



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS



TEOREMA DE GAUSS BONNET LOCAL Y UNA APLICACIÓN

TESIS

PRESENTADA POR:

Bach. WILLIAM GUTIERREZ CCARI

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO – PERÚ

2022



DEDICATORIA

Éste trabajo es dedicado a Dios, y a mi familia por su apoyo incondicional.

William Gutierrez Ccari



AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero expresar mi agradecimiento a Dios por la vida y su providencia respecto a éste trabajo de investigación; seguidamente a las siguientes personas que contribuyeron positivamente en el desarrollo de éste trabajo de investigación, a mi Asesor de Tesis, Lic. Jesús Roberto Ticona Parisaca, Profesor de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno, por su tiempo, paciencia, sugerencias y recomendaciones brindadas; al Mg. Felipe Clímaco Ccolque Taipe, Profesor de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno, por sus recomendaciones y apoyo incondicional; al Dr. Efraín Cruz Mullisaca, Director de la Carrera de Matemática de la Universidad Mayor de San Andrés, Bolivia, por su recibimiento en la Carrera de Matemática y por su apoyo brindándome las facilidades para poder acceder a la biblioteca y sala de cómputo de la Carrera en mención; al Dr. Víctor Hugo Patty Yujra, Profesor de la Universidad Mayor de San Andrés, Bolivia, por aclarar mis dudas respecto a la revisión de literatura y por facilitarme bibliografía de estudio; a la Dra. Patricia Hilario Tacuri, Profesora de la Universidad Estatal de Maringa, Brasil, por animarme a seguir avanzando, y a mis Jurados de Tesis por sus aportes positivos y recomendaciones brindadas. Finalmente, agradezco también a todas aquellas personas que no están en estas líneas, pero que los llevo en el recuerdo porque me ayudaron de una u otra manera para poder culminar éste trabajo de investigación. Que Dios les bendiga a todos.

William Gutierrez Ccari



ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA

AGRADECIMIENTOS

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

RESUMEN 10

ABSTRACT..... 11

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 OBJETIVO GENERAL 15

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS 15

CAPITULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 ANTECEDENTES 16

2.2 MARCO TEÓRICO 18

2.2.1 Curvas parametrizadas diferenciables 18

2.2.2 Curvas regulares 19

2.2.3 Longitud de una curva 20

2.2.4 Longitud de arco 20

2.2.5 Curvas cerradas..... 21

2.2.6 Curvas simples..... 21

2.2.7 Curva regular a trozos..... 22

2.2.8 Reparametrización de curvas 24

2.2.9 Reparametrización de una curva por la longitud de arco 28

2.2.10 Curvatura de una curva..... 31

2.2.11 Superficies regulares..... 33



2.2.12 Curva diferenciable en una superficie regular	43
2.2.13 Vector tangente a una superficie regular	43
2.2.14 Plano tangente a una superficie regular	44
2.2.15 Campos vectoriales en \mathbb{R}^n	45
2.2.16 Campo diferenciable de vectores normales unitarios a una superficie regular	45
2.2.17 Formas cuadráticas	48
2.2.18 Primera forma fundamental	50
2.2.19 Parametrización ortogonal	53
2.2.20 Área de una región en una superficie regular	55
2.2.21 Orientación de superficies regulares	60
2.2.22 Aplicación de Gauss	65
2.2.23 Segunda forma fundamental	68
2.2.24 Curvatura Gaussiana de una superficie regular	68
2.2.25 Coeficientes de la segunda forma fundamental	69
2.2.26 Curvatura Gaussiana en términos de los coeficientes de la 1FF y 2FF	73
2.2.27 Isometría de superficies regulares	77
2.2.28 Isometría local	80
2.2.29 Símbolos de Christoffel	83
2.2.30 Fórmula de Gauss y teorema Egregium de Gauss	87
2.2.31 Campo vectorial tangente a una superficie regular	95
2.2.32 Campo vectorial tangente a lo largo de una curva en una superficie regular	96
2.2.33 Derivada covariante	97
2.2.34 Geodésicas en superficies regulares y curvatura geodésica	100
2.2.35 Curva cerrada, simple y regular a trozos sobre una superficie regular	107
2.2.36 Teorema del índice de rotación	107
2.2.37 Teorema de Green	108



2.2.38 Región simple en una superficie regular	112
2.2.39 Curva orientada positivamente en una superficie regular	112
2.2.40 Integral de una función sobre una región de la superficie	113

CAPITULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 MATERIALES	115
3.1.1 Materiales de gabinete	115
3.1.2 Materiales de escritorio	115
3.1.3 Software utilizados	115
3.2 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	115
3.2.1 Tipo de Investigación	115
3.2.2 Métodos	115
3.2.3 Técnica	116
3.2.4 Estrategia	116

CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 TEOREMA DE GAUSS BONNET LOCAL	117
4.2 APLICACIÓN DEL TEOREMA DE GAUSS BONNET LOCAL	123
V. CONCLUSIONES	132
VI. RECOMENDACIONES	133
VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	134

TEMA: Geometría Diferencial.

ÁREA: Matemática.

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Pura.

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 23 de mayo del 2022.



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Primera versión de Gauss para triángulos geodésicos.....	13
Figura 2. Triángulo geodésico en la esfera unitaria.....	14
Figura 3. Triángulo geodésico en la pseudoesfera.....	15
Figura 4. Un cuadrado orientado en sentido antihorario.....	23
Figura 5. Diagrama de reparametrización de curvas en \mathbb{R}^3	24
Figura 6. Diagrama de reparametrización de la circunferencia unitaria	26
Figura 7. Elección de la recta L como la función ϕ	27
Figura 8. Diagrama de la definición de superficie regular	34
Figura 9. Autointersección de una superficie	35
Figura 10. Picos en una superficie.....	36
Figura 11. La diferencial dX_q de una parametrización X en $q = (u_0, v_0) \in U$	38
Figura 12. Seis parametrizaciones que cubren completamente la esfera unitaria.....	43
Figura 13. Plano tangente al paraboloides S en $p_0 \in S$	48
Figura 14. La pseudoesfera	55
Figura 15. Curvas coordenadas ortogonales en la esfera	55
Figura 16. Región acotada R en una superficie regular S	57
Figura 17. Área de la esfera $S: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, considerando la región Q_ϵ	60
Figura 18. Diagrama de la definición de orientación de superficies regulares.....	62
Figura 19. Un campo diferenciable de vectores normales unitarios sobre la esfera	63



Figura 20. No se puede definir un campo diferenciable de vectores normales unitarios..	64
Figura 21. Una parametrización de la banda de Möbius	65
Figura 22. Aplicación de Gauss	65
Figura 23. La catenoide y el helicoide son localmente isométricos	82
Figura 24. El campo $\alpha'(t)$ de los vectores tangentes a lo largo de una curva α	97
Figura 25. La derivada covariante	98
Figura 26. Orientación de la curva $C: x^2 + y^2 = 9$	111
Figura 27. Curva orientada positivamente en una superficie regular.....	113
Figura 28. Una interpretación geométrica del TGBL	118
Figura 29. Teorema de Gauss Bonnet Local para un triángulo geodésico en S^2	124
Figura 30. Un polígono sobre la esfera unitaria S^2	126



ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

1FF	: Primera Forma Fundamental
2FF	: Segunda Forma Fundamental
CRA	: Curva Regular a Trozos
CG	: Curvatura Gaussiana
SO	: Superficie Orientable
SR	: Superficie Regular
TGBL	: Teorema de Gauss Bonnet Local



RESUMEN

En una ponencia de la 7ma. Escuela de Matemática de América Latina y el Caribe realizado en la Universidad Mayor de San Andrés del país de Bolivia, se desarrolló el curso de Introducción a la Teoría de Superficies en el Espacio Euclidiano, por el Prof. Dr. Tito Mejía, de la Universidad Federal Fluminense – Brasil, que hablo sobre Superficies en el Espacio Euclidiano y enunció el Teorema de Gauss Bonnet Local, lo cual me motivó para poder seguir investigando y presentar el presente trabajo de investigación. Por otro lado, por su importancia y al ver que en el curso Geometría Diferencial de pregrado no se logra llegar a desarrollar el teorema mencionado; en este trabajo de investigación se desarrolla una demostración clara y original del Teorema de Gauss Bonnet Local y además se presenta una aplicación de dicho teorema.

Palabras claves: Curva regular a trozos, superficie orientable, parametrización ortogonal, curvatura Gaussiana y curvatura geodésica.



ABSTRACT

In a presentation of the 7th. School of Mathematics of Latin America and the Caribbean held at the Major University of San Andres in the country of Bolivia, the Introduction to the Theory of Surfaces in Euclidean Space course was developed by Prof. Dr. Tito Mejía, from the Fluminense Federal University – Brazil, which I talk about Surfaces in Euclidean Space and enunciated the Local Gauss Bonnet Theorem, which motivated me to continue researching and present this research work. On the other hand, due to its importance and seeing that in the undergraduate Differential Geometry course it is not possible to develop the aforementioned theorem; In this research work, a clear and original demonstration of the Gauss Bonnet Local Theorem is developed and an application of said theorem is also presented.

Key words: Regular piecewise curve, oriented surface, orthogonal parametrization, Gaussian curvature and geodesic curvature.



CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

En la actualidad una de las áreas de investigación de la matemática pura y aplicada es la geometría diferencial. El Teorema de Gauss Bonnet Local es para muchos matemáticos e investigadores el teorema más hermoso y profundo de la geometría diferencial de curvas y superficies. El Teorema de Gauss Bonnet Local, tuvo su origen con un teorema de Gauss (así lo llamaban) publicado en 1827, que hablaba sobre triángulos que están en la superficie cuyos lados eran geodésicas (triángulos cuyos lados son arcos de geodésicas). Fue Bonnet quien en 1848 extendió esta idea al considerar triángulos o regiones en la superficie cuyos lados ya no eran geodésicas, por eso se bautizó como, Teorema de Gauss Bonnet Local. Se denomina Local, ya que se trabajaba en una vecindad coordenada. Posteriormente, fue el mismo Bonnet que generalizó este hecho, es decir, ya no consideró una vecindad coordenada, sino toda la superficie y entonces apareció en la fórmula la característica de Euler, un invariante topológico de la superficie.

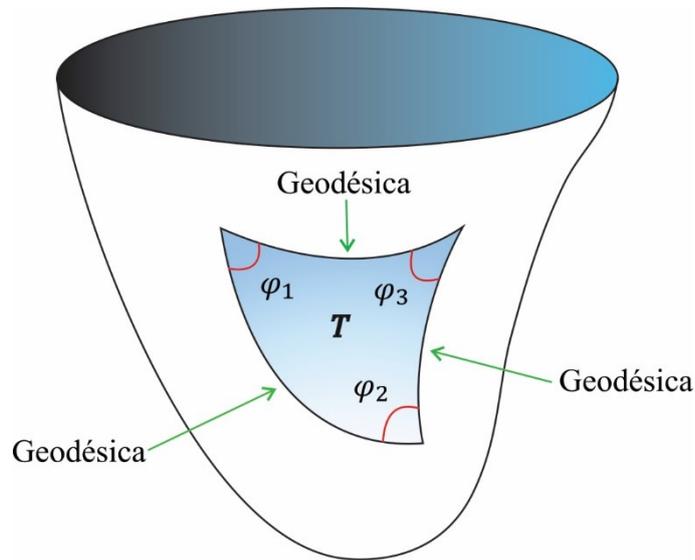
En general, Gauss afirma que el exceso con respecto a π de la suma de los ángulos interiores φ_1, φ_2 y φ_3 de un triángulo geodésico T es igual a la integral extendida a T de la curvatura Gaussiana K , es decir,

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \iint_T K d\sigma.$$

Vea la Figura 1.

Figura 1.

Primera versión de Gauss para triángulos geodésicos.



Por ejemplo, si la curvatura Gaussiana es $K = 0$, se obtiene,

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i = \pi,$$

esto es,

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi.$$

Lo cual constituye una extensión a superficies con curvatura cero del Teorema de Thales.

También, sobre la esfera unitaria que tiene curvatura Gaussiana $K = 1$, se obtiene,

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \text{área}(T),$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi + \text{área}(T),$$

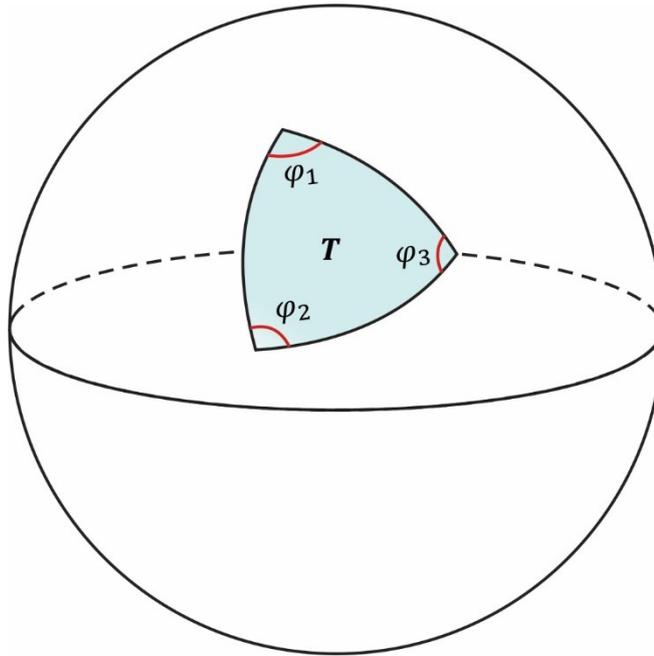
es decir,

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 > \pi.$$

Vea la Figura 2.

Figura 2.

Triángulo geodésico en la esfera unitaria.



Así, sobre la esfera unitaria, la suma de ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico es mayor que π .

Análogamente, sobre la pseudoesfera que tiene curvatura Gaussiana $K = -1$, se obtiene,

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = -\text{área}(T),$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \text{área}(T) = \pi,$$

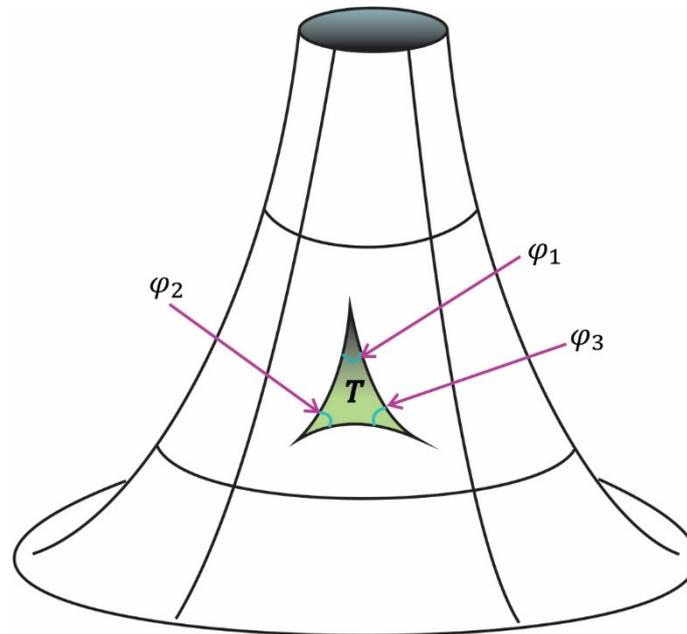
es decir,

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 < \pi.$$

Vea la Figura 3.

Figura 3.

Triángulo geodésico en la pseudoesfera.



Así, sobre la pseudoesfera, la suma de ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico es menor que π .

1.1 OBJETIVO GENERAL

- Entender y ampliar la demostración del Teorema de Gauss Bonnet Local y encontrar una aplicación.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Demostrar en forma clara y original el Teorema de Gauss Bonnet Local.
- Encontrar una aplicación al Teorema de Gauss Bonnet Local.



CAPITULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 ANTECEDENTES

NUNES, Bruna (2010 - Brasil) En su monografía en portugués, titulado “GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE SUPERFICIES Y EL TEOREMA DE GAUSS BONNET”, trabajo presentado en la Universidad Federal de Santa Catarina, que explica conceptos y definiciones como Funciones Diferenciables, Plano Tangente, Diferencial de una Aplicación, Curvatura Gaussiana y Curvatura Geodésica, desarrollando la teoría de Geometría Diferencial de Superficies de manera precisa. Se estudiará de manera exhaustiva cada concepto y definición para entender la demostración del Teorema de Gauss Bonnet Local.

DÍAZ MORALES, Lorena (2015 - España) En su trabajo de fin de grado, titulado “EL TEOREMA DE GAUSS BONNET Y SUS APLICACIONES”, trabajo de fin de grado presentado en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de la Laguna. Este trabajo desarrolla conceptos como Primera y Segunda Forma Fundamental de una Superficie Regular, Curvas Geodésicas y Transporte Paralelo. Se estudiará y analizará estas definiciones y conceptos, las cuales servirán de ayuda para ampliar la comprensión de la demostración del Teorema de Gauss Bonnet Local.

HALPER, Aaron (2008 - EE. UU.) En su artículo titulado “A PROOF OF THE GAUSS BONNET THEOREM”, realizado en la Universidad de Chicago, proporciona un contenido como Superficies Regulares, Orientación de Superficies, Aplicación Normal de Gauss, Geodésicas y el Teorema de Gauss Bonnet Local. Se utilizará la teoría de éste artículo para entender mejor las definiciones y conceptos relacionados al problema



planteado, y así poder entender y ampliar la demostración del Teorema de Gauss Bonnet en su versión Local.

SANTAMARIA, Oscar, DAMIÁN, Leonardo, HUANCAS, Fernando y JULCA, Pedro (2008 - Perú). En su libro titulado “INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES”, realizado en la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Lambayeque, proporciona un contenido sobre Curvas en el Espacio \mathbb{R}^n , Superficies Regulares en \mathbb{R}^n , Geometría Extrínseca de Superficies y Geometría Intrínseca de Superficies; la cual nos servirá para poder demostrar en forma clara y original el Teorema de Gauss Bonnet Local.

RODRÍGUEZ, Wendy y VELÁSQUEZ, Erick (2015 – El Salvador) En su trabajo de fin de grado, titulado “EL TEOREMA LOCAL DE GAUSS BONNET”, realizado en la Universidad de El Salvador, proporciona un contenido sobre Superficies, Geometría Local de las Superficies y el Teorema de Gauss Bonnet Local, que nos servirá para dar una demostración clara y original del Teorema de Gauss Bonnet Local y presentar una aplicación de dicho Teorema.

2.2 MARCO TEÓRICO

2.2.1 Curvas parametrizadas diferenciables

Definición 1. Una curva parametrizada diferenciable es una aplicación diferenciable

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un intervalo abierto $I = (a, b)$ de la recta real \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 .

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 2)

Comentarios 1.

- i) La palabra diferenciable en la definición 1, significa que α es una aplicación o función que aplica a cada $t \in I$ un punto $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ de modo que las funciones coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son diferenciables.
- ii) Las funciones coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones reales de variable real, definidas en el intervalo abierto I .
- iii) La variable $t \in I$, se llama parámetro de la curva α .
- iv) Si escribimos $x'(t)$ la primera derivada de x en el punto $t \in I$ y usamos notaciones similares para las funciones y e z , el vector $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$ se llama vector tangente (o vector velocidad) de la curva α en t .
- v) El conjunto imagen $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ se llama traza de α .
- vi) Ciertos autores (como, Claudio Pita Ruiz) consideran a las curvas parametrizadas como caminos o trayectorias (es decir, funciones vectoriales continuas) y a la traza de un camino como curva.
- vii) En la definición 1, palabra intervalo se toma en sentido generalizado de manera que



no excluyamos $a = -\infty$ y $b = +\infty$.

viii) Intuitivamente podemos decir que la traza de α es como la carretera por donde

circula el punto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$.

ix) Las siguientes curvas parametrizadas:

Cicloide:

$$\alpha(t) = (a(t - \operatorname{sen} t), a(1 - \operatorname{cos} t)), a > 0, \text{ para todo } t \in [0, 2\pi].$$

Astroide:

$$\beta(t) = (\operatorname{cos}^3 t, \operatorname{sen}^3 t), \text{ para todo } t \in [0, 2\pi].$$

Son diferenciables, ya que existe su derivada para todo $t \in [0, 2\pi]$.

x) La diferenciabilidad de una curva parametrizada es una consecuencia de su regla de correspondencia y no necesariamente de su traza.

2.2.2 Curvas regulares

Definición 2. Una curva parametrizada diferenciable $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es llamada regular si

$\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 6)

Comentarios 2.

- i) En la definición 2, notar que $\alpha'(t) \neq 0$, 0 es el vector cero $\vec{0}$.
- ii) Llamaremos a cualquier punto $t \in I$ donde $\alpha'(t) = 0$, un punto singular de α .
- iii) Geométricamente una curva α es regular sí, para cada punto $t \in I$ existe una recta



tangente bien definida que contiene al vector tangente, es decir, la traza de α no debe tener picos.

2.2.3 Longitud de una curva

Definición 3. Sea $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^1 . La longitud de α está definida como,

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

(Marsden, Cálculo Vectorial, 1988, pág. 201)

Comentarios 3.

- i) En la definición 3, se dice que la curva α es de clase C^1 sí, es diferenciable y su derivada es continua en todo $t \in [a, b]$.
- ii) De la definición 3, en \mathbb{R}^3 se tiene que,

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

es la norma euclidiana del vector $\alpha'(t)$.

- iii) Del comentario i) se sabe que la derivada $\alpha'(t)$ es una función continua, esto implica que, $\|\alpha'(t)\|$ es continua. Así, la integral de la definición 3 siempre existe (es decir, funciones continuas son integrables).

2.2.4 Longitud de arco

Definición 4. Dado $t_0 \in I$, la longitud de arco de una curva parametrizada

regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, desde el punto t_0 , es por definición,



$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt,$$

donde,

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2},$$

es la longitud del vector $\alpha'(t)$.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 6)

2.2.5 Curvas cerradas

Definición 5. Sea la curva $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en el intervalo cerrado

$I = [a, b]$, si acontece que $\alpha(a) = \alpha(b)$, diremos que la curva α es cerrada.

(Pita Ruiz, Cálculo Vectorial, 1995, pág. 432)

Comentarios 4.

- i) De la definición 5, en \mathbb{R}^3 , diremos que el punto $\alpha(a) \in \mathbb{R}^3$ es el punto inicial de la curva, en tanto que $\alpha(b) \in \mathbb{R}^3$ es el punto final de él.
- ii) Geométricamente la traza de una curva cerrada puede tener autointersecciones.

2.2.6 Curvas simples

Definición 6. Si la curva $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva en I (es decir, $\forall t_1, t_2 \in I$,

$t_1 \neq t_2 \Rightarrow \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$), diremos que α es una curva simple.

(Pita Ruiz, Cálculo Vectorial, 1995, pág. 432)

Comentarios 5.

- i) Si se tiene que $\alpha(a) = \alpha(b)$ y α restringida al intervalo $[a, b)$ es inyectiva, entonces

se dice que α es una curva cerrada y simple.

ii) Geométricamente una curva es simple sí, su traza no tiene autointersecciones.

2.2.7 Curva regular a trozos

Definición 7. Una curva regular a trozos en \mathbb{R}^n es una función continua

$\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con una partición, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, tal que la restricción,

α_i , de α para cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ es una curva regular.

(Tapp, 2016, pág. 68)

Comentarios 6.

i) En la definición 7, se tiene que, para cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N - 1$

con $\alpha_j(t_{j+1}) = \alpha_{j+1}(t_{j+1})$, $0 \leq j \leq N - 2$ (es decir, existe una concatenación

entre las imágenes de la partición) es una curva regular.

Ejemplo 1. Determinar una parametrización de un cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$,

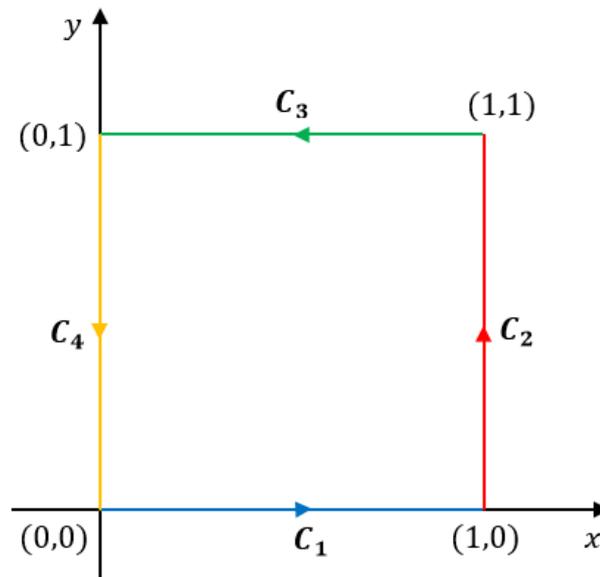
$(1,1)$ y $(0,1)$ en sentido antihorario.

Solución. Llamemos C_1 , C_2 , C_3 y C_4 los lados del cuadrado en sentido antihorario.

Vea la Figura 4.

Figura 4.

Un cuadrado orientado en sentido antihorario.



Luego, parametrizando los lados del cuadrado se tiene:

$$C_1: \alpha_1(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$C_2: \alpha_2(t) = \begin{cases} x = 1 \\ y = t - 1 \end{cases}, \quad 1 \leq t \leq 2;$$

$$C_3: \alpha_3(t) = \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 \end{cases}, \quad 2 \leq t \leq 3;$$

$$C_4: \alpha_4(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - t \end{cases}, \quad 3 \leq t \leq 4.$$

Por lo tanto, una parametrización para el cuadrado de la Figura 4 es:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) = (t, 0), & 0 \leq t \leq 1 \\ \alpha_2(t) = (1, t - 1), & 1 \leq t \leq 2 \\ \alpha_3(t) = (3 - t, 1), & 2 \leq t \leq 3 \\ \alpha_4(t) = (0, 4 - t), & 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

2.2.8 Reparametrización de curvas

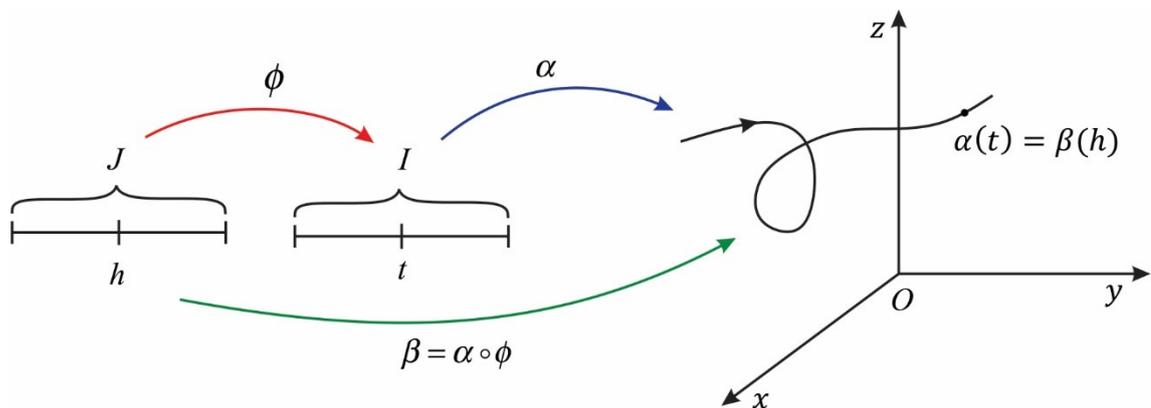
Definición 8. Sea $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular. Sea $\phi: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I$ una función de clase C^1 sobreyectiva que $\phi'(h) \neq 0 \forall h \in J$. Entonces la curva $\beta = \alpha \circ \phi: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama reparametrización de la curva α (el cual también resulta ser regular).

(Pita Ruiz, Cálculo Vectorial, 1995, pág. 461).

Vea la Figura 5

Figura 5.

Diagrama de reparametrización de curvas en \mathbb{R}^3 .



Comentarios 7.

- i) En la definición 8, se dice que la curva regular α es reparametrizable, si existe una función ϕ , tal que, ϕ sea de clase C^1 , sobreyectiva y $\phi'(h) \neq 0, \forall h \in J$.
- ii) En el comentario i), la condición de que la función ϕ sea sobreyectiva, significa que $\phi(J) = I$.
- iii) En el comentario i), la condición de que, $\phi'(h) \neq 0 \forall h \in J$ (siendo ϕ de clase C^1)



significa que, o $\phi'(h) > 0 \forall h \in J$, o $\phi'(h) < 0 \forall h \in J$.

Si se considera $I = [a, b]$ y $J = [c, d]$ se tiene:

a) Si $\phi'(h) > 0 \forall h \in J$, significa que ϕ es una función creciente en J , esto es, $\phi(c) = a$ y $\phi(d) = b$ y así el punto inicial de β coincide con el punto inicial de α y el punto final de β coincide con el punto final de α (es decir, $\beta(c) = (\alpha \circ \phi)(c) = \alpha(a)$ y $\beta(d) = (\alpha \circ \phi)(d) = \alpha(b)$). En este caso, entonces, el camino β recorre la traza descrita por α , en la misma dirección que lo hace α . Diremos que β es una reparametrización de α que conserva la orientación.

b) Si $\phi'(h) < 0 \forall h \in J$, significa que ϕ es una función decreciente en J , esto es, $\phi(c) = b$ y $\phi(d) = a$ y así el punto inicial de β coincide con el punto final de α y el punto final de β coincide con el punto inicial de α (es decir, $\beta(c) = (\alpha \circ \phi)(c) = \alpha(b)$ y $\beta(d) = (\alpha \circ \phi)(d) = \alpha(a)$). En este caso, entonces, el camino β recorre la traza descrita por α , en dirección contraria la de α . Diremos que β es una reparametrización de α que invierte la orientación.

iv) En \mathbb{R}^3 , se dice que la reparametrización de la curva $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra curva $\beta: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que tiene la misma traza de α .

v) La reparametrización de la curva α no es más que un cambio del parámetro t por h .

vi) De la definición 8, según la regla de la cadena tenemos,

$$\beta = \alpha \circ \phi,$$

$$\beta(h) = (\alpha \circ \phi)(h) \forall h \in J,$$

$$\beta(h) = \alpha(\phi(h)),$$

luego, derivando ambos miembros tenemos,

$$\beta'(h) = \phi'(h)\alpha'(\phi(h)),$$

en la última ecuación $\phi'(h)$ es la derivada de la función $\phi: J \rightarrow I$ en el punto

$h \in J$, por lo tanto, es un número real.

vii) Del comentario vi), decimos que la velocidad de β es $\phi'(h)$ veces la velocidad de α .

viii) Desde el punto de vista de la física, la reparametrización es útil para aumentar o

disminuir la velocidad de un proyectil que recorre una trayectoria. También sirve

para cambiar de sentido la traza de la curva.

Ejemplo 2. Sea la curva $\alpha: [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Hallar

la reparametrización β de α en el intervalo $[1, 2]$ y que recorra en sentido contrario a

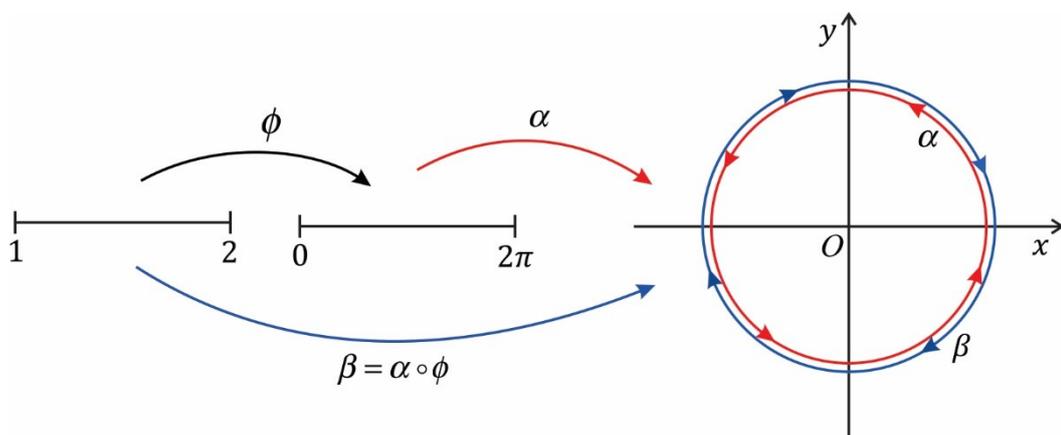
α .

Solución. Comenzamos haciendo el diagrama de la reparametrización $\beta = \alpha \circ \phi$ de

la circunferencia unitaria α . Vea la Figura 6.

Figura 6.

Diagrama de reparametrización de la circunferencia unitaria.



Enseguida, determinamos la función ϕ que tiene las siguientes condiciones:

De clase C^1 , sobreyectiva y $\phi'(h) \neq 0 \forall h \in [1, 2]$.

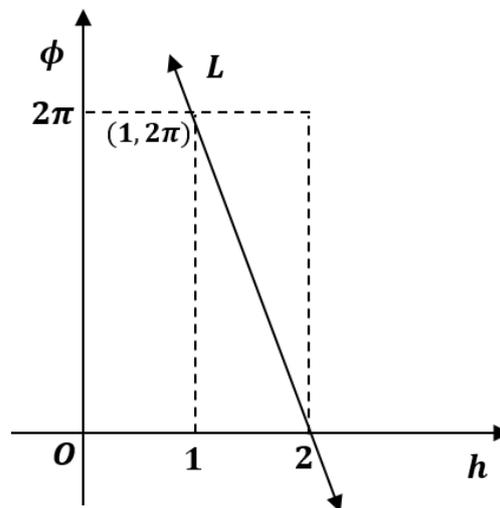
Además, como la curva β recorre en sentido contrario a la curva α , entonces ϕ debe ser decreciente para que invierta la orientación.

Se elige a la recta L como la función ϕ , que es la función más simple y conveniente.

Vea la Figura 7.

Figura 7.

Elección de la recta L como la función ϕ .



De la Figura 7, la pendiente de la recta L es,

$$m_L = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2\pi - 0}{1 - 2} = -2\pi.$$

Luego, se determina la ecuación de la recta L ,

$$m_L = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

$$-2\pi = \frac{\phi - 0}{h - 2},$$



$$-2\pi h + 4\pi = \phi,$$

es decir,

$$\phi(h) = 4\pi - 2\pi h.$$

Por otro lado,

$$\beta(h) = (\alpha \circ \phi)(h),$$

$$\beta(h) = \alpha(\phi(h)),$$

$$\beta(h) = (\cos(\phi(h)), \sin(\phi(h))),$$

por lo tanto, la reparametrización β de α es,

$$\beta(h) = (\cos(4\pi - 2\pi h), \sin(4\pi - 2\pi h)).$$

2.2.9 Reparametrización de una curva por la longitud de arco

En esta sección veremos la posibilidad de reparametrizar una curva $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

digamos que $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la reparametrización de α , de modo que la rapidez a

la que β recorre la traza de $\alpha =$ traza de β , sea constante e igual a la unidad. Es decir,

que $\|\beta'(t)\| = 1 \quad \forall t \in [a, b]$.

Se observa que en tal caso, la longitud de la curva β entre $t = a$ y $t = b$ es,

$$L(\beta) = \int_a^b \|\beta'(t)\| dt = \int_a^b 1 dt = b - a,$$

así que β será una reparametrización de α tal que la longitud de la traza que describe

β es igual al tiempo que emplea en recorrerla.



Comentarios 8.

i) Si se considera una curva regular $\alpha: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y se desea reparametrizar α de modo que la longitud de arco s sea el nuevo parámetro, esto se hace del siguiente modo:

$$[0, L(\alpha)] \xrightarrow{\phi} [a, b] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3,$$

$$s \rightarrow \phi(s) \rightarrow \alpha(\phi(s)) = (\alpha \circ \phi)(s) = \beta(s),$$

donde, $\beta(s)$ es la reparametrización de α por la longitud de arco s y $L(\alpha)$ es la longitud de α entre $t = a$ y $t = b$.

ii) Del comentario i) se dice que $\beta(s)$ es una reparametrización de α por la longitud de arco s , en el sentido de que la nueva variable independiente s de β es justamente la longitud de arco de la curva regular α entre t_0 y $t \in I$, es decir,

$$s = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

iii) Del comentario ii) la longitud de arco s es claramente una función de t , es decir,

$$s = s(t).$$

iv) En la práctica la reparametrización β por la longitud de arco de una curva regular

$\alpha: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ se obtiene haciendo los siguientes pasos:

1º) Determinar la longitud de arco s ,

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du, \forall t \in [a, b].$$



2^{do}) Sólo en el caso que sea posible despejar t en términos de s , es decir,

$$t = \phi(s).$$

3^{ro}) Determinar $L(\alpha)$ para construir el intervalo $[0, L(\alpha)]$.

4^{to}) Definir la función $\phi: [0, L(\alpha)] \rightarrow [a, b]$.

5^{to}) Determinar la reparametrización por la longitud de arco,

$$\beta(s) = (\alpha \circ \phi)(s).$$

Ejemplo 3. Sea la curva regular $\alpha: [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por,

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

Hallar la reparametrización por la longitud de arco de α .

Solución. Aplicando los cinco pasos se tiene:

1^{ro}) Se determina la longitud de arco,

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \|(-a \sin u, a \cos u, b)\| du, \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u + b^2} du, \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du, \\ &= \left[(\sqrt{a^2 + b^2}) u \right]_0^t, \\ s &= (\sqrt{a^2 + b^2}) t. \end{aligned}$$

2^{do}) De la última ecuación, vemos que sí es posible despejar t en términos de s , es

decir,



$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \phi(s).$$

3^{ro}) Se determina la longitud de la curva α ,

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|(-a \operatorname{sen} t, a \operatorname{cos} t, b)\| dt,$$

esto es,

$$L(\alpha) = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2},$$

así se tiene el intervalo, $[0, 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}]$.

4^{to}) Se define la función ϕ como,

$$\phi: [0, 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}] \rightarrow [0, 2\pi].$$

5^{to}) Finalmente se determina la reparametrización por la longitud de arco,

$$\beta(s) = (\alpha \circ \phi)(s),$$

$$\beta(s) = \alpha(\phi(s))$$

$$\beta(s) = \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

por lo tanto,

$$\beta(s) = \left(a \operatorname{cos}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

es la reparametrización por la longitud de arco de α .

2.2.10 Curvatura de una curva

Definición 9. Sea $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva dos veces diferenciable

parametrizado por la longitud de arco. Al número $k(s) = \|\alpha''(s)\|$ se le llama



curvatura de α en s .

(Pita Ruiz, Cálculo Vectorial, 1995, pág. 485)

Comentarios 9.

i) En la definición 9, decir que la curva α es dos veces diferenciable significa

que α es regular y que existe $\alpha''(s)$, $\forall s \in I$.

ii) Se usa la notación $T(s) = \alpha'(s)$ para designar el vector tangente unitario de α en

s . Con esta notación, la curvatura de α en s se ve como,

$$k(s) = \|T'(s)\|.$$

iii) La idea de curvatura de una curva es medir la rapidez con que la traza de la curva

se aleja de su recta tangente en un punto dado de ella.

Ejemplo 4. (La curvatura de una recta es cero). Una recta en \mathbb{R}^3 que pasa por el punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene a $v = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ por vector paralelo, se puede ver como la imagen de la curva $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por,

$$\beta(t) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c).$$

La reparametrización de β por la longitud de arco s , es la curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por,

$$\alpha(s) = (x_0, y_0, z_0) + \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c) = p + us,$$

donde, $u = \frac{v}{\|v\|}$.

Observe entonces que,



$$\alpha'(s) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\alpha''(s) = (0,0,0),$$

de modo que,

$$k(s) = \|\alpha''(s)\| = 0, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Es decir, la curvatura de la curva α en cualquier punto es 0.

Veamos ahora cómo podemos hacer los cálculos de la curvatura de una curva sin

pasar por la reparametrización por la longitud de arco.

Teorema 1. Sea $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva dos veces diferenciable y denotemos por,

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3},$$

la curvatura de α en $t \in I$.

(Pita Ruiz, Cálculo Vectorial, 1995, pág. 489)

Comentarios 10.

i) El teorema 1 es la fórmula que se buscaba, con la cual se podrá calcular la

curvatura de la curva α trabajando directamente con él.

ii) En el teorema 1, el símbolo \wedge es el producto vectorial de \mathbb{R}^3 .

2.2.11 Superficies regulares

Definición 10. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in S$,

existe una vecindad V en \mathbb{R}^3 y una aplicación $X: U \rightarrow V \cap S$ de un conjunto

abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

1. X es diferenciable.

Esto significa que si escribimos,

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas de todas las órdenes en U .

2. X es un homeomorfismo.

Esto significa que X es una aplicación biyectiva, continua y con inversa continua.

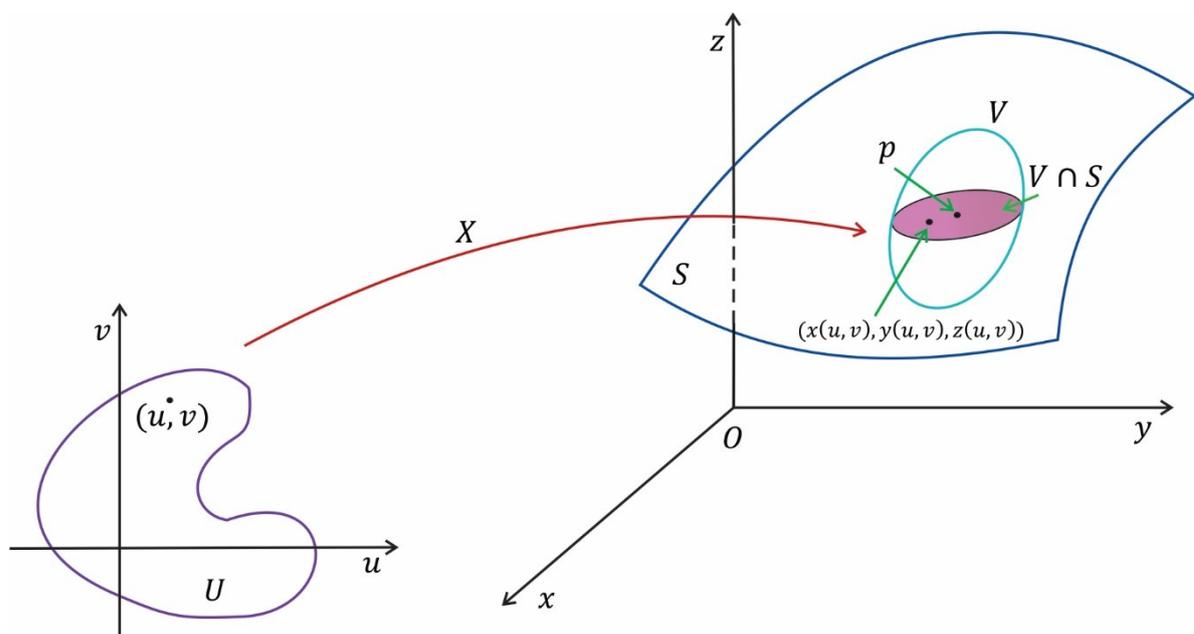
3. (Condición de regularidad) Para cada $q \in U$, la diferencial $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es uno a uno.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 54)

Vea la Figura 8.

Figura 8.

Diagrama de la definición de superficie regular.



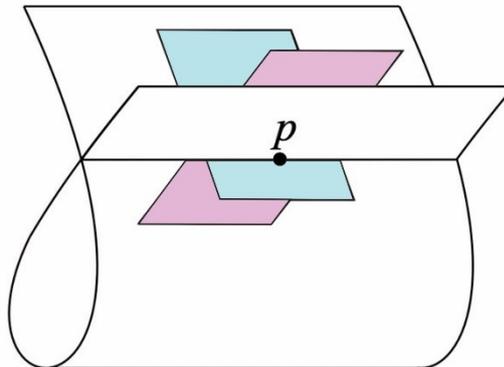
Comentarios 11.

- i) En la definición 10, la aplicación X es llamada una parametrización (o un sistema de coordenadas) en una vecindad de p .
- ii) En la definición 10, la vecindad (o entorno) V es un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 .
- iii) La vecindad $V \cap S$ de p en S es llamada una vecindad coordenada.
- iv) En la definición 10, la condición 1) es equivalente a decir que X es de clase C^∞ .
- v) En la definición 10, la condición 2) evita que el subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tenga autointersecciones.

Vea la Figura 9

Figura 9.

Autointersección de una superficie.

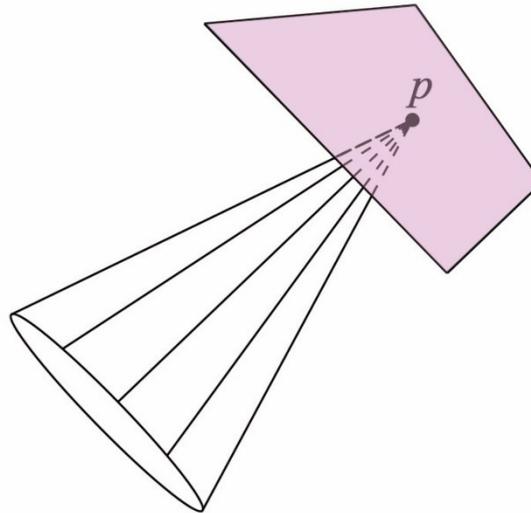


- vi) En la definición 10, la condición 3) permite excluir la posibilidad de existir picos en S y así garantiza la existencia de un plano tangente en todos los puntos de S .

Vea la Figura 10.

Figura 10.

Picos en una superficie.



vii) De la definición 10, en la condición 3) la notación dX_q se lee diferencial de X en

q o derivada de X en q , la cual por definición de derivada (de funciones vectoriales de variable vectorial) es una transformación lineal.

viii) De la definición 10, en la condición 3) vamos a calcular la matriz de la

transformación lineal dX_q en las bases canónicas $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ de \mathbb{R}^2 con coordenadas (u, v) y $\{f_1 = (1,0,0), f_2 = (0,1,0), f_3 = (0,0,1)\}$ de \mathbb{R}^3 con coordenadas (x, y, z) .

Sea $q = (u_0, v_0)$. El vector e_1 es tangente a la recta $u \rightarrow (u, v_0)$, cuya imagen a través de X es una curva en la superficie S ,

$$u \rightarrow X(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)),$$

a ésta curva imagen se le llama curva coordenada $v = v_0$.

El vector tangente de esta curva en $X(q)$ es el vector,



$$dX_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q) \right) = \frac{\partial X}{\partial u}(q).$$

Análogamente, El vector e_2 es tangente a la recta $v \rightarrow (u_0, v)$, cuya imagen a través de X es una curva en la superficie S ,

$$v \rightarrow X(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)),$$

a ésta curva imagen se le llama curva coordenada $u = u_0$.

El vector tangente de esta curva en $X(q)$ es el vector,

$$dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(q), \frac{\partial y}{\partial v}(q), \frac{\partial z}{\partial v}(q) \right) = \frac{\partial X}{\partial v}(q).$$

Por lo tanto, la matriz de la transformación lineal dX_q en las bases canónicas de

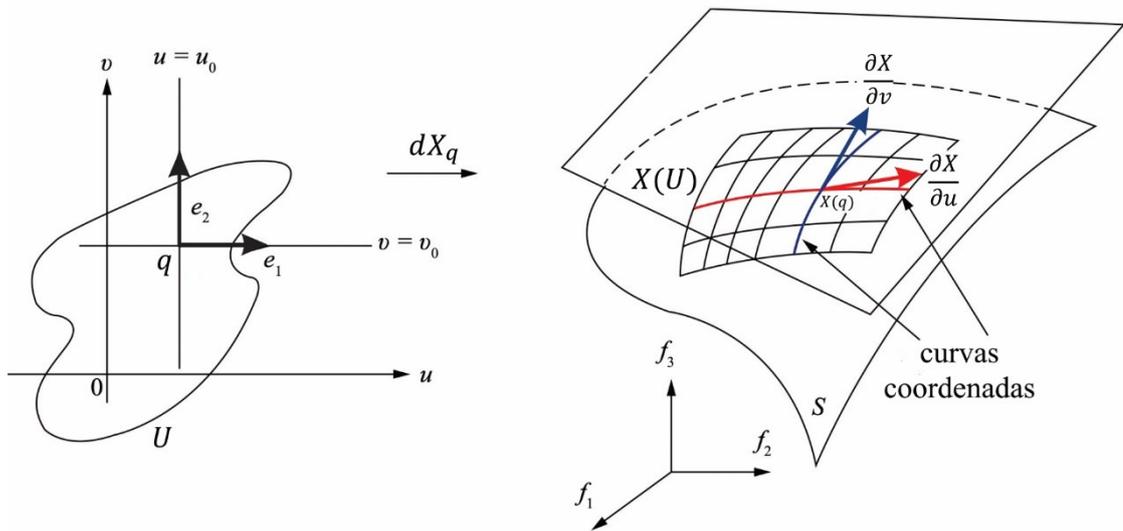
\mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 es,

$$dX_q \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u}(q) & \frac{\partial X}{\partial v}(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{bmatrix}.$$

Vea la Figura 11.

Figura 11.

La diferencial dX_q de una parametrización X en $q = (u_0, v_0) \in U$.



ix) En el comentario viii) la matriz de la transformación lineal dX_q es equivalente a

la matriz Jacobiana de X en q , es decir,

$$dX_q \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u}(q) & \frac{\partial X}{\partial v}(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{bmatrix} \equiv JX(q).$$

x) De la definición 10, la condición 3) equivale a las siguientes afirmaciones:

a) Los vectores

$$\frac{\partial X}{\partial u}(q) \text{ y } \frac{\partial X}{\partial v}(q)$$

son linealmente independientes.

b) El vector

$$\frac{\partial X}{\partial u}(q) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(q)$$



es no nulo sobre $q \in U$.

c) La matriz de dX_q posee un menor de orden 2 no nulo, es decir, uno de los

determinantes Jacobianos (o simplemente jacobianos):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{vmatrix},$$

es diferente de cero en $q \in U$.

xi) Hemos definido una superficie regular como un subconjunto S de \mathbb{R}^3 y no como

una aplicación. Esto se logra cubriendo a S con las imágenes o trazas $X(U)$ de

parametrizaciones X que satisfacen las condiciones 1), 2) y 3).

Ejemplo 5. Demostrar que la esfera unitaria,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

es una superficie regular.

Demostración.

I) Si tomamos un punto $p = (u, v, z) \in S^2$ con $z > 0$, entonces existen una vecindad

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z > 0\}$ de p y una aplicación $X_1: U \rightarrow V \cap S^2$ dada por



$X(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, para todo $(u, v) \in U$, definida en el abierto

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2: u^2 + v^2 < 1\}.$$

Enseguida se demuestran las siguientes condiciones:

1) X_1 es diferenciable, puesto que sus funciones coordenadas,

$$x(u, v) = u, \quad y(u, v) = v, \quad z(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2},$$

tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en U .

2) X_1 es un homeomorfismo, esto es:

a) X_1 es biyectiva, puesto que:

a1) X_1 es inyectiva.

Sean (u_1, v_1) y $(u_2, v_2) \in U$ tales que $X_1(u_1, v_1) = X_1(u_2, v_2)$,

entonces $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$.

De la hipótesis $X_1(u_1, v_1) = X_1(u_2, v_2)$ implica que,

$$(u_1, v_1, \sqrt{1 - u_1^2 - v_1^2}) = (u_2, v_2, \sqrt{1 - u_2^2 - v_2^2}),$$

luego por igualdad de vectores obtenemos,

$$(u_1, v_1) = (u_2, v_2).$$

a2) X_1 es sobreyectiva.

Para todo $(x, y, z) \in V \cap S^2$, $\exists (u, v) \in U$ tal que $X_1(u, v) = (x, y, z)$.

De la hipótesis, $X_1(u, v) = (x, y, z)$ implica que,

$$(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) = (x, y, z),$$

luego por igualdad de vectores obtenemos que existe,



$$(u, v) = (x, y).$$

b) X_1 es continua por la condición 1).

c) X_1^{-1} es continua.

Como X_1 es biyectiva, significa que X_1 tiene inversa, $X_1^{-1}: V \cap S^2 \rightarrow U$,

donde $X_1^{-1} = \pi \big|_{V \cap S^2}$ es la proyección ortogonal $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ restricto a

$V \cap S^2$ definida por $\pi(x, y, z) = (x, y)$, la cual es continua.

Por tanto X_1^{-1} es continua.

De a), b) y c) se concluye que X_1 es un homeomorfismo.

3) Para cada $q = (u, v) \in U$, $d(X_1)_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es uno a uno.

Esto es,

$$\frac{\partial X_1}{\partial u}(q) \wedge \frac{\partial X_1}{\partial v}(q) = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) \wedge \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right),$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial u}(q) \wedge \frac{\partial X_1}{\partial v}(q) = \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial X_1}{\partial u}(q) \wedge \frac{\partial X_1}{\partial v}(q) \neq (0, 0, 0)$$

De 1), 2) y 3) se llega a la conclusión de que X_1 es una parametrización en la

vecindad coordenada $V_1 \cap S^2 = X_1(U)$ de $p \in S^2$.

Enseguida cubriremos toda la esfera unitaria S^2 utilizando parametrizaciones

similares.



II) Si tomamos un punto $p = (u, v, z) \in S^2$ con $z < 0$, entonces existen una vecindad

$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$ de p y una aplicación $X_2: U \rightarrow V \cap S^2$ dada por

$X(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2})$, para todo $(u, v) \in U$, definida en el abierto

$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$.

Análogamente a I) se concluye que X_2 es una parametrización en la vecindad

coordenada $V_2 \cap S^2 = X_2(U)$ de $p \in S^2$.

Así con X_1 y X_2 tenemos cubiertos los hemisferios norte y sur

respectivamente, pero no los puntos del ecuador.

Para cubrir toda la esfera unitaria S^2 , consideremos las parametrizaciones:

$$X_3(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v),$$

$$X_4(u, v) = (u, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v),$$

que completan el cubrimiento de S^2 salvo dos puntos del ecuador que intersecan

al eje x .

Finalmente, con las dos parametrizaciones,

$$X_5(u, v) = (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v),$$

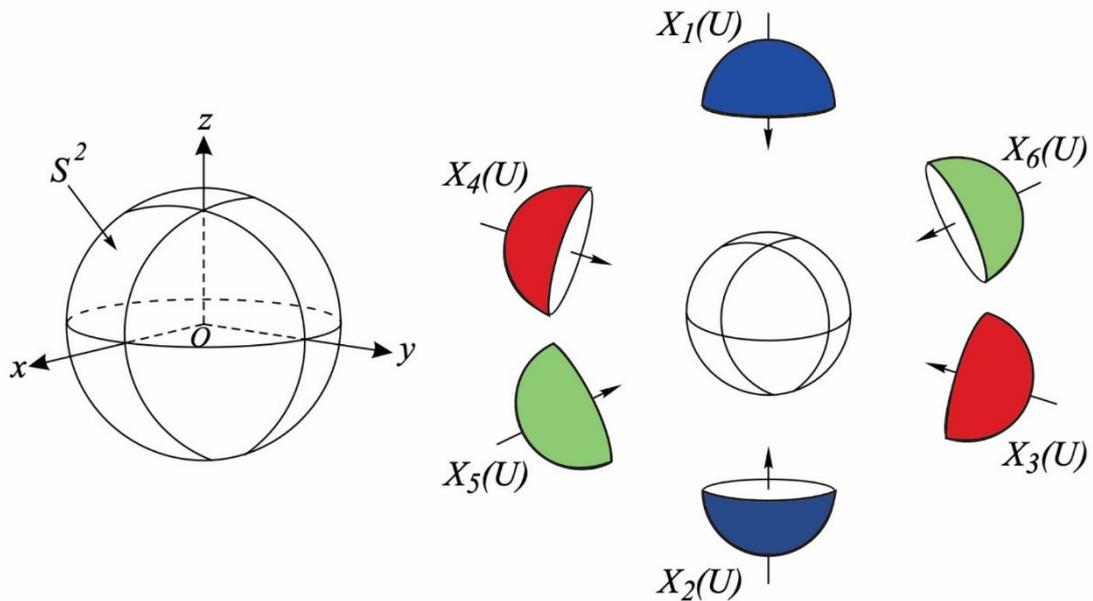
$$X_6(u, v) = (-\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v),$$

cubrimos toda la esfera unitaria S^2 .

Vea la Figura 12.

Figura 12.

Seis parametrizaciones que cubren completamente la esfera unitaria.



Por lo tanto, concluimos que S^2 es una superficie regular.

2.2.12 Curva diferenciable en una superficie regular

Definición 11. Una curva diferenciable en una superficie regular S es una aplicación diferenciable $\alpha: I \rightarrow S$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

(Hernández Cifre, 2010, pág. 79)

Comentarios 12.

i) Sea X una parametrización de una superficie regular S y α una curva diferenciable en S , entonces α en coordenadas se escribe como,

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)), \text{ para todo } t \in I.$$

2.2.13 Vector tangente a una superficie regular

Definición 12. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $p \in S$. Diremos que $w \in \mathbb{R}^3$



es un vector tangente a S en p , si existe una curva $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ diferenciable con

$$\alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = w.$$

(Hernández Cifre, 2010, pág. 79)

Comentarios 13.

i) En la definición 12, el hecho de tomar $t = 0$ no es restrictivo, se hace así por comodidad.

2.2.14 Plano tangente a una superficie regular

Definición 13. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $p \in S$. El plano tangente a S en p denotado por $T_p(S)$, es el conjunto de todos los vectores tangentes a S en p .

Así,

$$T_p(S) = \{w \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ diferenciable con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = w\}.$$

(Hernández Cifre, 2010, pág. 79)

Comentarios 14.

i) Dada una parametrización X de S en p , las derivadas parciales,

$$\frac{\partial X}{\partial u} \text{ y } \frac{\partial X}{\partial v}$$

forman una base $\left\{ \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\}$ del plano tangente $T_p(S)$ llamada base asociada a X .

ii) Algunas veces es conveniente escribir,

$$\frac{\partial X}{\partial u} = X_u \text{ y } \frac{\partial X}{\partial v} = X_v.$$

Donde, cada una de estas derivadas parciales son geoméricamente vectores



tangentes a la superficie regular S en el punto $p \in S$.

2.2.15 Campos vectoriales en \mathbb{R}^n

Definición 14. Un campo vectorial en \mathbb{R}^n es una función $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

que asigna a cada punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en su dominio U un vector

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)).$$

(Marsden, 1988, pág. 211)

Comentarios 15.

- i) De la definición 14, se dice que las funciones $F_i: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, son las funciones coordenadas del campo F y cada $F_i(x)$ es un número real.
- ii) Se dice que el campo vectorial $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $x_0 \in U$ si sus funciones coordenadas $F_i: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lo son.
- iii) De manera análoga a la definición 14, una función $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ un número $f(x) = k \in \mathbb{R}$, se llama campo escalar.

2.2.16 Campo diferenciable de vectores normales unitarios a una superficie regular

Definición 15. Sea S una superficie regular y $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización en $p \in S$. Definimos el campo diferenciable vectores normales unitarios

$N: X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ por la regla,



$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} (q),$$

para todo $q \in X(U)$.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 89)

Comentarios 16.

i) De la definición 15, un vector normal unitario a la superficie regular S ,

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} (q),$$

significa que, $N(q) \perp T_q(S)$ y $\|N(q)\| = 1$, para todo $q \in X(U)$.

ii) La ecuación del plano tangente a una superficie regular S en el punto $p_0 \in S$, se

calcula mediante la expresión,

$$T_{p_0}(S): \langle n, p - p_0 \rangle = 0,$$

donde, $n = X_u \wedge X_v$ es el vector normal a la superficie regular S y $p \in T_{p_0}(S)$.

Ejemplo 6. Determinar la ecuación del plano tangente al paraboloides circular

$S: z = x^2 + y^2$ en el punto $p_0 = (1, 2, 5) \in S$, cuya parametrización $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es

dada por,

$$X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2).$$

Solución. El punto (u, v) del plano uv se encuentra de la siguiente ecuación:

$$X(u, v) = (1, 2, 5),$$

$$(u, v, u^2 + v^2) = (1, 2, 5),$$

entonces,



$$(u, v) = (1, 2).$$

Luego, se determina las derivadas parciales de X ,

$$X_u(u, v) = (1, 0, 2u),$$

$$X_v(u, v) = (0, 1, 2v).$$

Enseguida, se evalúa las derivadas parciales en $(u, v) = (1, 2)$ se tiene,

$$X_u(u, v) = X_u(1, 2) = (1, 0, 2(1)) = (1, 0, 2),$$

$$X_v(u, v) = X_v(1, 2) = (0, 1, 2(2)) = (0, 1, 4).$$

Ahora, el vector normal al paraboloido circular S en el punto $(u, v) = (1, 2)$ es,

$$n = X_u(1, 2) \wedge X_v(1, 2),$$

$$n = (1, 0, 2) \wedge (0, 1, 4),$$

así que,

$$n = (-2, -4, 1).$$

Utilizando la expresión para determinar el plano tangente del paraboloido

circular S en el punto $p_0 = (1, 2, 5)$ se tiene:

$$T_{p_0}(S): \langle n, p - p_0 \rangle = 0, \text{ para todo } p \in T_{p_0}(S)$$

$$T_{p_0}(S): \langle (-2, -4, 1), (x, y, z) - (1, 2, 5) \rangle = 0$$

$$T_{p_0}(S): \langle (-2, -4, 1), (x - 1, y - 2, z - 5) \rangle = 0,$$

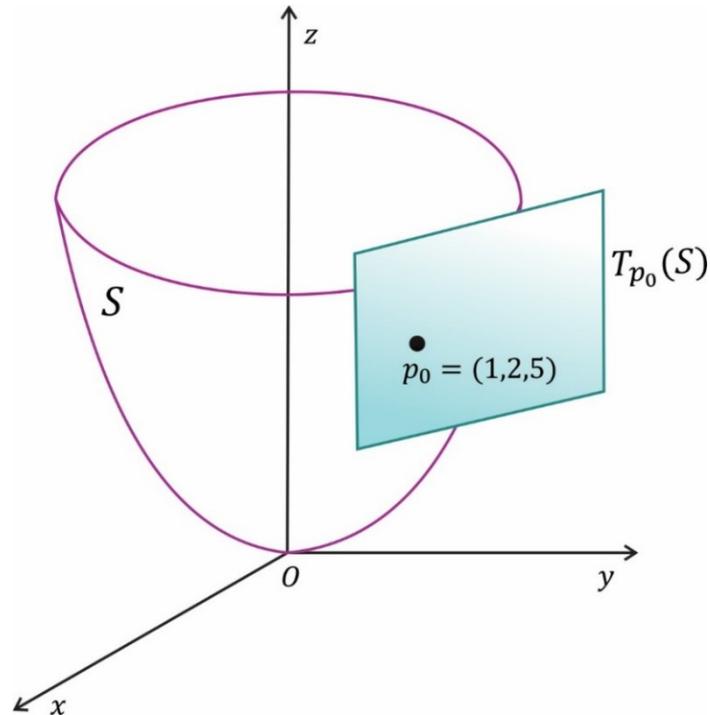
por lo tanto, el plano tangente al paraboloido circular S en p_0 es,

$$T_{p_0}(S): 2x + 4y - z = 5.$$

Vea la Figura 13

Figura 13.

Plano tangente al paraboloides S en $p_0 \in S$.



2.2.17 Formas cuadráticas

Una expresión de la forma,

$$ax^2 + by^2 + cxy,$$

se llama forma cuadrática en las variables x y y . De igual modo,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

es una forma cuadrática en las variables x , y y z .

En palabras más sencillas una forma cuadrática es una suma de términos, donde cada

término tiene grado dos. Por tanto, $x^2 - 2x^2 + 3xy$ es una forma cuadrática, pero

$x^2 + y^2 + x$, no lo es.



Las formas cuadráticas pueden representarse usando matrices del modo siguiente:

$$ax^2 + by^2 + cxy = [x \ y] \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

cada una de éstas expresiones matricialmente tiene la forma $x^T A x$, donde A es una matriz simétrica y x es una matriz columna. Esta observación nos conduce a la siguiente definición general.

Definición 16. Una forma cuadrática con n variables es una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$f(x) = x^T A x$$

donde A es una matriz simétrica de $n \times n$ y x está en \mathbb{R}^n . A se conoce como matriz asociada con f .

(Poole, 2011, pág. 426)

Comentarios 17.

i) En la definición 16, en el segundo miembro $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ es la representación

matricial del vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n y $x^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ es la matriz traspuesta de x .

ii) En la definición 16, A es una matriz simétrica, es decir, $A = A^T$ y $a_{ij} = a_{ji}$.



2.2.18 Primera forma fundamental

Definición 17. Sea S una superficie regular y $T_p(S)$ el plano tangente a S en el punto

$p \in S$. La forma cuadrática $I_p: T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por,

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0, \forall w \in T_p(S),$$

es llamada la primera forma fundamental S en p .

(Nunes, 2010, pág. 33)

Comentarios 18.

i) Podemos abreviar la primera forma fundamental como $1FF$.

ii) La $1FF$ es básicamente el producto interno usual de \mathbb{R}^3 restringido a los vectores tangentes a S .

iii) Recordemos las propiedades del producto interno usual de \mathbb{R}^3 .

Para $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrarios, se tiene:

a) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

b) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

c) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

d) Si $x \neq 0$ entonces $\langle x, x \rangle > 0$.

iv) Vamos a expresar la $1FF$ en la base $\{X_u, X_v\}$ asociada a la parametrización

$X(u, v)$ de S en p .

Como un vector tangente $w \in T_p(S)$ es el vector tangente a una curva,

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ diferenciable con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = w,$$

además, sabemos que α en coordenadas se escribe como,

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)), \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p, \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p, \end{aligned}$$

aplicando las propiedades del producto interno se tiene:

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle_p u'v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2, \\ I_p(w) &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

donde,

$$E = E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle_p,$$

$$F = F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle_p \text{ y}$$

$$G = G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle_p,$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental de S en la base $\{X_u, X_v\}$,

para $q = (u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \in U$ y $X(q) = p$.

v) En el comentario iv) moviendo p en la vecindad coordenada inducida por X ,

obtenemos funciones $E(u, v)$, $F(u, v)$ y $G(u, v)$ que son diferenciables en esa

vecindad coordenada, esto es:

$$E, F, G: X(U) \subset S \rightarrow \mathbb{R},$$

son funciones diferenciables.



vi) Del comentario iv) la primera forma fundamental,

$$I_p(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2,$$

en términos matriciales se escribe como:

$$I_p(w) = [u' \quad v'] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}.$$

vii) Dado $w = \alpha'(0) = (u'(0), v'(0)) = (u', v')$ y haciendo $u'(0) = a$ y $v'(0) = b$,

donde $a, b \in \mathbb{R}$, se obtiene otra expresión para la 1FF de S ,

$$I_p(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2,$$

para $w = aX_u + bX_v \in T_p(S)$.

viii) El elemento de longitud de arco ds de S , se escribe como,

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

que significa lo siguiente. Si $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ es una curva sobre S y

$s = s(t)$ es su longitud de arco, entonces,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

ix) En lo que sigue, y salvo que queramos precisar con exactitud el punto sobre el

que estamos trabajando, escribiremos simplemente $\langle ., . \rangle$ en lugar de $\langle ., . \rangle_p$.

Ejemplo 7. Una parametrización para un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por el punto p_0 y que contiene los vectores ortonormales w_1 y w_2 es,

$$X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2.$$

Determinar los coeficientes de la primera forma fundamental del plano P .



Solución. Para esto se determina,

$$X_u = w_1 \text{ y } X_v = w_2.$$

Luego, los coeficientes de la 1FF del plano P son:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \|w_1\|^2 = 1,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0 \text{ y}$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \|w_2\|^2 = 1.$$

2.2.19 Parametrización ortogonal

Definición 18. Sea S una superficie regular. Una parametrización X de S en

$p \in S$ es ortogonal si $F(u, v) = 0$.

(Halper, 2008, pág. 3)

Ejemplo 8. Sea una parametrización de la esfera de radio r , dada por,

$$X(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u),$$

donde, $r > 0$, $u \in (0, \pi)$ y $v \in (0, 2\pi)$.

Demostrar que X es una parametrización ortogonal.

Demostración:

Para esto se determina,

$$X_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u),$$

$$X_v = (-r \sin u \sin v, r \sin u \cos v, 0),$$

luego,

$$F = \langle X_u, X_v \rangle,$$

$$= -r^2 \cos u \cos v \sin u \sin v + r^2 \cos u \sin v \sin u \cos v + 0,$$



así que,

$$F = 0.$$

Por lo tanto, X es una parametrización es ortogonal de la esfera de radio r .

Comentarios 19.

i) Las parametrizaciones de las siguientes superficies:

Cilindro:

$$X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v),$$

donde $r > 0$, $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in \mathbb{R}$.

Helicoide:

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au),$$

donde $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in \mathbb{R}$.

Catenoide:

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av),$$

donde $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in \mathbb{R}$.

Toro:

$$X(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

donde $R, r > 0$, $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in (0, 2\pi)$.

Pseudoesfera:

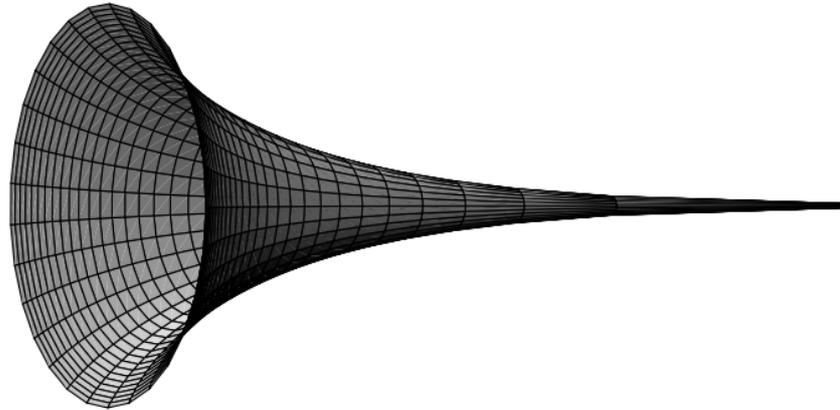
$$X(u, v) = \left(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v + \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right),$$

donde $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Vea la Figura 14.

Figura 14.

La pseudoesfera.

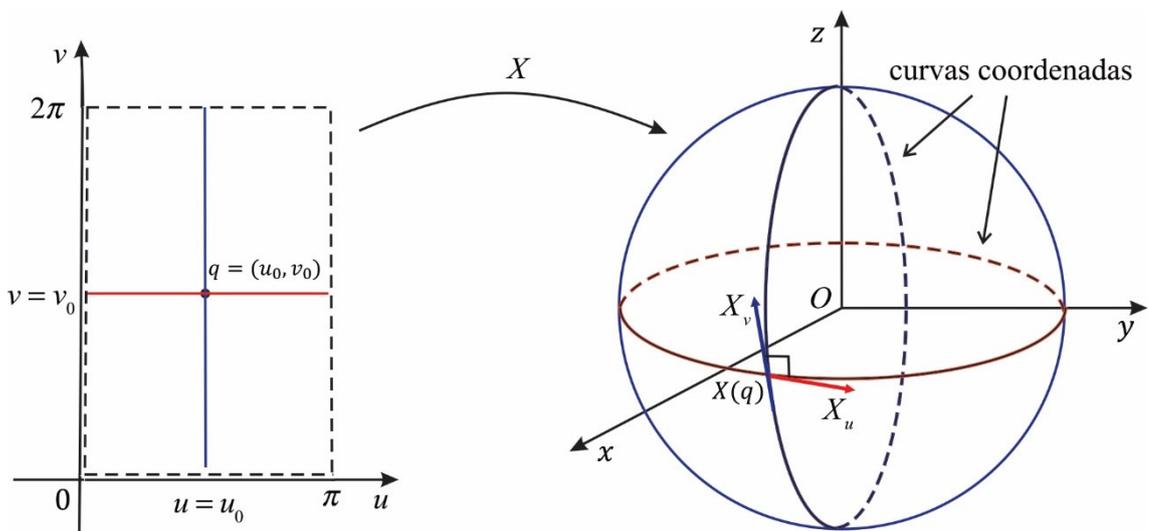


Son ortogonales, puesto que $F = 0$.

- ii) Geométricamente una parametrización es ortogonal si sus curvas coordenadas son ortogonales (es decir, forman un ángulo de 90°). Vea la Figura 15.

Figura 15.

Curvas coordenadas ortogonales en la esfera.



2.2.20 Área de una región en una superficie regular

Definición 19. Sea $R \subset S$ una región acotada de una superficie regular S , contenida



en una vecindad coordenada de una parametrización $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$.

El número positivo

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \wedge X_v\| \, dudv,$$

con $Q = X^{-1}(R)$ es llamada el área de R .

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 100)

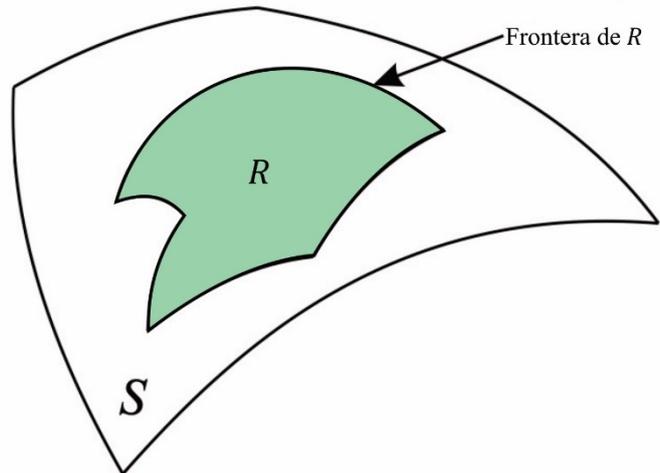
Comentarios 20.

- i)** Un dominio regular de S es un conjunto abierto y conexo tal que, su frontera es la imagen de un círculo mediante un homeomorfismo diferenciable que es regular (es decir, su diferencial no es nula) excepto en un número finito de puntos.
- ii)** Una región de S es la unión de un dominio regular con su frontera.
- iii)** En la definición 19, una región acotada de S es una región contenida en una bola de \mathbb{R}^3 .

Vea la Figura 16.

Figura 16.

Región acotada R en una superficie regular S .



iv) En la definición 19, la expresión $\|X_u \wedge X_v\|$ es el área del paralelogramo generado por los vectores X_u y X_v (es decir, el área del paralelogramo de lados X_u y X_v).

v) Recordemos la siguiente identidad del producto vectorial en \mathbb{R}^3 llamado identidad de Lagrange, que dice:

Para dos vectores $a, b \in \mathbb{R}^3$, se tiene que,

$$\|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2.$$

vi) Utilizando la identidad de Lagrange y los coeficientes de la 1FF, podemos escribir el integrando del $A(R)$ de la siguiente forma,

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2,$$

$$\|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{\|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2},$$

$$\|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Por lo tanto,



$$A(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

vii) La expresión $EG - F^2$ es estrictamente positivo, es decir, $EG - F^2 > 0$.

Ejemplo 9. Una parametrización X de la esfera $S: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es dada por,

$$X(u, v) = (r \operatorname{sen} u \cos v, r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, r \cos u),$$

donde, $u \in (0, \pi)$ y $v \in (0, 2\pi)$.

Calcular el área de la esfera S .

Solución. La parametrización X de S cubre toda la esfera S menos un semi-meridiano.

Derivando $X(u, v)$ respecto a u y v , se tiene:

$$X_u = (r \cos u \cos v, r, -r \operatorname{sen} u),$$

$$X_v = (-r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u \cos v, 0).$$

Luego, determinemos los coeficientes de la 1FF,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2 \cos^2 u \cos^2 v + r^2 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 v + r^2 \operatorname{sen}^2 u,$$

$$E = r^2.$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -r^2 \cos u \cos v \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v + r^2 \cos u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u \cos v,$$

$$F = 0.$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = r^2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v + r^2 \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v,$$

$$G = r^2 \operatorname{sen}^2 u.$$

Considerando la región R_ϵ obtenida como la imagen mediante X de,



$$Q_\epsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2: 0 + \epsilon \leq u \leq \pi - \epsilon \text{ y } 0 + \epsilon \leq v \leq 2\pi - \epsilon\}$$

donde, $\epsilon > 0$ es un número real pequeño.

Así,

$$\begin{aligned} A(R_\epsilon) &= \iint_{Q_\epsilon} \sqrt{EG - F^2} \, dudv, \\ &= \iint_{Q_\epsilon} \sqrt{(r^2)(r^2 \operatorname{sen}^2 u) - 0^2} \, dudv, \\ &= \iint_{Q_\epsilon} r^2 \operatorname{sen} u \, dudv, \\ &= \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \int_{0+\epsilon}^{\pi-\epsilon} r^2 \operatorname{sen} u \, dudv, \\ &= r^2 \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \left(\int_{0+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \operatorname{sen} u \, du \right) dv, \\ &= r^2 \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} (-\cos u \Big|_{0+\epsilon}^{\pi-\epsilon}) \, dv, \\ &= r^2 \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} (-\cos(\pi - \epsilon) + \cos(0 + \epsilon)) \, dv, \\ &= r^2 (-\cos(\pi - \epsilon) + \cos \epsilon) \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} dv, \\ &= r^2 (-\cos(\pi - \epsilon) + \cos \epsilon) ((2\pi - \epsilon) - (0 + \epsilon)), \end{aligned}$$

$$A(R_\epsilon) = r^2 (2\pi - 2\epsilon) (-\cos(\pi - \epsilon) + \cos \epsilon).$$

Haciendo que $\epsilon \rightarrow 0$ en la expresión de encima, se obtiene al área de la esfera S :

$$A(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(R_\epsilon),$$

$$A(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} r^2(2\pi - 2\epsilon)(-\cos(\pi - \epsilon) + \cos \epsilon),$$

$$A(S) = r^2(2\pi - 2(0))(-\cos(\pi - 0) + \cos 0),$$

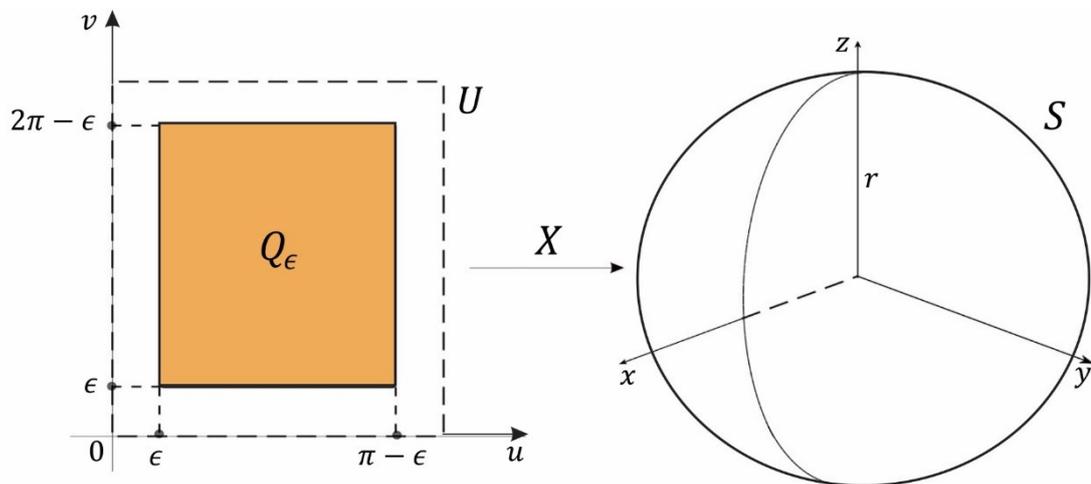
por lo tanto,

$$A(S) = 4\pi r^2.$$

Vea la Figura 17.

Figura 17.

Área de la esfera $S: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, considerando la región Q_ϵ .



2.2.21 Orientación de superficies regulares

Definición 20. Una superficie regular S es llamada orientable si es posible cubrirla

con una familia de vecindades coordinadas de manera que si un punto $p \in S$

pertenece a dos vecindades de esta familia, entonces el cambio de coordenadas tiene

jacobiano positivo en p . La elección de tal familia es llamada una orientación de S ,

y S , en este caso, es llamada orientable. Si tal elección no es posible, la superficie es

llamada no orientable.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 106)

Comentarios 21.

i) Según la definición 20, sean $X: U \rightarrow X(U)$ y $\bar{X}: \bar{U} \rightarrow \bar{X}(\bar{U})$ dos parametrizaciones de S en p .

Las bases $\{X_u(q), X_v(q)\}$ con $X(q) = p$ y $\{\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}), \bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q})\}$ con $\bar{X}(\bar{q}) = p$,

determinan orientaciones del plano tangente $T_p(S)$.

Sea $W = X(U) \cap \bar{X}(\bar{U})$ y $h = X^{-1} \circ \bar{X}: \bar{X}^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ dada por,

$$h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), \text{ con } h(\bar{q}) = q$$

es el cambio de coordenadas.

Se sabe que, $\bar{X}(\bar{q}) = X(q) = X(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$,

así:

$$\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}) = X_u(q) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) + X_v(q) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q}),$$

$$\bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q}) = X_u(q) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) + X_v(q) \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q}).$$

Entonces la matriz de cambio de base es,

$$dh_{\bar{q}} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) \end{bmatrix},$$

que es el matriz Jacobiana de h en \bar{q} .

Por tanto, las bases $\{X_u(q), X_v(q)\}$ y $\{\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}), \bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q})\}$ determinan la misma

orientación en el plano tangente $T_p(S)$ si, y solo si,

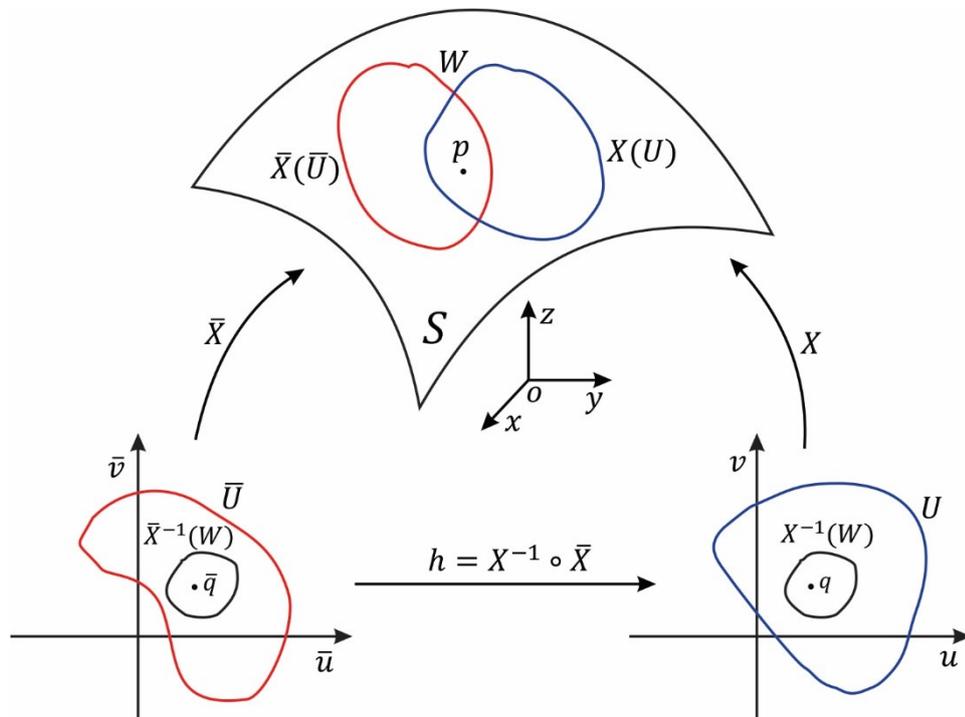
$$\det(dh_{\bar{q}}) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{q}) > 0,$$

(es decir, el determinante de la matriz de cambio de base o simplemente jacobiano es positivo).

Vea la Figura 17.

Figura 18.

Diagrama de la definición de orientación de superficies regulares.



ii) Según la definición 20, una familia de vecindades coordenadas equivale a decir

que, existe una familia de parametrizaciones $\{X_\alpha: U_\alpha \rightarrow X(U_\alpha)/\alpha \in A\}$ de S , tal

que:

(1) $S = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha(U_\alpha)$;

(2) Si $W_{\alpha\beta} = X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, la aplicación de cambio de coordenadas

$$h_{\alpha\beta} = X_\alpha^{-1} \circ X_\beta: X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \rightarrow X_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta}),$$

tiene Jacobiano positivo en todo punto $q \in X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})$.

- iii) De manera intuitiva una superficie regular S en \mathbb{R}^3 se dirá orientable si es posible decidir sin ambigüedad cuales son los lados de la superficie regular. Por ejemplo, pintando cada uno de los lados con un color distinto. La herramienta con la que se puede hacer precisa esta idea general de orientabilidad es por medio de vectores normales a la superficie regular. La misión de ellos es que apunten en la dirección de uno de los lados de la superficie regular.

Proposición 1. Una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es orientable si y sólo si existe un campo diferenciable de vectores normales unitarios $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre S .

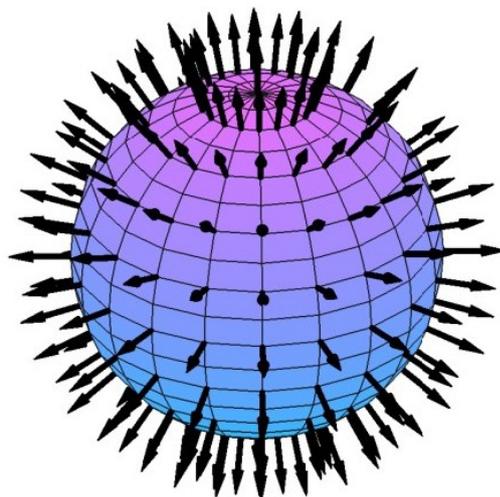
(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 107)

Comentarios 22.

- i) En la proposición 1, la elección de tal campo N se llama orientación de S .
- ii) La esfera es una superficie orientable. Vea la Figura 19.

Figura 19.

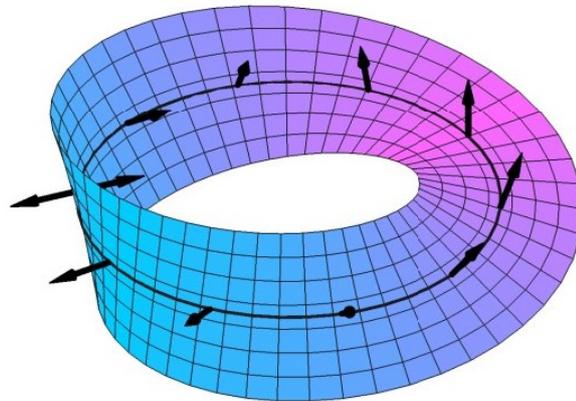
Un campo diferenciable de vectores normales unitarios sobre la esfera.



iii) La banda de Möbius es una superficie no orientable. Vea la Figura 20.

Figura 20.

No se puede definir un campo diferenciable de vectores normales unitarios.



iii) **Construcción de la banda de Möbius.** Consideremos una circunferencia C dado

por, $x^2 + y^2 = r^2$ en el plano xy y el segmento abierto AB en el plano yz dado

por $|z| < 1$ y con centro en el punto $c = (0, r, 0)$.

La banda de Möbius se obtiene cuando movemos el centro c de AB a lo largo de la circunferencia C y girando AB alrededor del centro c en el plano cz , de manera que cuando el centro c recorra un ángulo de u , AB haya rotado un ángulo de $u/2$.

Cuando el centro c completa un recorrido alrededor de la circunferencia C , AB retorna a su posición inicial, pero con sus extremos invertidos.

Una parametrización para la banda de Möbius está dada por:

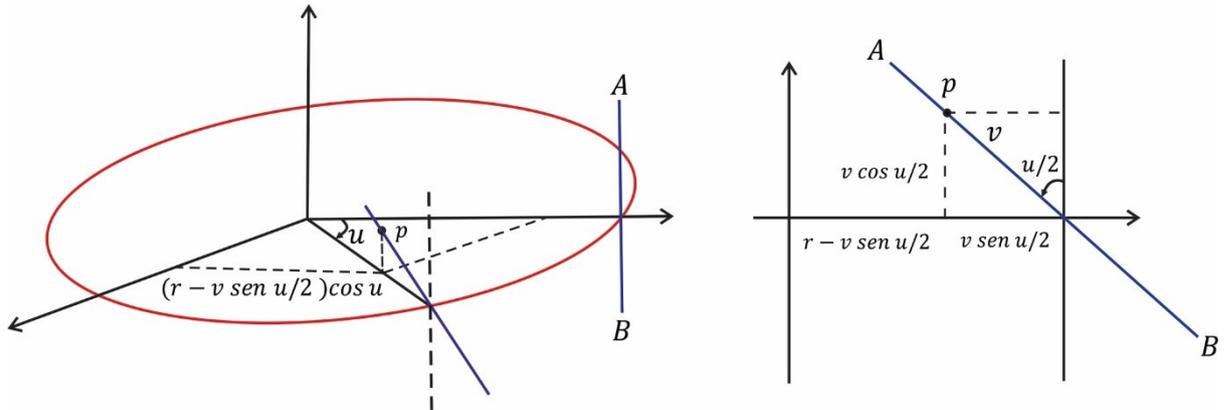
$$X(u, v) = \left(\left(r - v \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \operatorname{sen} u, \left(r - v \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right).$$

donde $r > 0$, $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in (-1, 1)$.

Vea la Figura 21.

Figura 21.

Una parametrización de la banda de Möbius.



2.2.22 Aplicación de Gauss

Definición 21. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con una orientación N . La aplicación

$N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma sus valores en la esfera unitaria,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

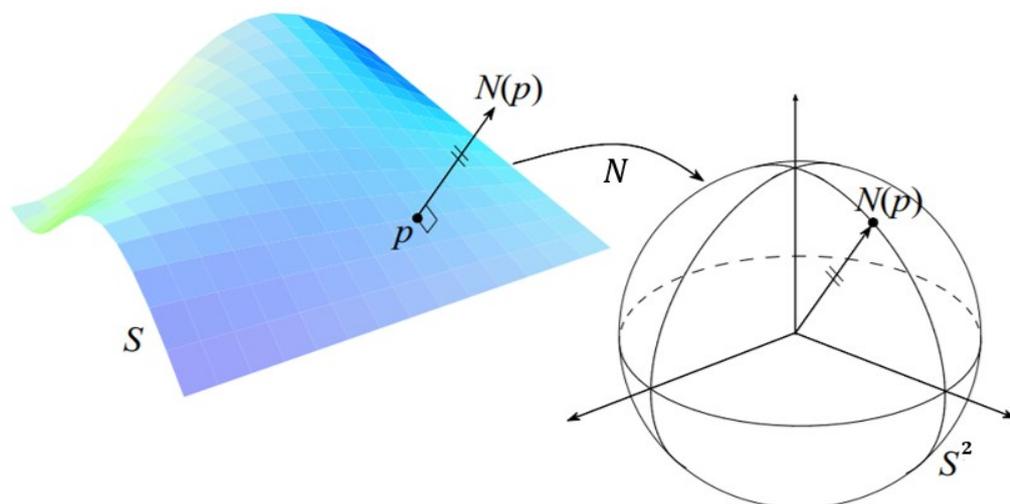
La aplicación $N: S \rightarrow S^2$, así definida, se llama la aplicación de Gauss de S .

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 138).

Vea la Figura 22.

Figura 22.

La aplicación de Gauss.





Comentarios 23.

i) En la definición 21, como el campo N es diferenciable, entonces la aplicación de

Gauss N también es diferenciable, es decir, la diferencial dN_p de N en $p \in S$ es

una aplicación (o transformación) lineal definido por:

$$dN_p: T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(S^2).$$

ii) Del comentario i) se sabe que $T_p(S)$ y $T_{N(p)}(S^2)$ son planos paralelos, ya que

por la aplicación de Gauss, tienen el mismo vector normal $N(p)$, además:

$$T_p(S) = T_{N(p)}(S^2).$$

La siguiente proposición contiene un hecho importante concerniente a dN_p .

Proposición 2. La diferencial $dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal y autoadjunta.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 142)

Demostración:

1) Por definición dN_p es una aplicación (o transformación) lineal.

2) Sólo basta verificar que, dN_p es una aplicación autoadjunta, esto es:

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle,$$

para una base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p(S)$.

Sea $X(u, v)$ una parametrización de S en $p \in S$ y $\{X_u, X_v\}$ una base de $T_p(S)$

asociada a X .



Si $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ es una curva diferenciable en S con $\alpha(0) = p$ y

$\alpha'(0) = w$, se tiene:

$$dN_p(\alpha'(0)) = dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)),$$

$$dN_p(\alpha'(0)) = dN_p(X_u)u'(0) + dN_p(X_v)v'(0),$$

luego denotemos,

$$dN_p(X_u) = N_u \text{ y } dN_p(X_v) = N_v. \quad (1)$$

Como, $\{X_u, X_v\}$ es una base de $T_p(S)$ para probar que dN_p es autoadjunta en

realidad basta demostrar que,

$$\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle. \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) se tiene,

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle.$$

Para ver esto, tomemos las derivadas parciales de:

$$\langle N, X_u \rangle = 0 \text{ y } \langle N, X_v \rangle = 0,$$

con respecto a v y u respectivamente,

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle. \quad (3)$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle. \quad (4)$$

Igualando (4) con (3) se tiene,

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle,$$

además, como el producto escalar es simétrico, se obtiene:



$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle.$$

Así,

$$\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle,$$

para una base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p(S)$.

Por lo tanto, la diferencial dN_p de la aplicación de Gauss, es una aplicación lineal y autoadjunta.

El hecho de que $dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ sea una aplicación lineal autoadjunta nos permite asociar a dN_p una forma cuadrática Q en $T_p(S)$, dada por:

$$Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle, \text{ para todo } v \in T_p(S).$$

Por razones que resultarán claras en breve, vamos a utilizar la forma cuadrática $-Q$ en la siguiente definición.

2.2.23 Segunda forma fundamental

Definición 22. La forma cuadrática $\Pi_p: T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Pi_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, es llamada la segunda forma fundamental de S en p .

(Delgado, 2017, pág. 171)

Comentarios 24.

i) Podemos abreviar la segunda forma fundamental como $2FF$.

2.2.24 Curvatura Gaussiana de una superficie regular

Definición 23. Sean $p \in S$ y $dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ la diferencial de la aplicación de Gauss en p . El determinante de dN_p es llamada la curvatura Gaussiana K de S en



p . Así,

$$K(p) = \det(dN_p).$$

(Delgado, 2017, pág. 179)

Comentarios 25.

i) En la definición 23, la curvatura Gaussiana K de una superficie regular S en un

punto $p \in S$, es una función $K: S \rightarrow \mathbb{R}$.

2.2.25 Coeficientes de la segunda forma fundamental

Sea X una parametrización de una superficie regular S en un punto $p \in S$ y sea

$\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ una curva diferenciable en S con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$.

Luego,

$$\alpha' = X_u u' + X_v v', \quad (5)$$

$$dN_p(\alpha') = dN_p(X_u u' + X_v v'),$$

como la derivada es una aplicación lineal, tenemos,

$$dN_p(\alpha') = dN_p(X_u)u' + dN_p(X_v)v'. \quad (6)$$

De (1) y (5) obtenemos,

$$dN_p(\alpha') = N_u u' + N_v v'. \quad (7)$$

Sabemos que N_u y $N_v \in T_p(S)$, ya que,

$$\|N\| = 1 \implies \|N\|^2 = 1^2,$$

$$\langle N, N \rangle = 1,$$

derivando respecto a u , la ecuación de arriba, tenemos,



$$\langle N_u, N \rangle + \langle N, N_u \rangle = 0,$$

ahora por la simetría de producto escalar,

$$\langle N_u, N \rangle + \langle N_u, N \rangle = 0,$$

$$2\langle N_u, N \rangle = 0 \Rightarrow \langle N_u, N \rangle = 0,$$

es decir,

$$N_u \perp N.$$

De manera análoga, derivando $\langle N, N \rangle = 1$ con respecto a v , obtenemos,

$$N_v \perp N.$$

Por lo tanto, N_u y $N_v \in T_p(S)$.

Ahora podemos escribir los vectores N_u y N_v en la base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p(S)$, así,

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v,$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v.$$

Las dos ecuaciones de arriba son llamadas las ecuaciones de Weingarten.

Reemplazando las ecuaciones de Weingarten en (6) tenemos,

$$dN_p(\alpha') = (a_{11}X_u + a_{21}X_v)u' + (a_{12}X_u + a_{22}X_v)v',$$

$$dN_p(\alpha') = a_{11}X_u u' + a_{21}X_v u' + a_{12}X_u v' + a_{22}X_v v',$$

$$dN_p(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v. \quad (8)$$

Escribiendo (8) matricialmente, se tiene,

$$dN_p \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}u' + a_{12}v' \\ a_{21}u' + a_{22}v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix},$$

donde, $[dN_p]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es la matriz de dN_p en la base $B = \{X_u, X_v\}$ de

$T_p(S)$.

Por simplicidad escribimos así,

$$dN_p \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, la expresión de la 2FF en la base $\{X_u, X_v\}$ es,

$$\Pi_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle, \text{ para todo } v \in T_p(S),$$

$$\Pi_p(\alpha') = -\langle dN_p(\alpha'), \alpha' \rangle, \quad (9)$$

De (5) y (7) en (9) tenemos,

$$\Pi_p(\alpha') = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle,$$

como el producto interno es bilineal, tenemos,

$$\Pi_p(\alpha') = -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - \langle N_u, X_v \rangle u' v' - \langle N_v, X_u \rangle v' u' - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2. \quad (10)$$

Además, sabemos que,

$$\langle N, X_u \rangle = 0 \text{ y } \langle N, X_v \rangle = 0, \quad (11)$$

derivando ambas igualdades de (11) respecto a u y v obtenemos,

$$\langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0 \implies \langle N, X_{uu} \rangle = -\langle N_u, X_u \rangle, \quad (12)$$

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \implies \langle N, X_{uv} \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle, \quad (13)$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 \implies \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle, \quad (14)$$

$$\langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0 \implies \langle N, X_{vv} \rangle = -\langle N_v, X_v \rangle. \quad (15)$$

Sabemos que X es de clase C^2 y por el teorema de Schwarz, tenemos que,

$$X_{uv} = X_{vu}. \quad (16)$$

Luego, reemplazando (16) en (13) se tiene,

$$\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle,$$

esto es,

$$\langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle. \quad (17)$$

Reemplazando (17) en (10) obtenemos,

$$\Pi_p(\alpha') = -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - 2\langle N_u, X_v \rangle u'v' - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2,$$

enseguida denotando,

$$e = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle,$$

$$f = -\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle,$$

$$g = -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle,$$

tenemos,

$$\Pi_p(\alpha') = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2,$$

por lo tanto, la 2FF en coordenadas locales es,

$$\Pi_p(\alpha') = ea^2 + 2fab + gb^2,$$

donde, las funciones $e, f, g: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son llamados los coeficientes de la

segunda forma fundamental para X en la base $\{X_u, X_v\}$ del plano tangente $T_p(S)$.

2.2.26 Curvatura Gaussiana en términos de los coeficientes de la 1FF y 2FF

Sabemos que,

$$-e = \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F,$$

$$-f = \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G,$$

$$-f = \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F,$$

$$-g = \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G,$$

Si escribimos el sistema de encima en su forma matricial obtenemos,

$$-\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

Como, $EG - F^2 > 0$ significa que existe la matriz inversa de la matriz de

coeficientes de la 1FF, por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & -eF + fE \\ fG - gF & -fF + gE \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ \frac{gF - fG}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{bmatrix},$$

igualando componente a componente, obtenemos las componentes de la matriz de

la dN_p , así,



$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Como la curvatura Gaussiana es:

$$K(p) = \det(dN_p),$$

$$K(p) = \det[a_{ij}] = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$K(p) = \frac{(fF - eG)(fF - gE) - (gF - fG)(eF - fE)}{(EG - F^2)^2},$$

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(q).$$

Ejemplo 10. Calcular la curvatura Gaussiana de los puntos del toro, parametrizado

por:

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

donde, $a, r > 0$, $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in (0, 2\pi)$.

Solución. Antes de encontrar los coeficientes de la primera y segunda forma

fundamental, se determina lo siguiente:

$$X_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u),$$



$$X_v = (-(a + r \cos u) \operatorname{sen} v, (a + r \cos u) \cos v, 0),$$

$$X_{uv} = (-r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -r \operatorname{sen} u \cos v, 0),$$

$$X_{uu} = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \operatorname{sen} v, -r \operatorname{sen} u),$$

$$X_{vv} = (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \operatorname{sen} v, 0).$$

Luego,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = (a + r \cos u)^2,$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental para X en la base $\{X_u, X_v\}$ de

$T_p(S)$. Enseguida:

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{uu} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = r,$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{uv} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = 0,$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{vv} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \cos u (a + r \cos u),$$

son los coeficientes de la segunda forma fundamental para X en la base $\{X_u, X_v\}$ de

$T_p(S)$.

Finalmente, determinamos la curvatura Gaussiana K del toro,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$



$$K = \frac{r \cos u (a + r \cos u)}{r^2 (a + r \cos u)^2},$$

$$K = \frac{\cos u}{r (a + r \cos u)}.$$

Ejemplo 11. Calcular la curvatura gaussiana de los puntos de la pseudoesfera, parametrizado por:

$$X(u, v) = \left(\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v + \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right),$$

donde, $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Solución. Recordando la siguiente propiedad:

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}, f(x) > 0.$$

Se determina los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de la siguiente forma,

$$X_u = (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u \operatorname{sen} v, 0),$$

$$X_v = (\cos u \cos v, \operatorname{sen} u \cos v, \cos v \cot v),$$

$$X_{uv} = (-\operatorname{sen} u \cos v, \cos u \cos v, 0)$$

$$X_{uu} = (-\cos u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, 0),$$

$$X_{vv} = (-\cos u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \sec^2 v).$$

Luego,

$$E = \langle (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u \operatorname{sen} v, 0), (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u \operatorname{sen} v, 0) \rangle = \operatorname{sen}^2 v,$$

$$F = \langle (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u \operatorname{sen} v, 0), (\cos u \cos v, \operatorname{sen} u \cos v, \cos v \cot v) \rangle = 0,$$



$$G = \langle (\cos u \cos v, \operatorname{sen} u \cos v, \cos v \cot v), (\cos u \cos v, \operatorname{sen} u \cos v, \cos v \cot v) \rangle$$

$$= \cot^2 v,$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental para X en la base $\{X_u, X_v\}$ de

$T_p(S)$. Enseguida:

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{uu} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = -\operatorname{sen} v \cos v,$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{uv} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = 0,$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{vv} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \cot v,$$

son los coeficientes de la segunda forma fundamental para X en la base $\{X_u, X_v\}$ de

$T_p(S)$.

Finalmente se determina la curvatura Gaussiana K de la pseudoesfera:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

$$K = \frac{-\operatorname{sen} v \cos v \cot v - 0^2}{\operatorname{sen}^2 v \cot^2 v - 0^2},$$

$$K = -1.$$

2.2.27 Isometría de superficies regulares

Definición 24. Sean S y \bar{S} superficies regulares. Un difeomorfismo $\varphi: S \rightarrow \bar{S}$ es

una isometría si para todo $p \in S$ y para todo par $w_1, w_2 \in T_p(S)$ se tiene que,

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$



Se dice entonces que las superficies S y \bar{S} son isométricos.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 221)

Comentarios 26.

i) Un difeomorfismo es una aplicación biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable.

ii) La definición 28, geoméricamente significa que la $d\varphi_p$ preserva ángulos y longitud de vectores.

Observación 1. Un difeomorfismo φ es una isometría, si y sólo si, preserva la primera forma fundamental (es decir, los coeficientes de la primera forma fundamental coinciden).

Demostración.

(\Rightarrow) Si φ es una isometría, probaremos que, φ preserva la primera forma fundamental.

Sabemos que,

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p,$$

y como φ es un isometría, se tiene,

$$I_p(w) = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)},$$

esto es,

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \text{ para todo } w \in T_p(S).$$

Por tanto, φ preserva la primera forma fundamental.

(\Leftarrow) Si φ preserva la primera forma fundamental, probaremos que, φ es una isometría.

Sabemos que,

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \frac{1}{2} \left(I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \right),$$

como φ preserva la primera forma fundamental, se tiene,

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \frac{1}{2} \left(I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \right),$$

además, sabemos que $d\varphi_p$ es una transformación lineal, entonces,

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \frac{1}{2} \left(I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1) + d\varphi_p(w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) \right. \\ &\quad \left. - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \right), \end{aligned}$$

por definición de 1FF, tenemos,

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \frac{1}{2} \left(\|d\varphi_p(w_1) + d\varphi_p(w_2)\|^2 - \|d\varphi_p(w_1)\|^2 - \|d\varphi_p(w_2)\|^2 \right),$$

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \frac{1}{2} \left(\|d\varphi_p(w_1)\|^2 + 2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)} + \|d\varphi_p(w_2)\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \|d\varphi_p(w_1)\|^2 - \|d\varphi_p(w_2)\|^2 \right), \end{aligned}$$

luego se elimina los términos semejantes, esto es,

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \frac{1}{2} \left(2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)} \right),$$

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Por tanto, φ es una isometría.

2.2.28 Isometría local

Definición 25. Una aplicación $\varphi: V \subset S \rightarrow \bar{S}$ de una vecindad V de $p \in S$ es una isometría local en p , si existe una vecindad $\bar{V} \subset \bar{S}$ de $\varphi(p) \in \bar{S}$ tal que $\varphi: V \rightarrow \bar{V}$ es una isometría.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 222)

Proposición 3. Si existen dos parametrizaciones $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ y $\bar{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{S}$, con $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$ en U . Entonces la aplicación,

$$\varphi = \bar{X} \circ X^{-1}: X(U) \subset S \rightarrow \bar{S},$$

es una isometría local.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 223)

Ejemplo 12. Demostrar que la catenoide es localmente isométrico al helicoido.

Demostración. Sea X una parametrización de la catenoide, dada por,

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sen u, av),$$

donde, $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in \mathbb{R}$.

Recordemos las siguientes propiedades:

$$[\senh x]' = (\cosh x)x',$$

$$[\cosh x]' = (\senh x)x',$$

$$\cosh^2 x - \senh^2 x = 1.$$



Luego:

$$X_u = (-a \cosh v \operatorname{sen} u, a \cosh v \cos u, 0),$$

$$X_v = (a \operatorname{senh} v \cos u, a \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u, a).$$

Entonces los coeficientes de la 1FF de la catenoide son:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cosh^2 v \cos^2 u + a^2 \cosh^2 v \operatorname{sen}^2 u = a^2 \cosh^2 v,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -a^2 \cosh v \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u \cos u + a^2 \cosh v \operatorname{senh} v \cos u \operatorname{sen} u = 0,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \operatorname{senh}^2 v \cos^2 u + a^2 \operatorname{senh}^2 v \operatorname{sen}^2 u + a^2 = a^2 \cosh^2 v,$$

Por otro lado, una parametrización del helicoides viene dada por,

$$\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \operatorname{sen} \bar{u}, a\bar{u}),$$

donde, $\bar{u} \in (0, 2\pi)$ y $\bar{v} \in \mathbb{R}$.

Haciendo el cambio de variables, tenemos,

$$\bar{u} = u,$$

$$\bar{v} = a \operatorname{senh} v,$$

donde, $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in \mathbb{R}$.

Éste cambio de variables, está bien definido pues su jacobiano es diferente de cero,

es decir,

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cosh v \end{vmatrix} = a \cosh v \neq 0.$$

Así,

$$\bar{X}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au),$$

es una nueva parametrización del helicoido.

Luego,

$$\bar{X}_u = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, a),$$

$$\bar{X}_v = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0),$$

Entonces, los coeficientes de la 1FF del helicoido son:

$$\bar{E} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle = a^2 \sinh^2 v \sin^2 u + a^2 \sinh^2 v \cos^2 u + a^2 = a^2 \cosh^2 v,$$

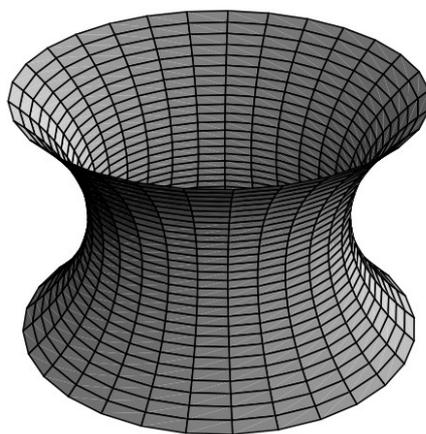
$$\bar{F} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle = -a^2 \sinh v \cosh v \sin u \cos u + a^2 \sinh v \cosh v \cos u \sin u = 0,$$

$$\bar{G} = \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle = a^2 \cosh^2 v \cos^2 u + a^2 \cosh^2 v \sin^2 u = a^2 \cosh^2 v.$$

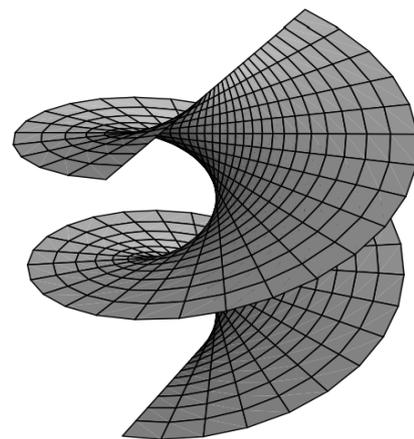
Luego se utiliza la proposición 2 y concluimos que, la catenoide y el helicoido son localmente isométricos. Vea la Figura 23.

Figura 23.

La catenoide y el helicoido son localmente isométricos.



La catenoide



El helicoido

2.2.29 Símbolos de Christoffel

Sea $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U)$ una parametrización de S en $p \in S$ y asociemos a cada punto $p = X(u, v)$, para todo $(u, v) \in U$, el triedro positivo,

$$\{X_u, X_v, N\}.$$

Enseguida se estudia los vectores $X_{uu}, X_{uv}, X_{vu}, X_{vv}$ de \mathbb{R}^3 , los cuales podemos expresarlos como combinación lineal de la base $\{X_u, X_v, N\}$ de \mathbb{R}^3 , obteniendo:

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N,$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N,$$

$$X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + L_3 N,$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_4 N,$$

Las cuatro ecuaciones de encima son llamados las ecuaciones de Gauss, y los coeficientes Γ_{ij}^k para $i, j, k = 1, 2$, son llamados los símbolos de Christoffel de S en la parametrización X .

Para determinar los L_i con $i = 1, 2, 3, 4$, tomamos el producto interno de la ecuaciones de Gauss con N , obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, N \rangle &= \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, N \rangle, \\ &= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, N \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, N \rangle + L_1 \langle N, N \rangle = L_1 = e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle X_{uv}, N \rangle &= \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, N \rangle, \\ &= \Gamma_{12}^1 \langle X_u, N \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle X_v, N \rangle + L_2 \langle N, N \rangle = L_2 = f. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\langle X_{vu}, N \rangle &= \langle \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + L_3 N, N \rangle, \\ &= \Gamma_{21}^1 \langle X_u, N \rangle + \Gamma_{21}^2 \langle X_v, N \rangle + L_3 \langle N, N \rangle = L_3 = f.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle X_{vv}, N \rangle &= \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_4 N, N \rangle, \\ &= \Gamma_{22}^1 \langle X_u, N \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle X_v, N \rangle + L_4 \langle N, N \rangle = L_4 = g.\end{aligned}$$

donde e, f, g son coeficientes de la segunda forma fundamental de S .

Como, $X_{uv} = X_{vu}$ (por el teorema de Schwarz) tenemos que,

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 \text{ y } \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2,$$

es decir, los símbolos de Christoffel son simétricos en relación a los índices inferiores.

A continuación, para determinar los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k para $i, j, k = 1, 2$,

tomamos el producto interno de las ecuaciones de Gauss con X_u y X_v , obtenemos

los sistemas:

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, X_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, \quad (18)$$

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, X_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G, \quad (19)$$

$$\langle X_{uv}, X_u \rangle = \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, X_u \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F, \quad (20)$$

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, X_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G, \quad (21)$$

$$\langle X_{vv}, X_u \rangle = \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_4 N, X_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F, \quad (22)$$

$$\langle X_{vv}, X_v \rangle = \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_4 N, X_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G. \quad (23)$$

Por otro lado, se deriva, $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$, y $G = \langle X_v, X_v \rangle$ respecto a u y

v de forma adecuada, obtenemos:

Si se deriva, $E = \langle X_u, X_u \rangle$, con respecto a u , tenemos,

$$\begin{aligned} E_u &= \langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_u, X_{uu} \rangle = \langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_{uu}, X_u \rangle = 2\langle X_{uu}, X_u \rangle \\ &\Rightarrow \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2}E_u \end{aligned} \quad (24)$$

Análogamente, se obtiene,

$$\langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad (25)$$

$$\langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2}E_v, \quad (26)$$

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}G_u, \quad (27)$$

$$\langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u, \quad (28)$$

$$\langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}G_v. \quad (29)$$

Así que, se puede escribir los símbolos de Christoffel como una solución a un

sistema lineal de seis ecuaciones con seis incógnitas, es decir, igualando:

(18) = (24), (19) = (25), (20) = (26), (21) = (27), (22) = (28) y (23) = (29), se tiene,

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2}E_u, \quad (30)$$

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad (31)$$

$$\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2}E_v, \quad (32)$$

$$\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2}G_u, \quad (33)$$

$$\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u, \quad (34)$$

$$\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v. \quad (35)$$

Luego, si se escribe en forma matricial dos a dos, se determina los símbolos de

Christoffel. De (30) y (31):

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{bmatrix},$$

entonces,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{1}{2} G E_u - F F_u + \frac{1}{2} F E_v \right),$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{EG - F^2} \left(-\frac{1}{2} F E_u + E F_u - \frac{1}{2} E E_v \right).$$

De (32) y (33):

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{bmatrix},$$

entonces,

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{1}{2} G E_v - \frac{1}{2} F G_u \right),$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{EG - F^2} \left(-\frac{1}{2} F E_v + \frac{1}{2} E G_u \right).$$

De (34) y (35):

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{bmatrix},$$

entonces,

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{EG - F^2} \left(GF_v - \frac{1}{2} GG_u - \frac{1}{2} FG_v \right),$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{EG - F^2} \left(-FF_v + \frac{1}{2} FG_u + \frac{1}{2} EG_v \right).$$

En conclusión, los símbolos de Christoffel dependen sólo de los coeficientes de la primera forma fundamental, E, F, G y de sus derivadas.

Ejemplo 13. Para una superficie con una parametrización ortogonal. Hallar los símbolos de Christoffel.

Solución. Como la superficie admite una parametrización ortogonal se tiene que

$F = 0$, y reemplazando en los símbolos de Christoffel, obtenemos:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{EG} \left(\frac{1}{2} GE_u \right) = \frac{1}{2} \frac{E_u}{E}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{EG} \left(-\frac{1}{2} EE_v \right) = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{EG} \left(\frac{1}{2} GE_v \right) = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{EG} \left(\frac{1}{2} EG_u \right) = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{EG} \left(-\frac{1}{2} GG_u \right) = -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{EG} \left(\frac{1}{2} EG_v \right) = \frac{1}{2} \frac{G_v}{G}.$$

2.2.30 Fórmula de Gauss y teorema Egregium de Gauss

Sea S una superficie regular con orientación N y sea $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U)$ una parametrización de S en $p \in S$.

Se sabe que $X_{uv} = X_{vu}$ (por el teorema de Schwarz) y derivando respecto



u se tiene:

$$(X_{uv})_u = (X_{vu})_u,$$

luego se considera la siguiente relación,

$$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u,$$

si se utiliza las ecuaciones de Gauss, se tiene,

$$(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN)_v = (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN)_u,$$

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e_v N + e N_v &= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 X_{uu} + \\ &(\Gamma_{12}^2)_u X_v + \Gamma_{12}^2 X_{vu} + f_u N + f N_u. \end{aligned}$$

Enseguida se reemplaza de nuevo las ecuaciones de Gauss y se utiliza las

ecuaciones de Weingarten, se tiene,

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN) + \\ e_v N + e(a_{12} X_u + a_{22} X_v) &= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + fN) + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + \\ &\Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN) + f_u N + f(a_{11} X_u + a_{21} X_v), \end{aligned}$$

si se desarrolla cálculos algebraicos en ambos miembros, se tiene,

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 X_v + \Gamma_{11}^1 fN + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 X_v + \\ \Gamma_{11}^2 gN + e_v N + e a_{12} X_u + e a_{22} X_v &= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 X_v + \Gamma_{12}^1 fN + \\ &(\Gamma_{12}^2)_u X_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 X_v + \Gamma_{12}^2 fN + f_u N + f a_{11} X_u + f a_{21} X_v, \end{aligned}$$

se factoriza X_u , X_v , N y poniendo en orden, se tiene,

$$\begin{aligned} ((\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e a_{12} - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - f a_{11}) X_u + \\ (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - f a_{21}) X_v + \\ (\Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v - \Gamma_{12}^1 f - \Gamma_{12}^2 f - f_u) N = 0. \end{aligned}$$

Luego se puede reescribirse en la forma:

$$AX_u + BX_v + CN = 0,$$

donde, A, B, C son funciones de E, F, G, e, f, g y de sus derivadas, además los vectores X_u, X_v, N son linealmente independientes, tenemos que $A = B = C = 0$.

De aquí, se elige $B = 0$, se tiene,

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - fa_{21} = 0,$$

$$ea_{22} - fa_{21} = -\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2,$$

$$e \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - f \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) = -\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2,$$

$$- \left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) E = -\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2,$$

finalmente se encuentra la ecuación,

$$-KE = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2, \quad (36)$$

llamada fórmula de Gauss, donde K es la curvatura Gaussiana.

Ejemplo 14. Calcular la curvatura Gaussiana de los puntos de la esfera

parametrizado por,

$$X(u, v) = (r \operatorname{sen} u \cos v, r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, r \cos u),$$

donde, $r > 0$, $u \in (0, \pi)$ y $v \in (0, 2\pi)$.

Solución. Para calcular la curvatura Gaussiana, utilizamos la ecuación (36),

$$-KE = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2.$$

Como la parametrización X de la esfera es ortogonal, tenemos que,



$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1 E_u}{2 E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1 E_v}{2 G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1 E_v}{2 E},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1 G_u}{2 G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1 G_u}{2 E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1 G_v}{2 G}.$$

Esto es,

$$X_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u),$$

$$X_v = (-r \sin u \sin v, r \sin u \cos v, 0),$$

luego,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2 \cos^2 u \cos^2 v + r^2 \cos^2 u \sin^2 v + r^2 \sin^2 u.$$

Si se deriva E con respecto a u y v , se tiene,

$$E_u = -2r^2 \cos u \sin u \cos^2 v - 2r^2 \cos u \sin u \sin^2 v + 2r^2 \sin u \cos u,$$

$$E_v = -2r^2 \cos^2 u \cos v \sin v + 2r^2 \cos^2 u \sin v \cos v.$$

Por otro lado,

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = r^2 \sin^2 u \sin^2 v + r^2 \sin^2 u \cos^2 v.$$

Análogamente, se deriva G con respecto a u y v , se tiene,

$$G_u = 2r^2 \sin u \cos u \sin^2 v + 2r^2 \sin u \cos u \cos^2 v,$$

$$G_v = 2r^2 \sin^2 u \sin v \cos v - 2r^2 \sin^2 u \cos v \sin v.$$

Entonces los símbolos de Christoffel, serán,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1 E_u}{2 E} = \frac{1}{2} \left(\frac{-2r^2 \cos u \sin u \cos^2 v - 2r^2 \cos u \sin u \sin^2 v + 2r^2 \sin u \cos u}{r^2 \cos^2 u \cos^2 v + r^2 \cos^2 u \sin^2 v + r^2 \sin^2 u} \right)$$

$$= 0,$$



$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G} = -\frac{1}{2} \left(\frac{-2r^2 \cos^2 u \cos v \sin v + 2r^2 \cos^2 u \sin v \cos v}{r^2 \sin^2 u \sin^2 v + r^2 \sin^2 u \cos^2 v} \right) = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{-2r^2 \cos^2 u \cos v \sin v + 2r^2 \cos^2 u \sin v \cos v}{r^2 \cos^2 u \cos^2 v + r^2 \cos^2 u \sin^2 v + r^2 \sin^2 u} \right) = 0,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G} = \frac{1}{2} \left(\frac{2r^2 \sin u \cos u \sin^2 v + 2r^2 \sin u \cos u \cos^2 v}{r^2 \sin^2 u \sin^2 v + r^2 \sin^2 u \cos^2 v} \right) = \cot u,$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2r^2 \sin u \cos u \sin^2 v + 2r^2 \sin u \cos u \cos^2 v}{2r^2 \sin u \cos u \sin^2 v + 2r^2 \sin u \cos u \cos^2 v} \right) = -\frac{1}{2},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_v}{G} = \frac{1}{2} \left(\frac{2r^2 \sin^2 u \sin v \cos v - 2r^2 \sin^2 u \cos v \sin v}{r^2 \sin^2 u \sin^2 v + r^2 \sin^2 u \cos^2 v} \right) = 0.$$

Finalmente se determina la curvatura gaussiana de la esfera, así,

$$-KE = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2,$$

$$-K(r^2 \cos^2 u \cos^2 v + r^2 \cos^2 u \sin^2 v + r^2 \sin^2 u) = (\cot u)_u + (\cot u) (\cot u),$$

$$-Kr^2 = -\csc^2 u + \cot^2 u,$$

$$-Kr^2 = -1,$$

por lo tanto, la curvatura gaussiana de la esfera es,

$$K = \frac{1}{r^2}.$$

Comentarios 27.

i) La curvatura Gaussiana K de la esfera unitaria S^2 es $K = 1$.

Teorema 2. (Teorema Egregium de Gauss)

La curvatura Gaussiana K de una superficie es invariante por isometrías locales.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 237)

Demostración:

Se define, $\varphi: X(U) \subset S \rightarrow \bar{S}$ una isometría local, donde, $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es una parametrización en $p \in S$.

Entonces existe un entorno $\bar{X}(U)$ de $\varphi(p) \in \bar{S}$, donde, $\bar{X} = \varphi \circ X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{S}$ es una parametrización en $\varphi(p) \in \bar{S}$, tal que, $\varphi: X(U) \rightarrow \bar{X}(U)$ es una isometría.

Por demostrar que, $K(p) = \bar{K}(\varphi(p))$ para todo $p \in S$.

Como φ es una isometría, significa que φ preserva la primera forma fundamental (es decir, los coeficientes de la primera forma fundamental de las parametrizaciones X y \bar{X} en los puntos correspondientes p y $\varphi(p)$ coinciden).

Esto es,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle_p = \langle d\varphi_p(X_u), d\varphi_p(X_u) \rangle_{\varphi(p)} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle_{\varphi(p)} = \bar{E},$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle_p = \langle d\varphi_p(X_u), d\varphi_p(X_v) \rangle_{\varphi(p)} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle_{\varphi(p)} = \bar{F},$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle_p = \langle d\varphi_p(X_v), d\varphi_p(X_v) \rangle_{\varphi(p)} = \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle_{\varphi(p)} = \bar{G}.$$

Así que, los símbolos de Christoffel correspondientes $\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k$ también coinciden.

Luego, se usa la fórmula de Gauss (36),

$$K(p) = \frac{1}{E} (-(\Gamma_{12}^2)_u + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2),$$

y,

$$\bar{K}(\varphi(p)) = \frac{1}{\bar{E}} (-(\bar{\Gamma}_{12}^2)_u + (\bar{\Gamma}_{11}^2)_v - \bar{\Gamma}_{12}^1 \bar{\Gamma}_{11}^2 + \bar{\Gamma}_{11}^1 \bar{\Gamma}_{12}^2 - \bar{\Gamma}_{12}^2 \bar{\Gamma}_{12}^2 + \bar{\Gamma}_{11}^2 \bar{\Gamma}_{22}^2).$$



Como, $\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k$, se tiene que,

$$K(p) = \bar{K}(\varphi(p)), \text{ para todo } p \in S.$$

Comentarios 28.

- i) La curvatura gaussiana de un cilindro es $K = 0$, pues el cilindro es localmente isométrico a un plano.
- ii) Una catenoide y una helicoide tienen la misma curvatura gaussiana en sus puntos correspondientes.
- iii) Una esfera unitaria no posee vecindades localmente isométricos a abiertos de un plano.

Observación 2. Si X es una parametrización ortogonal, es decir, $F = 0$, entonces,

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

Demostración. Se considera la fórmula de Gauss (36),

$$-KE = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2,$$

y siendo $F = 0$, los símbolos de Christoffel son,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{E_u}{E}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \frac{E_v}{E}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{G_v}{G}. \end{aligned}$$

Luego, se reemplaza los símbolos de Christoffel en la fórmula de Gauss (36), se

tiene,

$$-KE = \left(\frac{1}{2} \frac{G_u}{G}\right)_u - \left(-\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}\right)_v + \left(\frac{1}{2} \frac{E_v}{E}\right) \left(-\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}\right) - \left(\frac{1}{2} \frac{E_u}{E}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{G_u}{G}\right) + \left(\frac{1}{2} \frac{G_u}{G}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{G_u}{G}\right) - \left(-\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{G_v}{G}\right),$$

$$-KE = \frac{1}{2} \left(\frac{G_u}{G}\right)_u + \frac{1}{2} \left(\frac{E_v}{G}\right)_v - \frac{1}{4} \frac{E_v^2}{EG} - \frac{1}{4} \frac{E_u G_u}{EG} + \frac{1}{4} \frac{G_u^2}{G^2} + \frac{1}{4} \frac{E_v G_v}{G^2},$$

se factoriza $\left(\frac{1}{2}\right)$ y se deriva los cocientes en el segundo miembro, se tiene,

$$-KE = \frac{1}{2} \left(\frac{GG_{uu} - G_u^2}{G^2} + \frac{GE_{vv} - E_v G_v}{G} - \frac{1}{2} \frac{E_v^2}{EG} - \frac{1}{2} \frac{E_u G_u}{EG} + \frac{1}{2} \frac{G_u^2}{G^2} + \frac{1}{2} \frac{E_v G_v}{G^2} \right),$$

si se homogeniza y factoriza, se tiene,

$$-KE = \frac{1}{2EG^2} \left(EGG_{uu} - EG_u^2 + EGE_{vv} - EE_v G_v - \frac{1}{2} GE_v^2 - \frac{1}{2} GE_u G_u + \frac{1}{2} EG_u^2 + \frac{1}{2} EE_v G_v \right),$$

$$-KE = \frac{1}{2EG^2} \left(EGG_{uu} + EGE_{vv} - \frac{1}{2} GE_v^2 - \frac{1}{2} GE_u G_u - \frac{1}{2} EG_u^2 - \frac{1}{2} EE_v G_v \right),$$

$$-KE = \frac{1}{2EG^2} (2EG(E_{vv} + G_{uu}) - GE_v^2 - GE_u G_u - EG_u^2 - EE_v G_v),$$

entonces,

$$K = -\frac{1}{4E^2G^2} (2EG(E_{vv} + G_{uu}) - EG_u^2 - EE_v G_v - GE_v^2 - GE_u G_u). \quad (37)$$

Por otro lado, si se expande la proposición 4, se tiene:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\},$$

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\sqrt{EG}E_{vv} - E_v(E_vG + EG_v)/2\sqrt{EG}}{EG} + \frac{\sqrt{EG}G_{uu} - G_u(E_uG + EG_u)/2\sqrt{EG}}{EG} \right\},$$

se desarrollan las fracciones y se aplica la propiedad distributiva en \mathbb{R} , se tiene,

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{1}{2(EG)^{\frac{3}{2}}} \right) (2EGE_{vv} - E_v^2G - E_vEG_v + 2EGG_{uu} - G_uE_uG - G_u^2E),$$

$$K = -\frac{1}{4E^2G^2} (2EG(E_{vv} + G_{uu}) - EG_u^2 - EE_vG_v - GE_v^2 - GE_uG_u). \quad (38)$$

Finalmente, de la ecuación (37) y (38) se concluye que,

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}. \quad (39)$$

2.2.31 Campo vectorial tangente a una superficie regular

Definición 26. Un campo vectorial tangente w en un conjunto abierto $U \subset S$ de

una superficie regular S es una correspondencia que asigna cada punto $p \in U$ un

vector tangente $w(p) \in T_p(S)$. El campo vectorial tangente w es diferenciable en

$p \in U$, si, para alguna parametrización $X(u, v)$ en p , las funciones $a(u, v)$ y

$b(u, v)$ dadas por,

$$w(p) = a(u, v) X_u + b(u, v) X_v,$$

son funciones diferenciables en p . Se dice que w es diferenciable en cada $p \in U$, si

w es diferenciable en U .

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 183)

Comentarios 29.

i) En la definición 26, el campo vectorial tangente w , es una función,

$$w: U \subset S \rightarrow T_p(S),$$

para todo $p \in U$.

ii) En la definición 26, las funciones diferenciables $a(u, v)$ y $b(u, v)$ son definidas

en el dominio V de \mathbb{R}^2 de la parametrización X , es decir, $a, b: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, para

todo $(u, v) \in V$.

2.2.32 Campo vectorial tangente a lo largo de una curva en una superficie regular

Definición 27. Sea $\alpha: I \rightarrow S$ una curva parametrizada en S . Un campo vectorial tangente w a lo largo de α , es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$ un vector tangente,

$$w(t) = w(\alpha(t)) \in T_{\alpha(t)}(S).$$

El campo vectorial tangente w es diferenciable en $t_0 \in I$, si, para alguna parametrización $X(u, v)$ en $\alpha(t_0)$, las funciones componentes $a(t)$ y $b(t)$ de,

$$w(t) = a(t) X_u + b(t) X_v,$$

son funciones diferenciables de t en t_0 . Se dice que w es diferenciable en I si es diferenciable en cada $t \in I$.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 243)

Comentarios 30.

i) En la definición 27, el campo vectorial tangente w a lo largo de la curva α , es

conocido como, la restricción del campo vectorial tangente w a la curva α .

ii) En el comentario i), la restricción del campo vectorial tangente w a la curva α , es

la función, $\bar{w} = w \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por, $\bar{w}(t) = w(\alpha(t))$, para todo

$t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Por convención se tiene que, $\bar{w} = w$.

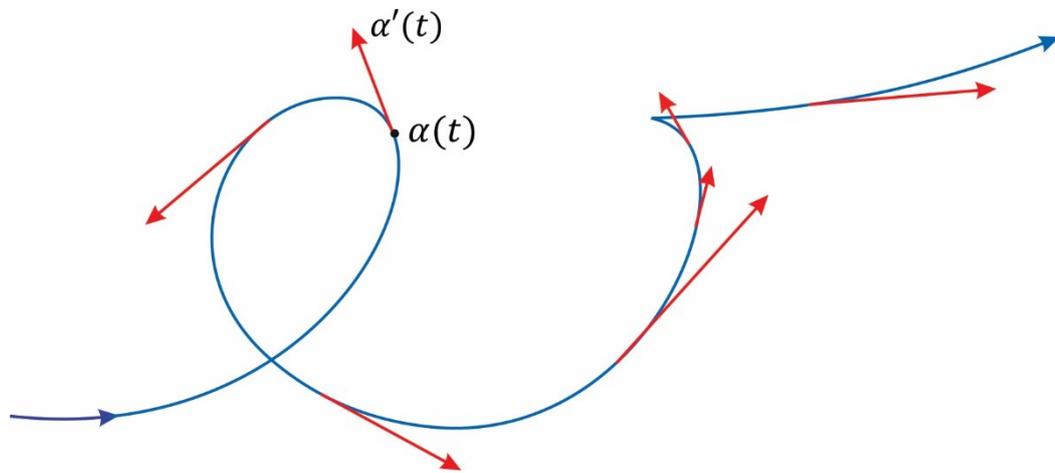
Ejemplo 15. Un ejemplo de campo vectorial tangente (diferenciable) a lo largo de

una curva α , viene dado por el campo $\alpha'(t)$ de los vectores tangentes a α .

Vea la Figura 24.

Figura 24.

El campo $\alpha'(t)$ de los vectores tangentes a lo largo de una curva α .



2.2.33 Derivada covariante

Definición 28. Sea S una superficie regular. Sea w un campo vectorial (tangente)

diferenciable en un conjunto abierto $U \subset S$ y $p \in U$. Sea $y \in T_p(S)$.

Consideremos una curva regular en S ,

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U,$$

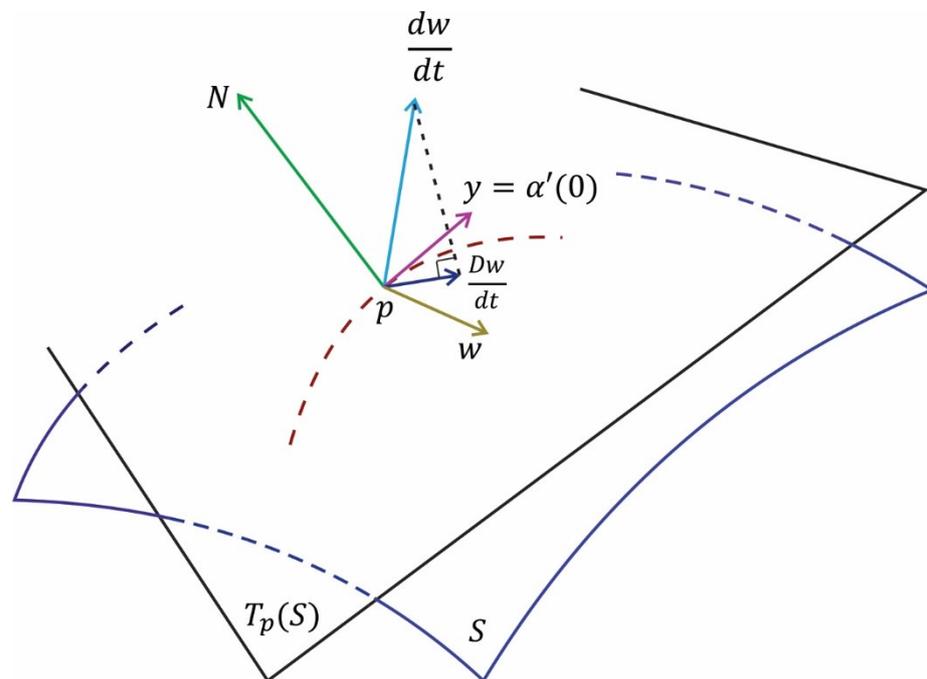
con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = y$. Sea $w(t) = w(\alpha(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la restricción del campo vectorial w a la curva α . El campo vectorial que se obtiene proyectando ortogonalmente $\left(\frac{dw}{dt}\right)(0)$ sobre el plano $T_p(S)$ se denomina la derivada covariante en p del campo vectorial w con respecto al vector y . La derivada covariante se denota por $\left(\frac{Dw}{dt}\right)(0)$ o por $(D_y w)(p)$.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 241).

Vea la Figura 25.

Figura 25.

La derivada covariante.



Comentarios 31.

- i) La derivada covariante es un concepto de la geometría intrínseca, (es decir, es un concepto que depende sólo de la primera forma fundamental) que no depende de



la elección de la curva α , y para demostrar esta afirmación, vamos a encontrar la derivada covariante en coordenadas (es decir, en una parametrización).

Sea X es una parametrización de S en p y α una curva regular en S , entonces se cumple que,

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)), \text{ para } t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

y sea el campo w restringido a la curva α ,

$$w(t) = a(u(t), v(t)) X_u + b(u(t), v(t)) X_v,$$

$$w(t) = a(t)X_u + b(t) X_v.$$

Derivando usualmente respecto a t ambos miembros, tenemos,

$$\frac{dw}{dt} = a' X_u + a \frac{\partial}{\partial t} X_u + b' X_v + b \frac{\partial}{\partial t} X_v,$$

$$\frac{dw}{dt} = a' X_u + a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b' X_v + b(X_{vu}u' + X_{vv}v'),$$

aplicando la propiedad distributiva en el segundo miembro, se tiene,

$$\frac{dw}{dt} = a' X_u + a X_{uu}u' + a X_{uv}v' + b' X_v + b X_{vu}u' + b X_{vv}v',$$

luego, reemplazando las segundas derivadas de X , tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} = & a' X_u + a(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN)u' + a(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN)v' \\ & + b' X_v + b(\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN)u' + b(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN)v', \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= a'X_u + a\Gamma_{11}^1X_uu' + a\Gamma_{11}^2X_vu' + aeNu' + a\Gamma_{12}^1X_uv' + a\Gamma_{12}^2X_vv' \\ &+ afNv' + b'X_v + b\Gamma_{21}^1X_uu' + b\Gamma_{21}^2X_vu' + afNu' + b\Gamma_{22}^1X_uv' \\ &+ b\Gamma_{22}^2X_vv' + agNv',\end{aligned}$$

ahora como la derivada covariante $\frac{Dw}{dt}$ es la componente tangente en el

plano $T_p(S)$ de $\frac{dw}{dt}$ y suprimiendo la componente normal, obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{Dw}{dt} &= (a' + \Gamma_{11}^1au' + \Gamma_{12}^1av' + \Gamma_{21}^1bu' + \Gamma_{22}^1bv')X_u \\ &+ (b' + \Gamma_{11}^2au' + \Gamma_{12}^2av' + \Gamma_{21}^2bu' + \Gamma_{22}^2bv')X_v.\end{aligned}$$

Finalmente hemos probado la afirmación de que la derivada covariante $\frac{Dw}{dt}$ no

depende de la elección de la curva α , sino apenas del vector $y = (u', v')$.

ii) Del comentario i), decimos que la derivada covariante es una extensión de la derivada usual de funciones.

Definición 29. Una curva parametrizada diferenciable $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ es la restricción a $[0, l]$ de una aplicación diferenciable de $(0 - \varepsilon, l + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, en S .

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 242)

Comentarios 32.

i) De aquí en adelante será conveniente utilizar la notación $[0, l] = I$ siempre no sea preciso especificar los extremos de I .

2.2.34 Geodésicas en superficies regulares y curvatura geodésica

Definición 30. Se dice que un campo vectorial w a lo largo de una curva



parametrizada $\alpha: I \rightarrow S$, es llamada paralelo si, $\frac{Dw}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 244)

Definición 31. Se dice que una curva parametrizada no contante $\gamma: I \rightarrow S$ es llamada geodésica en $t \in I$ si su campo de vectores tangentes $\gamma'(t)$ es paralelo a lo largo de γ en t ; es decir,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0.$$

Se dice que γ es una geodésica parametrizada si es geodésica para todo $t \in I$.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 247)

Definición 32. Sea w un campo diferenciable de vectores unitarios a lo largo de una curva parametrizada $\alpha: I \rightarrow S$ sobre una superficie orientada S . Como $w(t)$, para todo $t \in I$, es un campo de vectores unitarios, $\left(\frac{dw}{dt}\right)(t)$ es normal a $w(t)$, y por tanto,

$$\left(\frac{Dw}{dt}\right) = \lambda(N \wedge w(t)).$$

El número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $\left[\frac{Dw}{dt}\right]$, es llamado valor algebraico de la derivada covariante de w en t .

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 251)

Definiremos ahora, para una curva sobre una superficie, un concepto que es un análogo de la curvatura de curvas planas.

Definición 33. Sea C una curva regular orientada contenida en una superficie orientada S , y sea $\alpha(s)$ una parametrización de C por la longitud de arco s , en un entorno de $p \in S$. El valor algebraico $\left[\frac{D\alpha'(s)}{dt}\right] = k_g(s)$ de la derivada covariante de $\alpha'(s)$ es llamada curvatura geodésica de C en p .

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 251)

Lema 1. Sean a y b dos funciones diferenciables en I con $a^2 + b^2 = 1$ y sea φ_0 tal que $a(t_0) = \cos \varphi_0$, $b(t_0) = \sin \varphi_0$. Entonces la función diferenciable

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba') dt,$$

satisface $\cos \varphi(t) = a(t)$, $\sin \varphi(t) = b(t)$, $t \in I$, y $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 253)

Lema 2. Sean v y w dos campos vectoriales diferenciables a lo largo de la curva

$\varphi: I \rightarrow S$, con $\|w(t)\| = \|v(t)\| = 1$, $t \in I$. Entonces,

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] - \left[\frac{Dv}{dt}\right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

donde φ es una de las determinaciones diferenciables del ángulo de v a w , como la construida en el lema 2.30.2.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 254)

Proposición 4. Sea $X(u, v)$ una parametrización ortogonal (es decir, $F = 0$) de un entorno sobre una superficie orientada S y $w(t)$ un campo diferenciable de



vectores unitarios a lo largo de la curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Entonces,

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

donde $\varphi(t)$ es el ángulo de X_u a $w(t)$ en la orientación considerada.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 255)

Demostración. Para probar la proposición, utilizaremos el lema 2, para esto

necesitamos que X_u sea unitario. Consideremos,

$$\left\{ e_1 = \frac{X_u}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{X_v}{\sqrt{G}}, N = \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG}} \right\},$$

una base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 .

Sabemos que, $e_1 = \frac{X_u}{\sqrt{E}}$ y $e_2 = \frac{X_v}{\sqrt{G}}$ son los vectores unitarios tangentes a las curvas

coordenadas, además $e_1 \wedge e_2 = N$, donde N es la orientación de S considerada.

Como, $\|w(t)\| = \|e_1(t)\| = 1$, por el lema 2 podemos escribir,

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] - \left[\frac{De_1}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \left[\frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}. \quad (40)$$

Donde, $e_1(t) = e_1(\alpha(t)) = e_1(u(t), v(t))$ es la restricción del campo e_1 a la

Curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ y φ es el ángulo que forma e_1 y w , que es igual al

ángulo que forma X_u y w .

Ahora,

$$\left[\frac{De_1}{dt} \right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \wedge e_1 \right\rangle \Rightarrow \left[\frac{De_1}{dt} \right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle,$$

Derivando e_1 respecto a t , tenemos,

$$\left[\frac{De_1}{dt} \right] = \langle (e_1)_u u' + (e_1)_v v', e_2 \rangle,$$

como el producto interno es bilineal, tenemos,

$$\left[\frac{De_1}{dt} \right] = \langle (e_1)_u, e_2 \rangle u' + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle v'. \quad (41)$$

Enseguida calculamos,

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \right)_u, e_2 \right\rangle = \left\langle \frac{X_{uu}\sqrt{E} - \frac{1}{2}X_u E^{-\frac{1}{2}}E_u}{E}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle,$$

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = \left\langle \frac{X_{uu}\sqrt{E}}{E} - \frac{\frac{1}{2}X_u E^{-\frac{1}{2}}E_u}{E}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \left\langle \frac{X_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2\sqrt{E}E}E_u X_u, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle,$$

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = \left\langle \frac{X_{uu}}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{2\sqrt{E}E}E_u X_u, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG}} \langle X_{uu}, X_v \rangle - \frac{E_u}{2\sqrt{EG}E} \langle X_u, X_v \rangle,$$

Como $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$, tenemos,

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG}} \langle X_{uu}, X_v \rangle,$$

además, $\langle X_{uu}, X_v \rangle = -\frac{1}{2}E_v$,

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}. \quad (42)$$

Análogamente,

$$\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \right)_v, e_2 \right\rangle = \left\langle \frac{X_{uv}\sqrt{E} - \frac{1}{2}X_u E^{-\frac{1}{2}}E_v}{E}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle,$$

$$\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \left\langle \frac{X_{uv}\sqrt{E}}{E} - \frac{1}{2} \frac{X_u E^{-\frac{1}{2}} E_v}{E}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \left\langle \frac{X_{uv}}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2\sqrt{EE}} E_v X_u, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle,$$

$$\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \left\langle \frac{X_{uv}}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{2\sqrt{EE}} E_v X_u, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG}} \langle X_{uv}, X_v \rangle - \frac{E_v}{2\sqrt{EGE}} \langle X_u, X_v \rangle,$$

Como $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$, tenemos,

$$\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG}} \langle X_{uv}, X_v \rangle,$$

además, $\langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u$,

$$\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}. \quad (43)$$

Luego de (43) y (42 en (41), tenemos,

$$\left[\frac{De_1}{dt} \right] = \langle (e_1)_u, e_2 \rangle u' + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle v',$$

$$\left[\frac{De_1}{dt} \right] = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{dt} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{dt},$$

$$\left[\frac{De_1}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\}. \quad (44)$$

Finalmente (44) en (40), tenemos:

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \left[\frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}.$$

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Comentarios 33.

i) En la proposición 4, si consideramos $\alpha(s)$ una curva diferenciable en la

superficie S , donde s es el parámetro longitud de arco y $w = \alpha'(s)$, se

tiene que:

$$k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi}{ds},$$

donde k_g es la curvatura geodésica de α .

Proposición 5 (Liouville). Sea $\alpha(s)$ una parametrización por la longitud de arco s de una vecindad de un punto $p \in S$ de una curva regular orientada C sobre una superficie orientada S . Sea $X(u, v)$ una parametrización ortogonal de S en p y sea $\varphi(s)$ el ángulo que forma X_u con $\alpha'(s)$ en la orientación dada. Entonces,

$$k_g = (k_g)_1 \cos \varphi + (k_g)_2 \operatorname{sen} \varphi + \frac{d\varphi}{ds},$$

donde $(k_g)_1$ y $(k_g)_2$ son las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas $v = \text{constante}$ y $u = \text{constante}$ respectivamente.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 256)

Comentarios 34.

i) De la proposición 5, como las curvas coordenadas son ortogonales, se tiene que:

$$(k_g)_1 = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}.$$

Análogamente,

$$(k_g)_2 = -\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}.$$

2.2.35 Curva cerrada, simple y regular a trozos sobre una superficie regular

Definición 34. Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ una aplicación continua del intervalo cerrado $[0, l]$ sobre la superficie regular S . Decimos que α es una curva parametrizada cerrada, simple y regular a trozos si:

1. $\alpha(0) = \alpha(l)$.
2. $t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in [0, l]$, implica que $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.
3. Existe una partición,

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l,$$

de $[0, l]$ tal que α es diferenciable y regular en cada $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k$.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 268)

Comentarios 35.

- i) La definición 34, intuitivamente significa que si α es una curva cerrada (condición 1), sin autointersecciones (condición 2), cuya recta tangente deja de estar definida sólo en un número finito de puntos (condición 3).
- ii) Los puntos $\alpha(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, k$, son llamados vértices de α y las trazas $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ son llamados arcos regulares de α .
- iii) Es usual llamar la traza $\alpha([0, l])$ de α , una curva cerrada, simple y regular a trozos.

2.2.36 Teorema del índice de rotación

Sea $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización compatible con la orientación de S .



Supongamos también que U es homeomorfo a un disco abierto en el plano.

Sea $\alpha: [0, l] \rightarrow X(U) \subset S$ una curva parametrizada cerrada, simple y regular a

Trozos con vértices $\alpha(t_i)$ y ángulos externos θ_i , $i = 0, 1, \dots, k$.

Sean $\varphi_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables que miden en cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$ el ángulo positivo de X_u a $\alpha'(t)$.

Con la notación anterior:

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi,$$

donde el signo positivo o negativo depende de la orientación de α .

(Perdigão do Carmo, 2005, pág. 320)

Demostración. Para la demostración ver [19] páginas 163 - 165.

Comentarios 36.

i) El teorema de índice de rotación afirma que la variación total del ángulo del vector tangente a α con una dirección dada más los saltos en los vértices es igual a 2π .

ii) En el teorema de índice de rotación si α está orientada positivamente, usamos " + " y si α está orientada negativamente, usamos " - ".

2.2.37 Teorema de Green

Sea $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$, un campo de clase C^1

definido en el abierto U de \mathbb{R}^2 . Sea $S \subset U$ una región compacta con su frontera



∂S^+ positivamente orientada. Entonces,

$$\int_{\partial S^+} F \cdot d\lambda = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA,$$

donde λ es una curva regular a trozos cuya traza es ∂S^+ .

(Pita Ruiz, Cálculo Vectorial, 1995, pág. 781)

Comentarios 37.

- i) En el teorema de Green, el campo (función o aplicación) $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido en el abierto U de \mathbb{R}^2 por $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ se dice de clase C^1 si sus funciones coordenadas $M, N: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 .
- ii) Del comentario i) las funciones $M, N: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se dice de clase C^1 si tienen derivadas parciales de primer orden que son continuas en U .
- iii) En el teorema de Green, una región $S \subset U$ es compacta si es limitada y cerrada.
- iv) En el teorema de Green, la expresión,

$$\int_{\partial S^+} F \cdot d\lambda,$$

Es la integral de línea correspondiente de $F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$ en

torno de ∂S^+ se denota,

$$\int_{\partial S^+} M dx + N dy.$$

- v) La expresión dA (diferencial de área) es equivalente a $dx dy$.



vi) Una curva cerrada y simple en \mathbb{R}^2 se dice que está orientado positivamente si su traza está orientado en sentido antihorario.

vii) El teorema de Green establece la igualdad entre una integral de línea y una integral doble.

Ejemplo 16. Determine:

$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen}x})dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy,$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, orientado en sentido antihorario.

Solución.

1ro) Identificando M y N de,

$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen}x})dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy,$$

tenemos,

$$M(x, y) = 3y - e^{\operatorname{sen}x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3,$$

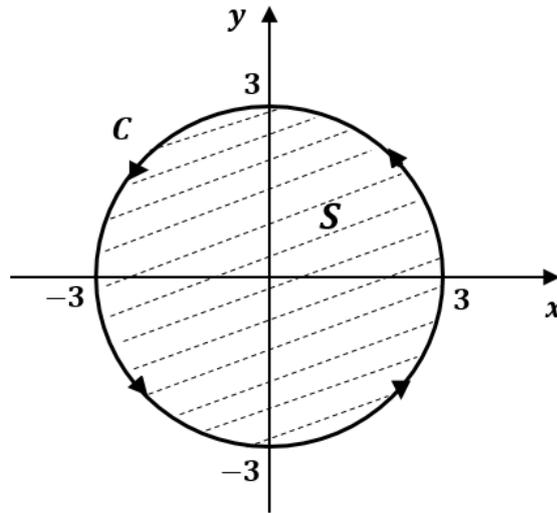
$$N(x, y) = 7x + \sqrt{y^4 + 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 7.$$

2do) Como la curva $C: x^2 + y^2 = 9$ está orientado en sentido anti horario y sea nuestra región $S: x^2 + y^2 \leq 9$.

Vea la Figura 26.

Figura 26.

Orientación de la curva $C: x^2 + y^2 = 9$.



3ro) Aplicando el teorema de Green, tenemos:

$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen}x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen}x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} (7 - 3) dx dy,$$

$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen}x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} 4 dx dy,$$

$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen}x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy = 4 \iint_{x^2+y^2 \leq 9} dx dy,$$

4to) Utilizando coordenadas polares, el dominio será, $0 \leq r \leq 3$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Luego tenemos,

$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen}x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r dr d\theta,$$

$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen}x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy = 4 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r dr \right),$$



$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen}x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy = 4(9\pi),$$

$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen}x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy = 36\pi.$$

2.2.38 Región simple en una superficie regular

Definición 35. Sea S una superficie orientada. Una región $R \subset S$ (unión de un conjunto abierto y conexo con su frontera) es llamada una región simple si R es homeomorfa a un disco y la frontera ∂R de R es la traza de una curva parametrizada cerrada, simple y regular a trozos $\alpha: I \rightarrow S$.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 271)

2.2.39 Curva orientada positivamente en una superficie regular

Definición 36. Sea S una superficie orientada y $R \subset S$ una región simple.

Decimos entonces que α está orientada positivamente si para cada $\alpha(t)$,

perteneciente a un arco regular, la base ortogonal positiva $\{\alpha'(t), h(t)\}$

satisface la condición de que $h(t)$ apunta hacia R ; con más precisión, para

cualquier curva $\beta: I \rightarrow R$ con $\beta(0) = \alpha(t)$ y $\beta'(0) \neq \alpha'(t)$, tenemos que

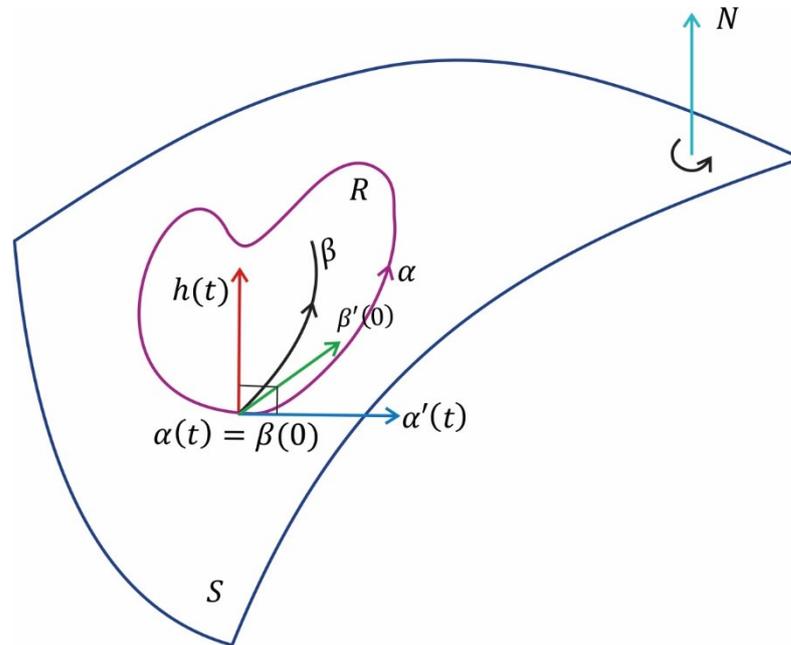
$\langle \beta'(0), h(t) \rangle > 0$.

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 271)

Vea la Figura 27.

Figura 27.

Curva orientada positivamente en una superficie regular.



Comentarios 38.

- i) La Figura 27 intuitivamente significa que si caminamos sobre α en la dirección positiva con la cabeza apuntando hacia N , entonces la región R se halla a la izquierda.

2.2.40 Integral de una función sobre una región de la superficie

Definición 37. Sea S una superficie orientable. Sea $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de S compatible con su orientación y sea $R \subset X(U)$ una región acotada de S . Si $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en S .

La integral de f sobre la región R se define como,

$$\iint_R f \, d\sigma = \iint_{X^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

(Perdigo Do Carmo, 2016, pág. 271)



Comentarios 39.

i) En la definición 37, el hecho de que la parametrización $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ sea

compatible con la orientación de S , significa que, si elegimos el campo

diferenciable vectores normales unitarios $N: X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ por la regla,

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(q),$$

para todo $q \in X(U)$; coincida con el campo diferenciable de vectores normales

unitarios $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre S .

ii) En la definición 37, el elemento de área de la superficie $d\sigma$ en coordenadas

locales se escribe como $\sqrt{EG - F^2} dudv$.

iii) En la definición 37, la expresión $f(u, v)$ es equivalente a $f \circ X(u, v)$.



CAPITULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 MATERIALES

Los medios necesarios para la realización del trabajo de investigación serán:

3.1.1 Materiales de gabinete

Laptop, internet, mesa, silla y USB.

3.1.2 Materiales de escritorio

Textos de consulta (entre ellos libros, trabajos de investigación, monografías),

cuadernos, lapiceros de colores, reglas, resaltadores y papel bond A4.

3.1.3 Software utilizados

Microsoft word, corel draw, geogebra, google y google académico.

3.2 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.2.1 Tipo de Investigación

El tipo de investigación es básicamente la revisión bibliográfica a nivel teórico y

explicativo, el cual se caracteriza porque los resultados obtenidos servirán para

profundizar los conocimientos del trabajo de investigación futuros.

3.2.2 Métodos

Los métodos que se usaron son el inductivo, deductivo y analítico, tomando como



texto base el libro de geometría diferencial de curvas y superficies, Ed. Español, del autor Manfredo P. Do Carmo y otros textos relacionados al trabajo de investigación.

3.2.3 Técnica

Lectura exhaustiva de textos de consulta, desarrollo analítico y comprensivo de las definiciones y teoremas para la asimilación apropiada.

3.2.4 Estrategia

Búsqueda de trabajos de investigación en bibliotecas, internet, asistir a seminarios de geometría diferencial, visitar a centros y grupos de investigación, que facilite el análisis, comprensión e interpretación del trabajo de investigación.



CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 TEOREMA DE GAUSS BONNET LOCAL

Sea $X: U \rightarrow S$ una parametrización ortogonal (esto es, $F = 0$), de una superficie orientada S , donde $U \subset \mathbb{R}^2$ es homeomorfo a un disco abierto y X es compatible con la orientación de S . Sea $R \subset X(U)$ una región simple de S y sea $\alpha: I \rightarrow S$ tal que $\partial R = \alpha(I)$. Si α es orientada positivamente, parametrizada por la longitud de arco s , y sean $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$ y $\theta_0, \dots, \theta_k$, respectivamente, los vértices y los ángulos externos de α . Entonces,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi,$$

donde $k_g(s)$ es la curvatura geodésica de los arcos regulares de α y K es la curvatura Gaussiana de S .

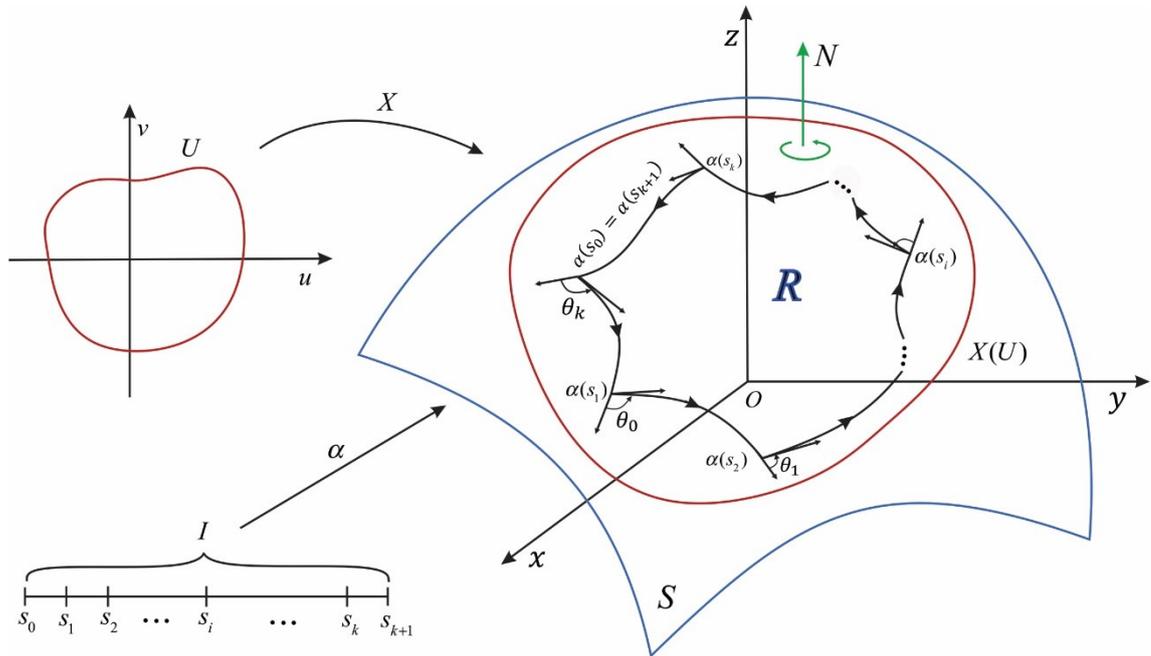
(Perdigão do Carmo, 2005, pág. 322)

Demostración. Antes de hacer la demostración matemática del teorema de Gauss Bonnet local, se comienza con una interpretación geométrica.

Vea la Figura 28.

Figura 28.

Una interpretación geométrica del TGBL.



Sabemos que $\alpha: I \rightarrow S$ es una curva parametrizada por la longitud de arco s ,

entonces $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ es la expresión de α en coordenadas.

Considerando $w(s) = \alpha'(s)$ el campo diferenciable de vectores tangentes unitarios

a lo largo de α .

De la proposición 4 tenemos,

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{GE}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_i}{ds},$$

donde, $k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds} \right]$ y $\varphi_i = \varphi_i(s)$ es una función diferenciable que mide el

ángulo positivo de X_u a $\alpha'(s)$ en $[s_i, s_{i+1}]$ para $i = 0, \dots, k$.

Luego determinemos la curvatura geodésica para cada arco regular de α , esto es:

Para $i = 0$,

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{GE}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_0}{ds}. \quad (45)$$

Para $i = 1$,

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{GE}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_1}{ds}. \quad (46)$$

Así sucesivamente:

Para $i = k$,

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{GE}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_k}{ds}. \quad (47)$$

Ahora, determinemos la integral de las curvaturas geodésicas de cada arco

regular de α sobre cada intervalo $[s_i, s_{i+1}]$, esto es:

Integrando (45) sobre el intervalo $[s_0, s_1]$ tenemos,

$$\int_{s_0}^{s_1} k_g(s) ds = \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{1}{2\sqrt{GE}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_0}{ds} \right) ds,$$

aplicando la propiedad de integral para la suma, obtenemos:

$$\int_{s_0}^{s_1} k_g(s) ds = \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \frac{du}{ds} \right) ds + \int_{s_0}^{s_1} \frac{d\varphi_0}{ds} ds. \quad (48)$$

Integrando (46) sobre el intervalo $[s_1, s_2]$ tenemos,

$$\int_{s_1}^{s_2} k_g(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{1}{2\sqrt{GE}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_1}{ds} \right) ds,$$

aplicando la propiedad de integral para la suma, obtenemos:

$$\int_{s_1}^{s_2} k_g(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \frac{du}{ds} \right) ds + \int_{s_1}^{s_2} \frac{d\varphi_1}{ds} ds. \quad (49)$$

Así sucesivamente:

Integrando (47) sobre el intervalo $[s_k, s_{k+1}]$ tenemos,

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} k_g(s) ds = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{GE}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_k}{ds} \right) ds,$$

aplicando la propiedad de integral para la suma, obtenemos:

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} k_g(s) ds = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \frac{du}{ds} \right) ds + \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{d\varphi_k}{ds} ds. \quad (50)$$

Enseguida, sumando miembro a miembro cada una las integrales (48), (49) y (50)

obtenemos:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \quad (51)$$

En efecto, de la ecuación (51) tomemos,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \frac{du}{ds} \right) ds,$$

y denotemos por,

$$P = -\frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \text{ y } Q = \frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \quad (52)$$

es decir,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(P \frac{du}{ds} + Q \frac{dv}{ds} \right) ds.$$

Ahora utilicemos el Teorema de Green en el plano uv que afirma lo siguiente:

Si $P(u, v)$ y $Q(u, v)$ son funciones de clase C^1 en una región compacta $A \subset \mathbb{R}^2$,

cuya frontera es dada por $u = u(s)$ y $v = v(s)$, entonces,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(P \frac{du}{ds} + Q \frac{dv}{ds} \right) ds = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv. \quad (53)$$

Reemplazando (52) en (53) tenemos,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \frac{du}{ds} \right) ds = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{-E_v}{2\sqrt{GE}} \right) \right) dudv, \quad (54)$$

esto es,

$$= \iint_A \left(\left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \right)_v \right) dudv,$$

$$= \iint_A \left(\frac{1}{2} \left(\frac{G_u}{\sqrt{GE}} \right)_u + \frac{1}{2} \left(\frac{E_v}{\sqrt{GE}} \right)_v \right) dudv,$$

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \frac{du}{ds} \right) ds = \frac{1}{2} \iint_A \left(\left(\frac{G_u}{\sqrt{GE}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{GE}} \right)_v \right) dudv. \quad (55)$$

Sabemos que R es una región simple, es decir, R es homeomorfa a un disco en el

plano uv , entonces $A = X^{-1}(R)$.

Luego (55) queda como,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \frac{du}{ds} \right) ds = \frac{1}{2} \iint_{X^{-1}(R)} \left(\left(\frac{G_u}{\sqrt{GE}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{GE}} \right)_v \right) dudv. \quad (56)$$

Además, como X es una parametrización ortogonal de (39), tenemos:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{GE}} \left\{ \left(\frac{G_u}{\sqrt{GE}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{GE}} \right)_v \right\},$$

esto es,

$$-2K\sqrt{GE} = \left(\frac{G_u}{\sqrt{GE}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{GE}}\right)_v. \quad (57)$$

Reemplazamos (57) en (56) tenemos,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \frac{du}{ds} \right) ds = \frac{1}{2} \iint_{X^{-1}(R)} (-2K\sqrt{GE}) dudv$$

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \frac{du}{ds} \right) ds = - \iint_{X^{-1}(R)} K\sqrt{GE} dudv. \quad (58)$$

En el segundo miembro de (58), aplicamos la definición 37 y obtenemos:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{GE}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{GE}} \frac{du}{ds} \right) ds = - \iint_R K d\sigma \quad (59)$$

Por otro lado, de (51) tomemos,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds,$$

y por el teorema fundamental del cálculo, tenemos,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^k [\varphi_i(s)]_{s_i}^{s_{i+1}},$$

esto es,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)). \quad (60)$$

Luego utilizando en el Teorema de Índice de Rotación:

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi,$$

y como α está orientada positivamente, tenemos que,

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) = 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i. \quad (61)$$

Reemplazando (61) en (60), obtenemos:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds = 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i. \quad (62)$$

Finalmente reemplazando (59) y (62) en (51), tenemos,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = - \iint_R K d\sigma + 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i,$$

esto es,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi. \quad \blacksquare (63)$$

Por lo tanto, queda demostrado de manera clara y original el Teorema de Gauss

Bonnet Local.

4.2 APLICACIÓN DEL TEOREMA DE GAUSS BONNET LOCAL

4.2.1 En particular, si tomamos un triángulo geodésico en la esfera unitaria S^2 .

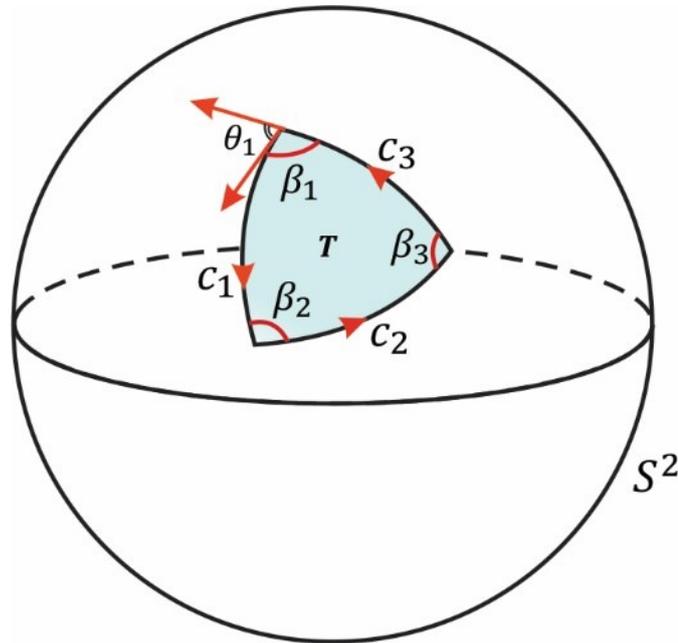
Aplique el Teorema de Gauss Bonnet Local.

Solución. Sea $T \subset S^2$ un triángulo geodésico en S^2 .

Vea la Figura 29.

Figura 29.

Teorema de Gauss Bonnet Local para un triángulo geodésico en S^2 .



Como cada lado C_1 , C_2 y C_3 del triángulo geodésico T es una geodésica, esto

significa que:

$$k_g(s) = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_{C_i} k_g(s) ds &= \int_{C_1} k_g(s) ds + \int_{C_2} k_g(s) ds + \int_{C_3} k_g(s) ds \\ \sum_{i=1}^3 \int_{C_i} k_g(s) ds &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

Además, sabemos que la curvatura Gaussiana de la esfera unitaria S^2 es $K = 1$,

así que,

$$\iint_T K d\sigma = \iint_T 1 d\sigma = \text{área}(T). \quad (65)$$

Por otro lado, sabemos que θ_1 , θ_2 y θ_3 los ángulos externos de T , y de la

Figura 29 tenemos que,

$$\beta_1 + \theta_1 = \pi \Rightarrow \theta_1 = \pi - \beta_1,$$

$$\beta_2 + \theta_2 = \pi \Rightarrow \theta_2 = \pi - \beta_2,$$

$$\beta_3 + \theta_3 = \pi \Rightarrow \theta_3 = \pi - \beta_3,$$

donde β_1, β_2 y β_3 son los ángulos internos de T .

Luego,

$$\sum_{i=1}^3 \theta_i = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

$$\sum_{i=1}^3 \theta_i = 3\pi - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3). \quad (66)$$

Finalmente reemplazando (64), (65) y (66) en (63) obtenemos:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi,$$

$$0 + \text{área}(T) + 3\pi - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 2\pi,$$

así que,

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi + \text{área}(T).$$

Por lo tanto,

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > \pi. \quad (67)$$

4.2.2 Si tomamos el polígono de lados:

$$C_1: u = t, v = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$C_2: u = \frac{\pi}{2}, v = \frac{\pi}{2} - t, \quad 0 \leq t \leq \pi/4$$

$$C_3: u = \frac{\pi}{2} - t, v = \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$C_4: u = 0, v = t, \quad \pi/4 \leq t \leq \pi/2$$

sobre la esfera unitaria S^2 , parametrizado por,

$$X(u, v) = (\cos u \sen v, \sen u \sen v, \cos v),$$

donde, $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in (0, \pi)$.

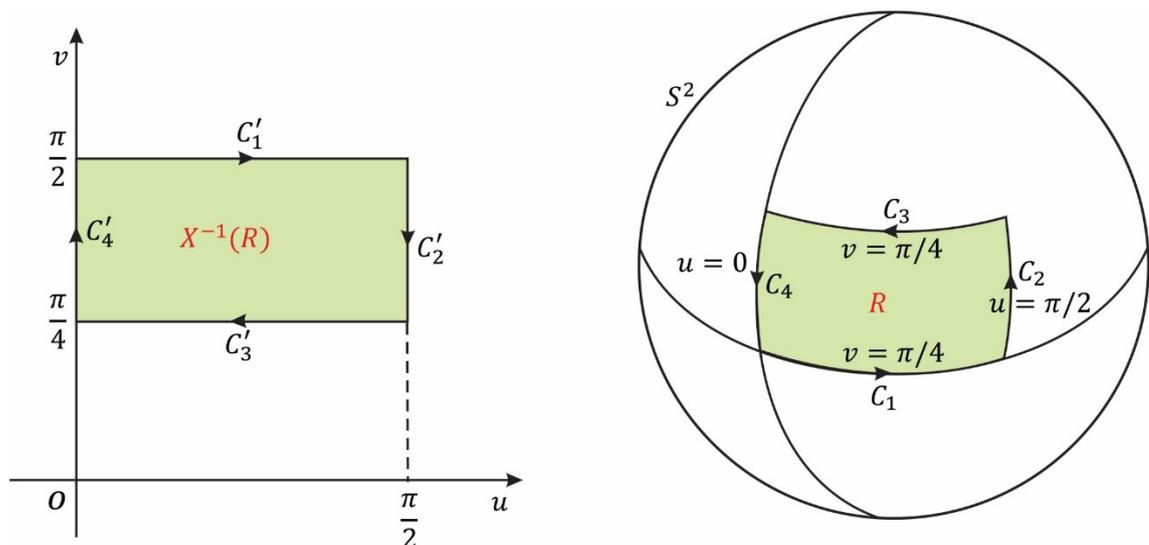
Aplique el Teorema de Gauss Bonnet Local.

Solución. Graficando el polígono sobre la esfera unitaria S^2 , tenemos:

Vea la Figura 30.

Figura 30.

Un polígono sobre la esfera unitaria S^2 .





Enseguida determinamos:

$$X_u = (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \operatorname{cos} u \operatorname{sen} v, 0),$$

$$X_v = (\operatorname{cos} u \operatorname{cos} v, \operatorname{sen} u \operatorname{cos} v, -\operatorname{sen} v).$$

Esto es,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{cos}^2 u \operatorname{sen}^2 v + 0,$$

$$E = \operatorname{sen}^2 v.$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \operatorname{cos} u \operatorname{cos} v + \operatorname{cos} u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u \operatorname{cos} v + 0,$$

$$F = 0.$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \operatorname{cos}^2 u \operatorname{cos}^2 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{cos}^2 v + \operatorname{sen}^2 v,$$

$$G = 1.$$

Por otro lado, sabemos que la curvatura Gaussiana de la esfera unitaria S^2 es:

$$K = 1.$$

Según la definición 37, tenemos,

$$\begin{aligned} \iint_R K \, d\sigma &= \iint_{X^{-1}(R)} K \sqrt{EG - F^2} \, dudv, \\ &= \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} \, dudv, \\ &= \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{(\operatorname{sen}^2 v)(1) - 0^2} \, dudv, \\ &= \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{\operatorname{sen}^2 v} \, dudv, \end{aligned}$$



$$= \iint_{X^{-1}(R)} |\operatorname{sen} v| \, dudv,$$

Como $v \in (0, \pi)$, tenemos que,

$$= \iint_{X^{-1}(R)} \operatorname{sen} v \, dudv,$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen} v \, dudv,$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen} v \, dv \right] du,$$

$$= \int_0^{\pi/2} -[\cos \pi/2 - \cos \pi/4] \, du,$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{2}}{2} \, du,$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\pi/2} du,$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right],$$

esto es,

$$\iint_R K d\sigma = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \quad (68)$$

Por otro lado, notemos que los lados C_1 , C_2 y C_4 son geodésicas, esto

significa que:

$$k_g(s) = 0.$$



Entonces,

$$\int_{C_1} k_g(s) ds = \int_{C_2} k_g(s) ds = \int_{C_4} k_g(s) ds = 0.$$

En cambio, como el lado C_3 no es una geodésica, su curvatura geodésica

será:

$$\begin{aligned} (k_g)_{v=\text{constante}=\pi/4} &= -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}, \\ &= -\frac{2 \operatorname{sen} v \cos v}{2 \operatorname{sen}^2 v \sqrt{1}}, \\ &= -\cot v, \\ &= -\cot \pi/4, \end{aligned}$$

$$(k_g)_{v=\text{constante}=\pi/4} = -1.$$

Luego,

$$\int_{C_3} k_g(s) ds = \int_0^{\pi/2} -1 ds,$$

$$\int_{C_3} k_g(s) ds = -\int_0^{\pi/2} ds, \quad (69)$$

Sabemos que el elemento de longitud de arco ds de S^2 , se escribe como,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Entonces,



$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2(0) \left(\frac{du}{dt}\right) (0) + G(0)^2,$$

$$ds = \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2} dt. \quad (70)$$

Enseguida reemplazando (70) en (69) tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{C_3} k_g(s) ds &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2} dt, \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{E} \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2} dt, \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{sen}^2 v} \left(\frac{du}{dt}\right) dt, \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen } v) du, \end{aligned}$$

como $v = \pi/4$, tenemos,

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } \pi/4 du, \\ &= - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du, \\ &= - \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right], \end{aligned}$$

$$\int_{C_3} k_g(s) ds = - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Esto es,



$$\sum_{i=1}^4 \int_{C_i} k_g(s) ds = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad (71)$$

Seguidamente, como las curvas coordenadas son ortogonales, puesto que X es una parametrización ortogonal, tenemos,

$$\sum_{i=1}^4 \theta_i = 4(\pi/2),$$

$$\sum_{i=1}^4 \theta_i = 2\pi. \quad (72)$$

Finalmente reemplazando (68), (71) y (72) en (63) se verifica el Teorema de Gauss Bonnet Local.



V. CONCLUSIONES

- 5.1 En este estado de emergencia sanitaria que pasa nuestro país y el mundo, fue complicado recurrir a personas entendidas en el área de Geometría Diferencial para recibir sus aportes en ciertos conceptos y definiciones de éste trabajo de investigación.
- 5.2 El Teorema de Gauss Bonnet Local nos sirve para relacionar los tipos de geometría, la Euclidiana (superficies con curvatura cero), la esférica (superficies con curvatura positiva), y la hiperbólica (superficies con curvatura negativa).
- 5.3 En el Teorema de Gauss Bonnet Local se unen los conceptos de curvatura Gaussiana de una superficie regular y curvatura geodésica de una curva regular en la superficie.
- 5.4 El Teorema de Gauss Bonnet Local sirve para hacer el estudio y la demostración del Teorema de Gauss Bonnet Global.
- 5.5 Existen pocas aplicaciones del Teorema de Gauss Bonnet Local.



VI. RECOMENDACIONES

- 6.1 En este estado de emergencia sanitaria que pasa nuestro país y el mundo, se recomienda habilitar las Bibliotecas Especializadas de las diferentes Escuelas Profesionales de la Universidad Nacional del Altiplano, para que así se pueda hacer el estudio exhaustivo de los trabajos de investigación.
- 6.2 Se recomienda que la Universidad Nacional del Altiplano adquiera software especializados como Wolfram Mathematica, Matlab y pizarras interactivas que sirvan para la exposición de dichas superficies.
- 6.3 Se recomienda que la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas invierta presupuesto en recursos humanos, enviando alumnos y profesores al extranjero de modo que puedan hacer el posgrado y así conocer más sobre Geometría Diferencial y otras áreas de la matemática.
- 6.4 Se recomienda usar el Teorema de Gauss Bonnet Local para resolver el Teorema de Gauss Bonnet Global.
- 6.5 Dada la importancia del Teorema de Gauss Bonnet Local, se recomienda a introducirse a buscar más aplicaciones en matemática y física.



VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Adonai J. y Carlos A. (2012). *Cálculo con Varias Variables*. Universidad Federal de Alagoas, Brasil.
- [2] Ccolque Taipe, Felipe Clímaco (2013). *Geometría Diferencial I*. Universidad Nacional del Altiplano. Puno, Perú.
- [3] Delgado, Jorge y Frensel, Katia (2017). *Geometría Diferencial I*. Universidade Federal Fluminense, Brasil.
- [4] Freire de Lima, Ronaldo (2016). *Introducción a la Geometría Diferencial 1/Ed.* Universidad Federal de Amapá, Brasil.
- [5] Halper, Aaron (2008). *A proof of the Gauss-Bonnet Theorem* . University of Chicago, EE.UU.
- [6] Hernández Cifre, María de los Ángeles y Pastor Gonzáles, José Antonio (2010). *Un curso de Geometría Diferencial*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid.
- [7] Lázaro Carrión, Moisés (2012). *Cálculo Vectorial*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima, Perú.
- [8] Lages Lima, Elon (2009). *Análise Real volumen 2*. Instituto Nacional de Matemática Pura y Aplicada. Río de Janeiro, Brasil.
- [9] Marsden, Jerrold E. y Tromba, Anthony J. (1988). *Cálculo Vectorial 3/Ed.* University of California, Estados Unidos de América.
- [10] Nunes, Bruna (2010). *Geometría Diferencial de Superficies y Teorema de Gauss-Bonnet*. Universidad Federal de Santa Catarina, Brasil.



- [11] Palmas Velasco, Óscar y Reyes Victoria, Guadalupe (2008). *Curso de Geometría Diferencial, Parte 1*. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [12] Palmas Velasco, Óscar y Reyes Victoria, Guadalupe (2012). *Curso de Geometría Diferencial, Parte 2*. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [13] POOLE, David (2011). *Álgebra Lineal, Una Introducción Moderna 3/Ed.* México.
- [14] Perdigo do Carmo, Manfredo (2016). *Differential Geometry of Curve and Surfaces 2Ed-Inglés*. Instituto de Matemática Pura y Aplicada. Río de Janeiro, Brasil.
- [15] Perdigão do Carmo, Manfredo (2005). *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies Ed-Portugués*. Sociedade Brasileira de Matemática. Río de Janeiro, Brasil.
- [16] Pita Ruiz, Claudio (1995). *Cálculo Vectorial 1/Ed.* Universidad Panamericana. Escuela de Ingeniería, México.
- [17] Rodríguez Argueta, Wendy y VELÁSQUEZ ORELLANA, Erick (2015). *EL Teorema Local de Gauss Bonnet*. Universidad de El Salvador.
- [18] Santamaria, O., Damian L., Huancas F. y Julca P. (2008). *Introducción a la Geometría Diferencial de Curvas y Superfícies*. Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo. Lambayeque, Perú.
- [19] Ventura Araújo, Paulo (1998). *Geometría Diferencial*. Instituto de Matemática Pura y Aplicada. Río de Janeiro, Brasil.