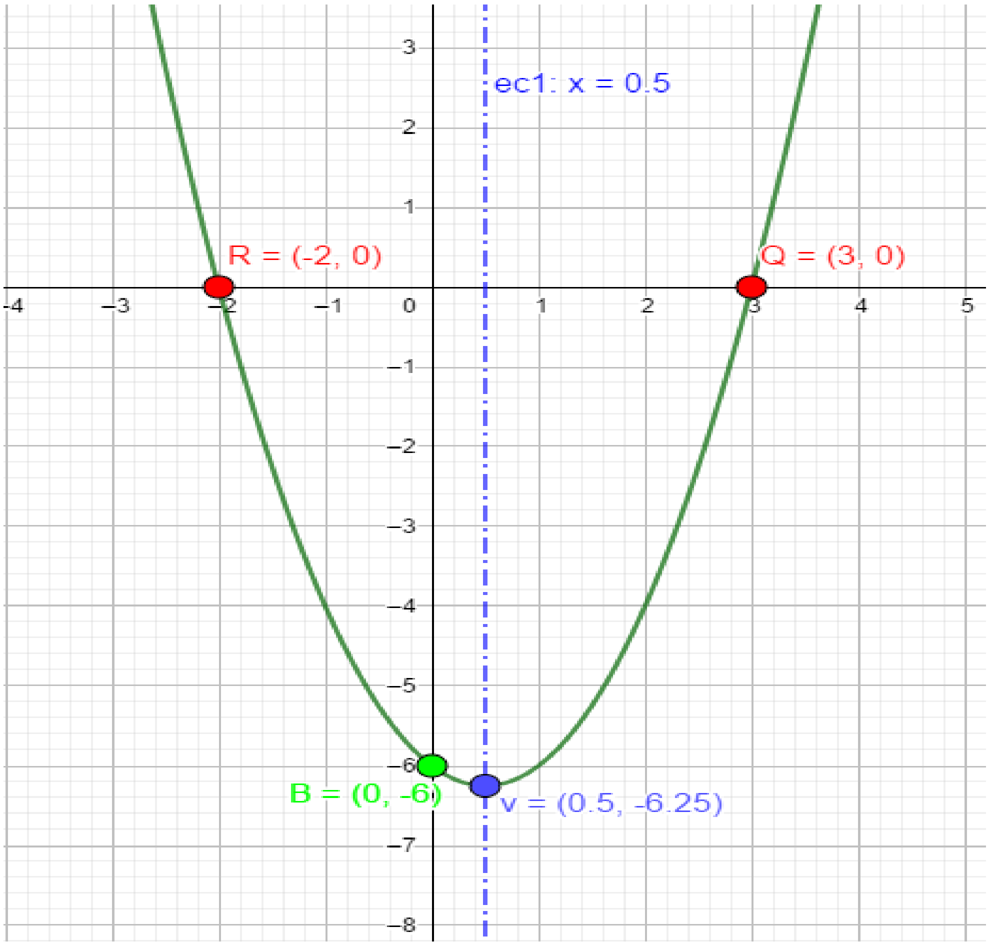
$$x = 3 \ \lor \ x = -2$$

De esto llegamos a la conclusión que en el eje "x" intercepta en dos putos el punto Q (3: 0) y R (-2;0).

Finalmente, a partir de todos los datos ya conseguido realizamos la grafica

Figura 9

La grafica de la Función Cuadrática $f(x) = x^2 - x - 6$



Nota: la figura se ilustra la gráfica de la función cuadrática con los criterios de bosquejo que plantea Nava, Vázquez, Cuellar, Leal, & Rodríguez, (2013).

- ***Cuarta pregunta***

Un profesor de matemáticas asesora a un comerciante para determinar un modelo matemático que le proporcione la utilidad $U(x)$ en dólares generada por las ventas de x artículos por semana, y diseña la siguiente fórmula:

$$U(x) = 30x - \frac{1}{5}x^2$$

a) ¿Cuántos artículos debe vender en una semana para obtener la máxima ganancia?

b) ¿Cuántos artículos debe vender para tener una utilidad de 1,000 dólares? (Jiménez, 2011, p. 78)

Así mismo, esta interrogante de igual manera requiere un análisis fenómeno-epistemológico del registro escrito sobre las funciones cuadráticas como referencia previa para la aplicación de las dos primeras fases del círculo hermenéutico. En concreto, esta interrogante atiende diferentes vínculos de situación –conocimiento con los principales conocimientos incluidos en la tabla 4.

Tabla 4

Análisis Fenómeno-epistemológico de la Cuarta Pregunta

Conocimientos Matemáticos	Concepto de función cuadrática Idea de los coeficientes de una función cuadrática Orientación de a gráfica: Coeficiente cuadrático (a>0 es cónica hacia arriba y Si a<0 es cónica hacia abajo) Procedimiento para la Ubicación del vértice de la gráfica Idea de máximo y mínimo de una función cuadrática Idea de eje de simetría en la gráfica de la función cuadrática Dado un valor "y" calcular el valor de "x" Interpretación Significado de la grafica
Relaciones	Ecuación cuadrática Principios de igualdad
Estrategias heurísticas	Para a) determinar el vértice de la función cuadrática Para b) determinar dado un valor "y" calcular el valor de x, luego interpretar la grafica

Esta pregunta también exige para su resolución establecer diferentes relaciones adicionales de estos conocimientos básicos sobre funciones cuadráticas.

Entre las fundamentales se encuentran la relación del concepto de funciones cuadráticas y las cónicas, propiedad del vértice y la determinación del valor numérico. Finalmente, la resolución de la tarea requiere el empleo de estrategias heurísticas y de conocimiento teórico que permitan resolver la pregunta. Una estrategia de resolución para la primera sub pregunta sería determinado si la cóncava es hacia arriba o abajo, luego averiguamos el vértice de la función y de esa manera podríamos indicar cuál es el valor máximo o mínimo de la función. Por otra parte, para la segunda sub pregunta, tendríamos que utilizar la propiedad dado un valor y calcular el valor x, continuación desarrollamos la estrategia heurística.

a) ¿Cuántos artículos debe vender en una semana para obtener la máxima ganancia?

$$U(x) = 30x - \frac{1}{5}x^2$$

Esta es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{5}$ y $b = 30$,

Entonces la utilidad máxima se dará cuando:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$x = -\frac{30}{2\left(-\frac{1}{5}\right)}$$

$$x = -\frac{30}{-\frac{2}{5}}$$

$$x = \frac{150}{2}$$

$$x = 75$$

Por lo tanto, la utilidad máxima de U(x) es U (75):

$$U(x) = 30x - \frac{1}{5}x^2$$

$$U(75) = 30(75) - \frac{1}{5}(75)^2$$

$$U(75) = 2250 - \frac{5625}{5}$$

$$U(75) = 2250 - 1125$$

$$U(75) = 1125$$

b) ¿Cuántos artículos debe vender para tener una utilidad de 1,000 dólares?

Para saber cuántos artículos debe venderse y tener una utilidad de 1000 dólares, igualamos a 1000 la función de utilidad U(x) y resolvemos la ecuación resúltate

Igualamos la ecuación a 1000:

$$U(x) = 30x - \frac{1}{5}x^2$$

$$1000 = 30x - \frac{1}{5}x^2$$

Multiplicamos por 5 e igualamos a cero

$$1000(5) = (5)30x - (5)\frac{1}{5}x^2$$

$$5000 = 150x - x^2$$

Factorizando:

$$x^2 - 150x + 5000 = 0$$

$$\begin{array}{ll} x & -100 \\ x & -50 \end{array}$$

$$(x - 100)(x - 50) = 0$$

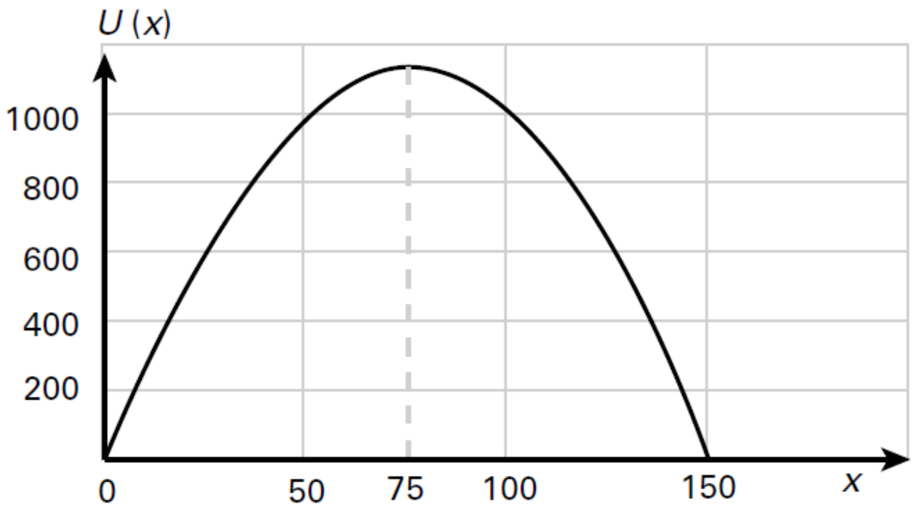
$$x - 100 = 0 \quad \vee \quad x - 50 = 0$$

$$x = 100 \quad \vee \quad x = 50$$

Todo indica que se tendrá en dos momentos la utilidad 100 dólares, pero en este caso la solución más factible seria x=50. De igual manera ilustramos la gráfica con los datos que se tiene

Figura 10

Grafica de la Función $U(x) = 30x - \frac{1}{5}x^2$



Nota: El presente grafico de la función cuadráticas realizado por Jiménez, 2011, pág. 78

4.1.3. Recogida y análisis de datos

La actividad de interpretación asociada a este episodio concreto se inicia con la propuesta de resolución individual de la tarea a todos los alumnos de la clase, entre los que se encuentran nuestros protagonistas, y se incorpora a su procedimiento particular de resolución un protocolo explicativo de las principales estrategias y acciones realizadas en cada caso. Explicamos la interpretación de la comprensión por cada estudiante y por cada pregunta planteada en la tarea.

En una primera etapa interpretativa, aplicamos sucesivamente las fases semióticas y fenómeno-epistemológica del círculo hermenéutico sobre la propuesta de resolución con el registro escrito que los protagonistas nos proporcionan. En ella buscamos identificar rastros de la comprensión matemática desplegada y, con base en éstos, caracterizar los usos dados a los diferentes conocimientos matemáticos puestos en juego. Para esta labor utilizamos como referencia el análisis fenómeno-epistemológico previo aplicado sobre la tarea donde hemos caracterizado previamente diversos conocimientos matemáticos vinculados con los conceptos básicos de las funciones cuadráticas y sus posibles modos de uso en la resolución de la tarea.

Con los resultados obtenidos en esta primera etapa, proseguimos con la fase dialógica del círculo hermenéutico correspondiente a la búsqueda de consentimiento con los protagonistas. Desarrollamos esta fase unos días después de la entrega de sus respuestas escritas. La conversación transcurre en un entorno virtual de confianza mutua que propicia el discurso, la discusión y el intercambio crítico, favorecido por la cercanía y la complicidad que mantenemos a diario con los estudiantes. Registramos en audio y video la discusión durante el desarrollo de esta fase. La transcripción posterior de la grabación resultante nos permite generar un nuevo registro escrito complementario al protocolo de resolución de la tarea que refleja las interacciones con los protagonistas en forma de diálogo textual. El producto final presenta en esta ocasión una extensión total de entradas correspondientes a las distintas intervenciones realizadas durante esta fase. Los datos así recopilados se analizan tomando como referencia la estructura completa del propio círculo hermenéutico.

En concreto, en el protocolo escrito y en cada entrada del registro escrito del diálogo buscamos posibles rastros significativos del proceder característico de cada uno de los planos hermenéuticos. Estos elementos nos permiten reconocer en cada momento el centro de atención variable de los alumnos, las facetas de comprensión en las que pone el interés y los lugares hacia donde dirige la interpretación.

4.1.4. Resultado y discusión

A) Caso de la estudiante E4L.

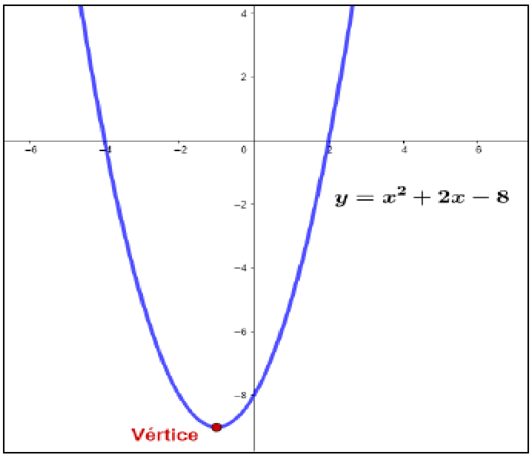
En esta parte describiremos el análisis realizado con la E4L, sobre las cuatro preguntas de la evaluación asignada, cada pregunta será analizada bajo la propuesta del círculo hermenéutico de la comprensión matemática.

PRIMERA PREGUNTA

Figura 11

Registro de naturaleza escrita por la E4L respecto a la primera pregunta (parte I)

a) Investiga si los valores dados de "y" *pertenecen* al rango de la función. Para $y = 0, y = -10$.



- El grafico de una ecuación cuadrática siempre es una parábola
- La dirección de la parábola depende de ax^2, cuando es positivo va hacia arriba y si es negativo va hacia abajo
- Vértice: Es el punto donde la parábola se divide en dos. Y es el punto más bajo o más alto de y
- $V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Ecuación:

$f(x) = x^2 + 2x - 8$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 8$$

$$f(-1) = 1 - 2 - 8 = -9$$

$$\Rightarrow V = (-1, -9)$$

Rango= $[-9, +\infty\rangle$ Rango→ $-9 \leq y \leq +\infty$

Entonces:

$y = 0$ .... Si pertenece

$y = -10$ .... No pertenece

Figura 12

Registro de naturaleza escrita por la E4L respecto a la primera pregunta (parte II)

b) ¿Cuál es el dominio de la función cuadrática? Para $y = 0$, $y = -10$.

- $Si\ y = 0$

  $y = x^2 + 2x - 8$

  $x^2 + 2x - 8 = 0$

  Formula general:

  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)}$

  $\frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = -1 \pm 3$

  $x_1 = -1 + 3 = 2$

  $x_2 = -1 - 3 = -4$

  $\rightarrow x = 2, x = -4$

  FORMULA GENERAL
  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- $Si\ y = -10$

  $y = x^2 + 2x - 8$

  $-10 = x^2 + 2x - 8$

  $x^2 + 2x + 2 = 0$

  Formula general:

  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$

  $\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times (-1)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

  $x_1 = -1 + i$

  $x_2 = -1 - i$

  $\rightarrow x = -1 + i, x = -1 - i$

  El dominio en toda ecuación cuadrática es todos los reales

  Dato
  $\sqrt{-1} = i$

- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por E4L.*

El primer desafío que nos impone el círculo hermenéutico es el de identificar rastros de comprensión en el registro escrito que resulta de la textualización de la actividad matemática de la alumna. En este caso, el registro elaborado por la E4L como respuesta a la primera pregunta de la tarea incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos y un texto explicativo de la teoría necesaria para la resolución (Figura 12). Para ello, se requiere elaborar una descripción lo más detallada posible del proceso de resolución de la tarea, que refleje, entre otros aspectos, los registros ostensivos de los conocimientos matemáticos puestos en juego. Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por la E4L. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito de la E4L observamos que esta comienza con la solución de la primera sub pregunta graficando la función cuadrática en el software GeoGebra, señalando el vértice de dicha parábola en la gráfica, de la misma forma podemos presenciar que hace referencia a teorías básicas de las funciones como la gráfica de toda función cuadrática, la dirección de la parábola que en este caso sería hacia arriba y la definición de vértice. La estrategia empleada cosiste en determinar el vértice de la parábola el cual indicaría el valor máximo o mínimo, y así poder plantear el rango de dicha función cuadrática, para determinar el vértice utiliza la propiedad $v = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. En seguida reconoce los coeficientes a(cuadrático), b(lineal) y c(independiente) en la función, luego remplaza en vez de "b" y "a" los valores de 2 y 1 respectivamente en la fórmula del vértice, determinando en primera instancia el valor que toma la variable "x" en el vértice de la parábola, con la correcta aplicación de las operaciones básicas como la multiplicación y división de números enteros, llegando a determinar el valor de $x = -1$. Luego, una vez ya conocido el valor de "x" de inmediato procede a determinar la imagen $f(-1)$ en donde remplaza en vez de la variable "x" el valor de -1 quedando de la siguiente forma $f(-1) = \ (-1)^2 + 2(-1) - 8,$ a partir de esta expresión utilizando correctamente las operaciones de potenciación, multiplicación, adición y sustracción de números enteros llega a la conclusión de que la imagen de -1 en la función cuadrática planteada vine a ser -9 y de esa forma determina el vértice $v = (-1; -9)$. Una vez ya determinado el vértice platea el rango de la función de dos formas, de intervalo $(Ran[-9; +\infty\rangle)$ y como desigualdad $(Ran \ \rightarrow \ -9 \leq y < +\infty\ )$. A continuación, finaliza la resolución utilizando la relación de pertenencia entre los valores para "y" dados en el enunciado, mencionando que y=0 si pertenece, e y=10 no pertenece al rango de la función.

Para la segunda sub pregunta ¿Cuál es el dominio de una función cuadrática?, se observa que la E4L comienza dándole a la variable “y” el valor de cero y menos diez, en cada caso observamos que resuelve las ecuaciones cuadráticas con la formula general $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. En el primer caso observamos que los valores de “x” son números enteros, mientras que en el segundo las soluciones para “x” salieron números imaginarios. Luego de tener esas soluciones para la variable “x” llega a la conclusión de que el dominio en toda ecuación cuadrática es todos los números reales. De este procedimiento podemos observar que se desconoce el significado de dominio de una función, ya que la última expresión podría haber sido con ayuda externa, debido a que las anteriores operaciones no se relacionan con el dominio. Pero, es importante también rescatar que la E4L conoce la forma correcta de la utilización de la formula general y la resolución de ecuación cuadráticas.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por la E4L*

La E4L utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la primera pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. De acuerdo con la propuesta interpretativa, el tipo de vinculación que establece entre estos conocimientos y la situación enfrentada, a través de sus usos particulares en ella, proporciona la primera información referencial acerca de su comprensión matemática en el episodio que estamos analizando. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 5). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas y su gráfica, (b) estrategia para determinar el dominio y rango, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la propiedad del vértice y la teoría de dominio delimitado y dirigido por las 2 sub preguntas del enunciado, como estrategia de resolución.

Tabla 5

Conocimiento Matemático de la E4L de la Primera Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de una función cuadrática y la forma de su grafica Identificación de la orientación de la parábola a partir de su expresión algebraica Búsqueda del vértice de la parábola gráficamente y algebraicamente	Concepto de función cuadrática Concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a” Formula del vértice de una parábola Máximo o mínimo de una parábola La Imagen dado un valor x
Procedimiento para determinar el Dominio y rango	
Determina el rango de la función en forma de intervalo y desigualdad Omisión de la teoría de funciones cuadráticas sobre el dominio Dados valores para “y” se evalúa si pertenece o no	Propiedad del rango de la función cuadrática Aplicación no consolidad de la teoría del dominio de una función cuadrática Relación de pertenencia
Estrategias de resolución	
Determinación de la combatividad de la parábola, en seguida del vértice y así definir el rango de la función El valor y=0 pertenece y el valor y=10 no pertenece a la función cuadrática como solución de la primera sub pregunta En la segunda sub pregunta se tomó los valores “y” dados en el problema para luego determinar los valores de “x” Todos los reales como solución de la segunda sub pregunta.	Procedimiento adecuado para la determinación del rango de la función cuadrática Vulnerabilidad en la utilización de la teoría de dominio de función cuadrática Correcta aplicación de la formula general en las ecuaciones cuadráticas

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. Caracterizar tales usos exige profundizar en las estrechas relaciones existentes entre el conocimiento conceptual, la destreza procedimental y la representación del problema evidenciados por la E4L. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y la identificación de la forma u orientación de la gráfica que toma dicha función, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto, la forma de la gráfica y la concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a” (coeficiente cuadrático) de la función cuadrática. Por otra parte, la interpretación de la búsqueda del vértice de la parábola gráficamente y algebraicamente por parte de la E4L, también denota la incorporación de la fórmula del vértice, la identificación del valor máximo o mínimo que puede tomar la parábola y la determinación de la imagen dando un valor determinado a la variable “x”, realizando todas estas operaciones de forma correcta. Sin embargo, es necesario aclarar que tal vez pudo realizarlo con el apoyo complementario del internet.

Sobre el procedimiento para determinar el dominio y rango de la función cuadrática, la E4L proporciona indicios evidentes de un empleo técnico de la propiedad para determinar el rango de la función cuadrática, En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental. Sin embargo, los errores cometidos en su aplicación, sobre todo el de la utilización de la formula general para determinar el dominio, pone de manifiesto un uso no consolidado de la formula general para determinar el dominio de la función cuadrática.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. El uso de este tipo de conocimiento es propio del que hacer matemático ordinario en las aulas y desde nuestro enfoque también lo consideramos indicador de la comprensión matemática de los alumnos. En el caso de la E4L, observamos que identifica la concavidad de la parábola, en seguida determina cual es el vértice de la gráfica de la función cuadrática, para así poder delimitar el rango de la función cuadrática, para luego identificar si los valores dados a la variable "y" pertenecen al rango de la función, el cual es un procedimiento alternativo correcto, donde podemos interpretar que comprenden el concepto del rango de una función. En seguida determina el dominio de la función cuadrática utilizando la formula general. Sin embargo, la aplicación de esta fórmula sufre distintas alteraciones para determinar el dominio, porque al final da como resultado que el domino de la función son todos los números reales. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, una comprensión positiva del concepto de función cuadrática, el vértice y rango. Así como también, se evidencia una cierta fragilidad de la comprensión de la E4L sobre el concepto del dominio.

- *Discurso hacia el consentimiento con la E4L y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con la E4L respecto a la primera pregunta. El siguiente fragmento (Figura 13) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 13

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y la E4L sobre la Primera Pregunta

1	Investigador	E4L explícanos más o menos ¿qué es lo que has tratado de hacer en tu solución en esta parte?
2	E4L	He, primeramente, he intentado graficarlo para que tengan una idea y después en hay hice los conceptos básicos, primero quería recalcar en el primer enunciado que la parábola va hacia arriba, porque toda función cuadrática su grafico es una parábola y la dirección depende de la constante de la x^2y también quería recalcar que como lo que me pedía los valores de y, si 0 y -10 podían cumplirlo, y para eso tenía que hallar el rango.
3	Investigador	¡Haya!
4	E4L	Y para hallar el rango, una manera muy fácil es hallar el vértice, ya que el vértice es el punto máximo y punto mínimo de la parábola, y como puedes ver ahí se puede ver como hallo el vértice que seria, primero hallar el punto "x" remplazándolo en la expresión que es "-b" sobre "2a", que nos sale 1, y lo remplazamos eso mismo con la función que nos sale que $y = -9$, y al final concluimos que el vértice es $(-1, -9)$. Entonces, su rango es dependiendo de la "y" que sería desde -9 que es el punto mínimo a $+\infty$, o de otra manera expresado -9 menor que "y" menor que $+\infty$.
5	Investigador	¡Excelente!, muy bien muchas gracias, eso es sobre la primera pregunta, una consulta donde aparece "-b" sobre "2a" eso maso menos ¿es una propiedad?
6	E4L	Es una propiedad para hallar el vértice.
7	Investigador	¡Haya!, luego de aquí has identificado si "y" pertenece al rango, en este caso el cero si pertenece porque esta entre el -9 y el infinito y el -10 no pertenece porque está mucho más debajo del -9
8	E4L	Si
9	Investigador	¡Excelente!
10	Investigador	La pregunta b era ¿cuál es el dominio de la función cuadrática? Explícanos maso menos que has tratado de hacer en estos procedimientos
11	E4L	En toda función cuadrática, este es un conocimiento básico en toda función cuadrática el dominio es todos los reales, entonces estaba de más decir que ¿cuál sería el dominio?, pero como también me diste ejemplos que sí "y" vale 0 y -10 también lo intente recalcar y con cada valor halle dos valores de "y" en caso de que "y" vale cero, "x" tendría que valer 2 o -4, utilizando la formula general.
12	Investigador	Claro.
13	E4L	Y con "y" igual a -10 te van a salir número complejos si te das cuenta.
14	Investigador	Si, entonces.
15	E4L	En ese caso no cumple, por eso y con eso también recalcamos que con -10 no cumple como tampoco puede valer
16	Investigador	¡Haya!, en este caso lo que tu hiciste maso mensos es darle a "y" el valor de cero y también al mismo tiempo a "y" el valor de -10, eso lo resolviste Y llegaste en primera instancia que "x" toma dos valores.
17	E4L	Pero ese ejercicio estaba demás por que como te digo conocimiento general en toda ecuación cuadrática el dominio es todo lo reales y este ejercicio es para demostrarlo por que como te digo ya sabemos que 0 si cumple, pero -10 no cumple y como te das cuenta cuando probamos con -10 no sales con números complejos.
18	Investigador	¡Haya! Entiendo entonces esta función cuadrática no tiene solución.
19	E4L	El -10 no porque, no corresponde
20	Investigador	Excelente, entonces como tú bien lo has dicho prácticamente por teoría general el dominio son todos los números reales.
21	E4L	Si.

Coincidimos con la E4L, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, como el reconocimiento de la orientación de la gráfica, la propiedad del vértice para determinar el rango de la función y la relación de pertenencia para determinar si los valores asignados para "y" pertenece a dicho rango, todo esto con respecto a la primera sub pregunta. Mientras que en la segunda sub pregunta la E4L indica que el procedimiento que ha realizado a estado de más, porque se conoce por teoría general que el domino de toda función cuadrática son todo los numero reales, la E4L indica que el procedimiento que hizo fue con la finalidad de poder demostrar que el domino de la función cuadrática son todos los números reales. De ahí podemos analizar de que la E4L desconoce el significado del dominio de una función por que quiso demostrarlo dando valores a la variable “y” lo cual es incorrecto, para demostrar el domino tendría que haber dado valores aleatorios a la variable “x”. Pero cabe resalta que a pesar de que la E4L desconoce el significado del domino de una función, esta conoce por teoría o simple memorización que el dominio es todos los números reales.

SEGUNDA PREGUNTA

Figura 14

Registro de Naturaleza Escrita por la E4L Respecto a la Segunda Pregunta

2. Determina el valor máximo o mínimo de la función cuadrática

$$f\,(x) = 4x - x^2.$$

SOLUCIÓN

$f\,(x) = -x^2 + 4x$

Es negativo: La parábola tiene se orienta hacia arriba

$V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Ecuación:

$f(x) = -x^2 + 4x + 0$

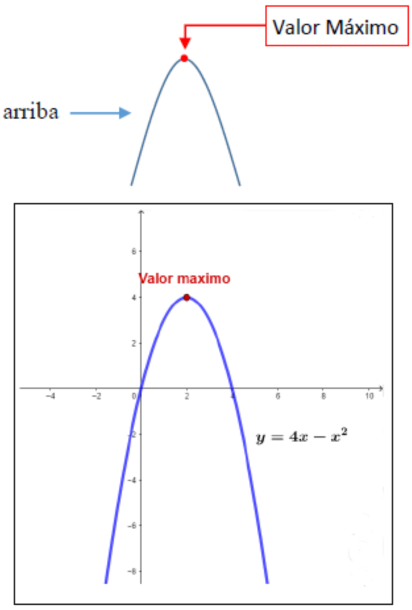
$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$

$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 0$

$f(2) = -4 + 8 = 4$

$\Rightarrow V = (2{,}4)$

$\Rightarrow$El valor máximo es 4



- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por la E4L*

En este caso, el registro elaborado por la E4L como respuesta a la segunda pregunta de la tarea incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos y un texto referencial explicativo de la orientación de la gráfica de la función cuadrática (Figura 14). Para ello, se requiere elaborar una descripción lo más detallada posible del proceso de resolución de la tarea al igual que la primera pregunta, que refleje, entre otros aspectos, los registros ostensivos de los conocimientos matemáticos puestos en juego. Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por la E4L. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito de la E4L observamos que esta comienza con la solución, ordenando de mayor a menor los términos algebraicos de la función, enseguida reconoce el coeficiente cuadrático el cual es negativo, para luego manifestar que la orientación de la gráfica es hacia arriba. Mostrando un pequeño gráfico el cual está inclinado hacia abajo. De esta parte podemos deducir que comete el error que se considera fortuito, de denominar orientación hacia arriba en vez de orientación hacia abajo. La estrategia utilizada es determinar el vértice de la gráfica de la función cuadrática para así poder determinar el punto máximo. Para determinar el vértice utiliza la propiedad $v = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. En seguida reconoce los coeficientes a(cuadrático), b(lineal) y c(independiente) en la función, luego remplaza en vez de “b” y “a” los valores de 4 y -1 respectivamente en la fórmula del vértice, determinando en primera instancia el valor que toma la variable “x” en el vértice de la parábola, con la correcta aplicación de las operaciones básicas como la multiplicación y división de números enteros, llegando a determinar el valor de $x = 2$. Luego, una vez ya conocido el valor de "x" de inmediato procede a averiguar la imagen $f(2)$ en donde remplaza en vez de la variable "x" el valor de 2 quedando de la siguiente forma $f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 0$, a partir de esta expresión utilizando correctamente las operaciones de potenciación, multiplicación, adición y sustracción de números enteros llega a la conclusión de que la imagen de 2 en la función cuadrática planteada vine a ser 4 y de esa forma determina el vértice $v = (2; 4)$. Finaliza la resolución mencionando que el valor máximo es 4.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por la E4L*

Al igual que en la primera pregunta. La E4L utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la segunda pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. De acuerdo con la propuesta interpretativa, el tipo de vinculación que establece entre estos conocimientos y la situación enfrentada, a través de sus usos particulares en ella, proporciona la primera información referencial acerca de su comprensión matemática en el episodio que estamos analizando. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 6). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas y su gráfica, (b) estrategia para determinar el vértice, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la propiedad del vértice como estrategia de resolución.

Tabla 6

Conocimiento Matemático de la E4L de la Segunda Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de una función cuadrática y la forma de su grafica Identificación de la orientación de la parábola a partir de su expresión algebraica	Concepto de función cuadrática Concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro "a" Máximo o mínimo de una parábola
Procedimiento para determinar el Valor máximo	
Búsqueda del vértice de la parábola gráficamente y algebraicamente	Formula del vértice de una parábola Aplicación consolidada de la propiedad del vértice La Imagen dado un valor x
Estrategias de resolución	
Determinación de la concavidad de la parábola. Determina el vértice $v = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. El numero 4 como solución de la segunda pregunta	Procedimiento adecuado para la determinación del vértice de la gráfica de la función cuadrática

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. Caracterizar tales usos exige profundizar en las estrechas relaciones existentes entre el conocimiento conceptual, la destreza procedimental y la representación del problema evidenciados por la E4L. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y la identificación de la forma u orientación de la gráfica que toma dicha función, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto, la forma de la gráfica y la concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro "a" (coeficiente cuadrático) de la función cuadrática. Por otra parte, la interpretación de la búsqueda del vértice de la parábola gráficamente y algebraicamente por parte de la E4L, también denota la incorporación de la fórmula del vértice, la identificación del valor máximo o mínimo que puede tomar la parábola y la determinación de la imagen dando un valor determinado a la variable “x”, realizando todas estas operaciones de forma correcta. Sin embargo, es necesario aclarar que tal vez pudo realizarlo con el apoyo complementario del internet.

Sobre el procedimiento para determinar el valor máximo de la función cuadrática, la E4L proporciona indicios evidentes de un empleo técnico de la propiedad para determinar el vértice de la función cuadrática, En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. El uso de este tipo de conocimiento es propio del que hacer matemático ordinario en las aulas y desde nuestro enfoque también lo consideramos indicador de la comprensión matemática de los alumnos. En el caso de la E4L, observamos que identifica la concavidad de la parábola, en seguida determina cual es el vértice de la gráfica de la función cuadrática, para así poder delimitar el valor máximo de la función cuadrática, el cual es un procedimiento alternativo correcto, donde podemos interpretar que comprenden el concepto del valor máximo de una función. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, una comprensión positiva del concepto de función cuadrática y el vértice.

- *Discurso hacia el consentimiento con la E4L y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con la E4L respecto a la segunda pregunta. El siguiente fragmento (Figura 15) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 15

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y la E4L sobre la Segunda Pregunta

1	Investigador	La segunda pregunta decía determina el valor máximo o mínimo de la función cuadrática en esa parte teníamos que determinar si en esta función, tiene como valor máximo o tal vez como valor mínimo dependiendo a la ecuación, explícanos más o menos como trataste de resolver esa parte.
2	E4L	En aquí tuve una falla porque me equivoque, como te dije anteriormente depende del vértice y en aquí me equivoque, ya que en aquí quería decir que iba hacia abajo, pero escribí hacia arriba, esto fue un error mío, si te das cuenta y el punto máximo y punto mínimo también depende de la constante de la "y" al cuadrado, si es menos la parábola, va a ir hacia abajo y entonces sería el punto máximo, si la constante de X al cuadrado es positiva la orientación de la parábola es hacia arriba, por lo tanto es un valor mínimo y como vemos en este ejercicios,
3	Investigador	Una pregunta hasta ahí, me has dicho más o menos de que si es menos la paraba la va hacia abajo y si es más me va a dar arriba ¿qué pasaría si tuviéramos en el coeficiente cuadrático, tendríamos el valor 0?
4	E4L	Ya no sería una función cuadrática y ya no sería una parábola, sería una ecuación lineal, bueno en caso de que sea equis nomas
5	Investigador	Excelente, continúa maso menos con lo que estabas explicando
6	E4L	Ya, como vemos en esta ecuación es una constante negativa, por eso es la parábola va en dirección hacia abajo y tienen valor máximo, ahora también para hallar el punto máximo también tomamos en cuenta que el vértice, como el anterior ejercicio hicimos, puedes ver la imagen esto es una imagen que hice en el aplicativo GeoGebra, es una imagen con esa ecuación misma y para hallar el valor máximo depende de la "y", Entonces lo reemplazamos como como te dije con la otra propiedad que es $x = \frac{-b}{2a}$, el cual nos sale x = 2 y esto lo remplazamos en la ecuación, el cual nos sale que y = 4 y el valor máximo sería 4
7	Investigador	4 ese sería el valor máximo, excelente. Y el rango, ¿cuál sería el rango? O el domino
8	E4L	El rango serio de 4 a menos infinito, de menos infinito a cuatro, mejor dicho.
9	Investigador	En este caso el rango serio desde el menos infinito al 4 y ¿el dominio?
10	E4L	Todo los numero reales

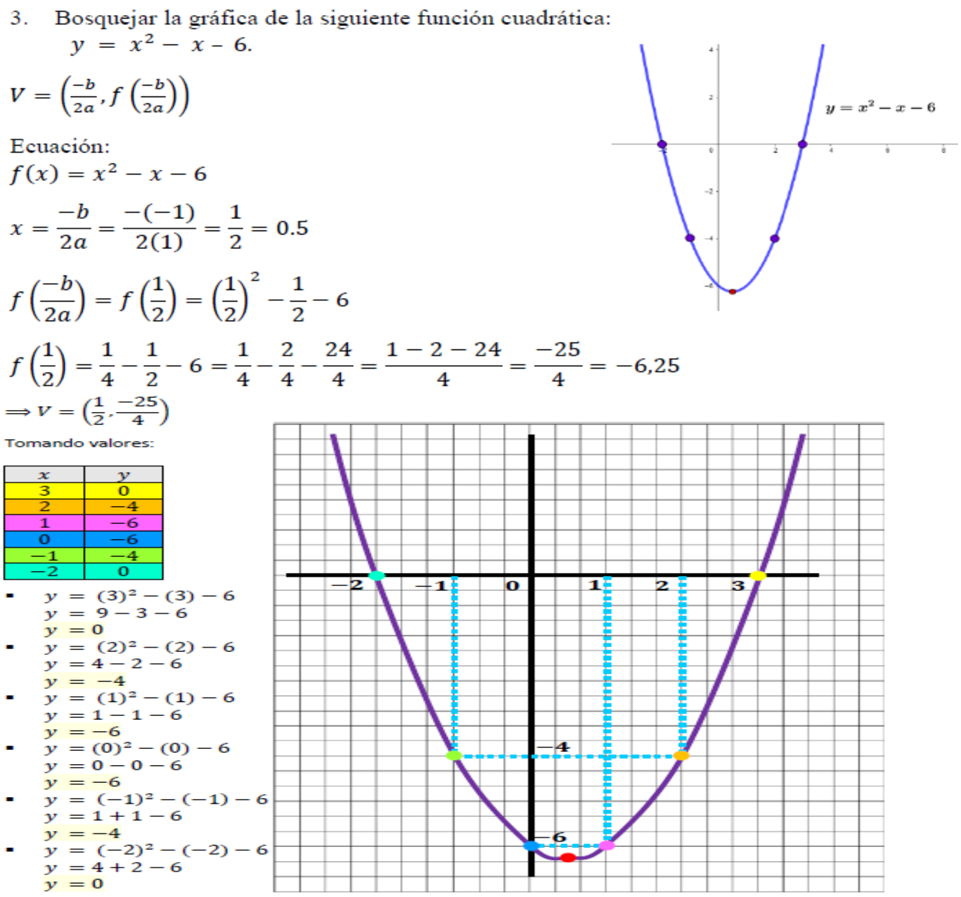
11	Investigador	Todo los numero reales, ¡excelente!

Coincidimos con la E4L, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, como el reconocimiento de la orientación de la gráfica, la propiedad para determinar el vértice de la gráfica de la función, para luego poder determinar el valor máximo de esta función cuadrática. De la misma forma la E4L reconoció que tuvo un error al escribir que la concavidad de la parábola era hacia arriba. En el cual aclaro mencionando que era hacia abajo. De esta parte podemos inferir que se conoce el procedimiento práctico e instructivo para determinar el valor máximo y podríamos mencionar que entiende correctamente el significado del punto máximo y mínimo de la función cuadrática.

TERCERA PREGUNTA

Figura 16

Registro de Naturaleza Escrita por la E4L Respecto a la Tercera Pregunta



3. Bosquejar la gráfica de la siguiente función cuadrática:
$y = x^2 - x - 6.$

$V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Ecuación:
$f(x) = x^2 - x - 6$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(1)} = \frac{1}{2} = 0.5$

$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1-2-24}{4} = \frac{-25}{4} = -6{,}25$

$\Rightarrow V = \left(\frac{1}{2}, \frac{-25}{4}\right)$

Tomando valores:

x	y
3	0
2	−4
1	−6
0	−6
−1	−4
−2	0

- $y = (3)^2 - (3) - 6$
  $y = 9 - 3 - 6$
  $y = 0$
- $y = (2)^2 - (2) - 6$
  $y = 4 - 2 - 6$
  $y = -4$
- $y = (1)^2 - (1) - 6$
  $y = 1 - 1 - 6$
  $y = -6$
- $y = (0)^2 - (0) - 6$
  $y = 0 - 0 - 6$
  $y = -6$
- $y = (-1)^2 - (-1) - 6$
  $y = 1 + 1 - 6$
  $y = -4$
- $y = (-2)^2 - (-2) - 6$
  $y = 4 + 2 - 6$
  $y = 0$

- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por la E4L*

En este caso, el registro elaborado por la E4L como respuesta a la tercera pregunta de la tarea, incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos, un cuadro de valores y la gráfica en el plano cartesiano (Figura 16). Para ello, se requiere elaborar una descripción lo más detallada posible del proceso de resolución de la tarea, que refleje, entre otros aspectos, los registros ostensivos de los conocimientos matemáticos puestos en juego. Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por la E4L. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito de la E4L observamos que esta comienza con la solución, graficando la función cuadrática en el software GeoGebra, señalando el vértice de dicha parábola y algunos puntos adicionales de la gráfica, de la misma forma podemos presenciar que hace referencia a teorías básicas de las funciones como la gráfica de toda función cuadrática, la dirección de la parábola que en este caso sería hacia arriba y la propiedad del vértice. La estrategia empleada cosiste en determinar el vértice de la parábola, luego hacer una tabla de valores para determinar algunos puntos de la gráfica y así poder realizar una gráfica en base a los puntos obtenidos. Para determinar el vértice utiliza la propiedad $v = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. En seguida reconoce los coeficientes a(cuadrático), b(lineal) y c(independiente) en la función, luego remplaza en vez de “b” y “a” los valores de -1 y 1 respectivamente en la fórmula del vértice, determinando en primera instancia el valor que toma la variable “x” en el vértice de la parábola, con la correcta aplicación de las operaciones básicas como la multiplicación y división de números enteros, llegando a determinar el valor de $x = \frac{1}{2} = 0.5$. Luego, una vez ya conocido el valor de “x” de inmediato procede a averiguar la imagen $f(\frac{1}{2})$ en donde remplaza en vez de la variable “x” el valor de $\frac{1}{2}$ quedando de la siguiente forma $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) - 6$, a partir de esta expresión utilizando correctamente las operaciones de potenciación, multiplicación, adición y sustracción de números racionales llega a la conclusión de que la imagen de $\frac{1}{2}$ en la función cuadrática planteada vine a ser $\frac{-25}{4} = -6{,}25$ y de esa forma determina el vértice $v = \left(\frac{1}{2}; \frac{-25}{4}\right)$. Una vez ya determinado el vértice, dibuja un cuadro donde da valores a la variable "x" como 3, 2, 1, 0, -1, -2 para luego obtener de cada uno de los valores dados sus respectivas imágenes formándose así las coordenadas de algunos puntos de la gráfica. Una vez ya determinado los puntos, la E4L ubica los puntos y el vértice en el plano. A continuación, finaliza la resolución trazando las grafica por los puntos ya ubicados.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por la E4L.*

La E4L utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la tercera pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 7). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas y su gráfica, (b) estrategia para determinar el vértice, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la tabla de valores, como estrategia para el bosquejo de la gráfica.

Tabla 7

Conocimiento Matemático de la E4L de la Tercera Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de una función cuadrática y la forma de su grafica Identificación de la orientación de la parábola a partir de su expresión algebraica	Concepto de función cuadrática Concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro "a" Máximo o mínimo de una parábola
Procedimiento para determinar el vértice	
Búsqueda del vértice de la parábola gráficamente y algebraicamente	Formula del vértice de una parábola

	Aplicación consolidada de la propiedad del vértice La Imagen dado un valor x
Estrategias de resolución	
Determinación de la combatividad de la parábola y en seguida el vértice Identificación de algunos puntos de la función utilizando la tabla de valores	Procedimiento adecuado para la determinación del vértice de la función Vulnerabilidad en algunas partes de la gráfica de una función cuadrática como el eje simétrico, puntos de intersección en los ejes coordenados, Procedimiento opcional de la tabla de valores

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. Caracterizar tales usos exige profundizar en las estrechas relaciones existentes entre el conocimiento conceptual, la destreza procedimental y la representación del problema evidenciados por la E4L. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y la identificación de la forma u orientación de la gráfica que toma dicha función, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto, la forma de la gráfica, la concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a” (coeficiente cuadrático) de la función cuadrática y la obtención de algunos puntos de la gráfica. Por otra parte, la interpretación de la búsqueda del vértice de la parábola gráficamente y algebraicamente por parte de la E4L, también denota la incorporación de la fórmula del vértice y la determinación de 6 puntos de la gráfica mediante la ubicación de la imagen dando un valor determinado a la variable “x”, realizando todas estas operaciones de forma correcta. Sin embargo, es necesario aclarar que estos datos obtenidos no son todos como para realizar un correcto bosquejo de la gráfica, donde faltaría involucrar una secuencia correcta para la determinar una gráfica casi correcta, como a) Orientación de la gráfica, b) El vértice, c) Intersección en el eje Y, d) Eje de simetría, e) Intersección en X.

Sobre el procedimiento para determinar el vértice de la función cuadrática, la E4L proporciona indicios evidentes de un empleo técnico de la propiedad para determinar el rango de la función cuadrática, En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. El uso de este tipo de conocimiento es propio del quehacer matemático ordinario en las aulas y desde nuestro enfoque también lo consideramos indicador de la comprensión matemática de los alumnos. En el caso de la E4L, observamos que identifica la concavidad de la parábola, en seguida determina cual es el vértice de la gráfica de la función cuadrática, luego realiza un cuadro de valores donde empieza a dar valores a la variable “x” para así obtener las imágenes de cada uno y de esa forma encontrar algunos puntos de la función cuadrática para luego poder graficar con los datos obtenidos. El cual es un procedimiento alternativo semi correcto, donde podemos interpretar que comprenden que una función está conformada por infinitos puntos y que cuenta con un solo vértice. Sin embargo, la obtención de estos datos es irrelevantes, bastaría solamente con obtener la orientación, el vértice, las intersecciones en los ejes coordenados y el eje simétrico de la función cuadrática. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, una comprensión positiva del concepto de función cuadrática, el vértice y el procedimiento para obtener la gráfica.

- *Discurso hacia el consentimiento con la E4L y retorno a su comprensión matemática.*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con la E4L respecto a la tercera pregunta. El siguiente fragmento (Figura 17) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 17

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y la E4L sobre la Tercera Pregunta

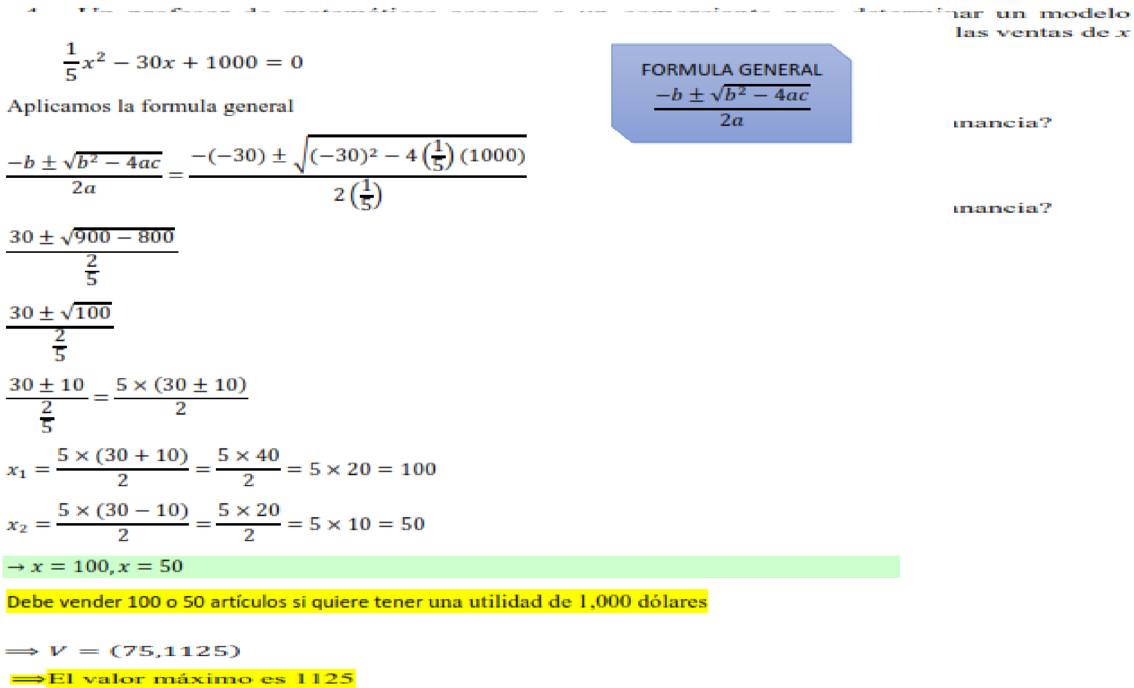
1	Investigador	En esta tercera pregunta lo que se pide es bosquejar la gráfica de la siguiente función en esta parte no nos pedía determinar cuál es la solución, solamente nos pedía bosquejar. Y bosquejar es un dibujo aproximado de la función cuadrática, ¿qué procedimientos o qué pasos Tú has utilizado? ¿Qué técnicas o qué propiedades has utilizado para tu para poder graficar o bosquejar la gráfica de esta función?, explícanos por favor.
2	E4L	Primero, está de más decir en qué dirección tiene que ir el vértice, la parábola que diga. Y nos damos cuenta que el signo de X al cuadrado es positivo, entonces definimos que va hacia arriba, ahora vamos hallar el vértice, o sea el punto máximo o el mínimo como es positivo, entonces sería el punto mínimo, el cual sería con todo el procedimiento no sale que es $(\frac{1}{2}, \frac{-25}{4})$. Ese punto lo hallamos también en nuestro plano y después tomamos valores. en el caso que yo he hecho, he tomado valor de X que sería 3,2, 1, 0, -1 y -2 y los he reemplazado en la ecuación, a cada uno el valor y he encontrado los valores de “y” yo los he remplazado de acuerdo al color en el plano si te das cuenta, ¿no? Y después de eso los uní todos los puntos y sería como en la imagen lo puedes ver y para darte también una mejor idea puse también imagen de GeoGebra con esa misma y los puedes comparar
3	Investigador	Excelente, unas preguntas ahí ¿cómo puedo determinar yo la intersección en el eje X con la palabra? Las intersecciones con el eje X, porque se interceptan en 2 puntos ¿verdad? la parábola en el eje X ¿cómo puedo determinar esos puntos?
4	E4L	Uhmm, Pues resolverlo también con la fórmula general.
5	Investigador	Con la fórmula general, en esta parte creo sería conveniente ponerle al valor de “y” cero, para que intercepte justamente en el eje X,
6	E4L	Ujum
7	Investigador	Creo que tu pusiste el valor de cero también
8	E4L	Si, los tomé los valores de 3, -2 como te dije
9	Investigador	¡Haya!, y una consulta ¿has considerando maso menos o sabes algo del eje de simetría de una parábola?
10	E4L	Uhmm no, solo tome valores, no lo tome en consideración ese método
11	Investigador	¡Haya!
12	E4L	Porque creo que tomando valores más rápido
13	Investigador	El eje de simetría de una parábola es una recta que es paralela al eje Y en este caso, y sería prácticamente desde el vértice en el punto “x”, en este caso en el eje X era un medio óseo 0,5, en ese 0,5 por ejemplo por aquí se trazaba el eje simétrico ¿por qué se le dice simétrico? Porque estaba la misma distancia de ambas líneas.
14	E4L	Si, como el vértice también es el punto medio de la parábola, lo parte en dos partes iguales
15	Investigador	Excelente, eso maso menos se utiliza para los bosquejos ¿Qué más? Intersección en “x” se determina tomando los valores para y=0. Bien, he visto que lo has graficado correctamente y has graficado dándole valores a X, muy bien.

Coincidimos con la E4L, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, como el reconocimiento de la orientación de la gráfica, la propiedad del vértice, y dar los valores aleatorios a la variable “x” para determinar puntos de la función cuadrática y así hacer un a aproximado de la gráfica. Pero cabe aclara que la E4L desconocía sobre el eje de simetría, el cual es muy importante para realizar el bosquejo de la función cuadrática. También, podemos deducir que los puntos que consideró para la variable “x” lo hizo al azar y con ayuda del GeoGebra porque notamos que no está muy claro esa parte donde se le preguntó sobre la intersección de la gráfica con los ejes del plano cartesiano. Sin embargo, podemos rescatar cierta comprensión de la gráfica de la función cuadrática.

CUARTA PREGUNTA

Figura 18

Registro de Naturaleza Escrita por la E4L Respecto a la Cuarta Pregunta (parte



$$\frac{1}{5}x^2 - 30x + 1000 = 0$$

Aplicamos la formula general

FORMULA GENERAL $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4\left(\frac{1}{5}\right)(1000)}}{2\left(\frac{1}{5}\right)}$$

$$\frac{30 \pm \sqrt{900-800}}{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{30 \pm \sqrt{100}}{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{30 \pm 10}{\frac{2}{5}} = \frac{5 \times (30 \pm 10)}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 \times (30+10)}{2} = \frac{5 \times 40}{2} = 5 \times 20 = 100$$

$$x_2 = \frac{5 \times (30-10)}{2} = \frac{5 \times 20}{2} = 5 \times 10 = 50$$

$\rightarrow x = 100, x = 50$

Debe vender 100 o 50 artículos si quiere tener una utilidad de 1,000 dólares

$\Longrightarrow V = (75{,}1125)$

$\Longrightarrow$El valor máximo es 1125

Figura 19

Registro de Naturaleza Escrita por la E4L Respecto a la Cuarta Pregunta (parte II)

- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por la E4L*

En este caso, el registro elaborado por la E4L como respuesta a la cuarta pregunta de la tarea incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos y un breve texto explicativo de algunos conocimientos (Figura 18 y 19). Para ello, se requiere elaborar una descripción lo más detallada posible del proceso de resolución de la tarea, que refleje, entre otros aspectos, los registros ostensivos de los conocimientos matemáticos puestos en juego. Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por la E4L. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito de la E4L observamos que esta comienza con la solución de la primera sub pregunta identificando la concavidad de la parábola respecto al parámetros donde hace referencia a teorías básicas de las funciones como la gráfica de toda función cuadrática, la dirección de la parábola que en este la E4L menciona que es hacia arriba y la definición del vértice. La estrategia empleada cosiste en determinar el vértice de la parábola el cual indicaría el valor máximo o mínimo y así poder plantear el valor máximo o la máxima ganancia de una semana, para determinar el vértice utiliza la propiedad $v = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. En seguida reconoce los coeficientes a(cuadrático), b(lineal) y c(independiente) en la función, luego remplaza en vez de “b” y “a” los valores de 30 y $-\frac{1}{5}$ respectivamente en la fórmula del vértice, determinando en primera instancia el valor que toma la variable “x” en el vértice de la parábola, con la correcta aplicación de las operaciones básicas como la multiplicación y división de números racionales, llegando a determinar el valor de $x = 75$. Luego, una vez ya conocido el valor de “x” de inmediato procede a averiguar la imagen $f(75)$ en donde remplaza en vez de la variable “x” el valor de 75 quedando de la siguiente forma $f(75) = -\frac{1}{5}(75)^2 + 30(75) + 0$, a partir de esta expresión utilizando correctamente las operaciones de potenciación, multiplicación, adición y sustracción de números racionales, llega a la conclusión de que la imagen de 75 en la función cuadrática planteada vine a ser 1125 y de esa forma determina el vértice $v = (75; 1125)$. Una vez ya determinado el vértice platea el valor máximo que toma la función cuadrática es decir la ganancia máxima por semana que seria 1125.

Para la segunda sub pregunta ¿Cuántos artículos debe de vender para tener una utilidad de 1,000 dólares?, se observa que la E4L comienza remplazando 1000 en vez de U(x), quedándole en seguida la siguiente ecuación cuadrática $\frac{1}{5}x^2 - 30x + 1000 = 0$. En seguida continua con la resolución de la ecuación ya mostrada utilizando la fórmula de Bhaskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, reconociendo los valores de a, b y c, e inmediatamente remplazándolo y aplicando los conocimientos de las operaciones básicas de los números reales, llegando a obtener dos valores para la variable x, $x_1 = 100$ y $x_2 = 50$, la E4L señala la respuesta mencionando "debe vender 100 0 50 artículos si quiere tener una utilidad de 1000 dólares". De todo este procedimiento podemos observar que se conoce el significado del vértice y también que se conoce el significado los puntos de una función cuadrática.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por la E4L*

La E4L utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la primera pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. De acuerdo con la propuesta interpretativa, el tipo de vinculación que establece entre estos conocimientos y la situación enfrentada, a través de sus usos particulares en ella, proporciona la primera información referencial acerca de su comprensión matemática en el episodio que estamos analizando. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 8). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas (b) estrategia para resolver ecuaciones cuadráticas (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la propiedad del vértice y la fórmula de Bhaskara delimitado y dirigido por las 2 sub preguntas del enunciado, como estrategia de resolución.

Tabla 8

Conocimiento Matemático de la E4L de la Cuarta Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de una función cuadrática y la forma de su grafica Identificación de la orientación de la parábola a partir de su expresión algebraica Búsqueda del vértice de la parábola algebraicamente	Concepto de función cuadrática Concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a” Formula del vértice de una parábola Máximo o mínimo de una parábola La Imagen dado un valor x
Procedimiento para resolver ecuaciones cuadráticas	
Determina e identifica la ecuación cuadrática Utilización de la fórmula de Bhaskara para solucionar la ecuación cuadrática Identificación de los valores obtenidos y la interpretación de cada uno de ellos	Fórmula de Bhaskara Operaciones básicas de los números reales La interpretación de los resultados
Estrategias de resolución	
Determinación de la combatividad de la parábola y las coordenadas del vértice El valor máximo es 1125 es la solución de la primera sub pregunta En la segunda sub pregunta se remplazó 1000 en la función utilidad 100 0 50 artículos, es la respuesta de la segunda sub pregunta	Procedimiento adecuado para la determinación del valor máximo de la función utilidad Procedimiento adecuado para determinar los valores de “x” dando el valor “y” Correcta aplicación de la formula general en las ecuaciones cuadráticas

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. Caracterizar tales usos exige profundizar en las estrechas relaciones existentes entre el conocimiento conceptual, la destreza procedimental y la representación del problema evidenciados por la E4L. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y la identificación de la forma u orientación de la gráfica que toma dicha función, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto, la forma de la gráfica y la concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a” (coeficiente cuadrático) de la función cuadrática. Por otra parte, la interpretación de la búsqueda del vértice de la parábola algebraicamente por parte de la E4L, también denota la incorporación de la fórmula del vértice, la identificación del valor máximo o mínimo que puede tomar la parábola y la determinación de la imagen dando un valor determinado a la variable “x”, realizando todas estas operaciones de forma correcta. Sin embargo, es necesario aclarar que tal vez pudo realizarlo con el apoyo complementario del internet, como también hay la posibilidad de que solamente se esté guiando intuitivamente por la palabra “valor máximo o mínimo” el cual al escuchar estas palabras ella infiere que se refiere al punto máximo de la función cuadrática sin entender el significado.

Sobre el Procedimiento para resolver ecuaciones cuadráticas, la E4L proporciona indicios evidentes de un empleo técnico de la fórmula de Bhaskara para determinar los dos valores de la variable “x”, En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental. También es necesario aclara de que se reconoce correctamente el resultado de una ecuación cuadrática

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. El uso de este tipo de conocimiento es propio del quehacer matemático ordinario en las aulas y desde nuestro enfoque también lo consideramos indicador de la comprensión matemática de los alumnos. En el caso de la E4L, observamos que identifica la concavidad de la parábola donde comente el error de indicar que se orienta hacia arriba el cual sería lo contrario, en seguida determina cual es el vértice de la gráfica de la función cuadrática, para así poder delimitar e identificar el valor máximo que toma la gráfica de la función cuadrática, el cual es un procedimiento alternativo correcto, donde podemos interpretar que comprenden el concepto de punto máximo de una parábola. En seguida determina la cantidad de artículos que debe vender para tener una utilidad de 1000 dólares, utilizando la formula general (Bhaskara). En donde, la aplicación de esta fórmula en la mencionada ecuación es correcta, donde utiliza conocimientos de operaciones básicas de los números reales. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, una comprensión positiva del concepto de función cuadrática, el vértice y el valor máximo o mínimo. A partir de estas afirmaciones podemos inferir que se conoce los significados y la interpretación de la gráfica de una función cuadrática.

- *Discurso hacia el consentimiento con la E4L y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con la E4L respecto a la primera pregunta. El siguiente fragmento (cuadro 20) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 20

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y la E4L sobre la Cuarta Pregunta

1	Investigador	explícanos más o menos como lo entendiste y qué es lo que hiciste en este problema
2	E4L	Primeramente, te dije que el valor máximo y mínimo de tome, otra vez es utilice la ecuación del vértice y me sale que el valor de “x” es igual a 75 O y el valor de “y” me sale 1125. Entonces, como también hemos dicho que el valor de “y” o el vértice puede representar el valor máximo y el mínimo, y podemos ver que la ecuación es negativa la constante, el signo de equis al cuadrado es negativo. Entonces quiere decir que es el máximo, te dije también que el valor lo toma “y” que sería el valor máximo de ahí concluimos nos pide el máximo valor, entonces el valor máximo sería “y” que sería 1125
3	Investigador	Excelente, en esta parte, como te pedía el valor máximo que se va a obtener en una ecuación cuadrática obviamente el coeficiente cuadrático tenía que ser negativo y ahora mira en la siguiente interrogante dice ¿cuántos artículos de vender para tener una utilidad de 1000 $?
4	E4L	Como nos está dando ya el valor de la utilidad que sería “y” lo reemplazamos que sería 1000 y ahí se forma una ecuación cuadrática y lo transportamos a la primera sección y lo igualamos a cero, ahí utilizamos la fórmula general y como puedes ver todo el procedimiento nos toma dos valores. Cuando una ecuación cuadrática el “x” tiene que tomar dos valores; cuándo es lineal toma un valor y así sucesivamente, en este caso son dos valores que uno es 100 y uno es 50. Entonces la respuesta son esos dos valores.
5	Investigador	¿Podrías hacer una gráfica más o menos?
6	E4L	¿Qué tipo de gráfica?
7	Investigador	De la función cuadrática
8	E4L	Si, normal
9	Investigador	Haya, y los puntos x=100 y x=50 prácticamente interceptarían donde aparece 1000
10	E4L	Exacto
11	Investigador	Justamente lo que tú dices la ecuación cuadrática tiene dos soluciones a veces tiene soluciones repetidas y a veces también tiene soluciones en el campo de los números complejos, en este caso nos está dando dos diferentes soluciones quiere decir que vamos a tenerla utilidad en dos oportunidades ¿qué utilidad vamos a tener?, 1000 dólares, en el caso de que x=100 y en el caso de que x=50, en esos casos vamos a tener la utilidad de 1000 dólares.
12	E4L	uhmm

Coincidimos con la E4L, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, como el reconocimiento de la orientación de la gráfica, la propiedad del vértice para determinar el punto máximo o mínimo, todo esto con respecto a la primera sub pregunta. Mientas que en la segunda sub pregunta la E4L indica que remplazo en vez de la función utilidad el valor de 1000 para así tener una ecuación cuadrática donde nos dará dos soluciones. De ahí podemos analizar de que la E4L conoce el significado del vértice el cual será el punto máximo o mínimo del a función cuadrática y también comprende que en una ecuación cuadrática le resultará por lo tanto habrá en dos oportunidades que tendrá la utilidad de 1000. Sin embargo, la parábola no fue graficada, pero podemos podría afirmar que lo hubiese graficado con tabla de valores, así como lo hizo en el tercer ejercicio lo cual no es un indicio de la interpretación de la gráfica.

B) Sobre la compresión de la E4L

Una vez concluida la interpretación de las cuatro preguntas de la prueba, ¿Qué podemos afirmar acerca de la compresión de la E4L sobre el significado de la función cuadrática? Obtenemos indicios razonables de compresión del significado de las funciones cuadráticas que se podría valorar según los niveles de comprensión de Pirie y Kieren en el estrato de observación. Dicha compresión se sustenta, sobre todo en el reconocimiento de la concavidad de la gráfica de la parábola, en la aplicación de la propiedad del vértice, en el reconocimiento del punto máximo o mínimo, identificación del dominio y rango, y la construcción de la tabla de valores para obtener puntos de la gráfica de una función cuadrática. En donde todos los conocimientos puestos en juego, son utilizados de manera técnica y rutinaria, con una pequeña compresión del significado en cada uno de ellos.

C) Caso de la E4N

En esta parte describiremos el análisis realizado con la E4N, sobre las cuatro preguntas de la evaluación asignada, cada pregunta será analizada bajo la propuesta del círculo hermenéutico de la comprensión matemática.

PRIMERA PREGUNTA

Figura 21

Registro de Naturaleza Escrita por la E4N Respecto a la Primera Pregunta

1. En la siguiente función cuadrática:
   a) investiga si los valores dados de "*y*" *pertenecen* al rango de la función
   b) ¿Cuál es el dominio de la función cuadrática?

$$y = x^2 + 2x - 8 \qquad \text{Para } y = 0;\ y = -10.$$

$$y = x^2 + 2x - 8$$

Datos

$$a = x^2$$

$$b = 2x$$

$$c = -8$$

vértice

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = f\,\frac{-2}{2x1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x = f\left(\frac{-b}{2}a\right)$$

$$y = 1(-1)^2 + 2(-1) - 8 = 1 - (-2) - 8 = -5$$

$y = -5$

$$\text{v} = (-1, -5)$$

- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por la E4N*

En este caso, el registro elaborado por la E4N como respuesta a la primera pregunta de la tarea incluye notaciones numéricas y cálculos aritméticos básicos (Figura 21). En la aproximación semiótica al registro escrito de la E4N observamos que esta comienza con la solución de la primera sub pregunta reconociendo incorrectamente los coeficientes a(cuadrático), b(lineal) y c(independiente) de la función cuadrática, de esa parte podemos presenciar que hace referencia a teorías básicas de las ecuaciones cuadráticas al momento de reconocer los parámetros a, b y c. así como también tiene la noción de la determinación del vértice. La estrategia empleada cosiste en determinar el vértice de la parábola para luego quizás poder plantear el rango de la función o tal vez la E4N solamente conoce este procedimiento para determinar el vértice cayendo en un error de pensar que la solución de todas las funciones cuadráticas es obtener el vértice; para determinar el vértice al parecer utiliza la propiedad $v = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. En seguida reconoce los coeficientes a(cuadrático), b(lineal) y c(independiente) en la función de forma incorrecta como ya se mencionó, luego remplaza en vez de "b" y "a" los valores de 2 y 1 respectivamente en $x = \frac{-b}{2a}$, determinando en primera instancia el valor que toma la variable "x" en el vértice de la parábola, con la correcta aplicación de las operaciones básicas como la multiplicación y división de números enteros y tomado en consideración que la "f" que aparece en la resolución fue un error de tipeo, llegando así a determinar el valor de $x = -1$. Luego, una vez ya conocido el valor de "x" de inmediato procede a averiguar la imagen $f(-1)$ considerando en una primera instancia a la imagen como la variable "x", luego al momento donde remplaza en vez de la variable "x" el valor de -1, ya intercambia a la imagen, con la variable "y" quedando de la siguiente forma $y = 1\,(-1)^2 + 2(-1) - 8$, a partir de esta expresión la E4N utiliza incorrectamente algunas de las operaciones básicas con números enteros, llega a la conclusión de que la imagen de -1 en la función cuadrática planteada vine a ser -5 y de esa forma determina el vértice $v = (-1; -5)$. Siendo esa la única solución mostrada. Respecto a la determinación de la imagen apreciamos que comete errores al aplicar la ley de signos y también que desconoce lo que es el rango y dominio de la función. Pero, es importante también rescatar que la E4N conoce el procedimiento para determinar el vértice de una función cuadrática, teniendo también en cuenta de que pudo haber recibido ayuda externa.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por Pamela*

La E4N utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la primera pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 9). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas, (b) estrategia para determinar el vértice de la parábola, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la propiedad del vértice, dirigido por las 2 sub preguntas del enunciado, como estrategia de resolución.

Tabla 9

Conocimiento Matemático de la E4N de la Primera Pregunta de la Tarea.

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de una función cuadrática de su expresión algebraica	Concepto de función cuadrática
	La Imagen dado un valor x
Identificación de los coeficientes cuadráticos, lineal e independiente	Simbolización de la imagen de un valor x
Conocimiento referencial del vértice	
Procedimiento para determinar el vértice	
Búsqueda del vértice de la parábola algebraicamente	Formula del vértice de una parábola
Las operaciones con números enteros	Aplicación no consolidad de las operaciones básicas con números enteros
Simbolización del vértice como punto en el plano	Correcta simbolización de un par ordenado
Estrategias de resolución	
Determinación del vértice utilizando su propiedad	Procedimiento alternativo adecuado para la determinación del vértice

(-1; -5) como solución de la pregunta	Vulnerabilidad en la operacionalización de números enteros Escaso conocimiento de dominio y rango

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y el reconocimiento de los parámetros a, b y c, aunque incorrectamente, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto de la función cuadrática, la expresión de la ecuación cuadrática, la simbolización de la imagen de un valor x y la simbolización del vértice como punto en el plano. Sin embargo, es necesario aclarar que tal vez pudo realizarlo con el apoyo complementario del internet, debido a que hay operaciones o simbolizaciones incorrectas.

Sobre el procedimiento para determinar el vértice de la función cuadrática, la E4N proporciona indicios evidentes de un empleo técnico de la propiedad para determinar el vértice de la función cuadrática, En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental. Sin embargo, los errores cometidos en su aplicación, sobre todo en donde aplica incorrectamente las operaciones con números enteros, pone evidencia que hay ciertas debilidades el tema mencionado, pero eso no implica que desconoce el procedimiento para la terminación del vértice.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. En el caso de la E4N, observamos que identifica los coeficientes, en seguida determina cual es el vértice de la gráfica de la función cuadrática, el cual es un procedimiento alternativo correcto, donde podemos interpretar que comprende que el vértice es una parte de la función cuadrática. Sin embargo, podemos inferir que desconoce el significado de dominio y rango. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, una comprensión en evolución del concepto de función cuadrática, el vértice, dominio y rango.

- *Discurso hacia el consentimiento con Pamela y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con la E4N respecto a la primera pregunta. El siguiente fragmento (Figura 22) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 22

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y la E4N sobre la Primera Pregunta

1	Investigador	Explique más o menos como trataste resolver esta parte.
2	E4N	Ya, seguidamente he buscado el valor de a, b y c, sabemos que para una función cuadrática tiene que haber “x” al cuadrado, “x” y el numero individual ¿no?, entonces aquí a=1 y no a “x”, b=2 porque es el número y c=-8, ahí comprobamos que es una fusión cuadrática.
3	Investigador	Haya genial, en esa parte maso menos, aquí debería ser uno dijiste ¿no?
4	E4N	Si uno, en ahí solo era uno y en el otro es dos
5	Investigador	Y en esta parte maso menos ¿qué estas realizando?, en esta parte donde estoy sombreando
6	E4N	Sacando el vértice de la función,
7	Investigador	Y ¿esta es la fórmula? Esta de aquí
8	E4N	Si, creo que me confundí
9	Investigador	Haya, y Explícanos maso menso que hiciste por esta parte haber
10	E4N	Lo remplace
11	Investigador	Haya, estas remplazando los valores de b y a, y has obtenido que “y” vale -5, más abajo veo que el vértice es v (-1, -5). ¿Para qué maso menos determinamos el vértice?
12	E4N	Para hallar el eje de simetría
13	Investigador	Haya, pero en este caso en respuesta a la primera pregunta, investiga si los valores dados de “y” pertenecen al rango de la función. ¿El rango de la función cual sería según a tu parecer?
14	E4N	Silencio…
15	Investigador	O ¿Cuál sería el dominio de la función cuadrática?
16	E4N	La “y” seria pue -5 el dominio, y la x sería el rango
17	Investigador	Haya, E4N conoces ¿Cómo es la gráfica de la función cuadrática?
18	E4N	Sí, es cóncava y convexa

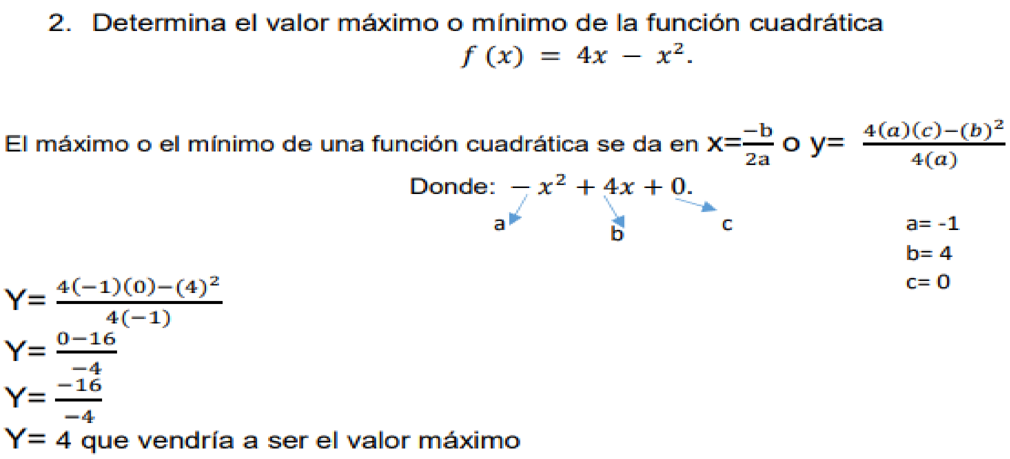
19	Investigador	Haya, es cóncava prácticamente y se le llama parábola, excelente, muy bien. En este caso faltaría aquí en la pregunta “b” el dominio es todo los numero reales y el rango se saca a partir del vértice, a partir del mínimo valor.

Coincidimos con la E4N, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, como el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática, el reconocimiento de los coeficientes, la utilización de la propiedad del vértice. la E4N indica que el procedimiento del reconocimiento de los coeficientes fue incorrecto debido a que considero a la variable y tenía que estar solamente los números, de ahí también podemos apreciar que se desconoce totalmente el significado del dominio y rango de la función. Sin embargo, vemos que la E4N si conoce en un nivel muy bajo la gráfica y el eje de simetría, desconociendo el significado de cada uno de ellos.

SEGUNDA PREGUNTA

Figura 23

Registro de Naturaleza Escrita por la E4N Respecto a la Segunda Pregunta



2. Determina el valor máximo o mínimo de la función cuadrática $f\ (x) = 4x - x^2$.

El máximo o el mínimo de una función cuadrática se da en X=$\frac{-b}{2a}$ o y= $\frac{4(a)(c)-(b)^2}{4(a)}$

Donde: $-x^2 + 4x + 0.$

a b c

a= -1
b= 4
c= 0

Y= $\frac{4(-1)(0)-(4)^2}{4(-1)}$

Y= $\frac{0-16}{-4}$

Y= $\frac{-16}{-4}$

Y= 4 que vendría a ser el valor máximo

- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por Pamela*

En este caso, el registro elaborado por la E4N como respuesta a la segunda pregunta de la tarea incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos y un texto referencial explicativo del valor máximo o mínimo de una función cuadrática mencionando la propiedad (Figura 23). Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por la E4N. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito de la E4N observamos que esta comienza con la solución, indicando la propiedad para determinar tanto la abscisa y la ordenada del vértice de la gráfica de la función cuadrática $x = \frac{-b}{2a}$ o $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$. La estrategia utilizada es determinar la ordenada del vértice para así luego indicar el valor máximo o mínimo según corresponda. Para determinar la ordenada del vértice utiliza la propiedad $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$. En seguida reconoce los coeficientes a(cuadrático), b(lineal) y c(independiente) en la función, luego remplaza en vez de “a”, “b” y “c” los valores de -1, 4 y 0 respectivamente en la fórmula, quedando de la siguiente manera: $y = \frac{4(-1)(0)-(4)^2}{4(-1)}$. A partir de esta expresión utilizando correctamente las operaciones de potenciación, multiplicación, división, adición y sustracción de números enteros llega a la conclusión de que la ordenada del vértice en la función cuadrática es 4 es decir que y=4, indicando de inmediato que 4 vendría a ser el valor máximo de la función cuadrática, siendo esta la solución de la situación. Sin embargo, es necesario mencionar o analizar de que no se consideró en la parte de la resolución la orientación de la gráfica para determinar si es punto máximo o mínimo, en cual se forma un desconocimiento si en realidad ya lo determino con tan solo ver la expresión o tal vez recibió ayuda de externos, como también pudo haberlo hecho al azar.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por Pamela*

Al igual que en la primera pregunta, la E4N utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la segunda pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 10). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas, (b) estrategia para determinar el valor máximo y mínimo, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la propiedad para determinar la ordenada del vértice de la gráfica de la función cuadrática como estrategia de resolución.

Tabla 10

Conocimiento Matemático de la E4N de la Segunda Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de la expresión como una función cuadrática incompleta	Concepto de función cuadrática, completas e incompletas
Identificación de los coeficientes en la expresión	Concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a”
	Máximo o mínimo de una parábola
Procedimiento para determinar el valor máximo o mínimo	
Utilización de la propiedad para identificar la ordenada del vértice la gráfica de la función	Fórmula para determinar la abscisa del vértice
	Fórmula para determinar la ordenada del vértice
	Operaciones básicas de la matemática
Estrategias de resolución	
Determinación de la concavidad de la parábola.	Procedimiento adecuado para la determinación del punto máximo o mínimo de la gráfica de la función cuadrática.

Determina el punto máximo con la propiedad $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$ El numero 4 como solución de la segunda pregunta

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. Caracterizar tales usos exige profundizar en las estrechas relaciones existentes entre el conocimiento conceptual, la destreza procedimental y la representación del problema evidenciados por la E4N. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática incompleta y la identificación de la forma u orientación de la gráfica que toma dicha función, así como también el reconocimiento de los coeficientes cuadráticos, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto de funciones completas e incompletas, la concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a” (coeficiente cuadrático) de la función cuadrática. También, denota la incorporación de la fórmula para la determinación de la ordenada vértice y la identificación del valor máximo o mínimo que puede tomar la parábola. Sin embargo, es necesario aclarar que tal vez pudo realizarlo con el apoyo complementario del internet.

Sobre el procedimiento para determinar el valor máximo de la función cuadrática, la E4N proporciona indicios evidentes de un empleo técnico de la propiedad para determinar la ordenada del vértice de la gráfica de la función cuadrática, En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento.

En el caso de la E4N, observamos que identifica que la función cuadrática está incompleta, en seguida determina cual es la ordenada del vértice de la gráfica de la función cuadrática, para así poder delimitar el valor máximo de la función cuadrática, el cual es un procedimiento alternativo correcto, donde podemos interpretar que comprenden el concepto del valor máximo de una función. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, una comprensión positiva de algunas partes del concepto de función cuadrática y el vértice.

- *Discurso hacia el consentimiento con la E4N y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con la E4N respecto a la segunda pregunta. El siguiente fragmento (Figura 24) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 24

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y la E4N sobre la Segunda Pregunta

1	Investigador	Explícanos como lo resolviste
2	E4N	Primero lo remplace a, b y c, así como está, ahí si lo puse bien la “a” es -1, y luego con la fórmula de “y”, remplazándolo saque 4, que vendría a ser el valor máximo.
3	Investigador	Haya, entonces lo que has determinado tu prácticamente es primero determinar un “x” ¿está de aquí?
4	E4N	Si
5	Investigador	O si no directamente lo has remplazado en la fórmula de la “y”
6	E4N	Si, De la “y”
7	Investigador	Y ahí as determinado que el máximo valor que puede tomar la función es 4
8	E4N	Si
9	Investigador	Excelente, ese sería el máximo valor. Y ¿Cómo estaría graficado la función? E4N, porque tú sabes que una función tiene una forma parábola, conoces una parábola ¿verdad?
10	E4N	Si
11	Investigador	Una parábola puede estar inclinado para abajo y hacia arriba
12	E4N	Ya, en esa estaría inclinada para abajo, una cóncava
13	Investigador	¿Cómo lo determinas eso?
14	E4N	Ya, porque el número a es menos cero sería una cóncava y si sería mayor que cero seria convexa ósea para arriba

15	Investigador	Excelente, el coeficiente que está delante de “x” al cuadrado, eso determinaría que dirección va tener ¿no?, si es para arriba o para abajo.

Coincidimos con la E4N, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, como el reconocimiento de la orientación de la gráfica, la propiedad para determinar la ordenada vértice de la gráfica de la función, para luego poder determinar el valor máximo de esta función cuadrática. De la misma forma la E4N reconoció la forma de la gráfica mencionando según su curvatura, es decir cóncava y convexa, de esta parte podemos inferir que la E4N conoce la gráfica de la función cuadrática el cual es cóncava (inclinación hacia abajo). También podemos inferir que se conoce el procedimiento práctico e instructivo para determinar el valor máximo y podríamos mencionar que entiende en un nivel no muy elevado el significado del punto máximo y mínimo de la función cuadrática.

TERCERA PREGUNTA

Figura 25

Registro de Naturaleza Escrita por la E4N Respecto a la Tercera Pregunta.

3. Bosquejar la gráfica de la siguiente función cuadrática:
$y = x^2 - x - 6.$

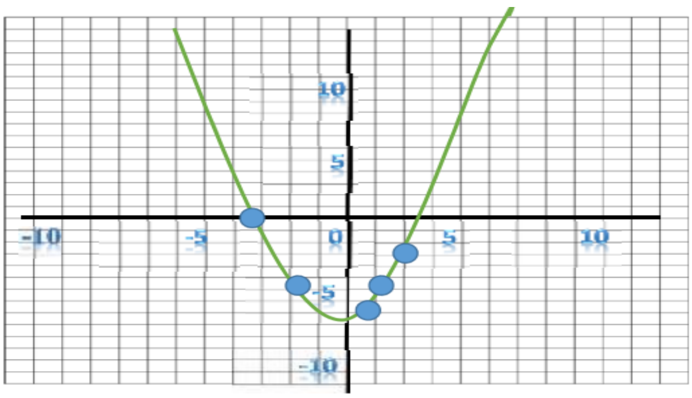
Vértice: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

Foco: $\left(\frac{1}{2}, -6\right)$

Eje de simetría :X= $\left(\frac{1}{2}\right)$

Directriz: Y= $-\left(\frac{13}{2}\right)$

X	Y
-2	0
-1	-4
$\frac{1}{2}$	$-\frac{25}{4}$
1	-6
2	-4



- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por la E4N*

En este caso, el registro elaborado por la E4N como respuesta a la tercera pregunta de la tarea, incluye notaciones numéricas de coordenadas, valores geométricos de una parábola, un cuadro de valores y la gráfica en el plano cartesiano (Figura 25). Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por la E4N. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito de la E4N observamos que esta comienza con la solución indicando de forma directa los elementos de la gráfica de una parábola con sus respectivos valores que nos daría la función. La estrategia empleada cosiste en transformar la función cuadrática en la ecuación canónica de la parábola para en seguida determinar el vértice, el foco, el eje de simetría, la directriz de la parábola, luego hacer una tabla de valores para determinar algunos puntos de la gráfica y así poder realizar una gráfica en base a los puntos obtenidos. Para determinar el vértice, el foco, eje de simetría, y la directriz vemos que no se encuentra su procedimiento de cada elemento, el cual podemos afirmar dos posibilidades. Primero, que la E4N recibió ayuda externa ya sea, por otra persona, internet, y otros. Segundo, que lo ha realizado todo el procedimiento en un cuaderno extra y solo puso sus resultados. Sin embargo, se infiere que hay mucha más posibilidad de la primera afirmación sea la correcta porque vemos que el espacio en la hoja el cual es adecuado como para poder realizar procedimientos alternativos para determinar dichos elementos. La E4N llego a determinar el vértice $v = \left(\frac{1}{2}; -\frac{25}{2}\right)$, foco $f = \left(\frac{1}{2}; -6\right)$, eje de simetría $x = \frac{1}{2}$ y la directriz $y = -\frac{13}{2}$. Una vez ya determinado cada uno de los elementos mencionados, dibuja un cuadro donde da valores a la variable “x” como $-2, -1, \frac{1}{2}, 1\ y\ 2$ para luego obtener de cada uno de los valores dados sus respectivas imágenes formándose así las coordenadas de algunos puntos de la gráfica. Una vez ya determinado los puntos, la E4N ubica los puntos y el vértice en el plano. A continuación, finaliza la resolución trazando las grafica por los puntos ya ubicados sin graficar los elementos de la parábola obtenidos al inicio, el cual da más realce a que este trabajo fue con ayuda externa.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por la E4N*

La E4N utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la tercera pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 11). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas y su gráfica, (b) estrategia para determinar los elementos de una parábola, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la tabla de valores, como estrategia para el bosquejo de la gráfica.

Tabla 11

Conocimiento Matemático de la E4N de la Tercera Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de una función cuadrática y la forma de su grafica Identificación de la orientación de la parábola a partir de su expresión algebraica	Concepto de función cuadrática Concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a”
Procedimiento para determinar los elementos de la parábola	
Búsqueda de la ecuación canónica, vértice, foco, eje de simetría y la directriz de la parábola	Ecuación canónica de una parábola Determinación del vértice de la parábola con la ecuación canónica Determinación del foco de una parábola con la ecuación canónica y el vértice Determinación del eje de simetría y la directriz La Imagen dado un valor x
Estrategias de resolución	
Determinación de los elementos de la parábola	Falta Procedimiento para la determinación de la ecuación canónica, vértice, foco, eje de simetría y directriz.

Identificación de algunos puntos de la función utilizando la tabla de valores	Vulnerabilidad en graficarlos elementos de la parábola obtenidos Procedimiento opcional de la tabla de valores

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y la identificación de la forma u orientación de la gráfica que toma dicha función, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto, la forma de la gráfica, la concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a” (coeficiente cuadrático) de la función cuadrática y la obtención de algunos puntos de la gráfica. Por otra parte, la interpretación de la búsqueda de los elementos de la parábola directamente por parte de la E4N, también denota la incorporación de la ecuación canónica de una parábola, el procedimiento para determinar del vértice, el foco, eje de simetría, la directriz y la determinación de 6 puntos de la gráfica mediante la ubicación de la imagen dando un valor determinado a la variable “x”, realizando todas estas operaciones de forma correcta. Sin embargo, es necesario aclarar que todos estos datos obtenidos por la E4N no fueron utilizados al momento de graficar la parábola, solo se puede presenciar que utilizo el cuadro de valores

Sobre el procedimiento para determinar los elementos de la parábola, la E4N no proporciona el procedimiento para determinar dichos elementos. Sin embargo, puso los elementos de forma correcta. Los indicios evidentes de un empleo técnico de la identificación de la ecuación cuadrática, así como también la del vértice y otros. En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental. De esta situación volvemos a recalcar que la E4N pudo haber recibido ayuda externa. Pero, consideraremos que fue la E4N quien determino todos esos valores hasta demostrar lo contrario o identificar algunos conocimientos desplegados por la E4N.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. En el caso de la E4N, observamos que identifica la concavidad de la parábola, en seguida determina cual es el vértice, el foco, eje de simetría y la directriz de la parábola, luego realiza un cuadro de valores donde empieza a dar valores a la variable “x” para así obtener las imágenes de cada uno y de esa forma encontrar algunos puntos de la función cuadrática para luego poder graficar con los datos obtenidos. El cual es un procedimiento alternativo semi correcto, donde podemos interpretar que comprenden que una función está conformada por infinitos puntos y que cuenta con varios elementos de la parábola. Sin embargo, la obtención de estos elementos es irrelevantes, porque no los utiliza al momento de bosquejar la gráfica, más bien si utiliza la tabla de valores. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, una comprensión relativamente bajo sobre los significados de los elementos de la gráfica de la función cuadrática y una tergiversación de la fusión cuadrática con la parábola geométrica.

- *Discurso hacia el consentimiento con la E4N y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con la E4N respecto a la tercera pregunta. El siguiente fragmento (Figura 26) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 26

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y la E4N sobre la Tercera Pregunta

1	Investigador	¿Podrías explicarme como lo hiciste? Y si lo entendiste el problema dilo y si también no lo entendiste dilo. Entonces explícame.
2	E4N	En hay primero saque los vértices, halle los vértices y el foco, lo reemplace el vértice de la X sería $\frac{1}{2}$ y de la Y seria $\frac{3}{2}$ y lo reemplace. Bueno en el centro lo puse los números antecedentes de $-\frac{1}{2}$; para poder tener una idea al hacer el grafico, los puntos por donde van a ir.
3	Investigador	¿El foco como lo sacaste?
4	E4N	No recuerdo bien, ah bueno lo reemplace.
5	Investigador	¿Puedo considerar más o menos aquí del vértice $\frac{1}{2}$ y el -6 que estaría viniendo de la ecuación? O ¿Cómo lo consideraste?
6	E4N	Son los dos valores de X.
7	Investigador	Haya, listo. Aquí me dices que el eje de la simetría es $\frac{1}{2}$, ¡muy bien! Y la directriz $-\frac{13}{2}$. ¿Ese $-\frac{13}{2}$ de donde lo sacaste?
8	E4N	¿La resolución no está más abajo?
9	Investigador	Haber aquí tienes la gráfica, ah esto es la gráfica que tú has hecho, en base a estos puntos del cuadro.
10	E4N	Si en base a esos puntos hice.
11	Investigador	Entonces si en X es -2, en Y es 0 dice. Haber ubiquemos ese punto. Ósea prácticamente seria este punto de aquí.
12	E4N	Si.
13	Investigador	Ósea lo que has hecho es ubicar puntos y en bases a eses puntos ubicar la gráfica. ¡Excelente!

Coincidimos con la E4N, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, como el reconocimiento de la orientación de la gráfica, la determinación de los elementos de la parábola, y dar los valores aleatorios a la variable “x” para determinar puntos de la función cuadrática y así hacer un a aproximado de la gráfica. Pero cabe aclarar que los elementos de la parábola que determino la E4N, no muestran procedimiento alguno, y al momento de preguntarle de la obtención de los elementos determinados, la E4N no proporciona evidencia de que ella lo resolvió. Y esto comprueba que la predicción de que obtuvo ayuda externa fue la correcta. Sin embargo, tenemos que resaltar que la E4N cuenta con indicios básico de compresión de los significados de los conceptos básicos de una función cuadrática como se menciona al inicio.

CUARTA PREGUNTA

Figura 27

Registro de Naturaleza Escrita por la E4N Respecto a la Cuarta Pregunta

4. Un profesor de matemáticas asesora a un comerciante para determinar un modelo matemático que le proporcione la utilidad *U*(*x*) en dólares generada por las ventas de *x* artículos por semana, y diseña la siguiente fórmula:

$$U(x) = 30x - \frac{1}{5}x^2$$

a) ¿Cuántos artículos debe vender en una semana para obtener la máxima ganancia?

Derivar la función:

$$U(x) = 30\text{x} - \frac{x^2}{5}$$

$$U(x)' = 30 - \frac{2^x}{5}$$

Se iguala a cero y se despeja el valor de x:

$$0 = 30 - \frac{2x}{5}$$

$$x = 75$$

Por lo tanto la cantidad de artículos que se tiene que vender es de 75 unidades.

b) ¿Cuántos artículos debe vender para tener una utilidad de 1,000 dólares?

$$U(x) = 30x - \frac{1}{5}x^2$$

$$1000 = 30x - \frac{1}{5}x^2$$

$$30x - \frac{1}{5}x^2 = 1000$$

$$-\frac{1}{5}x^2 = 1000 - 30x$$

$$-\frac{1}{5}x^2 = 970$$

$$x^2 = -\frac{970}{\frac{1}{5}}$$

- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por la E4N*

En este caso, el registro elaborado por la E4N como respuesta a la cuarta pregunta de la Prueba incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos, derivadas y un breve texto explicativo de algunos señalando el procedimiento que se realiza (Figura 27). Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos empleados por la E4N. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito de la E4N observamos que esta comienza con la solución de la primera sub pregunta derivando la función cuadrática donde hace referencia a teorías de las funciones cuadráticas como la gráfica de toda función cuadrática, la dirección de la parábola que en este caso no menciona la dirección. La estrategia empleada cosiste en determinar el vértice de la parábola utilizando derivadas el cual indicaría el valor máximo o mínimo y así poder plantear el valor máximo o la máxima ganancia de una semana, para determinar el vértice deriva la función cuadrática quedándole de la siguiente manera $f'(x) = 30 - \frac{2^x}{5}$, teniendo un error técnico de tipeo, en el cual la forma correcta debió ser la siguiente $f'(x) = 30 - \frac{2x}{5}$. En seguida en la siguiente expresión hace la corrección correspondiente y señala que la derivada obtenida lo igualamos a cero y despejamos la variable x, quedando de esta forma $0 = 30 - \frac{2x}{5}$, a partir de esta expresión utilizando correctamente los conocimientos algebraicos para determinar el valor de “x”, llega a la conclusión de que x=75, siento esta la respuesta de la primera sub pregunta.

Para la segunda sub pregunta ¿Cuántos artículos debe de vender para tener una utilidad de 1,000 dólares?, se observa que la E4N comienza remplazando 1000 en vez de U(x), quedándole en seguida la siguiente ecuación cuadrática $1000 = 30x - \frac{1}{5}x^2$. En seguida continúa con la resolución de la ecuación ya mostrada despejando el término cuadrático $-\frac{1}{5}x^2 = 100 - 30x$, luego escribe la siguiente equivalencia $-\frac{1}{5}x^2 = 970$, cometiendo un error llamado fortuito donde resta dos términos no semejantes. A partir de esta expresión de la E4N despeja la variable “x” quedándose en la siguiente igualdad $x^2 = 195$. Siendo este el último procedimiento realizado por la E4N.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por la E4N*

La E4N utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la cuarta pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 12). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas (b) estrategia para resolver ecuaciones cuadráticas (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la propiedad del vértice y la fórmula de Bhaskara delimitado y dirigido por las 2 sub preguntas del enunciado, como estrategia de resolución.

Tabla 12

Conocimiento Matemático de la E4N de la Cuarta Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de una función cuadrática y la forma de su grafica Identificación de la orientación de la parábola a partir de su expresión algebraica	Concepto de función cuadrática Concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a” Procedimiento para determinar el vértice de la parábola utilizando derivadas

Búsqueda del vértice de la parábola con derivadas	
Procedimiento para resolver ecuaciones cuadráticas	
Determina e identifica la ecuación cuadrática La incorrecta resolución de la ecuación cuadrática	Ecuación lineal Operaciones básicas de los números reales La suma no consolidad de términos semejantes
Estrategias de resolución	
Determinación del vértice utilizando la derivada El valor máximo es 75 es la solución de la primera sub pregunta En la segunda sub pregunta se remplazó 1000 en la función utilidad No llego a concluir la resolución de la ecuación	Procedimiento adecuado para la determinación de la abscisa del vértice Debilidad para identificar el valor máximo de toda función cuadrática Incorrecta resolución de la ecuación cuadrática

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y la identificación de la forma u orientación de la gráfica que toma dicha función, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto, la forma de la gráfica y la concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a” (coeficiente cuadrático) de la función cuadrática. Por otra parte, la interpretación de la búsqueda del vértice de la parábola algebraicamente por parte de la E4N, también denota la incorporación de las derivadas, la identificación de la abscisa del vértice de la parábola, realizando todas estas operaciones de forma correcta. Sin embargo, es necesario aclara que la E4N solamente averiguo la abscisa del vértice, el cual no sería el punto máximo, como también hay la posibilidad de que solamente se esté guiando intuitivamente por la palabra “valor máximo o mínimo” el cual al escuchar estas palabras ella infiere que se refiere al punto máximo de la función cuadrática sin entender el significado.

Sobre el Procedimiento para resolver ecuaciones cuadráticas, la E4N proporciona indicios evidentes de un empleo técnico incorrecto de la resolución de ecuaciones cuadrática en la parte de la suma de términos semejantes, resolviéndolo esto como una ecuación lineal. En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. El uso de este tipo de conocimiento es propio del quehacer matemático ordinario en las aulas y desde nuestro enfoque también lo consideramos indicador de la comprensión matemática de los alumnos. En el caso de la E4N, observamos que pretende determinar el vértice de la gráfica de la función cuadrática utilizando la derivada, para así poder delimitar e identificar el valor máximo que toma la gráfica de la función cuadrática, el cual es un procedimiento alternativo correcto. Sin embargo, la E4N no logra llegar a identificar el valor máximo de la función, donde podemos interpretar que conoce el procedimiento técnico de averiguar el vértice si ningún entendimiento del procedimiento utilizado. Respecto a la segunda sub pregunta determina de forma incorrecta la cantidad de artículos que debe vender para tener una utilidad de 1000 dólares, utilizando el procedimiento de resolución de una ecuación lineal y cometiendo el error fortuito de la suma de términos no semejantes. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, una comprensión relativamente bajo del concepto de función cuadrática, el vértice y el valor máximo o mínimo. A partir de estas afirmaciones podemos inferir que se conoce algunos de los significados de una función cuadrática.

- *Discurso hacia el consentimiento con la E4N y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con la E4N respecto a la primera pregunta. El siguiente fragmento (Figura 28) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 28

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y la E4N sobre la Cuarta Pregunta

1	Investigador	Explícanos como los resolviste es parte.
2	E4N	Eso no lo entendí bien, eso sí me ayudé viendo algunos tutoriales y revisando libros, pero no lo entendí bien.
3	Investigador	Haya, entonces explícanos más o menos como lo trataste de hacer esta parte
4	E4N	Solo la X lo quise desaparecer en ahí, luego igualé al 0. Entonces toda esa fórmula lo iguale al 0.
5	Investigador	Haya, lo has igualado al 0 y has determinado la X.
6	E4N	Si.
7	Investigador	Y una pregunta ¿Por qué pusiste en esta parte 2x y aquí según lo que me fijo esta U', has hecho derivada o algo así?
8	E4N	No, me equivoque creo de poner, como lo estuve haciendo en Word era elevado a la x. bueno no lo recuerdo bien
9	Investigador	Haya, ahora vamos con la b) ¿Cuántos artículos debe vender para tener una utilidad de 1.000 dólares?
10	E4N	Ahí lo reemplacé con la U(x) a 1000 por que nos está hablando de 1000 dólares, luego lo resolví.
11	Investigador	Haya, y una consulta en esta parte de 1000-30x llegaste a 970 ¿Por qué?
12	E4N	Ah sí, no sería así, no se tendría que restar.
	Investigador	Haya, entonces no son términos semejantes. Ya un error.
	E4N	Si
	Investigador	Ya okey, después pasaste a resolver, excelente. Y ¿Cómo crees que sería la gráfica de esta función cuadrática? ¿Podríamos imaginarlas? Por ejemplo, la parábola seria para abajo, entonces va ver un valor máximo, porque la parábola en un determinado momento va llegar a un fin y va regresar para abajo sí o no.
	E4N	Si.
	Investigador	Por ejemplo, en esta primera pregunta te estaba pidiendo eso, ósea prácticamente en pocas palabras te estaba pidiendo el vértice. Porque tú sabes que el vértice es el punto máximo o talvez mínimo en caso que vaya para arriba, entonces en esta parte te estaba pidiendo solamente el vértice y ya estaba ya.

Coincidimos con la E4N en algunas partes, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, como el reconocimiento de la orientación de la gráfica. Pero la utilización de la derivada no fue bien entendida por la estudiante, en tal sentido podemos afirmar que recibió ayuda externa como lo menciono, y también podemos concluir que solamente seguir instructivamente los procedimientos que se le presento en el video al cual ser refirió, todo ello con respecto a la primera sub pregunta. Mientas que en la segunda sub pregunta la E4N indica que remplazó en vez de la función utilidad el valor de 1000 para así tener una ecuación cuadrática donde nos tendría que dar dos soluciones. Pero en este caso la E4N no llego a resolver correctamente la ecuación cuadrática dándose cuenta ella misa sobre el error cometido en la resolución del problema. De ahí podemos afirmar que la E4N desconoce el punto máximo, y la resolución de una ecuación cuadrática, así como también vemos que la E4N recibió ayuda en cada momento de resolver la tarea, por tal motivo solo se pudo observar algunos indicios de la comprensión de la E4N sobre las funciones cuadráticas.

D) Sobre la comprensión de la E4N

Sobre la comprensión de la E4N, obtenemos indicios razonables básicos de compresión del significado de las funciones cuadráticas que se podría valorar según los niveles de comprensión de Pirie y Kieren en el estrato de creación de la imagen. Dicha compresión se sustenta, sobre todo en el reconocimiento de la concavidad de la gráfica de la parábola, el cual puede ser cóncava o convexa. También en nociones sobre el significado del vértice o punto máximo. En donde estos conocimientos puestos en juego, son utilizados de manera técnica y rutinaria, con una pequeña compresión del significado de la orientación de la parábola.

E) Caso de la E4W

En esta parte describiremos el análisis realizado con la señorita la E4W, sobre tres preguntas de la evaluación asignada, porque la cuarta no lo resolvió; cada pregunta será analizada bajo la propuesta del círculo hermenéutico de la comprensión matemática.

PRIMERA PREGUNTA

Figura 29

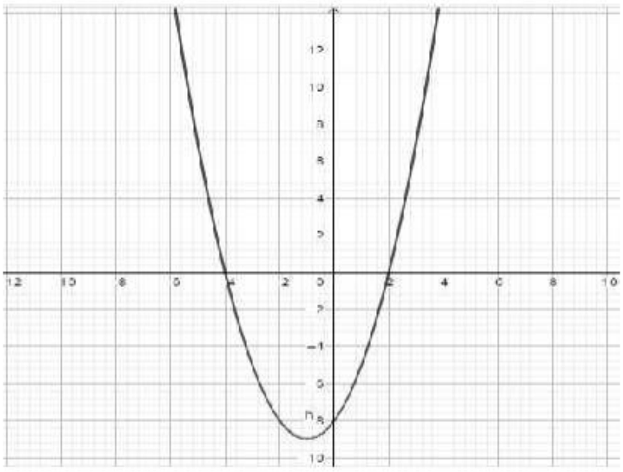
Registro de Naturaleza Escrita por la E4W Respecto a la Primera Pregunta (parte I)

1. En la siguiente función cuadrática:
   a) investiga si los valores dados de "y" *pertenecen* al rango de la función
   b) ¿Cuál es el dominio de la función cuadrática?

$$y = x^2 + 2x - 8 \qquad \text{Para } y = 0; \quad y = -10.$$
$$f(x) = x^2 + 2 - 8.$$
$$f(x) = ax^2 + b \quad + c$$
$$a = 1$$
$$b = 2$$
$$c = -8$$
$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4a \quad -b^2}{4a}\right)$$
$$\frac{2}{2(1)}, \frac{4(1)(-8)-(2)^2}{4(1)}$$
$$\therefore y = -8$$

Figura 30

Registro de Naturaleza Escrita por la E4W Respecto a la Primera Pregunta (parte II)



- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por la E4W*

En este caso, el registro elaborado por la E4W como respuesta a la primera pregunta de la tarea incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos y la gráfica de la función cuadrática (Figura 29 y 30). Para ello, se requiere elaborar una descripción lo más detallada posible del proceso de resolución de la tarea, que refleje, entre otros aspectos, los registros ostensivos de los conocimientos matemáticos puestos en juego. Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por la E4W. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito de la E4W observamos que esta comienza con la solución de la primera sub pregunta comparando la función cuadrática dada, con la forma general de la función, la estrategia empleada consiste en determinar el vértice la gráfica de la función, para luego así indicar encontrar el valor mínimo, para determinar el vértice utiliza la siguiente propiedad $v = \left(\frac{-b}{2a};\frac{4a-b^2}{4a}\right)$, el cual es incorrecto, porque no se consideró al parámetro "c", la formula correcta debió de ser la siguiente $v = \left(\frac{-b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. En seguida reconoce los coeficientes a(cuadrático), b(lineal) y c(independiente) en la función, luego remplaza en vez de "a" "b" y "c" los valores de 1, 2 y -8 respectivamente en la fórmula del vértice, quedando de la siguiente forma $\left(\frac{2}{2(1)};\frac{4(1)(-8)-(2)^2}{4(1)}\right)$. De esta expresión podemos visualizar que comete un error al no considerar el signo de negativo del parámetro b en la fórmula, luego podemos presenciar que al momento de remplazar corrige la formula aumentando el valor del parámetro "c" como lo indica la formula. A continuación, luego de realizar toda la operación de multiplicación, potenciación, adición y división de los números reales, finaliza la resolución indicando $y = -8$, el cual es incorrecto porque al realizar todas las operaciones correctamente debió salir $y = -9$. Luego, la E4W muestra el gráfico de la función que fue elaborada por una aplicación o software. De todo el registro escrito de la E4W podemos presenciar que hace referencia a teorías básicas de las funciones como la gráfica de toda función cuadrática, la dirección de la parábola que en este caso sería hacia arriba y la definición de vértice. Pero, desconoce el significado del vértice y del rango de una función, así como también las operaciones básicas de la matemática.

Para la segunda sub pregunta ¿Cuál es el dominio de una función cuadrática?, se observa que la E4W no indica cual es el dominio de la función cuadrática, puedes ser por que desconoce el significado del dominio o tal vez simplemente haya olvidado.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por la E4W*

La E4W utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la primera pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 13). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas y su gráfica, (b) estrategia para determinar el vértice, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la propiedad del vértice dirigido por las 2 sub preguntas del enunciado, como estrategia de resolución.

Tabla 13

Conocimiento Matemático de la E4W de la Primera Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de la expresión algebraica como una función cuadrática	Concepto de función cuadrática
	los coeficientes de una ecuación cuadrática
Reconocimiento de los coeficientes de una ecuación cuadrática	forma de la grafica
Identificación de la gráfica de una función cuadrática	Noción del punto Máximo o mínimo de una parábola

	Debilidad del significado del dominio y rango
Procedimiento para determinar el vértice	
Búsqueda del vértice de la parábola gráficamente y algebraicamente Omisión de la teoría de funciones cuadráticas sobre el dominio y rango	Formula del vértice de una parábola $v = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{4a-b^2}{4a}\right)$ Aplicación no consolidad de la fórmula para determinar el vértice o el punto mínimo
Estrategias de resolución	
Determinación de la los coeficientes de la función cuadrática para luego remplazarlo en la fórmula del vértice y así obtener el valor mínimo de la función Y= -8 como resultado	Procedimiento adecuado para la determinación del rango de la función cuadrática Vulnerabilidad en el la operacionalización de números reales

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. Caracterizar tales usos exige profundizar en las estrechas relaciones existentes entre el conocimiento conceptual, la destreza procedimental y la representación del problema evidenciados por la E4W. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y la identificación de la forma u orientación de la gráfica que toma dicha función, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto, la forma de la gráfica y la concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a” (coeficiente cuadrático) de la función cuadrática. Por otra parte, la identificación de los coeficientes de la función, hace referencia de que aplica su conocimiento de las ecuaciones cuadráticas.

Sobre el procedimiento para determinar el vértice de la función cuadrática, la E4W proporciona indicios evidentes de un empleo técnico de la propiedad para determinar el vértice de la función cuadrática, En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental. Sin embargo, los errores cometidos al momento de desarrollar las operaciones básicas, sobre todo cuando por error indica el valor de “y” igual a – 8, pone de manifiesto un uso no consolidado de la aplicación de las operaciones fundamentales de la matemática.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. El caso de la E4W, observamos que identifica los coeficientes de los términos de la expresión, en seguida esos valores identificados lo remplaza en la fórmula del vértice, donde podemos interpretar que conoce el procedimiento para determinar el vértice de una función cuadrática, como también el punto máximo o mínimo. Sin embargo, la aplicación de esta fórmula conlleva a la utilización de conocimientos adicionales como las operaciones de números reales, en el cual muestra debilidades. De la misma forma interpretamos que desconoce la definición y el significado de dominio y rango de una función.

- *Discurso hacia el consentimiento con la E4W y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con la E4W respecto a la primera pregunta. El siguiente fragmento (Figura 31) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 31

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y la E4W sobre la Primera Pregunta

1	Investigador	Más o menos explícanos cuál es el procedimiento que has tomado en esta parte.
2	E4W	E4W más o menos explícanos cuál es el procedimiento que has tomado en esta parte.
3	Investigador	Ya más o menos qué es lo que trataste de hacer, explícanos como lo trataste de resolver.
4	E4W	Solo saqué la formula, me guie por un video. No decía que la fórmula de la ecuación cuadrática es $a^2 + b + c$, entonces a las a lo puse valor 1, b valor 2.

5	Investigador	Ya, en esta parte donde dice $\frac{-b}{2a}, \frac{4a-b^2}{4a}$, ¿esta parte que nos indica? como lo determinaste o es una formula
6	E4W	Es una formula, ósea me he guiado de un video, solo lo he reemplazado noma, y llegue a la respuesta.
7	Investigador	En todo caso has obtenido esta fórmula y luego has reemplazado en base a las funciones de a=1, b=2 y c=-8, entonces esto $\frac{-b}{2a}, \frac{4a-b^2}{4a}$ creo que es la propiedad del vértice de una parábola y aquí has mostrado un gráfico y ese grafico en que programa lo hiciste.
8	E4W	Lo hice en GeoGebra.
9	Investigador	Ya, y ¿Cuál sería el dominio de la función cuadrática?
10	E4W	Por eso dije que estaba mal ese ejercicio.
11	Investigador	Y si está mal cual sería el dominio. ¿Te la sabrías?
12	E4W	No, no lo vi el video.

Coincidimos con la E4W en algunos aspectos, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, como el reconocimiento de los coeficientes cuadráticos, para luego remplazarlo en la fórmula del vértice, así como también menciona que utilizo el software GeoGebra para realizar la gráfica. Sin embargo, también vemos que hay contradicciones con lo que se afirmaba al inicio, porque la E4W menciona que recibió ayuda del internet (videos) los cuales le mostraban el procedimiento para determinar el vértice de la función, en donde la E4W estaría aplicando conocimientos instructivos para la solución, el cual manifiesta que la E4W desconoce el tema de funciones cuadráticas. Pero, a partir de su experiencia con los videos podemos afirmar que la E4W presenta nociones básicas sobre las funciones cuadrática como el procedimiento y la fórmula del vértice y la identificación de la diferencia entre dominio y rango, al reconocer que estuvo mal su resolución, lo cual muestra un nivel bajo de compresión sobre el significado de las funciones cuadrática.

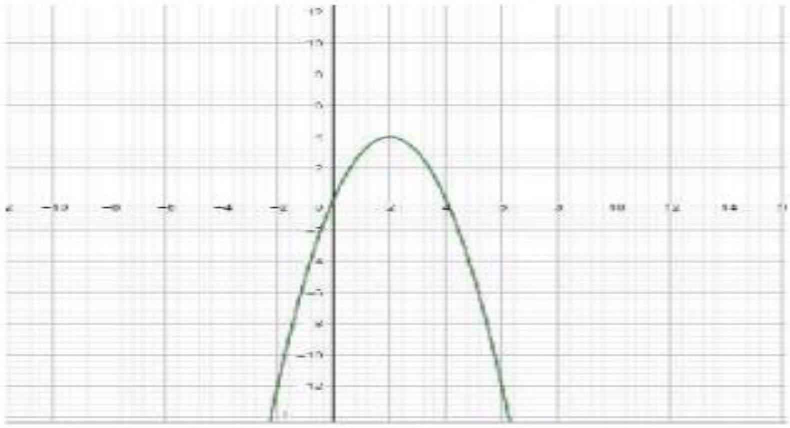
SEGUNDA PREGUNTA

Figura 32

Registro de Naturaleza Escrita por la E4W Respecto a la Segunda Pregunta

2. Determina el valor máximo o mínimo de la función cuadrática

$$f(x) = 4x - x^2.$$
$$f(x) = ax^2 + b \quad + c$$
$$a = -1$$
$$b = 4$$
$$c = 0$$
$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4a \quad - b^2}{4a}\right)$$
$$\frac{-4}{2(-1)}, \frac{4(-1)(0) - (4)^2}{4(-1)}$$
$$(2{,}4)$$
$$(x, y)$$
$$\therefore y = 4 \quad m$$



- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por la E4W*

En este caso, el registro elaborado por la E4W como respuesta a la primera pregunta de la tarea incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos y la gráfica de la función cuadrática (Figura 32). Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por la E4W. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito de la E4W observamos que esta comienza con la solución de la primera sub pregunta comparando la función cuadrática dada, con la forma general de la función, la estrategia empleada consiste en determinar el vértice la gráfica de la función, para luego así indicar encontrar el valor máximo, para determinar el vértice utiliza la siguiente propiedad $v = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{4a-b^2}{4a}\right)$, el cual es incorrecto, porque no se consideró al parámetro "c", la formula correcta debió de ser la siguiente $v = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. En seguida reconoce los coeficientes a(cuadrático), b(lineal) y c(independiente) en la función, luego remplaza en vez de "a" "b" y "c" los valores de -1, 4 y 0 respectivamente en la fórmula del vértice, quedando de la siguiente forma $\left(\frac{-4}{2(-1)}; \frac{4(-1)(0)-(4)^2}{4(-1)}\right)$. De esta expresión podemos visualizar que al momento de remplazar corrige la formula aumentando el valor del parámetro "c" como lo indica la formula. A continuación, luego de realizar toda la operación de multiplicación, potenciación, adición y división de los números reales llegando a lo siguiente $(2; 4)$, finaliza la resolución indicando $y = 4$, el cual es correcto. Luego, la E4W muestra el gráfico de la función que fue elaborada por el software GeoGebra. De todo el registro escrito de la E4W podemos presenciar que hace referencia a teorías básicas de las funciones como la gráfica de toda función cuadrática, la dirección de la parábola que en este caso sería hacia arriba y la definición de vértice.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por la E4W*

La E4W utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la primera pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 14). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas y su gráfica, (b) estrategia para determinar el vértice, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la propiedad del vértice dirigido por las 2 sub preguntas del enunciado, como estrategia de resolución.

Tabla 14

Conocimiento Matemático de la E4W de la Segunda Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de la expresión algebraica como una función cuadrática Reconocimiento de los coeficientes de una ecuación cuadrática Identificación de la gráfica de una función cuadrática	Concepto de función cuadrática los coeficientes de una ecuación cuadrática forma de la grafica Noción del punto Máximo o mínimo de una parábola
Procedimiento para determinar el vértice	
Búsqueda del vértice de la parábola gráficamente y algebraicamente Formula del vértice Coordenadas de un punto	Formula del vértice de una parábola $v = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{4a-b^2}{4a}\right)$ Aplicación consolidad de la fórmula para determinar el vértice o el punto mínimo Coordenadas de un punto
Estrategias de resolución	
Determinación de la los coeficientes de la función cuadrática para luego remplazarlo en la formula del vértice y así obtener el valor máximo de la función Y= 4 como resultado, expresado este el punto máximo de la función cuadrática	Procedimiento adecuado para la determinación del rango de la función cuadrática Correcta aplicación de las operaciones de los numero reales de números reales

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. Caracterizar tales usos exige profundizar en las estrechas relaciones existentes entre el conocimiento conceptual, la destreza procedimental y la representación del problema evidenciados por la E4W. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y la identificación de la forma u orientación de la gráfica que toma dicha función, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto, la forma de la gráfica y la concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro "a" (coeficiente cuadrático) de la función cuadrática. Por otra parte, la identificación de los coeficientes de la función, hace referencia de que aplica su conocimiento de las ecuaciones cuadráticas.

Sobre el procedimiento para determinar el vértice de la función cuadrática, la E4W proporciona indicios evidentes de un empleo técnico de la propiedad para determinar el vértice de la función cuadrática, En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental. Sin embargo, debemos aclarar que la E4W recibió ayuda del internet lo que pone como referencia un escaso nivel de comprensión

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. El caso de la E4W, observamos que identifica los coeficientes de los términos de la expresión, en seguida esos valores identificados lo remplaza en la fórmula del vértice, donde podemos interpretar que conoce el procedimiento para determinar el vértice de una función cuadrática, como también el punto máximo o mínimo. Sin embargo, la aplicación de esta fórmula conlleva a la utilización de conocimientos adicionales como las operaciones de números reales los cuales fueron realizados correctamente.

- *Discurso hacia el consentimiento con la E4W y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con la E4W respecto a la primera pregunta. El siguiente fragmento (Figura 33) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 33

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y la E4W sobre la Segunda Pregunta

1	Investigador	Entonces aquí debemos de determinar si tiene valor máximo o mínimo, ¿cómo sabes si tiene valor máximo o mínimo? Explícanos como lo resolviste.
2	E4W	Lo saque con la fórmula de la ecuación cuadrática $ax^2 + b + c$, sabemos que a = -1, b =4 y c = 0, lo reemplace igual que la pregunta uno.
3	Investigador	Llegaste a (2,4) ¿esto que vendría ser? ¿Qué resultado vendría ser?
4	E4W	Que X =2 y Y = 4, como nos dice el máximo entonces el máximo es 4.
5	Investigador	¿Por qué la gráfica es hacia abajo, ósea la parábola? ¿Por qué no podría estar inclinado hacia arriba?
6	E4W	El GeoGebra lo ha sacado así.

Coincidimos con la E4W en algunos aspectos, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, como el reconocimiento de los coeficientes de la función cuadrática, para luego remplazarlo en la fórmula del vértice, así como también menciona que utilizo el software GeoGebra para realizar la gráfica. Sin embargo, también vemos que hay contradicciones con lo que se afirmaba al inicio, porque la E4W desconoce que el procedimiento que realizo era para determinar el vértice, de la misma forma podemos aclarar que desconoce el procedimiento de identificar la orientación de la gráfica, porque hace referencia de que se guio de la forma como graficó el GeoGebra. Y como en la anterior pregunto menciono que recibió ayuda del internet (videos) los cuales le mostraban el procedimiento para determinar el vértice de la función, en donde la E4W estaría aplicando conocimientos instructivos para la solución, el cual manifiesta que la E4W desconoce el tema de funciones cuadráticas. Pero, a partir de su experiencia con los videos podemos afirmar que la E4W presenta nociones básicas sobre las funciones cuadrática como el procedimiento y la fórmula del vértice y el punto máximo, lo cual muestra un nivel bajo de compresión sobre el significado de las funciones cuadrática.

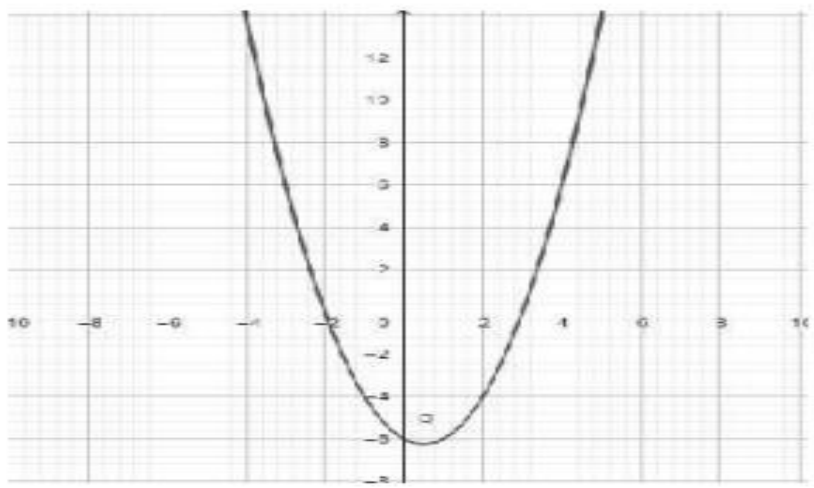
TERCERA PREGUNTA

Figura 34

Registro de Naturaleza Escrita por la E4W Respecto a la Tercera Pregunta

3. Bosquejar la gráfica de la siguiente función cuadrática:
$y = x^2 - x - 6.$

$$y = (x^2 - x + \frac{1}{4}) - 6 - \frac{1}{4}$$
$$y = (x - \frac{1}{2})^2 - 6.25$$
$$v = (1{,}6.25)$$
$$x = \frac{1}{2}$$
$$\therefore m \quad = -6{,}25$$



- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por la E4W*

En este caso, el registro elaborado por la E4W como respuesta a la tercera pregunta de la tarea, incluye notaciones numéricas de coordenadas, valores geométricos de una parábola y la gráfica en el plano cartesiano (Figura 34). Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por la E4W. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito de la E4W observamos que esta comienza con la solución utilizando el método de completación de cuadrados para así expresar la función cuadrática como una ecuación canónica de la parábola. La estrategia empleada cosiste en transformar la función cuadrática en la ecuación canónica de la parábola para en seguida determinar el vértice, eje de simetría y el punto mínimo de la parábola, luego realizar una gráfica en base a los puntos obtenidos. Para convertir la función cuadrática a una ecuación canónica, la E4W utiliza el método de la completación de cuadrados utilizando el axioma del inverso aditivo quedando de la siguiente manera $y = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - 6 - \frac{1}{4}$ para luego obtener un trinomio cuadrado perfecto, $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 6.25$ y de esta ecuación canónica no ordenada determina el vértice de la parábola $v = (1, 6.25)$, cometiendo el error llamado fortuito porque la abscisa debería de ser $\frac{1}{2}$. Sin embargo, la E4W puso solamente 1. Luego, determina de inmediato que $x = \frac{1}{2}$, pudiendo ser esta el eje de simetría o tal vez trato de señalar que esa de ahí es la abscisa. En seguida, da la siguiente igualdad $m = -6.25$ donde se puede inferir que señala el punto mínimo de la parábola, del cual podemos afirmar dos posibilidades. Primero, que la E4W recibió ayuda externa ya sea, por otra persona, internet, y otros. Segundo, que la E4W conoce solamente esos elementos de las parábolas. A continuación, finaliza la resolución trazando las grafica en el software GeoGebra, sin señalar en la gráfica los valores obtenidos. De esta acción podemos inferir que no hay mucha comprensión sobre los valores obtenidos y el significado en la gráfica.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por la E4W*

La E4W utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la tercera pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 15). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas y su gráfica, (b) estrategia para determinar el vértice, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la tabla de valores, como estrategia para el bosquejo de la gráfica.

Tabla 15

Conocimiento Matemático de la E4W de la Tercera Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento inadecuado como función cuadrática Reconocimiento de la gráfica como parábola Eje de simetría de una parábola	Eje de simetría de una parábola Máximo o mínimo de una parábola Concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro a
Procedimiento para determinar el vértice	
Búsqueda del vértice de la parábola en base a la ecuación canónica de la parábola Determinación del punto máximo de la parábola, a partir del vértice	Identificación inadecuada del vértice en la forma de la ecuación canónica de la parábola Aplicación consolidada de la identificación del punto máximo. Correcta simbolización de un par ordenado
Estrategias de resolución	
Determinación del vértice de la parábola a partir de la ecuación canónica Identificación del eje de simetría y punto mínimo la gráfica desarrollada en el software GeoGebra	Procedimiento adecuado para la determinación del vértice de una parábola Identificación inadecuada de los valores del vértice Reconocimiento del punto mínimo

En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión de la ecuación cuadrática como ecuación de una parábola geométrica y la identificación de la forma de la gráfica que toma dicha ecuación, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto de la ecuación de la parábola, la forma de la gráfica y el posible reconocimiento de la concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro “a” (coeficiente cuadrático) de la parábola. Sin embargo, inferimos que el problema planteado fue reconocido como una ecuación parabólica, el cual se trabaja en geometría analítica, mas no como función cuadrática. A pesar de ello, vemos que los dos temas son muy relacionados ya que podemos concebir el vértice, eje de simetría, punto máximo entre otros elementos que se relaciona. Sin embargo, es necesario aclarar que la E4W, pudo recibir ayuda externa y por esa razón solamente se observan los elementos de la parábola directamente sin procedimiento alguno y también que estos datos obtenidos no son todos como para realizar un correcto bosquejo de la gráfica, donde faltaría involucrar una secuencia correcta para la determinar una gráfica casi correcta, como a) Orientación de la gráfica, b) El vértice, c) Intersección en el eje Y, d) Eje de simetría, e) Intersección en X.

Sobre el procedimiento para determinar el vértice de la función cuadrática, la E4W proporciona indicios evidentes de un empleo técnico del reconocimiento de la abscisa y ordenada a partir de la ecuación canónica de la parábola, En esencia, se refiere al uso rutinario de la ecuación canónica para determinar el vertible del tema tratado como instrumento de cálculo elemental.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. En el caso de la E4W, observamos que identifica la expresión como la ecuación de una parábola, en seguida convierte el enunciado a una ecuación canónica de la parábola utilizando el método de completación de cuadrado, para luego identificar el vértice de la parábola. El eje de simetría y el punto mínimo, y así poder graficar la gráfica el cual es un procedimiento alternativo semi correcto, donde podríamos interpretar que comprenden que una función está conformada por infinitos puntos y que cuenta con un solo vértice. Sin embargo, al observar la graficar no utiliza los valores obtenidos o al menos no lo señala en la gráfica. Lo que amerita interpretar que simplemente hizo la gráfica de la función al azar en el software sin entender el significado de los valores obtenidos en la gráfica. El cual erradica la posible conclusión anterior sobre su posible comprensión. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, un bajo nivel de comprensión del concepto de función cuadrática, el vértice y el procedimiento para obtener la gráfica.

- *Discurso hacia el consentimiento con la E4W y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con la E4W respecto a la tercera pregunta. El siguiente fragmento (Figura 35) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 35

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y la E4W sobre la Tercera Pregunta

1	Investigador	Explícanos como lo hiciste esta parte.
2	E4W	Eso lo hice viendo tutoriales, ya me he olvidado esta parte, entonces ya no vi un Video básicamente de esto.

3	Investigador	Haya, entonces en base al tutorial lo trataste de resolver.
4	E4W	Si, fue en base a video .

No Coincidimos con la E4W, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, ni la ecuación canónica de la parábola, porque simplemente manifiesta que solamente se guio de un video tutorial de YouTube, del cual podemos concluir que la E4W, desconoce el tema de funciones cuadráticas y la comprensión que pudo obtener mirando el video tutorial son mínimas ya que pretendió resolver el ejercicio instructivamente guiado por el video.

F) Sobre la compresión de la E4W,

La E4W, manifiesta nociones básicas de compresión del significado de las funciones cuadráticas que se podría valorar según los niveles de comprensión de Pirie y Kieren en el estrato de Creación de imagen. Dicha noción de compresión se sustenta, sobre todo en la utilización de la propiedad para determinar el vértice y el reconocimiento los coeficientes de la ecuación, los cuales son los parámetros de la gráfica.

G) Caso del E4C

En esta parte describiremos el análisis realizado con el E4C, sobre las cuatro preguntas de la evaluación asignada, en la cual solo se analizó las tres primeras preguntas debido a que la cuarta pregunta no lo resolvió, cada pregunta será analizada bajo la propuesta del círculo hermenéutico de la comprensión matemática.

PRIMERA PREGUNTA

Figura 36

Registro de Naturaleza Escrita por el E4C Respecto a la Primera Pregunta

1. En la siguiente función cuadrática:
 a) investiga si los valores dados de "y" *pertenecen* al rango de la función
 b) ¿Cuál es el dominio de la función cuadrática?

$$y = x^2 + 2x - 8 \qquad \text{Para } y = 0;\ y = -10.$$

$\boldsymbol{y = x^2 + 2x - 8}$

$x = \frac{-b}{2a}$

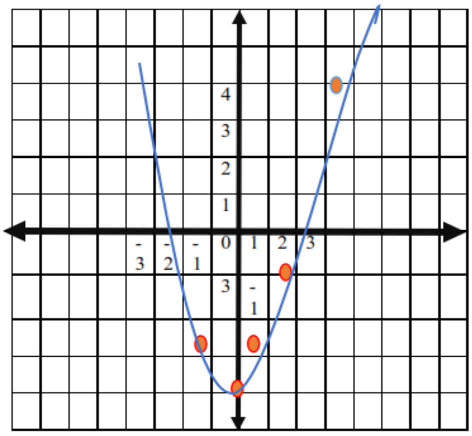
$x = \frac{-2}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$

$y = f\left(\frac{-b}{2}a\right)$

$y = 1(-1)^2 + 2(-1) - 8 = 1 - (-2) - 8 = -5$

$y = -5 \qquad V = (-1, -5)$

x	-1	0	1	2	3
y	-9	-8	-5	0	7



- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por el E4C*

El primer desafío que nos impone el círculo hermenéutico es el de identificar rastros de comprensión en el registro escrito que resulta de la textualización de la actividad matemática de la alumna. En este caso, el registro elaborado por el E4C como respuesta a la primera pregunta de la tarea incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos, cuadro de valores y la gráfica de la función cuadrática (Figura 36). Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por el E4C. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito del E4C observamos que esta comienza con la solución de la pregunta identificando el vértice de la función cuadrática. La estrategia empleada cosiste en determinar el vértice de la parábola, realizar un cuadro de valores y luego graficarlo. Determinando la gráfica como solución del problema; para determinar el vértice utiliza la propiedad $v = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. En seguida reconoce los coeficientes a(cuadrático), b(lineal) y c(independiente) en la función de forma directa el cual no está escrito en el registro, luego remplaza en vez de “b” y “a” los valores de 2 y 1 respectivamente en la fórmula del vértice, determinando en primera instancia el valor que toma la variable “x” en el vértice de la parábola, con la correcta aplicación de las operaciones básicas como la multiplicación y división de números enteros, llegando a determinar el valor de $x = -1$. Luego, una vez ya conocido el valor de “x” de inmediato procede a averiguar la imagen $f(-1)$ en donde remplaza en vez de la variable “x” el valor de -1 quedando de la siguiente forma $y = \ (-1)^2 + 2(-1) - 8$, a partir de esta expresión utilizando las operaciones de potenciación, multiplicación, adición y sustracción de números enteros llega a la conclusión de que la imagen de -1 en la función cuadrática planteada vine a ser -5, en donde comete el error llamado fortuito al momento de desarrollar las operaciones. Luego, de esa forma determina el vértice $v = (-1; -5)$. Una vez ya determinado el vértice comienza con realizar un cuadro de valores para identificar puntos de la gráfica de la función y así de esa forma realizar la gráfica en base a los puntos obtenido, podemos presenciar también que los puntos no fueron ubicados correctamente en el plano cartesiano, siendo la gráfica la solución de la primera pregunta. Pero, es importante también la solución que muestra el E4C no fue lo adecuado porque la pregunta consistía en determinar el dominio y rango. Sin embargo, podemos presenciar que el E4C conoce y sabe cómo obtener el vértice y así como también como obtener puntos en base a valores determinados al azar.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por el E4C*

El E4C utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la primera pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 16). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas y su gráfica, (b) estrategia para determinar vértice, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la propiedad del vértice y la teoría de dominio delimitado y dirigido por las 2 sub preguntas del enunciado, como estrategia de resolución.

Tabla 16

Conocimiento Matemático del E4C de la Primera Pregunta de la Tarea.

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de una función cuadrática y la forma de su grafica Posible Identificación de la orientación de la parábola a partir de su expresión algebraica Realización de tabla de valores	Concepto de función cuadrática Concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro "a" Formula del vértice de una parábola Reconocimiento de la parábola con la línea curva que está conformada por infinitos puntos

	La Imagen dado un valor x
Procedimiento para determinar el vértice	
Procedimiento para determinar el rango omisión de la pregunta sobre el dominio y rango reconocimiento del vértice como par ordenado	Formula del vértice de una parábola $v = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ Desconoce el dominio y rango Adecuada simbolización de un par ordenado
Estrategias de resolución	
Determinación del vértice de la parábola Obtención de puntos que pertenecen a la función cuadrática La grafica como solución al problema	Procedimiento adecuado para la determinación del vértice de la función cuadrática Vulnerabilidad al momento de realizar las operaciones básicas Correcta obtención de los puntos de la parábola

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y la identificación de la forma u orientación de la gráfica que toma dicha función, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto, la forma de la gráfica y la concavidad de la parábola de acuerdo al parámetro "a" (coeficiente cuadrático) de la función cuadrática

Sobre el procedimiento para determinar el vértice de la gráfica de la función cuadrática, el E4C proporciona indicios evidentes de un empleo técnico de la propiedad para determinar el vértice, En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental. Sin embargo, el error cometido en su al momento de realizar las operaciones básicas, pone de manifiesto un uso no consolidado de la formula general para determinar el dominio de la función cuadrática.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento.

En el caso del E4C, observamos que identifica el vértice de la parábola con la propiedad ya indicada, en seguida comienza construyendo una tabla de valores para identifica algunos puntos para poder construir la gráfica, aunque no fueron muy bien ubicados los puntos obtenidos. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, un nivel ponderado de comprensión del concepto de función cuadrática, el vértice y rango. Así como también, se evidencia una cierta fragilidad de la comprensión del E4C sobre el concepto del dominio y rango.

- *Discurso hacia el consentimiento con el E4C y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con el E4C respecto a la primera pregunta. El siguiente fragmento (Figura 37) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 37

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y el E4C sobre la Primera Pregunta

1	Investigador	Explícanos más o menos qué es lo que trataste o como lo resolviste.
2	E4C	Es lo primero, de acuerdo con las fórmulas para hallar el dominio utilice la forma de $x = \frac{-b}{2a}$, entonces utilice los valores de que vendría a ser b = 2 y a =1, entonces lo he reemplazado en donde X me dio -1 y eso sería un valor, luego hice una función $\frac{-b}{2a}$, igual lo reemplace y medio resultado como -5 el dominio de la función esto sería -5, -1,-1 eso seria y ahí está la gráfica y los puntos de intersección.
3	Investigador	Haya, aquí veo que has puesto valores para X y lo has determinado Y. ¡excelente! Y ¿Cuál sería el rango?
4	E4C	El rango seria -1,-5.
5	Investigador	Y ¿el dominio?
6	E4C	Sería el -9,-8-5,0,7.
7	Investigador	Haya. Excelente, son todos esos valores, el dominio y pueden tomar muchos valores más como como casi como el infinito.

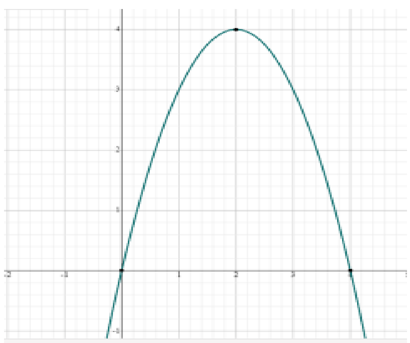
No Coincidimos con el E4C, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, como la identificación del vértice de la función cuadrática. Por qué menciona que el rango es lo que obtuvo, el cual es incorrecto, porque simplemente obtuvo el vértice. De esto podemos inferir de que, desconoce el procedimiento para determinar el rango, como también desconoce que el procedimiento realizado era para determinar el vértice de la función cuadrática, de igual manera podemos afirmar que no hay referencia sobre el dominio y el rango. Pero podemos rescatar que el E4C si conoce que la gráfica de la función cuadrática es una parábola, y que esta está conformada por infinitos punto, porque, al momento de realizar la tabla de valores, da valores al azar. Como también vemos que tiene la noción de ubicar puntos en el plano cartesiano. Un factor muy importante también es que desconoce la notación de un par ordenado por que el vértice es un par ordenado sin embargo el menciona que es el rango. De ahí podemos analizar que el E4C desconoce el significado del dominio rango, vértice y otros elementos de una función cuadrática.

SEGUNDA PREGUNTA

Figura 38

Registro de Naturaleza Escrita por el E4C Respecto a la Segunda Pregunta

2. Determina el valor máximo o mínimo de la función cuadrática



$f(x) = 4x - x^2$

Su valor máximo es:

$f(x) = 4x - x^2$

$f(x) = (2; 4)$

Su valor minimo es :

$f(x) = 4x - x^2$

$f(x) = (0; 0)$

- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por el E4C*

En este caso, el registro elaborado por el E4C como respuesta a la segunda pregunta de la tarea incluye notaciones numéricas, un texto referencial explicativo y la gráfica de la función cuadrática (Figura 38). Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por el E4C. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito del E4C observamos que esta comienza con la solución, graficando la función cuadrática en el software GeoGebra. En seguida en base al grafico reconoce el punto máximo de la función el cual lo simboliza de la siguiente manera $f(x) = (2; 4)$. Luego indica el valor mínimo de la siguiente manera $f(x) = (0; 0)$. La estrategia utilizada es graficar la función cuadrática en GeoGebra y luego determinar del mismo grafico el punto máximo y mínimo, el cual no es un camino adecuado, porque todo el trabajo lo está haciendo el software, en donde el solo a partir del grafico reconoce el punto máximo correctamente. Pero, el E4C menciona también el punto mínimo, el cual es incorrecto por que $f(x) = (0; 0)$ no es el punto medio por que la gráfica continúa hasta el menos infinito. También vemos que los puntos no son correctamente simbolizados por que el F(x), implica una función de variable “x” y no como punto. De todo lo mencionado podemos inferir que el E4C desconoce el procedimiento para determinar el punto mínimo. Pero, si vemos una noción sobre el significado del punto máximo o mínimo de una función.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por el E4C.*

Al igual que en la primera pregunta. el E4C utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la segunda pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 17). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas y su gráfica (b) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la propiedad del vértice como estrategia de resolución.

Tabla 17

Conocimiento Matemático del E4C de la Segunda Pregunta de la Tarea.

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de una función cuadrática y la forma de su grafica	Concepto de función cuadrática
Identificación del punto máximo a partir de la grafica	Noción valor Máximo o mínimo de una parábola
Estrategias de resolución	
Construcción de la gráfica en el software GeoGebra Identificación en la gráfica el punto máximo y mínimo	Procedimiento no adecuado para la determinación del valor máximo o mínimo de una función cuadrática

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y la construcción de la gráfica en software GeoGebra, evidencian conexiones mínimas de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso de una cierta parte concepto y la forma de la gráfica. Por otra parte, la identificación del punto máximo y mínimo en base a la gráfica, hace constar que solamente el E4C tiene una noción de lo que es el punto máximo y mínimo, de la misma forma que desconoce el procedimiento adecuado para determinar el punto máximo o mínimo de una función cuadrática, también notamos que hay una incorrecta notación de un par ordenado o punto.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. En el caso del E4C, observamos que construye la gráfica en GeoGebra y luego identifica el punto máximo y mínimo de la función cuadrática, el cual es un procedimiento incorrecto, por que toma como ayuda el software, el cual le da directamente el resultado. Pero sin embargo como lo mencione, hace un incorrecto reconocimiento del punto mínimo d la función cuadrática. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, una noción de comprensión sobre el punto máximo y mínimo y un nivel bajo de compresión sobre el procedimiento para determinar el valor máximo o mínimo.

- *Discurso hacia el consentimiento con el E4C y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con el E4C respecto a la segunda pregunta. El siguiente fragmento (Figura 39) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 39

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y el E4C sobre la Segunda Pregunta

1	Investigador	¿Cómo lo has determinado?, podrías explicarlo o como lo resolviste tal vez lo has hecho mediante dibujando la tabla no lo sé cómo lo has empezado a resolver.
2	E4C	Lo hice por el método de GeoGebra y me dio resultado.
3	Investigador	Haya, excelente entonces tú lo has puesto en el GeoGebra y lo ha graficado y te has dado cuenta que el punto máximo de allí de la función cuadrática es 2,4, y su valor mínimo es 0,0.
4	E4C	Si.
5	Investigador	Excelente entonces mediante y gráfico te has guiado para determinar el valor máximo también es válido.

Coincidimos con los E4C, respecto a su intención de los con construir el grafico en la función cuadrática para luego determinar el punto máximo y mínimo de la función. Entonces se confirma las interpretaciones realizadas respecto a esta pregunta, que construye la gráfica en GeoGebra y luego identifica el punto máximo y mínimo de la función cuadrática, el cual es un procedimiento incorrecto, por que toma como ayuda el software, el cual le da directamente el resultado. Pero sin embargo como lo mencione, hace un incorrecto reconocimiento del punto mínimo de la función cuadrática. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, una noción de comprensión sobre el punto máximo y mínimo y un nivel bajo de compresión sobre el procedimiento para determinar el valor máximo o mínimo.

TERCERA PREGUNTA

Figura 40

Registro de Naturaleza Escrita por E4C Respecto a la Tercera Pregunta

3. Bosquejar la gráfica de la siguiente función cuadrática:
$y = x^2 - x - 6.$

$\boldsymbol{y = x^2 - x - 6}$

- Vertice

$x = \frac{-b}{2a}$

$x = \frac{-1}{2 \times 1} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$

$y = f\left(\frac{-b}{2}a\right)$

$y = 1(-0{,}5)^2 + 2(-0{,}5) - 8 = 0{,}25 - 0{,}5 - 8 = -8{,}25$

$y = -8{,}25 \qquad V = (-0{,}5, -8{,}25)$

x	-1	0	1	2	3
y	-4	-6	-6	-4	0

- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por el E4C*

En este caso, el registro elaborado por el E4C como respuesta a la tercera pregunta de la tarea, incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos y un cuadro de valores cartesiano (Figura 40). Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas, procedimientos y propiedades empleadas por el E4C. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito del E4C observamos que este comienza con la solución determinando el vértice de la gráfica de la función cuadrática y algunos puntos adicionales de la gráfica, de la misma forma podemos presenciar que hace referencia a teorías básicas de las funciones como la determinación del vértice utilizando una determinada propiedad. La estrategia empleada cosiste en determinar el vértice de la parábola, luego hacer una tabla de valores para determinar algunos puntos de la gráfica y así poder realizar una gráfica en base a los puntos obtenidos. Para determinar el vértice utiliza la propiedad $v = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. En seguida reconoce los coeficientes a(cuadrático), b(lineal) y c(independiente) en la función, luego remplaza en vez de "b" y "a" los valores de -1 y 1 respectivamente en la fórmula del vértice, determinando en primera instancia el valor que toma la variable "x" en el vértice de la parábola, con la correcta aplicación de las operaciones básicas como la multiplicación y división de números enteros, llegando a determinar el valor de $x = 0{,}5$. Luego, una vez ya conocido el valor de "x" de inmediato procede a averiguar la imagen $f(0{,}5)$ en donde remplaza en vez de la variable "x" el valor de 0,5 quedando de la siguiente forma $f(0{,}5) = (0{,}5)^2 - 2(05) - 8,$ a partir de esta expresión, observamos que comete el error de involucrar al 2 y al -8, el cual es incorrecto, donde simplemente debió de ser de la siguiente forma $f(0{,}5) = (0{,}5)^2 - (05) - 6$. Es por eso que se concluye que el valor que llega a obtener no es la correcta, además que vemos errores en la operacionalización de los números. A pesar de todo los errores cometidos el E4C llega a determinar el vértice, $V(-0.5, -8{,}25)$. Una vez ya determinado el vértice, dibuja un cuadro donde da valores a la variable "x" como -1, 0, 1, 2 y 3, para luego obtener de cada uno de los valores dados sus respectivas imágenes formándose así las coordenadas de algunos puntos de la gráfica. Una vez ya determinado los puntos, el E4C finaliza su solución sin presentar la gráfica de la función cuadrática.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por el E4C*

La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 18). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas y su gráfica, (b) estrategia para determinar el vértice, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la tabla de valores, como estrategia para el bosquejo de la gráfica.

Tabla 18

Conocimiento Matemático del E4C de la Tercera Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Reconocimiento de la expresión como una función cuadrática Determinación de los putos dado un valor x	Concepto de función cuadrática(expresión) X puede tomar cualquier valor real, el cual sería el dominio
Procedimiento para determinar el vértice	
Búsqueda del vértice de la parábola algebraicamente	Formula del vértice de una parábola Aplicación no consolidada de la propiedad del vértice La Imagen dado un valor x
Estrategias de resolución	
Determinación del vértice Identificación de algunos puntos de la función utilizando la tabla de valores	Procedimiento adecuado para la determinación del vértice de la función Vulnerabilidad en algunas partes de la operacionalización de números reales Procedimiento opcional de la tabla de valores

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y la determinación de la imagen dado un valor x, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso de una parte del concepto y la obtención de algunos puntos de la gráfica, atreves de la tabla de valores. Por otra parte, la interpretación de la búsqueda del vértice de la parábola algebraicamente por parte del E4C, también denota la incorporación de la fórmula del vértice y la determinación de 5 puntos de la gráfica mediante la ubicación de la imagen dando un valor determinado a la variable “x”, realizando todas estas operaciones de forma incorrecta al momento de determinar el vértice y correcta en la tabla de valores. Sin embargo, es necesario aclarar que estos datos obtenidos no son todos como para realizar un correcto bosquejo de la gráfica, donde faltaría involucrar una secuencia correcta para la determinar una gráfica casi correcta, como a) Orientación de la gráfica, b) El vértice, c) Intersección en el eje Y, d) Eje de simetría, e) Intersección en X.

Sobre el procedimiento para determinar el vértice de la función cuadrática, el E4C proporciona indicios evidentes de un empleo técnico de la propiedad para determinar el Vértice de la función cuadrática, En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental, el que se recalca el error cometido en la parte operacional.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. En el caso del E4C observamos determina cual es el vértice de la gráfica de la función cuadrática, luego realiza un cuadro de valores donde empieza a dar valores a la variable “x” para así obtener las imágenes de cada uno y de esa forma encontrar algunos puntos de la función cuadrática para luego poder graficar, el cual es un procedimiento alternativo semi correcto, donde podemos interpretar que comprenden que una función está conformada por infinitos puntos y que cuenta con un solo vértice. Sin embargo, la obtención de estos datos es irrelevantes, bastaría solamente con obtener la orientación, el vértice, las intersecciones en los ejes coordenados y el eje simétrico de la función cuadráticas. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, una comprensión ponderada del concepto de función cuadrática, el vértice y el procedimiento para obtener la gráfica. A pesar de que no logró graficarlo.

- *Discurso hacia el consentimiento con el E4C y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con el E4C respecto a la tercera pregunta. El siguiente fragmento (Figura 41) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 41

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y el E4C sobre la Tercera Pregunta

1	Investigador	entonces en esta parte explícanos más o menos como lo has trabajado
2	E4C	En aquí lo utilice la misma fórmula del ejercicio de arriba
3	Investigador	Haya, aquí lo que estás haciendo es de terminar el vértice, por ejemplo, el vértice la V viene a ser el vértice, el punto máximo o el mínimo de la función cuadrada haya entonces y aquí has empezado a dar valores a X, y luego ¿qué has hecho?
4	E4C	De ahí solo faltaba el grafico.
5	Investigador	y ¿porque se terminado el vértice?
6	E4C	Como me pedía bosqueje, entonces pensé que era vértice, porque cuando hablas de bosqueje pides vértice de acuerdo a eso lo hice.
7	Investigador	Haya, entonces aquí solo te falto grafico nomas.

Coincidimos con el E4C, respecto a su intención de aplicar los conceptos básicos de la función cuadrática, como la propiedad del vértice, y dar los valores aleatorios a la variable “x” para determinar puntos de la función cuadrática y así hacer un a aproximado de la gráfica. Pero cabe aclara que el E4C, no se percató sobre el error que había cometido, en la cual solo menciona que le falto realizar el grafico. Sin embargo, podemos rescatar cierta comprensión de la gráfica de la función cuadrática.

H) Sobre la comprensión del E4C

Obtenemos indicios básicos razonables de compresión del significado de las funciones cuadráticas que se podría valorar según los niveles de comprensión de Pirie y Kieren en el estrato de Creación de La imagen. Dicha compresión se sustenta, sobre todo en la aplicación de la propiedad del vértice, y la determinación de puntos de la gráfica utilizando la tabla. En donde todos los conocimientos puestos en juego, son utilizados de manera técnica y rutinaria, con una pequeña compresión de como ubicar los puntos de una gráfica.

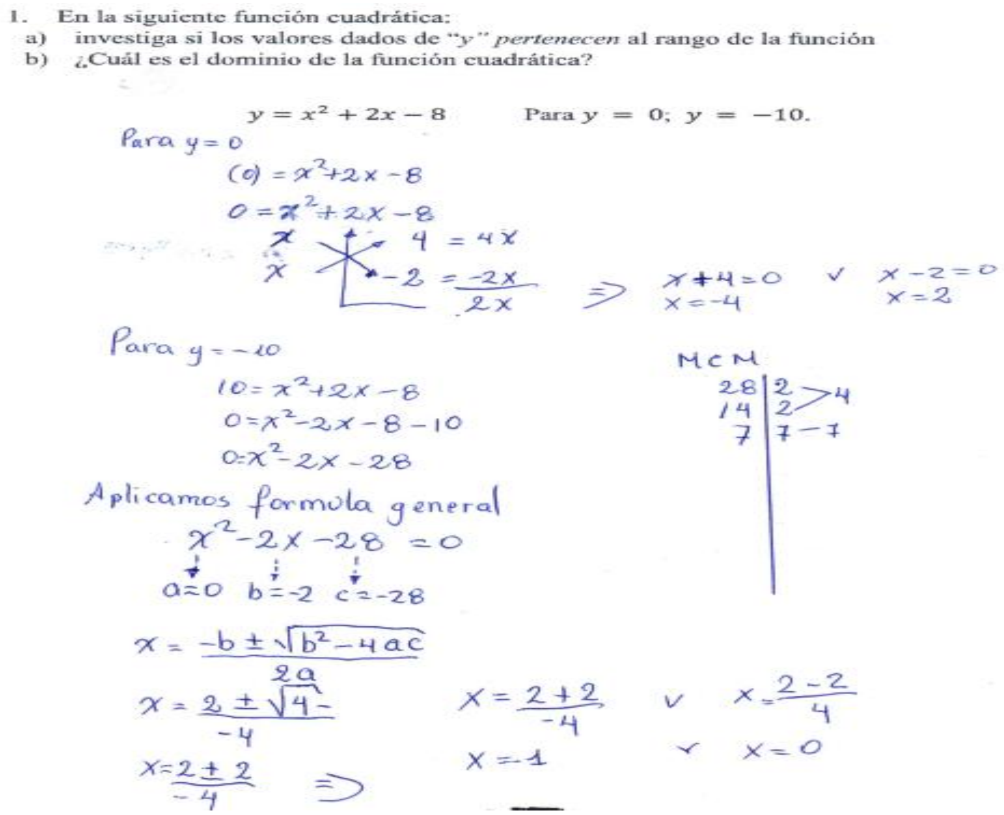
I) Caso del E4U

En esta parte describiremos el análisis realizado con el E4U, sobre las cuatro preguntas de la evaluación asignada, en la cual solo se analizó las tres primeras preguntas debido a que la cuarta pregunta no lo resolvió, cada pregunta será analizada bajo la propuesta del círculo hermenéutico de la comprensión matemática.

PRIMERA PREGUNTA

Figura 42

Registro de Naturaleza Escrita por el E4U Respecto a la Primera Pregunta



1. En la siguiente función cuadrática:
a) investiga si los valores dados de "y" *pertenecen* al rango de la función
b) ¿Cuál es el dominio de la función cuadrática?

$y = x^2 + 2x - 8$ Para $y = 0$; $y = -10$.

Para $y=0$

$(0) = x^2+2x-8$

$0 = x^2+2x-8$

$x \quad 4 = 4x$

$x \quad -2 = -2x$

$2x$

$\Rightarrow$ $x+4=0$ ∨ $x-2=0$

$x=-4$ $x=2$

Para $y=-10$

$10 = x^2+2x-8$

$0 = x^2-2x-8-10$

$0 = x^2-2x-28$

MCM

28 | 2

14 | 2

7 | 7 − 7

Aplicamos formula general

$x^2-2x-28=0$

$a=0$ $b=-2$ $c=-28$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-}}{-4}$

$x = \frac{2 \pm 2}{-4}$ $\Rightarrow$

$x = \frac{2+2}{-4}$ ∨ $x = \frac{2-2}{4}$

$x = -1$ ∨ $x = 0$

- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por el E4U*

En este caso, el registro elaborado por el E4U como respuesta a la primera pregunta de la tarea incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos y un texto explicativo de la teoría necesaria para la resolución (Figura 42). Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por el E4U. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En la aproximación semiótica al registro escrito del E4U observamos que este comienza con la solución, dándole a la variable "y" el valor de cero el cual se indica en el problema, para luego en seguida obtener la siguiente ecuación cuadrática $0 = x^2 + 2x - 8$, el cual lo resuelve utilizando el método del aspa simple, en donde realiza correctamente el procedimiento del método mencionado, llega a dos soluciones reales para la variable "x", los cuales son -4 y 2. De ahí podemos presenciar que hace referencia a teorías básicas de las ecuaciones cuadráticas y su método del aspa simple, así como también la operacionalización de números. Luego, E4C da valor de -10 a la variable "y" en la misma ecuación quedando de la siguiente forma $10 = x^2 + 2x - 8$, en el cual se observa que cometió un error llamado fortuito en colocar el 10 en vez de -10, desde ese momento podemos inferir de que la ecuación que resolvió utilizando la fórmula de Bhaskara, es incorrecta, a pesar de que luego hizo correctamente los pasos del método, llegando como resultado a dos soluciones reales para la ecuación.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por el E4U*

El E4U utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la primera pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por el alumno durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 19). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados ecuaciones cuadráticas, (b) estrategia para determinar de solución de ecuaciones cuadráticas, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando el método del aspa simple y la fórmula de Baskhara y dirigido por la resolución de ecuaciones cuadráticas, como estrategia de resolución.

Tabla 19

Conocimiento Matemático del E4U de la Primera Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Ecuación cuadrática	
Reconocimiento de la expresión como ecuación cuadrática Identificación de los parámetros respecto a la variable “y” Búsqueda de los valores de la variable “x” conociendo la variable a “y”	Concepto ecuación cuadrática Reconocimiento de los valores de “y” como casos particulares
Procedimiento para determinar la solución de una ecuación cuadrática	
Determina los valores de x cuando y=0 y cuando y=-10 Descomposición y operacionalización de números reales Dados valores para “y” se evalúa si pertenece o no	Método del aspa simple Formula de Bhaskara El Producto cero Operaciones combinadas con números reales
Estrategias de resolución	
Determinación de los valores de “x” utilizando el método del aspa simple } Determinación de los valores de “x” utilizando la fórmula de Bhaskara	Procedimiento adecuado para la determinación la solución de una ecuación cuadrática Vulnerabilidad al momento de remplazar los valores en la ecuación

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. En lo que respecta a las ecuaciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como ecuación cuadrática y la resolución de la ecuación por distintos métodos, evidencian conexiones de tipo fenómeno epistemológico, donde se infiere el uso del concepto de ecuación cuadrática. Por otra parte, la interpretación de la búsqueda de la solución de la ecuación cuadrática también denota la identificación de dos soluciones para la variable “y”. Sin embargo, es necesario aclarar que el E4U no reconoce la expresión como función cuadrática, estos se deben posiblemente al desconocimiento del tema.

Sobre el procedimiento para determinar la solución de la ecuación cuadrática, el E4U proporciona indicios evidentes de un empleo técnico del método del aspa simple y también la fórmula de Bhaskara, En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental. Sin embargo, el error cometido al momento de remplazar el 10 en vez de -10, pone de manifiesto un uso no consolidado de la formula general o un error fortuito

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. En el caso del E4U, observamos que en la primera parte remplaza el valor de cero en vez de la variable “y” quedando como una ecuación cuadrática de una variable. Y en seguida resolviendo la ecuación por el método del aspa simple, obteniéndose dos resultados. De la misma forma, se hizo con Y=-10, el cual es un procedimiento para resolver la ecuación cuadrática, donde podemos interpretar que comprenden el concepto de ecuación cuadrática, conoce los métodos de aspa simple y formula de Bhaskara. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque no vinculada con la tarea.

- *Discurso hacia el consentimiento con el E4U y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con el E4U respecto a la primera pregunta. El siguiente fragmento (Figura 43) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 43

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y el E4U sobre la Primero Pregunta

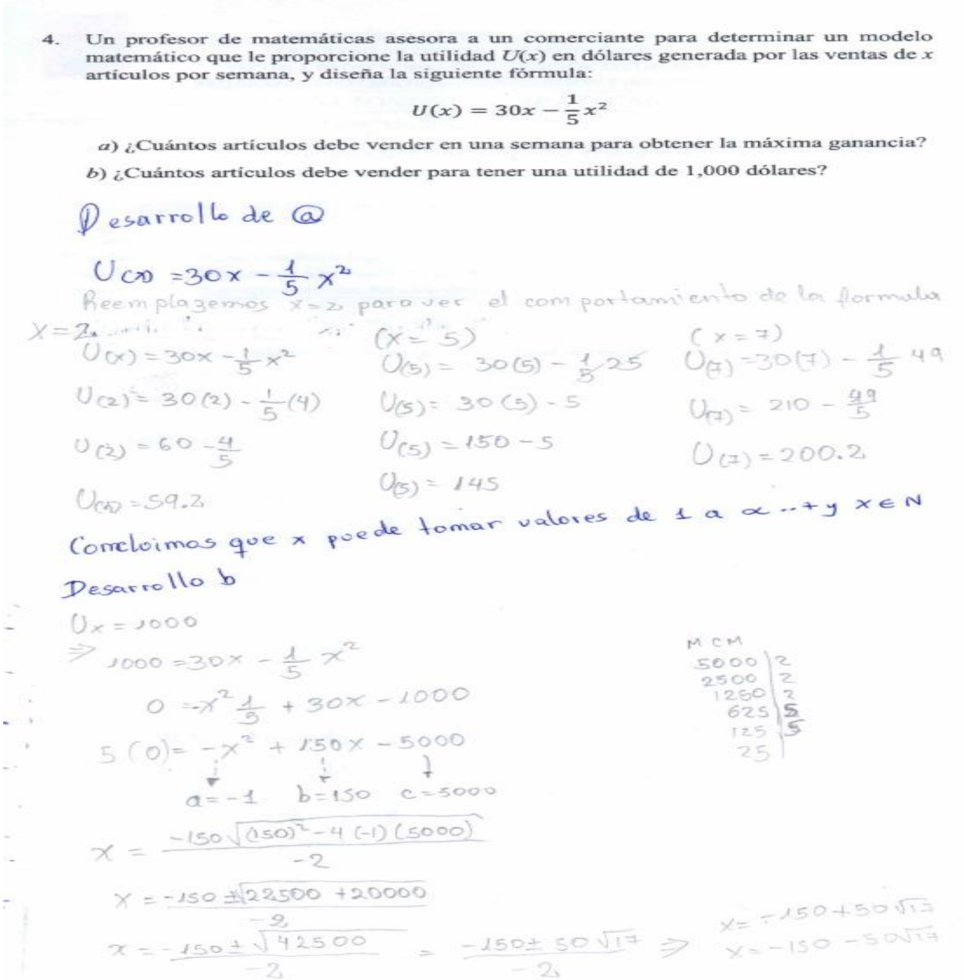
1	Investigador	Mencionamos más o menos, qué procedimiento utilizaste para determinar, la primera pregunta en aquí vemos tu evaluación y veo que has puesto y = 0 explícanos un poco, por favor.
2	E4U	Ya primero puse el valor de y = 0, comparando con la ecuación cuadrática y lo factoricé simplemente con aspa simple.
3	Investigador	Haya, veo que has tomado los valores para el primero aquí como dice la restricción lo que decía para y = 0, y = -10 lo que tú has hecho es reemplazar el y = -10, y = 0; y has obtenido prácticamente en cada una dos valores. Ahora en la primera y = 0 has obtenido - 4 y 2 hasta ahí vamos bien, ahora vamos con él y = -10 hay veo que más o menos has emplazado en vez de y = 10. Y ahí era -10.
4	E4U	Si, ahí me confundí.
5	Investigador	Ya ahora has reemplazado en la fórmula general de ecuaciones cuadráticas, ¿algún error que podamos observar o todo está bien por aquí? Una pregunta. ¿Porque consideraste aquí a = 0?
6	E4U	Bueno si, discúlpame, pero eso me confundí. Debía ser uno.
7	Investigador	Si claro, debería ser uno, Okey, genial, listo. Mira lo que has hecho es determinar los valores de y = 0, y = -10, y aquí en la pregunta más o menos te indica investiga si los valores de Y pertenecen al blanco en esa parte lo que he visto más o menos ahí termina la resolución y no me quedo bien claro si los valores de Y pertenecen o no pertenecen al rango. Primeramente ¿Cuál era el rango de la función cuadrática?
8	E4U	La verdad no sabría decir la respuesta porque no he entendido nada del tema de funciones.
9	Investigador	¡¡¡Haya, excelente!!! Ha faltado determinar el rango. Okey, genial, ahora vayamos con la siguiente interrogante que es ¿Cuál es el dominio de la función cuadrática?, Sabes más o menos ¿cuál es el dominio o desconoces?
10	E4U	Desconozco
11	Investigador	Haya,

Coincidimos con el E4U, respecto a su intención de resolver la ecuación cuadrática, desconociendo totalmente el tema de funciones cuadritas, la utilización de los métodos del aspa simple y la fórmula de Bhaskara. Reconociendo que tuvo errores al momento de resolver la ecuación, todo esto con respecto a las dos sub pregunta. Pero cabe resalta que a pesar de que el E4U desconoce el significado las funciones cuadráticas este conoce los procedimientos de las ecuaciones cuadráticas.

CUARTA PREGUNTA

Figura 44

Registro de Naturaleza Escrita por el E4U Respecto a la Cuarta Pregunta



4. Un profesor de matemáticas asesora a un comerciante para determinar un modelo matemático que le proporcione la utilidad $U(x)$ en dólares generada por las ventas de x artículos por semana, y diseña la siguiente fórmula:

$$U(x) = 30x - \frac{1}{5}x^2$$

a) ¿Cuántos artículos debe vender en una semana para obtener la máxima ganancia?

b) ¿Cuántos artículos debe vender para tener una utilidad de 1,000 dólares?

Desarrollo de @

$U(x) = 30x - \frac{1}{5}x^2$

Reemplazemos $x=2$ para ver el comportamiento de la formula

$x=2$ | $(x=5)$ | $(x=7)$

$U(x) = 30x - \frac{1}{5}x^2$ | $U(5) = 30(5) - \frac{1}{5}25$ | $U(7) = 30(7) - \frac{1}{5}49$

$U(2) = 30(2) - \frac{1}{5}(4)$ | $U(5) = 30(5) - 5$ | $U(7) = 210 - \frac{49}{5}$

$U(2) = 60 - \frac{4}{5}$ | $U(5) = 150 - 5$ | $U(7) = 200.2$

$U(2) = 59.2$ | $U(5) = 145$

Concluimos que x puede tomar valores de 1 a ∞ ..+ y $x \in N$

Desarrollo b

$U_x = 1000$

$\Rightarrow 1000 = 30x - \frac{1}{5}x^2$

$0 = -x^2\frac{1}{5} + 30x - 1000$

$5(0) = -x^2 + 150x - 5000$

$a = -1 \quad b = 150 \quad c = 5000$

$x = \frac{-150\sqrt{(150)^2 - 4(-1)(5000)}}{-2}$

$x = \frac{-150 \pm \sqrt{22500 + 20000}}{-2}$

$x = \frac{-150 \pm \sqrt{42500}}{-2} = \frac{-150 \pm 50\sqrt{17}}{-2} \Rightarrow$ $x = -150 + 50\sqrt{17}$, $x = -150 - 50\sqrt{17}$

M C M

5000	2
2500	2
1250	2
625	5
125	5
25	

- *Textualización y rastros de comprensión en el registro resuelto por el E4U*

En este caso, el registro elaborado por el E4U como respuesta a la cuarta pregunta de la tarea incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos y un breve texto explicativo de algunos procedimientos (Figura 44).

En la aproximación semiótica al registro escrito del E4U observamos que este comienza con la solución de la primera sub pregunta dando valores de 2, 5 y 7 a la variable “x” para luego obtener las imágenes de cada uno, donde hace referencia a teorías básicas de las funciones como la determinación del valor numérico de una función. La estrategia empleada cosiste en ver el comportamiento de los resultados que se obtienen para ver si tienen algún patrón numérico y así determinar el valor máximo. Para determinar los valores numéricos, damos los siguientes valores 2, 5 y 7 a la variable "x" para luego obtener las siguientes imágenes como resultados 59.2, 145 y 200.2 respectivamente. A partir de estos resultados concluye que la variable "x" puede tomar valores desde 1 $a + \infty$. Expresión utilizando correctamente las operaciones de potenciación, multiplicación, adición y sustracción de números racionales.

Para la segunda sub pregunta ¿Cuántos artículos debe de vender para tener una utilidad de 1,000 dólares?, se observa que el E4U comienza remplazando 1000 en vez de U(x), quedándole en seguida la siguiente ecuación cuadrática $0 = -\frac{1}{5}x^2 + 30x - 100$. en seguida continua con la resolución de la ecuación ya mostrada utilizando la fórmula de Bhaskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, conociendo los valores de a, b y c, e inmediatamente remplazándolo queda de la siguiente manera $x = \frac{-150 \pm \sqrt{(150)^2-4(-1)(500)}}{-2}$, cometiendo un error llamado fortuita al momento de remplazar en vez de la constante "c" el valor de 5000, el cual debió ser -5000. A pesar de ello aplicando los conocimientos de las operaciones básicas de los números reales, llegando a obtener dos valores para la variable x, $x_1 = -150 + 50\sqrt{17}$ y $x_2 = -150 - 50\sqrt{17}$, De todo este procedimiento podemos observar que se conoce el procedimiento de resolver ecuaciones cuadráticas y el procedimiento para determinar la imagen de un número en una función.

- *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por el E4U*

El E4U utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la cuarta pregunta de la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la primera pregunta de la tarea (Tabla 20). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con funciones cuadráticas (b) estrategia para resolver ecuaciones cuadráticas (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución utilizando la propiedad del vértice y la fórmula de Bhaskara delimitado y dirigido por las 2 sub preguntas del enunciado, como estrategia de resolución.

Tabla 20

Conocimiento Matemático del E4U de la Cuarta Pregunta de la Tarea

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Funciones cuadráticas	
Valor numérico de un de los valores, 2, 5 y 7	Concepto de función cuadrática
Resolución de ecuaciones cuadráticas	Valor numérico de una función
Procedimiento para resolver ecuaciones cuadráticas	
Determina e identifica la ecuación cuadrática	Fórmula de Bhaskara
Utilización de la fórmula de Bhaskara para solucionar la ecuación cuadrática	Operaciones básicas de los números reales
Identificación de los valores obtenidos y la interpretación de cada uno de ellos	La interpretación de los resultados
Estrategias de resolución	
Determinación de la combatividad de la parábola y las coordenadas del vértice	Procedimiento adecuado para la determinación del valor máximo de la función utilidad
El valor máximo es 1125 es la solución de la primera sub pregunta	Procedimiento adecuado para determinar los valores de “x” dando el valor “y”
En la segunda sub pregunta se remplazó 1000 en la función utilidad	Correcta aplicación de la formula general en las ecuaciones cuadráticas
100 0 50 artículos, es la respuesta de la segunda sub pregunta	

En lo que respecta a las funciones cuadráticas, el reconocimiento de la expresión algebraica como función cuadrática y la identificación de las imágenes de los valores dados al azar ponen de manifiesto el concepto de funciones cuadráticas.

Sobre el Procedimiento para resolver ecuaciones cuadráticas, el E4U proporciona indicios evidentes de un empleo técnico de la fórmula de Bhaskara para determinar los dos valores de la variable “x”, En esencia, se refiere al uso rutinario de las propiedades del tema tratado como instrumento de cálculo elemental. También es necesario aclara de que no reconoce correctamente los parámetros de la ecuación cuadrática.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. En el caso del E4U, observamos que determina las imágenes de los valores dados al aza para ver el comportamiento del resultado, siendo esta una estrategia inadecuada para identificar la máxima ganancia. En seguida determina la cantidad de artículos que debe vender para tener una utilidad de 1000 dólares, utilizando la formula general (Bhaskara). En donde, la aplicación de esta fórmula en la mencionada ecuación es incorrecta al momento de remplazar el valor del parámetro “c”, donde utiliza conocimientos de operaciones básicas de los números reales. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculada con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia, una comprensión primitiva del concepto de función cuadrática, y el valor muertico de una función.

- *Discurso hacia el consentimiento con el E4U y retorno a su comprensión matemática*

Tomamos ahora la información anterior como referencia, y nos introducimos en ella con la fase final del ciclo en busca del consentimiento con el E4U respecto a la primera pregunta. El siguiente fragmento (Figura 45) recorre la parte del discurso, entre investigador y alumna sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, donde se aprecia la evolución hacia el consentimiento alcanzado en esta ocasión.

Figura 45

Fragmento de Dialogo entre el Investigador y el E4U sobre la Cuarto Pregunta

1	Investigador	Entonces este capítulo también es de máxima ganancia, explícanos más o menos como es lo que trataste de hacer en esta parte de tu desarrollo.
2	E4U	Primero es que le quise reemplazar por el X = 2, porque primeramente quería ver el comportamiento de la fórmula. Si tenía un algoritmo, pero la verdad en esos tres ejemplos no conseguí nada, así que mi conclusión sería que X puede tomar un cualquier valor.
3	Investigador	Haya, excelente aquí trataste de buscar un algoritmo. Y respecto a la otra pregunta ¿Cuántos artículos debe vender para tener una utilidad de 1.000 dólares? Aquí, indica que para U(x) = 1000, ahí veo que reemplazaste en vez de Y = 1000, haz resuelto por la formula general y has llegado al resultado de un radical. ¿Aquí cual era tu razonamiento?
4	E4U	La expresión de U(x) lo reemplace por 1000 y después intente hallar X.
5	Investigador	Ahí está, excelente, porque la utilidad es U(x) y 1000 debería ser lo que yo quiero obtener esa utilidad, bueno aquí lo has hecho muy bien, debe ver algún error donde te has fallado y puedas haber sacado ese resultado.
6	E4U	Si.
7	Investigador	Entonces en esta parte has intentado resolver por la formula cuadrática y aquí este MCM para que lo utilizaste.
8	E4U	Quería sacarlo por aspa simple y de nada me sirvió.
9	Investigador	Entonces una función cuadrática es prácticamente producto de una ecuación cuadrática como tú ya lo verás y su grafica es una parábola

Coincidimos con el E4U, respecto a su intención de encontrar un patrón numérico para los valores que se den a la variable “x”, todo esto con respecto a la primera sub pregunta. Mientas que en la segunda sub pregunta el E4U indica que remplazó en vez de la función utilidad el valor de 1000 para así tener una ecuación cuadrática donde nos dará dos soluciones. De ahí podemos analizar que el E4U solamente se guio respecto al texto y al planteamiento, es decir que como se dice utilidad y en la función indica U(x), es muy evidente remplazar el 1000 en vez de

U(x). De todo esto podemos afirmar que el E4U tiene un nivel de comprensión primitivo de las funciones cuadráticas

J) Sobre la comprensión del E4U

Obtenemos el desconocimiento del significado de las funciones cuadráticas, debido a que los conocimientos que utiliza al momento de la resolución de las preguntas, son netamente de ecuaciones cuadráticas ese conocimiento se podrían valorar según los niveles de comprensión de Pirie y Kieren en el estrato de Conocimiento primitivo, debido a que solamente se pudo presenciar técnicas de resolución de ecuaciones cuadráticas y ningún tipo de conocimiento sobre función cuadrática. En donde todos los conocimientos puestos en juego, son utilizados de manera técnica y rutinaria, con una pequeña noción de función cuadrática debido a la similitud que tiene con la ecuación cuadrática

V. CONCLUSIONES

PRIMERA: Dentro del presente estudio de casos, se interpreta la comprensión del significado de las funciones cuadráticas de cinco estudiantes del programa de estudio de MFCI de la UNA Puno 2020-II, donde la estudiante E4L está ubicado en el estrato de Observación, mientras que los estudiantes E4N, E4W y E4C están ubicados en el estrato de creación de la imagen y por último el estudiante E4U está ubicado en el estrato de conocimiento primitivo.

SEGUNDA: Los rastros más coincidentes de la compresión del significado de las funciones cuadráticas que se interpretaron del registro escrito de los estudiantes, se manifiestan en el reconocimiento de la orientación de la gráfica, la determinación del vértice de la gráfica utilizando propiedades y la determinación del punto máximo o mínimo.

TERCERA: Los usos del conocimiento matemáticos sobre las funciones, se evidencian con los diferentes conocimientos puestos en juego durante la resolución de las situaciones problemáticas, entre las más comunes deducimos las siguientes: grafica de una función cuadrática, propiedad del vértice, concepto de funciones cuadráticas y ecuaciones cuadráticas.

CUARTA: Las intenciones más comunes que muestran los estudiantes al momento de resolver una situación problemática sobre funciones cuadráticas es la obtención del vértice como solución de todo tipo de problemas respecto a las funciones cuadráticas y la resolución de la función cuadrática como una simple ecuación cuadrática.

VI. RECOMENDACIONES

PRIMERA: A los investigadores que desean fortalecer este trabajo de investigación, se les sugiere trabajar con una muestra pertinente de 1 a 2 agentes de estudio, para que la investigación sea completa y muy detallada.

SEGUNDA: A los investigadores que desean fortalecer este trabajo de investigación, se les sugiere involucrar en este proceso de interpretación un cuestionario que evalué netamente la parte teórica, para que se tenga certeza de que el estudiante está utilizando conceptos matemáticos sobre un determinado tema y ya no un empleo técnico de propiedades o procedimientos.

TERCERA: A los investigadores que desean fortalecer este trabajo de investigación, se les sugiere involucrar un plano interpretativo adicional donde se observe durante la sesión de aprendizaje la evolución de la comprensión del significado matemático que se vaya a transmitir en los agentes investigados.

CUARTA: A los docentes, del programa MFCI de la Universidad Nacional del Altiplano Puno, se les sugiere implementar en el Programa curricular el curso exclusivamente de relaciones y funciones, para así de esa forma fortalecer los conocimientos de los estudiantes sobre el tema mencionado.

QUINTA: A los estudiantes del programa MFCI de la Universidad Nacional del Altiplano Puno, se les sugiere realizar trabajos de interpretación en el momento del proceso de enseñanza aprendizaje, para que puedan comprender los significados matemáticos sobre los temas que vayan a trabajar en sus respectivas asignaturas.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alayo, F. (1990). El lenguaje de las funciones y gráficas. Zerbitzua, País vasco. Universidad del país vasco.

Bayares, M. E. (2008). La Comprensión desde el marco de la Hermenéutica y su aproximación en la Filosofía de D. Davidson. Instituto de profesores ARTIGAS, 8(14), 145-152.

Boyer, c. (1969). Historia de las matemáticas. Madrid: Alianza editorial.

Carvajal, J. A. (2006). Matemática IV Relaciones y Funciones. (págs. 1-72). México: McGraw-Hill.

Castro Mora, O. R. (2018). Comprension del Concepto de fracción y de sus significados de los estudiantes del segundo grado de secundaria en la evaluación CENSAL del 2015 y 2016. Lima: Universidad Cesar Vallejo.

Collette, J P. (1986). Historia de las Matemáticas II. Medellín: Siglo XXI.

Davison, D. (1980). The Social Character of Meaning. In Truth and Other Enigmas. Harvard University Press.

Del Rio, J. (1996). Lugares geométricos: Las Cónicas. Madrid: Síntesis.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1/2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Eisenhardt, K. M. (1989). Construyendo teorías de estudios de casos de investigación, Academy of Management Review, 14 (4).5 32-550.

Espinoza, E. (2012). Análisis matemático. Lima, Perú. Edukperu

Gallardo, J., y Gonzales, J. L. (2006). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. PNA, 1(1), 21-31.

Gallardo, J., Gonzales, J. L., y Quispe, W. (2008). Rastros de comprensión en la acción matemática: La admisión hermenéutica de un modelo operativo para la interpretación en matemática. Sociedad española de investigación en educación matemática.

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. Educación Matemática, 25(2), 61-88.

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2019). El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 22(1). doi: https://doi.org/10.12802/relime.19.2214

Gallardo J., y Quintanilla, V. A. (2018). Presencia del círculo hermenéutico de la comprensión en la interpretación matemática de los alumnos. Acta latinoamericana de matemática educativa, 31(1), 23-31.

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2016). El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 30(55), 625-648. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a16

Godino, J. D. (2017). Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática. 1-15.

Gonzales, J. L., Ortiz, A. L., y Gallardo, J. (2014). Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los sistemas de numeración. Repositorio institucional Universidad de Málaga.

Gomez, P. (2000). Una Comprensión de la Comprensión en Matemáticas. Una Empresa Docente, 1-8.

Guadalupe , C., León , J., Rodriguez, J., & Vargas, S. (2017). *Estado de la Eduación En Perú*. Lima: FORGE.

Hernandez Sampieri, R., Fernandez Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la Investigación. México: McGRAW-HILL/INTERAMERICA EDITORES S.A.

Jimenez, R. (2011). MATEMAICAS IV Funciones. México: Pearson Educación.

Kline, M. (1999) El pensamiento Matemático en la antigüedad a nuestros días. I y II. Madrid: Alianza editorial.

Lacasta, E., y Pascual, J. R. (l998). Las funciones en los gráficos cartesianos. Madrid, España. Síntesis.

Llerena Recoba, A. V. (2017). *Comprensión de contenidos matemáticos y su relacion con la resolucion de problemas.* Lima: Universidad De San Martin de Porres.

Mankiewicz, R (2001). Historia de las matemáticas. Editorial Paidós.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirire y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(3), 221-278.

Mesa, Y. M., & Villa-ochoa, J. A. (2008). Reflexión histórica, epistemológica y didáctica del concepto de función cuadrática. Acta Latinoamericana de Matemática educativa, 922-930.

Michéle, A. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática. *Educación Matemática*, 5-28.

Montes Sosa, G. (2013). Entender, Comprender, Interpretar. Enseñanza e Investigación en Psicología, 191-201.

Newton, I. (1687/1982) Principios Matemáticos de la filosofía natural. Traducción. Madrid: Editora Nacional.

Pirie, S., & kieren, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understating. For The Learning of Mathematics, 9, 3, 7-11.

Puertas Castaño, M. L. (1991). Elementos. Madrid: Gredos.

Ramos, E. E. (2012). Análisis Matemático I. En E. E. Ramos, Análisis Matemático I (págs. 1-766). Perú: edukperú.

Romero, J. G. (2004). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación del número natural (Tesis de doctorado). Universidad de Málaga, España.

Ruiz, L. (1998). La noción de función: análisis epistemológico y didáctico, Jaén: Universidad de Jaén.

ANEXOS

A1: Operacionalización de variables

Categorías de análisis o ejes	Unidades de análisis	Sub unidades de análisis	valorización
Comprensión de los significados matemáticos	Plano semiótico	Interpretación dirigida al texto	1. Conocimiento primitivo 2. Creación de la imagen 3. Comprensión de la imagen 4. Observación de la propiedad 5. Formalización 6. Observación 7. Estructuración 8. Invención
		Identificar entre todo lo observado y registrado de la actividad matemática los rastros de comprensión	
		Delimitar entre todo lo observado y registrado de la actividad matemática los rastros de comprensión	
	Plano Fenómeno-epistemológico	Exteriorización de los usos del conocimiento matemático	
		Caracterización de los usos del conocimiento matemático	
	Plano dialógico	La explicación de la intención del estudiante a través de sus acciones matemáticas	
		La apropiación por parte del agente interprete de los usos intencionales identificados	

A.2: PRUEBA ESCRITA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
PROGRAMA MATEMÁTICA, COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA

FUNCIONES CUADRÁTICAS			
APELLIDOS Y NOMBRES:		**SEMESTRE:**	
PROGRAMA DE ESTUDIOS:		**FECHA:**	

Estimado estudiante, le pedimos resolver los siguientes problemas, el propósito es recoger información sobre los niveles de comprensión de la función cuadrática.

Recomendaciones:

- Desarrollar la explicación de cada procedimiento que se realizará al momento de resolver los problemas.
- Indicar las propiedades utilizadas o los conocimientos teóricos que se utilizan.
- Desarrollar los problemas con letra legible.
- Desarrollar los procedimientos auxiliares en la misma hoja ya sea las multiplicaciones, divisiones, sumas, restas entre otras operaciones, no usar hoja adicional.

1. En la siguiente función cuadrática:
   a) investiga si los valores dados de "*y*" *pertenecen* al rango de la función
   b) ¿Cuál es el dominio de la función cuadrática?

$$y = x^2 + 2x - 8 \qquad \text{Para } y = 0;\ y = -10.$$

2. Determina el valor máximo o mínimo de la función cuadrática
$$f\,(x) = 4x - x^2.$$

3. Bosquejar la gráfica de la siguiente función cuadrática:

$y = x^2 - x - 6.$

4. Un profesor de matemáticas asesora a un comerciante para determinar un modelo matemático que le proporcione la utilidad $U(x)$ en dólares generada por las ventas de x artículos por semana, y diseña la siguiente fórmula:

$$U(x) = 30x - \frac{1}{5}x^2$$

a) ¿Cuántos artículos debe vender en una semana para obtener la máxima ganancia?

b) ¿Cuántos artículos debe vender para tener una utilidad de 1,000 dólares?

A. 3: REGISTRO ESCRITO DE LOS CINCO ESTUDIANTES

https://drive.google.com/drive/folders/1bOhh9Gw3ur2_kx4nf3ItQTICWrYHyDgp?usp=sharing