UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PARTICIÓN DE LA UNIDAD Y SUS APLICACIONES: TEOREMA DE TIETZE DIFERENCIABLE

TESIS

PRESENTADA POR:

Calizaya Chura Edgar

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO PERÚ

2016

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PARTICIÓN DE LA UNIDAD Y SUS APLICACIONES: TEOREMA DE TIETZE DIFERENCIABLE

TESIS

PRESENTADO POR: BACH. EDGAR CALIZAYA CHURA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Aprobado por el jurado revisor conformado por:

Presidente	Lic. Juan Carlos Benavides Huanca	....
Primer miembro	Lic. Alicia Ibañez Ulloa	....
Segundo miembro	Lic. Noemí Giovanna Alarcón Cárdenas	....
Director	Mg. Celso Wilfredo Calsín Velásquez	....
Asesor	Lic. Derly Pari Mendoza	....

Área: Matemática

Línea de Investigación: Matemática Pura

Dedicatoria

A Dios.

Por haberme permitido
llegar hasta este punto y haberme
dado salud para lograr mis objetivos, además de su
infinita bondad y amor.

Agradecimientos

Primeramente agradezco a Dios por darme la salud que tengo, por tener una cabeza con la que puedo pensar muy bien y además un cuerpo sano y una mente de bien.

Agradezco a la Universidad Nacional del Altiplano Puno, por haberme abierto las puertas de este prestigioso templo del saber, cuna de buenos profesionales.

También quiero dar las gracias a mi director de tesis Mg. Celso Wilfredo Calsín Velásquez y a mi asesor Lic. Derly Pari Mendoza por la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa de la misma, pero sobre todo por la motivación y el apoyo recibido a lo largo de estos años.

Índice

RESUMEN

La presente investigación titulada Partición de la unidad y sus aplicaciones: teorema de Tietze diferenciable. Tiene por objetivo describir las funciones auxiliares, las definiciones, proposiciones, lemas, teoremas y las aplicaciones de la partición de la unidad, considerando tanto su fundamento teórico como sus consecuencias; y como objetivo específico, probar el teorema de Tietze diferenciable considerando el marco teórico descrito.

ABSTRACT

This research titled drive partition and its applications: Tietze theorem differentiable. Objective is to describe the auxiliary functions, the definitions, propositions, lemmas, theorems and applications of the drive partition, considering both its rationale and its consequences; and as specific objective, testing the Tietze theorem differentiable considering the theoretical framework described.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación intitulada PARTICION DE LA UNIDAD Y SUS APLI- CACIONES: TEOREMA DE TIETZE DIFERENCIABLE, está centrada en el área de variedades diferenciables; para obtener los resultados que se espera de la investigación se desarrolla un conjunto de definiciones, teoremas, lemas y proposiciones preliminares necesarios para la orientación de la investigación.

El argumento principal de la presente investigación es la partición de la unidad, el objetivo que se pretende de alcanzar es analizar y demostrar el teorema de tietze diferenciable.

El estudio de las variedades diferenciables proporciona la posibilidad de obtener resulta- dos que se involucran en razones de cambio, se busca presentar conceptos que ayuden a interpretar de forma más sencilla en problema y el objetivo del estudio.

La hipótesis que pretende esta investigación es como la partición de la unidad y sus aplicaciones dará´ una demostración al Teorema de Tietze Diferenciable.

Capítulo 1

1. Planteamiento del Problema, Antecedentes y Objetivo de la Investigación

1.1. Planteamiento del Problema

La noci n de partici n de la unidad es una herramienta importante en el estudio de las variedades diferenciables, este concepto permite obtener resultados locales y generales. Para mostrar la existencia de partici n de la unidad, se necesita imponer algunas restricciones a las variedades, suponiendo que las variedades son de Hausdorff y separables. El presente trabajo de investigación se propone desarrollar en variedades diferenciables para demostrar el Teorema de Tietze Diferenciable, haciendo uso la Partici n de la Unidad y sus Aplicaciones .

La investigación se desarrolló bajo la siguiente interrogante:
¿ Cómo se puede utilizar la partici n de la unidad y sus aplicaciones en la demostraci n del Teorema de Tietze Diferenciable?

1.2. Antecedentes de la Investigación

LAGES LIMA, Elon,(2007) “Variedades Diferenciables” [1]. En su texto de variedades diferenciables de posgrado, la partici n de la unidad y sus aplicaciones demuestra en pocas líneas el teorema de Tietze diferenciable. En mi investigación se propone demostrar el teorema de Tietze diferenciable en forma rigurosa y detallada.
PLAZA, Sergio,(2003) “Análisis en Varias Variables” [7]. En su texto de Análisis en Varias Variables de posgrado, muestra que la partici n de la unidad son de Hausdorff y separables, tiene por objetivo presentar la existencia de una clase especial de funciones cototos(bump functions). En mi investigación se propone desarrollar el teorema de Tietze Diferenciable construyendo la existencia de una clase especial de funciones cototos para

demostrar el teorema de Tietze Diferenciable.

RAMIRES LOSADA, Enrique,(2012) “Topologia II” [10]. En su texto de Topología II desarrolla una herramienta llamada Axiomas de Separaci n, obteniendo el Teorema(Lema de Urysohn) y este lema tiene aplicaciones de Teorema extensión de Tietze.

http://www.emis.de/journals/DM/vX1/art6.pdf, (2012) “Teorema de Extensión de Tietze” [11]. En este trabajo se hace un repaso a diferentes demostraciones que ha tenido el Teorema de Extensi n de Tietze, debidas a Hausdorff, Bohr, Urysohn y Maldelkern (Esta última es la más simple y reciente).

En la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas de la UNA-Puno no se ha encontrado trabajos de investigación en el área de Variedades Diferenciables.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Estudiar la partici n de la unidad y sus aplicaciones para la demostraci n del teorema de Tietze diferenciable.

1.3.2. Objetivos específicos

- Estudiar espacios topol gicos compactos.
- Demostrar la existencia de la partici n de la unidad subordinada a un cubrimiento abierto de una variedad.
- Demostrar las aplicaciones de la Partici n de la Unidad.

Capítulo 2

2. Marco Teórico

En este capítulo presentaremos un resumen de los resultados básicos necesarios para el desarrollo de los capítulos siguientes.

2.1. Topología

Definición 2.1 Sea $X = \emptyset$, se denota $P(X)$ al conjunto potencia de X (es decir el conjunto formado por todos los subconjuntos de X). Decimos que $\tau \subseteq P(X)$ es una topología sobre X si y solo si:

i) $\emptyset, X \in \tau$

ii) $U_1, U_2 \in \tau \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau$

iii) $\{U_\lambda\} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau$

Si τ es una topología sobre X entonces los elementos de τ son llamados conjuntos τ-abiertos.
Se dice que el par (X, τ) es un espacio topol gico si y solo si $X = \emptyset$ y $\tau \subseteq P(X)$ es una topología sobre X.

Definición 2.2 Una familia $\beta \subset \tau$ es una base para (X, τ), si y solo si dado $U \in \tau$ y $p \in U$, se tiene que existe un $B \in \beta$ tal que $p \in B \subset U$.

Definición 2.3 Sea (X, τ) un espacio topológico e $Y \subset X$, la colección

$$\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y, denominada topología de subespacio o topología relativa.
Con esta topologia, Y se denomina subespacio de X; sus abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y.

Lema 2.1 Sean $\mathcal{B}$ una base para la topología de X e $Y \subset X$, entonces la colección

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología de subespacio sobre Y.

Cuando se trabaja con un espacio X y un subespacio Y, se necesita ser cuidadoso al utilizar el termino conjunto abierto.
Se dará la siguiente definici n.

Definición 2.4 Si Y es un subespacio de X, se dice que un conjunto U es abierto en Y (o abierto relativo a Y) si pertenece a la topología de Y; esto implica, en particular que es un subconjunto de Y. Se dice que U es abierto en X si pertenece a la topología de X.

Lema 2.2 Sea Y un subespacio de X. Si U es abierto en Y e Y es abierto en X, entonces U es abierto en X.

Definición 2.5 Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto A de X es un conjunto cerrado en (X, τ), si $X - A$ es abierto en (X, τ).

Teorema 2.1 Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces:

1. $\emptyset$ y X son conjuntos cerrados.
2. La intersección de cualquier coleccion de subconjuntos de (X, τ), es un conjunto cerrado.
3. La unión de cualquier coleccion finita de subconjuntos cerrados de (X, τ) es un conjunto cerrado.

Demostración.

1. $\emptyset$ y X son cerrados porque son los complementos de los conjuntos abiertos X y $\emptyset$, respectivamente.
2. Dada una colecci n de conjuntos cerrados $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$, aplicamos la ley de De-Morgan,

$$X - \bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in J} (X - A_\alpha)$$

Puesto que los conjuntos $X - A_\alpha$ son abiertos por definici n, la parte derecha de la ecuación representa una unión arbitraria de conjuntos abiertos, y así, es abierto. Por lo tanto, $\bigcap A_\alpha$ es cerrado.

3. De manera similar, si A_i es cerrado para $i = 1, ..., n$, consideremos la ecuación

$$X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X - A_i).$$

El conjunto de la parte derecha de esta ecuación es una intersección finita de conjuntos abiertos y es, consiguientemente, abierto. De aquí, $\bigcup A_i$ es cerrado.

Teorema 2.2 Sea (X, τ) un espacio topológico, $Y \subset X$, entonces un conjunto A es cerrado en Y si, y solo si, es igual a la intersección de un conjunto cerrado de X con Y.

Teorema 2.3 Sea (X, τ) un espacio topológico, $Y \subset X$. Si A es cerrado en Y e Y es cerrado en X, entonces A es cerrado en X.

Definición 2.6 Sea X espacio topológico.

1. Si $A \subset X$. La clausura $cl_\tau(A) = A$ de A es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.

2. Si $A \subset X$. El Interior $int_\tau(A)$ de A es la unión de todos los conjuntos abiertos que son subconjuntos de A.

Lema 2.3

1. La clausura A es un subconjunto cerrado de X.

2. $A \subset A$.

3. Si $A \subset K \subset X$ con K cerrado, entonces $A \subset K$.

Lema 2.4

1. El interior $int(A)$ es un subconjunto abierto de X.

2. $int(A) \subset A$.

3. Si $U \subset A \subset X$ con U abierto, entonces $U \subset int(A)$.

Teorema 2.4 Sean (X, τ) espacio topológico, $Y \subset X$ subespacio, y $A \subset Y$ un subconjunto. Sea A la clausura de A en X. Entonces la clausura de A en Y es $Y \bigcap A$.

Definición 2.7 Sean (X, τ) espacio topológico, $U \subset X$ subconjunto, $x \in X$. Decimos que U es una vecindad de x, si $x \in U$ y U es abierto en X.

Definición 2.8 Un (X, τ) espacio topológico, se dice que tiene base numerable en x si existe una coleccion numerable $\mathcal{B}$ de vecindades de x, tales que cada vecindad de x contiene al menos a uno de los elementos de $\mathcal{B}$. Un espacio que tiene una base numerable en cada uno de sus puntos se dice que tiene una base numerable.

Teorema 2.5 Sea (X, τ) espacio topológico, $A \subset X$ subconjunto y $x \in X$.

1. Entonces $x \in A$ si, y solo si, cada conjunto abierto U que contiene a x intersecta a A.

2. Sea $\mathcal{B}$ una base para X. Entonces $x \in A$ si, y solo si, cada elemento básico B que contiene a x intersecta a A.

Definición 2.9 Un espacio topológico (X, τ), se denomina espacio de Hausdorff si para cada par x_1, x_2 de puntos distintos de X, existen vecindades U_1 y U_2 de x_1 y x_2 respectivamente, que son disjuntos.

Teorema 2.6 Si X es un espacio de Hausdorff, entonces una sucesion de puntos de X converge a lo sumo a un punto de X.

Definición 2.10 Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) dos espacios topológicos.

1.- Decimos que $f : X \to Y$ es (τ_X, τ_Y)-continua si, y solo si, $V \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau_x$.

2.- Decimos que $f : X \to Y$ es (τ_X, τ_Y)-continua en $p \in X$ si, y solo si, $\forall w \in V_{fp}$ tal que $f(V) \subseteq w$

se sigue que: $f : X \to Y$ es (τ_X, τ_Y)-continua si, y solo si, f es (τ_X, τ_Y)-continua en p: $\forall p \in X$.

Definición 2.11 Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{C}$ es una familia localmente finita si todo punto $x \in X$,

tiene un entorno que intersecta a C_α solo para un numero finito de valores de α.
Mas precisamente, $\mathcal{C}$ es localmente finita si y solo si para cada $x \in X$, existe un entorno V con $x \in V$ y existe $\Lambda' \subset \Lambda$ subconjunto finito (o vacío) de indices tales que

$$V \cap C_\alpha = \emptyset, \qquad \forall\, \alpha \in \Lambda - \Lambda'$$

.

Observaciones:

1.- Sea (X, τ) un espacio topol gico y $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia localmente finita. Si $K \subset X$ es un subconjunto compacto entonces existe $\Lambda' = \Lambda'(K) \subset \Lambda$ finito o vacío tal que $K \cap C_\alpha = \emptyset$, $\forall\, \alpha \in \Lambda - \Lambda'$.
En efecto: Considere el cubrimiento de K dado por los entornos abiertos que intersectan finitos elementos de $\mathcal{C}$, para cada punto de K. De la compacidad de K, existe un subcubrimiento finito de tales entornos que cubren K, así obtenemos que son finitos los elementos que intersectan a K.
En particular, dada una familia localmente finita $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ en un espacio compacto X, se tiene C_α salvo para un numero finito de indices α.

2.- Sea (X, τ) un espacio topol gico y $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia localmente finita, se cumple:

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$$

.

3.- Sea (X, τ) un espacio topol gico localmente compacto y $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces $\mathcal{C}$ es localmente finita si y sólo si dado $K \subset X$ compacto, existe $\Lambda' = \Lambda'(K) \subset \Lambda$ finito tal que $C_\alpha = \emptyset$, $\forall\, \alpha \in \Lambda - \Lambda'$.

4.- Si (X, τ) un espacio topol gico con base numerable y $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia localmente finita, entonces existe $\Lambda \subset \Lambda'$ numerable tal que $C_\alpha = \emptyset$, $\forall\, \alpha \in \Lambda - \Lambda'$.

Ejemplo 2.1 La familia

$$\mathcal{C} = \{(n, +\infty) \subset \mathbb{R} : n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

es localmente finita.

Ejemplo 2.2 Toda familia finita es localmente finita.

2.2. Espacios Compactos

Definición 2.12 1. Una colección $A = \{U_\alpha\}_\alpha$ de subconjuntos de X se dice que cubre X, o que es un cubrimiento de X, si $X = \bigcup_{\alpha\in J}\{U_\alpha\}$.

2. Se dice que A es un cubrimiento abierto de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.

3. Un espacio X se dice que es compacto si cada cubrimiento abierto de X, podemos extraer una colección finita que también cubre X.

Ejemplo 2.3 Un espacio topol gico X que contenga un numero finito de puntos es trivialmente compacto, desde que cualquier cubrimiento por abiertos de X es finito.

Ejemplo 2.4 La recta real R no es compacta, pues el cubrimiento de R por intervalos abiertos

$$A = \{(n - 1, n + 1) : n \in Z\}$$

no contiene ninguna subcolecci n finita que cubra R.

Ejemplo 2.5 La recta real R en la topología trivial es compacta, desde que los únicos cubrimientos abiertos son las colecciones $\{R\}$ y $\{\emptyset, R\}$, los cuales son finitos.

Ejemplo 2.6 El subespacio

$$X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in N\}$$

de R es compacto.

Lema 2.5 Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto, si, y solo si, cada cubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre Y.

Teorema 2.7 Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.

Teorema 2.8 Cada subespacio compacto de un espacio de hausdorff es cerrado.

Lema 2.6 Si Y es un subespacio compacto de un espacio de Hausdorff X y x_0 no esta en Y, entonces existen abiertos disjuntos U y V de X conteniendo a x_0 y a Y

respectivamente.

Ejemplo 2.7 Los intervalos $(a, b]$, $[a, b)$ y (a, b) no son cerrados en $\mathbb{R}$, luego los intervalos no pueden ser compactos.

Teorema 2.9 La imagen de un espacio compacto bajo una aplicación continua es un espacio compacto.

Teorema 2.10 Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

2.3. Compacidad Local

Definición 2.13 Un espacio X se dice que es localmente compacto en x si existe un subespacio compacto C de X que contiene un entorno de x:

$$x \in V \subset C \subset X$$

Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos, diremos que X es localmente compacto.

Ejemplo 2.8 Todo espacio compacto es localmente compacto.

Ejemplo 2.9 La recta real $\mathbb{R}$ no es compacto, pero es localmente compacto. Cada punto $x \in \mathbb{R}$ esta contenido en el subespacio compacto $C = [x - 1, x + 1]$ el cual contiene la vecindad $V = (x - 1, x + 1)$.

Ejemplo 2.10 El espacio $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto, cada punto $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ esta contenido en el subespacio compacto.

$$C = [x_1 - 1, x_1 + 1] \times ... \times [x_n - 1, x_n + 1]$$

el cual contiene la vecindad.

$$V = (x_1 - 1, x_1 + 1) \times ... \times (x_n - 1, x_n + 1)$$

2.4. Axiomas de Separación

Definición 2.14 Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que (X, τ) es de T_0, si y solo si cualesquiera dos puntos $x, y \in X\,(x = y)$, existe un abierto U de X tal que $x \in U$, $y \notin U$ o $y \in U$ y $x \notin U$.

Definición 2.15 Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que (X, τ) es T_1 si y solo si, dados $x, y \in X\,(x = y)$ existen abiertos U, V de X tales que $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$ y $x \notin V$.

Observación: $T_1 \Rightarrow T_0$.

Ejemplo 2.11
Un contraejemplo $X = \{1, 2\}$ con $\tau = \{\varphi, X, \{1\}\}$. Entonces X es T_0 pero no es T_1.

Proposición 2.1 (X, τ) es T_1 si y solamente si todo conjunto finito de puntos de X es cerrado.
Esto es equivalente a pedir que los conjuntos de la forma $\{x\}$ con x punto, son cerrados.

Definición 2.16 Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que (X, τ) es espacio de Hausdorff si y solamente si, para cualesquiera de los dos puntos x, $y \in X\,(x = y)$ existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ e $y \in V$

Definición 2.17 Sea X el espacio topológico. Se dice que X es regular si y solamente si dados $x \in X$ y C cerrado en X, tales que $x \in X \setminus C$, existen U V abiertos ajenos con $x \in U$ y $C \subset V$.

Ejemplo 2.12 Sea un contraejemplo.
(R, τ) es T_2 pero no es regular.

Definición 2.18 (Completamente regular) Sea X un espacio topológico. Se dice que X es completamente regular si y solamente si dados $x \in X$ y C cerrado en X con $x \in X \setminus C$, existe una función continua $\mathbf{f} : X \longrightarrow \mathbf{I}$, $\mathbf{I} = [0, 1]$, tal que $\mathbf{f}(x) = 1$ y $\mathbf{f}(C) = 0$.

Observación: Si X es completamente regular, entonces X es regular.

Definición 2.19 (Normal) Sea X un espacio topológico. Se dice que X es normal si y solamente si dados C_1, C_2 cerrados ajenos en X, existen U, V abiertos tales que $C_1 \subset U$ y $C_2 \subset V$.

Definición 2.20 (T_3) Sea X un espacio topológico. Se dice que X es T_3 si y solamente si X es regular y T_0.

Ejemplo 2.13 Sea un contraejemplo: Espacio topol gico que si es regular pero no es T_0.

Sea X conjunto y τ la topología indiscreta. Si X tiene al menos un punto, X no es T_0 pero si es regular y completamente regular.

Definición 2.21 (Tychonoff) Sea X un espacio topológico. Se dice que X es Tychonoff si y solamente si, X es completamente regular y T_0.

Definición 2.22 (T_4) Sea X espacio topológico. Se dice que X es T_4 si y solamente si X es normal y T_1.

Observación: Si X es Tychonoff, entonces X es T_3.

Lema 2.7 Sea X un espacio topológico donde los conjuntos unipuntuales son cerrados.

i) X es regular si, y sólo si, dado un punto x de X y un entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\overline{V} \subset U$.

ii) X es normal si, y sólo si, dado un conjunto cerrado A y un conjunto abierto U que contiene a A, existe un conjunto abierto V que contiene a A tal que $\overline{V} \subset U$.

2.5. Lema de Urysohn

Decir que un espacio X es normal resulta ser una suposición muy fuerte. En particular, los espacios normales admiten muchas funciones continuas:

Teorema 2.11 (Lema de Urysohn) Si A, B son conjuntos cerrados disjuntos de un espacio normal X, entonces existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que para todo $a \in A$, $f(a) = 0$ y para todo $b \in B$, $f(b) = 1$. Este lema tiene muchísimas grandes aplicaciones:

a) Teorema de metrización de Urysohn. Si X es un espacio normal con una base contable (i. e. segundo-contable), entonces podemos usar la abundancia de funciones continuas de X en $[0,1]$ para asignarle coordenadas a los puntos de X para obtener un encaje de X en R^{ω}. De aquí, podemos ver que cada segundo-contable espacio normal es un espacio métrico.

b) Teorema de extension de Tietze. Sea A un subconjunto de un espacio X y $f : A \longrightarrow [0,1]$ una función continua. Si X es normal y A cerrado en X, entonces podemos encontrar una función de $g : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $g|_A = f$, es decir, g es una extension de f en X.

c) Encaje de variedades en R^N. Un espacio X es una $n-$variedad topológica si para cada punto $x \in X$, existe una vecindad abierta U_x tal que U_x es homeomorfo a una $n-$bola abierta.
Desarrollando una herramienta llamada particiones de unidad, obtenemos el siguiente teorema: Toda $n-$variedad compacta es homeomorfa a un subespacio de algún R^N.

Teorema 2.12 (de Extensión de Tietze) Sea X un espacio topol gico normal y Y un subespacio cerrado de X. Entonces, para toda función continua $f : Y \longrightarrow [-1,1]$ tal que $F|_Y = f$.

Demostración. Dividimos el intervalo en los siguientes sub intervalos.

Figura 1:

Sean $I_1 = f^{-1}[-1, -1/3]$, $I_2 = f^{-1}[-1/3, 1/3]$, $I_3 = f^{-1}[1/3, 1]$
Entonces I_1 y I_3 son cerrados en Y, pero como Y es cerrado en X, entonces I_1 e I_3 son cerrados en X y $I_1 \cap I_3 = \varphi$. Entonces existe una función continua $g_0 : X \longrightarrow [-1/3, 1/3]$.

$$|g_0(x)| \leq 1/3, \quad \forall x \in X$$

Calculemos $|f - g_0|$:

i) Si $x \in I_1$, $f(x) - g_0(x) \leq -2/3$ pues $f(x) \leq -1$ y $g_0(x) \leq -1/3$.

ii) Si $x \in I_3$, $f(x) - g_0(x) \leq 2/3$ pues $f(x) \leq 1$ y $g_0(x) \leq 1/3$.

iii) Si $x \notin I_1 \cup I_3$, entonces $f(x) - g_0(x) \leq 2/3$ pues es la máxima diferencia.

Por lo tanto $|f - g_0| \leq 2/3$.
Ahora, definimos

$$(f - g_0) : Y \longrightarrow [-2/3, 2/3]$$

Figura 2:

Sean $J_1 = (f - g_0)^{-1}[-2/3, -2/9]$, $J_2 = (f - g_0)^{-1}[-2/9, 2/9]$, $J_3 = (f - g_0)^{-1}[2/9, 2/3]$. Entonces J_1 y J_3 son cerrados en X (Primero en Y) y $J_1 \cap J_3 = \varphi$. Entonces existe $g_1 : X \longrightarrow [-2/9, 2/9]$ continua tal que $g_1|_{J_1} = -2/9$ y $g_2|_{J_2} = 2/9$.
Entonces

$$|g_1(x)| \leq 2/9 = (1/3)(2/3)^1.$$

de donde

$$|(f(x) - g_0(x) - g_1(x))| \leq (2/3)^2 = 4/9.$$

Consideremos ahora

$$(f - g_0 - g_1) : Y \longrightarrow [-4/9, 4/9]$$

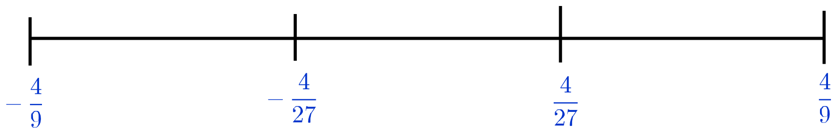

Figura 3:

Y sean $K_1 = (f - g_0 - g_1)^{-1}[-4/9, -4/27]$, $K_2 = (f - g_0 - g_1)^{-1}[-4/27, 4/27]$, $K_3 = (f - g_0 - g_1)^{-1}[4/27, 4/9]$.

De manera análoga a las anteriores, como K_1 y K_3 son cerrados en X y $K_1 \cap K_3 = \varphi$, existe $g_2 : X \longrightarrow [-4/27, 4/27]$ continua, tal que $g_2|_{K_1} = -4/27$ y $g_2|_{K_3} = 4/27$. Entonces

$$|g_2(x)| \leq 4/27 = (1/3)(2/3)^2.$$

de donde

$$|(f(x) - g_0(x) - g_1(x) - g_2(x)| \leq (2/3)^3 = 8/27.$$

Si continuamos inductivamente, tenemos una función continua

$$g_n : X \longrightarrow [-(1/3)(2/3)^n, (1/3)(2/3)^n].$$

tal que

$$|g_n(x)| \leq (1/3)(2/3)^n.$$

y

$$f(x) - \sum_{i=0} g_i(x) \leq (2/3)^{n+1}.$$

Para todo $x \in Y$. Sea

$$F(x) = \sum_{i=0} g_i(x).$$

Por demostrar:

- $F : X \longrightarrow [-1, 1]$.
- $F|_Y = f$.

- f es continua.

Primero, se ve que $|g_n(x)| \le (1/3)(2/3)^n$, de donde

$$\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^i}{3^i} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1.$$

Que converge, entonces g_i converge. Además,

$$\left|\sum_{i=0} g_i(x)\right| \le 1.$$

Por lo que $F : X \longrightarrow [-1, 1]$.
Como:

$$\left|f(x) - \sum_{i=0} g_i(x)\right| \le (2/3)^{n+1}.$$

Para todo $x \in Y$, entonces si $n \longrightarrow \infty$, $(2/3)^{n+1} \longrightarrow 0$. Así que $F|_Y = f$.
Por último,

$$\left|F - \sum_{i=0} g_i(x)\right| = \left|\sum_{i=0} g_i(x) - \sum_{i=0} g_i(x)\right| = \left|\sum_{i=n+1} g_i(x)\right| \le \frac{1}{3}\sum_{i=n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^i$$

$$\le \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3}\sum_{i=0}\left(\frac{2}{3}\right)^i \le \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Así que, para todo $x \in X$,

$$\left|F - \sum_{i=0} g_i(x)\right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Converge uniformemente. Recordando que la convergencia uniforme de funciones continuas es continua, concluimos que F es continua.

Variedades Diferenciables

En las siguientes secciones, presentaremos un resumen de los conceptos y resultados básicos sobre Variedades Diferenciables para el desarrollo del Capítulo 4.

2.6. Superficies

Definición 2.23 Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto. Una aplicación diferenciable $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ se llama INMERSIÓN si, para cada $x \in U$, la derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ es una transformación lineal inyectiva.

Ejemplo 2.14 La función inclusión.

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n} \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Esta función es una transformación lineal, i es diferenciable en $U = \mathbb{R}^m$, ademas $i'(x) = i$ es inyectiva para todo $x \in \mathbb{R}^m$, por lo tanto deducimos que la función inclusi n es una inmersión

Definición 2.24 Sea $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, $\phi : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión de clase C^k, se dice que es un MERGULLO DE CLASE C^k de U_0 en $\mathbb{R}^n$ si ϕ es un homeomorfismo de U_0 sobre $\phi(U_0)$.

Definición 2.25 Sea $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, una parametrización de clase C^k y dimension m del subconjunto V_0 es un mergullo $\phi : U_0 \longrightarrow V_0$ de clase C^k, donde $U_0 = \phi^{-1}(V_0)$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$

Observación Respecto a la inyectividad de $\phi'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, recordemos que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $\phi'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva.
2. $\frac{\partial \phi}{\partial x^j}(x) = \phi'(x).e_j \;\; j = 1, ..., m$ son vectores linealmente independientes.
3. La matriz jacobiana $n \times m$, $J\phi(x) = \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}(x)\right)$, tiene rango m; es decir , alguno de sus determinantes menores $m \times m$ es diferente de cero.

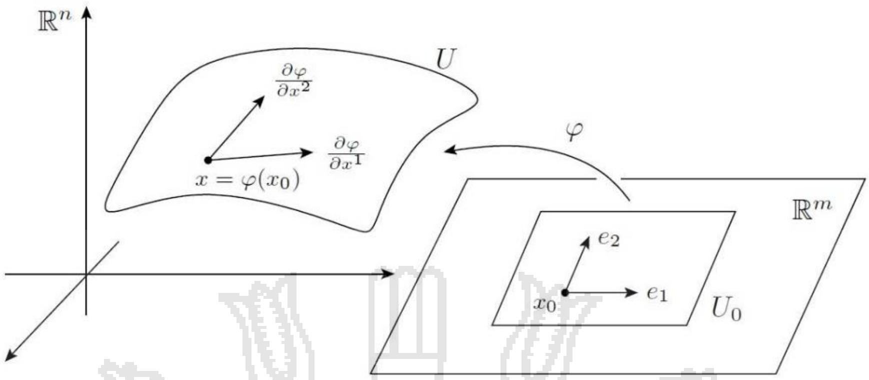

Figura 4:

Proposición 2.2 Sea $\phi : U \subset R^m \longrightarrow R^n$ una función diferenciable en $u \in U$. Si $J\phi(u)$ tiene algún determinante menor $m \times m$ diferente de cero, entonces los vectores $\phi'(x).e_j$, $J = 1, ..., m$ son linealmente independientes.

Proposición 2.3 Sea $\phi : U \subset R^m \longrightarrow R^n$ una función diferenciable en $u \in U$. Si $\phi'(x).e_j$, $J = 1, ..., m$ son linealmente independientes, entonces $f'(u) : R^m \longrightarrow R^n$ es inyectiva.

Ejemplo 2.15 Parametrizaciones de dimensión 1 en R^n

Sea J un intervalo abierto de números reales. Un camino de clase C^k, $\phi : J \longrightarrow R^n$, es un mergullo si y sólo si $\phi : J \longrightarrow \phi(J)$ es un homeomorfismo y $\phi'(t) = 0$, para todo $t \in J$

Observación Existen inmersiones inyectivas de clase C^∞ de un intervalo abierto de los reales en R^2 que no son homeomorfismos sobre su imagen. Esta situaci n se ilustra en la siguiente figura.

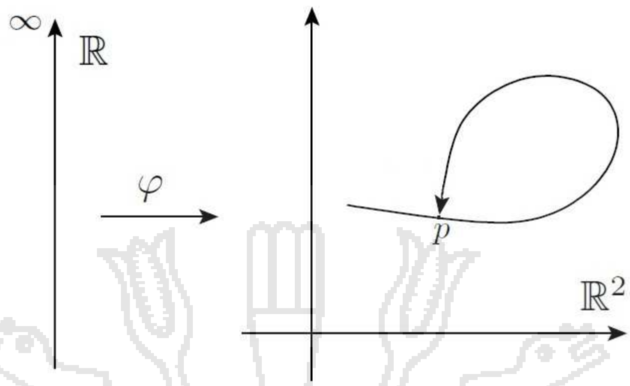

Figura 5:

Se observa que una vecindad de p no se puede ver como imagen de un homeomorfismo de un intervalo abierto J.

Ejemplo 2.16 Parametrizaciones de dimensión 2 en R^3

Sea U_0 un subconjunto abierto de R^2 y $\phi : U_0 \longrightarrow U = \phi(U_0) \subset R^3$ dada por:

$$\phi(u, v) = (\phi^1(u, v), \phi^2(u, v), \phi^3(u, v))$$

una parametrización de clase C^k.

El conjunto $U = \phi(U_0)$ se llama superficie local.

La independencia lineal de los vectores

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \frac{\partial\phi^1}{\partial u}, \frac{\partial\phi^2}{\partial u}, \frac{\partial\phi^3}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\phi}{\partial v} = \frac{\partial\phi^1}{\partial v}, \frac{\partial\phi^2}{\partial v}, \frac{\partial\phi^3}{\partial v}$$

es equivalente a

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} = 0$$

El vector $n = n(u, v) = \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial u}$ se llama vector normal a U en el punto $\phi(u, v)$.

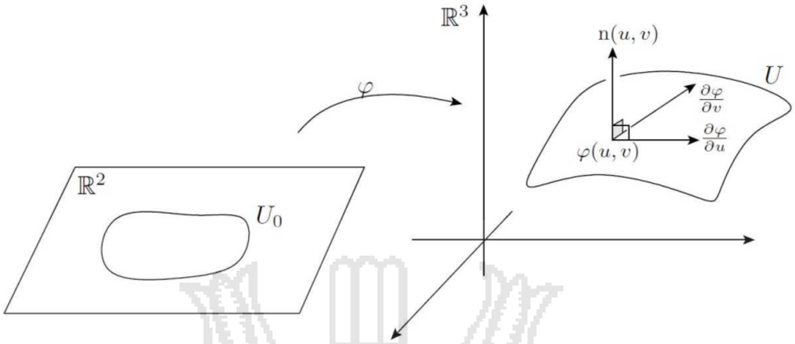

Figura 6:

Definición 2.26 Una superficie m-dimensional de clase C^k en R^n es un subconjunto no vacío $M = M^m \subset \mathbb{R}^n$, en el cual todo punto p posee una vecindad abierta U dotada de una parametrización de clase C^k y dimensión m.

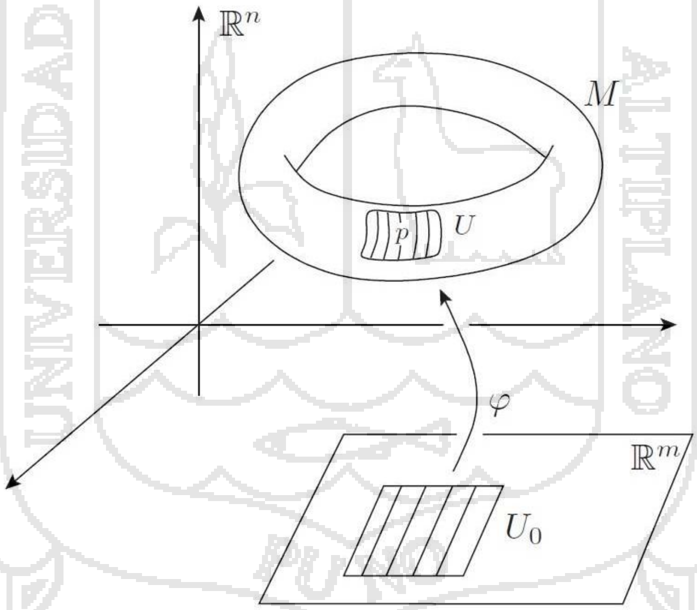

Figura 7:

Observación El conjunto M tiene la topología inducida de R^n. Así, la vecindad abierta U de p es la intersección de M con un conjunto abierto de R^n.
El número $n - m$ se llama codimensión de M en R^n

Definición 2.27 Una superficie de dimensión n en R^{n+1} se llama Hipersuperficie.

Observación Los casos extremos de superficies son:

1. Una superficie cero-dimensional en R^n es un conjunto(discreto) de puntos aislados.
2. Una superficie de dimensión n en R^n es un conjunto abierto de R^n

Ejemplo 2.17 La esfera unitaria $S^n = \{y \in R^{n+1} : \langle y, y\rangle = 1\}$ es una superficie de clase C^∞ y dimensión n en R^{n+1}

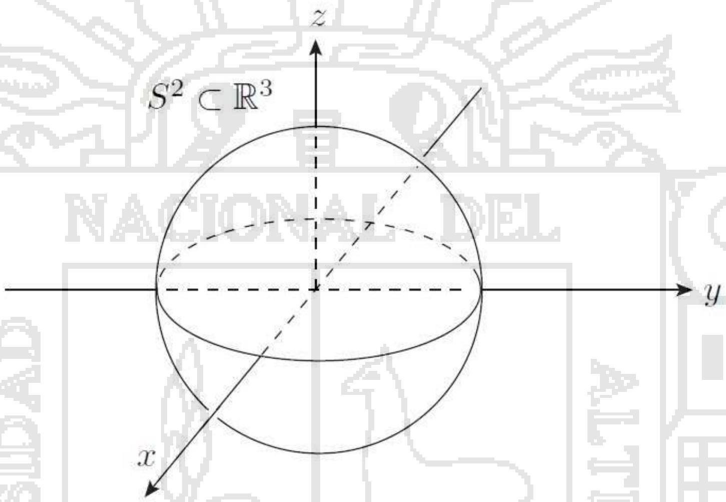

Figura 8:

Cambio de Coordenadas

Sean $M = M^m \subset \mathbf{R}^n$ una superficie de clase C^k y $\phi : U_0 \subset \mathbf{R}^m \to U$ una parametrización del abierto $U \subset M$. Los puntos de U son determinados por m cantidades (o parámetros):

$$(x^1, ..., x^m) \in U_0 \mapsto p = \phi(x^1, ..., x^m) \in U$$

Si V_0 es un conjunto abierto de $\mathbf{R}^m$ y $\xi : V_0 \to U_0$ es un difeomorfismo de clase C^k, entonces $\psi = \phi \circ \xi : V_0 \to U$ es también una parametrización de U. La aplicación ξ se llama cambio de coordenadas

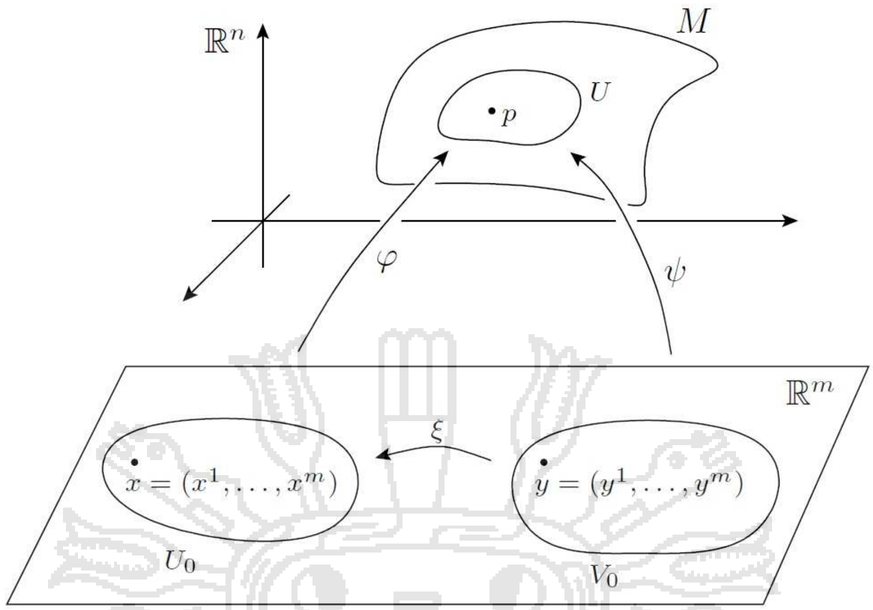

Figura 9:

Mostraremos ahora que esta es la única manera de obtener nuevas parametrizaciones de U.
Si $\phi : U_0 \to U$ y $\psi : V_0 \to V$ son parametrizaciones de M tales que $U \cap V = \emptyset$, es claro que la aplicación $\xi = \psi^{-1} \circ \phi : \phi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ es un homeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^m$.

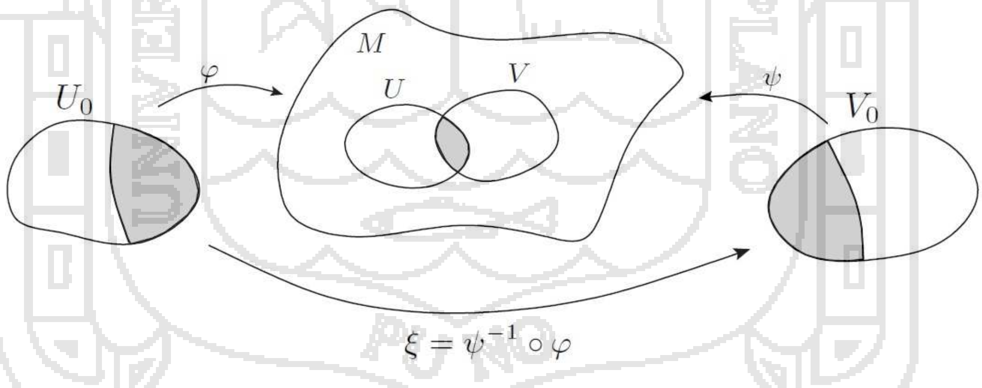

Figura 10:

Observación No se puede concluir de inmediato la diferenciabilidad de $\psi^{-1} \circ \phi$, ya que ψ^{-1} no esta definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$. Para salvar esta dificultad, se presenta la proposición seguiente, que da información de una situaci n un tanto mas general.

Proposición 2.4 Sean V_0 un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ y $\psi : V_0 \to V$ una parametrización de clase C^k del conjunto $V \subset \mathbf{R}^n$. Dados $U_0 \subset \mathbf{R}^r$, abierto, y $\mathbf{f} : U_0 \to V \subset \mathbf{R}^n$ de clase C^k, entonces:

1. La compuesta $\psi^{-1} \circ \mathbf{f} : U_0 \to V_0 \subset \mathbf{R}^m$ es de clase C^k.

2. Para $x \in U_0$ y $z = \psi^{-1} \circ \mathbf{f}(x)$ tenemos:

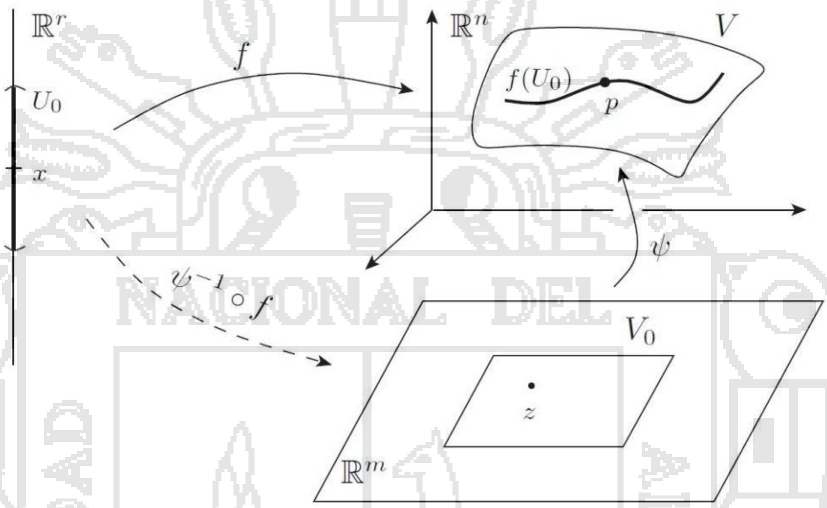

Figura 11:

Corolario 2.1 Sean U_0 y V_0 subconjuntos abiertos en $\mathbf{R}^m$ y $\phi : U_0 \to V$, $\psi : V_0 \to V$ parametrizaciones de clase C^k del mismo conjunto $V \subset \mathbf{R}^n$. Entonces el cambio de coordenadas $\xi : \psi^{-1} \circ \phi$ es un difeomorfismo de clase C^k.

El corolorio anterior permite extender el concepto de aplicación diferenciable, hasta ahora definido solo en el caso en que el dominio es abierto del espacio euclidiano.

Definición 2.28 Sea $M^m \subset \mathbf{R}^n$ una superficie de clase C^k. Decimos que una aplicación $\mathbf{f} : M \to \mathbf{R}^s$ es diferenciable en un punto $p \in M$ si existe una parametrización $\phi : U_0 \to U$ de clase C^k, con $p \in U$, tal que $\mathbf{f} \circ \phi : U_0 \to \mathbf{R}^s$ es diferenciable en el punto $p_0 = \phi^{-1}(p) \in U_0$.

Observación La definici n 2.28 no depende de la parametrización.
En efecto: sea ψ una parametrización (arbitraria) de clase C^k de una vecindad de p. De la parte b) de la demostraci n del corolario 2.1, $\phi^{-1} \circ \psi$ es diferenciable en $\psi^{-1}(p)$. Pero

por definici n $\mathbf{f} \circ \phi$ es diferenciable en $\phi^{-1}(p)$, de modo que por el calculo diferencial en espacios euclidianos; es decir, por la regla de la cadena $\mathbf{f} \circ \psi = (\mathbf{f} \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \psi)$ es diferenciable en $\psi^{-1}(p)$. Por lo tanto, la definici n anterior no depende de elecci n de la parametrización escogida. Podemos visualizar lo dicho en el siguiente figura. Se ve como extender a la aplicación $\mathbf{f} : M^m \rightarrow \mathbf{R}^s$ la noción de clase C^k. Además, se observa que tal noción tiene sentido cuando M es una superficie de clase C^k.

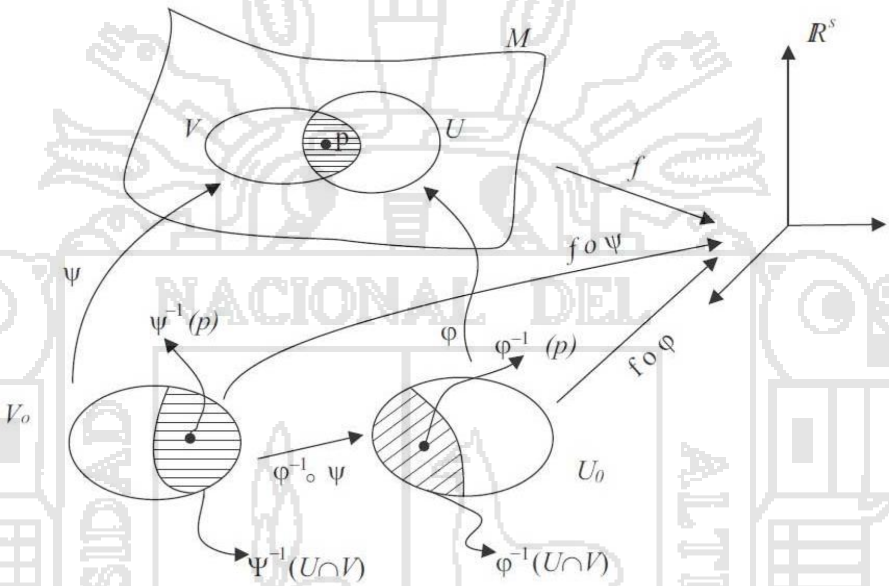

Figura 12:

Definición 2.29 Sean $M^m \subset \mathbf{R}^r$ y $N^n \subset \mathbf{R}^s$ superficies de clase C^k, decimos que $\mathbf{f} : M \rightarrow N$ es diferenciable en p.
Análogamente se define $\mathbf{f} : M^m \rightarrow N^n$ de clase C^k para cada $p \in M$ debe existir una parametrización $\phi : U_0 \rightarrow U \subset M$, de clase C^k, con $p \in U$, tal que $\mathbf{f} \circ \phi : U_0 \rightarrow N \subset \mathbf{R}^s$ sea de clase C^k.

Proposición 2.5 Para que $\mathbf{f} : M \rightarrow N$ sea de clase C^k es necesario y suficiente que, para todo $p \in M$ existan parametrizaciones de clase C^k, $\psi : V_0 \rightarrow V \subset N$ y $\phi : U_0 \rightarrow U \subset M$, con $p \in U$, $\mathbf{f}(U) \subset V$, tales que $\psi^{-1} \circ \mathbf{f} \circ \phi : U_0 \rightarrow V_0 \subset \mathbf{R}^n$ sea de clase C^k.

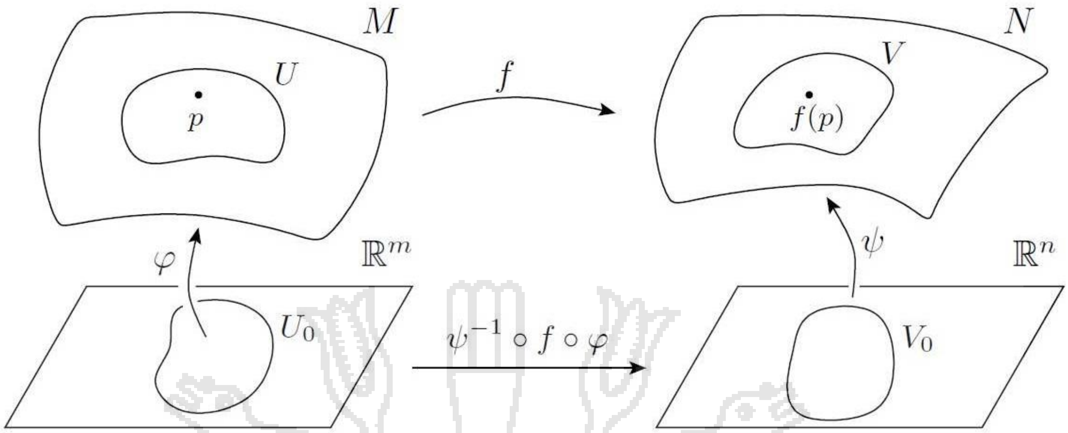

Figura 13:

Corolario 2.2 Si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son de clase C^k, entonces $g \circ f : M \to P$ es de clase C^k.

Observación Si $M^m \subset \mathbf{R}^r$ es una superficie de clase C^k, entonces la aplicación de inclusión $i : M^m \to \mathbf{R}^r$ es de clase C^k. Del mismo modo, si $M^m \subset W$, donde W es un abierto en R^r, la aplicación de inclusión $i : M \to W$ también es de clase C^k. Si $f : W \to \mathbf{R}^s$ es de clase C^k, entonces la restricción $f|_M = f \circ i : M \to \mathbf{R}^s$ es de clase C^k, por el corolario 2.2

El Espacio Tangente

Una característica importante de las superficies diferenciables es que ellas poseen, en cada punto, una aproximación lineal, que es su plano tangente.

Definición 2.30 Sea $M^m \subset \mathbf{R}^r$ una superficie de clase C^k $(k > 1)$ y $p \in M$. El conjunto tangente a M en el punto p, denotado por T_pM es definido como el conjunto:

$$T_pM = \{v \in \mathbf{R}^n; \exists\lambda : I_\varrho(0) \to M \text{ dif. en } 0 \text{ tal que } \lambda(0) = p \text{ y } \lambda'(0) = v\}$$

Observación $T_pM = \emptyset$. En efecto, basta considerar el camino constante:

$$\begin{aligned} \lambda : I_\varrho(0) &\to M \\ t &\mapsto \lambda(t) = p \end{aligned}$$

Claramente λ es diferenciable en 0, $\lambda(0) = p$, luego $0 \in T_pM$ El siguiente resultado establece que el espacio tangente puede ser hallado a travez de las parametrizaciones.

Teorema 2.13 Sea $M^m \subset \mathbb{R}^r$ una superficie de clase C^k $(k > 1)$, $p \in M$ y $\phi : U_0 \to U$ una parametrización de clase C^k y dimensión m, con $p = \phi(x) \in M$, $x \in U_0$. Entonces $T_pM = \phi'(x)(\mathbb{R}^m)$.

Demostración.

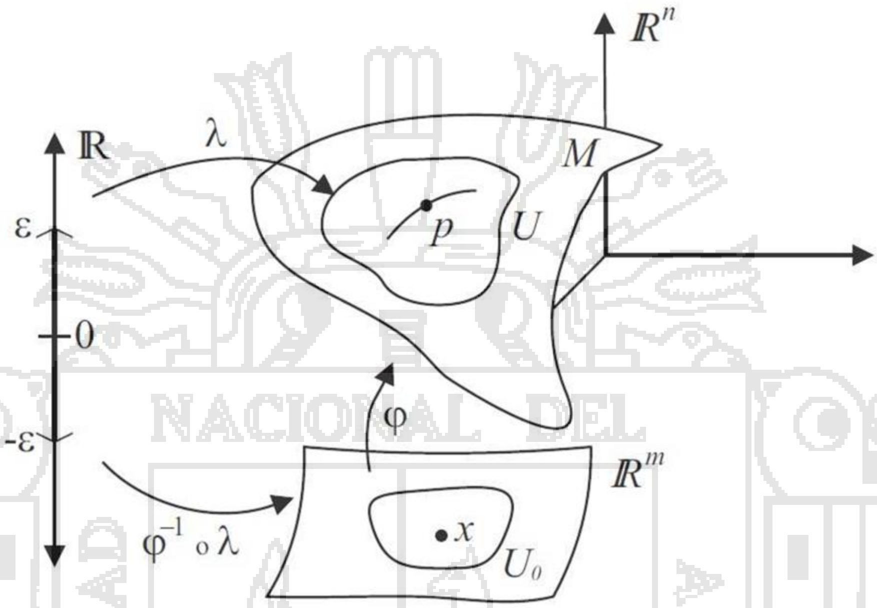

Figura 14:

Sea $v \in \phi'(x)(\mathbb{R}^m)$, entonces $\exists\ u \in \mathbb{R}^m$, tal que:

$$v = \phi'(x)(u) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(a + tu) - \phi(a)}{t}$$

Considere un $\varrho > 0$ suficientemente pequeño tal que $a + tu \in U_0$, $\forall\ t \in I_\varrho(0)$ y considero el camino

$$\begin{aligned} \lambda : I_\varrho(0) &\to M \\ t &\mapsto \lambda(t) = \phi(a + tu) \end{aligned}$$

Observe que λ es diferenciable en 0, $\lambda(0) = p$ y

$$\lambda'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(a + tu) - \phi(a)}{t} = v$$

luego $v \in T_pM$. Es decir $\phi'(x)(\mathbb{R}^m) \subset T_pM$.

Por otro lado, sea $v \in T_pM$, entonces existe $\lambda : I_\varrho(0) \to M$ diferenciable en 0 tal que $\lambda(0) = p$ y $\lambda'(0) = v$. Tomando ϱ suficientemente pequeño, podemos suponer que

$\lambda(I_\varrho(0)) \subset \phi(U_0)$. Sea $\beta = \phi^{-1} \circ \lambda : I_\varrho(0) \to U_0$. Se sigue que β es diferenciable en 0, $\beta(0) = \alpha$ y ademas, como $\phi \circ \beta = \lambda$ entonces por la regla de la cadena

$$v = \lambda'(0) = \phi'(\beta(0))\beta'(0) = \phi'(x)\beta'(0)$$

Denotando $u = \beta'(0) \in \mathbf{R}^m$ tenemos que $v = \phi'(x)(u) \in \phi'(x)(\mathbf{R}^m)$, luego $T_pM \subset \phi'(x)(\mathbf{R}^m)$

Observación

1. Si $M^m \subset \mathbf{R}^r$ una superficie de clase C^k $(k > 1)$ y $p \in M$ entonces T_pM es un $\mathbf{R}$ espacio vectorial de dimension m. Mas aun, si $\phi : U_0 \to U$ es una parametrizacion de clase C^k y dimension m, con $p \in U_0 \subset M$ entonces:

$$T_pM = L_R\{\phi'(x)(e_1), ..., \phi'(x)(e_m)\} = L_R\{\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial\phi}{\partial x_m}(x)\}$$

en donde $x = \phi^{-1}(p)$

2.7. Definición de Variedades Diferenciables

Definición 2.31 Sea M un espacio topológico. Un sistema de coordenadas locales o carta local en M es un homeomorfismo $x : U \longrightarrow x(U)$ de un subconjunto abierto $U \subset M$ sobre un abierto $x(U) \subset \mathbf{R}^m$.

Decimos que m es la dimensión de $x : U \longrightarrow x(U)$ si para cada $p \in U$ se tiene $x(p) = (x^1(p), \ ..., \ x^m(p))$.

Los números $x^i = x^i(p)$, $i = 1, ..., m$ se llaman coordenadas del punto $p \in M$ en sistema x.

Ejemplo 2.18 Coordenadas Cartesianas

Sean $M = \mathbf{R}^m$, $U \subset \mathbf{R}^m$ un abierto y $x : U \to \mathbf{R}^m$ la aplicación de inclusion, $x(p) = p$. Las coordenadas introducidas en U por el sistema x son llamadas coordenadas cartesianas.

Ejemplo 2.19 Coordenadas Polares

Sean $M = \mathbf{R}^2$, $\alpha \in \mathbf{R}$ (arbitrario) y $U_\alpha \subset \mathbf{R}^2$ el complemento de la semi-recta

$$r = \{(t\cos\alpha, t\,\text{sen}\alpha) : \quad t \geq 0\}$$

Construimos un sistema de coordenadas locales $x : U_\alpha \to \mathbf{R}^2$ como sigue: Consideremos la cinta $V_\alpha = \{(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^2 : \quad \rho > 0, \ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\}$ y definimos $\phi : V_\alpha \to U_\alpha$ por

$$\phi(\rho, \theta) = \rho e^{i\theta} = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\theta)$$

Así $x = \phi^{-1} : U_\alpha \rightarrow U_\alpha$ es dado por $x(p) = (\rho(p), \theta(p))$, para todo $p \in U_\alpha$.

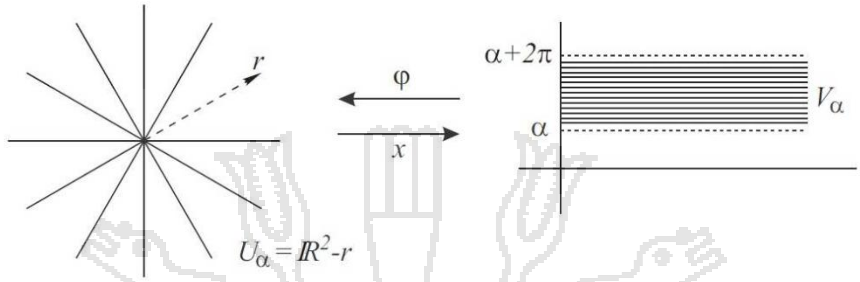

Figura 15:

Ejemplo 2.20 Parametrización de Superficies

Sea $\phi : U_0 \rightarrow U$ una parametrización del subconjunto abierto U, contenido en la superficie $M^m \subset \mathbb{R}^n$. El homeomorfismo inverso $x = \phi^{-1} : U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$ es un sistema de coordenadas locales en M.

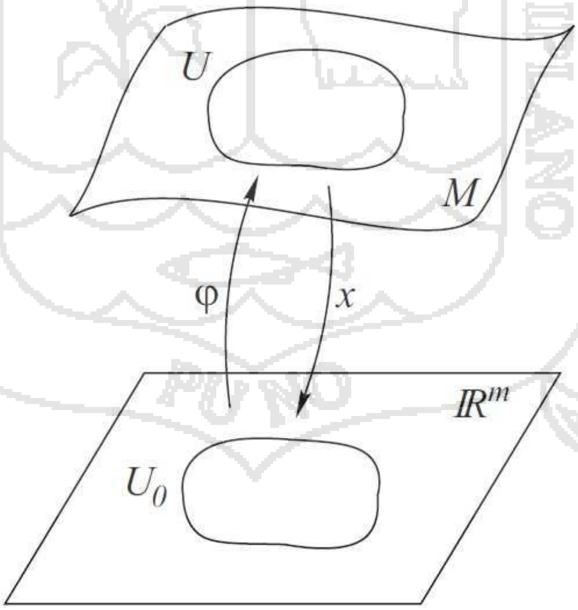

Figura 16:

Definición 2.32 Un atlas de dimensión m sobre un espacio topológico M es una colección A de sistemas de coordenadas locales $x : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$ en M, cuyos dominios U cubren M. Los dominios U de los sistemas de coordenadas $x \in A$ son llamadas las vecindades coordenadas de A.

Ejemplo 2.21

Todos los sistemas de coordenadas locales en una superficie, $M = M^m \subset \mathbf{R}^n$ son inversos de las parametrizaciones en M, luego forman un atlas de dimensión m sobre M

Definición 2.33 Un espacio topológico M en el cual existe un atlas de dimensión m se llama variedad topológica de dimensión m. En otras palabras, M es una variedad topológica de dimensión m si y sólo si cada punto de M tiene una vecindad de homeomorfa a un abierto de $\mathbf{R}^m$.

Ejemplo 2.22

Sea X un conjunto no vacío . Consideremos en X la topología discreta. La familia de funciones $\phi_x : \{x\} \to \{0\} = \mathbf{R}^0$, donde $x \in X$, es un atlas de dimensión 0 en X.

Definición 2.34 Cambio de Coordenadas

Dados los sistemas de coordenadas locales $x : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$ e $y : V \longrightarrow \mathbf{R}^m$ en el espacio topológico M, tales que $U \cap V = \Phi$, cada punto $p \in U \cap V$ tiene coordenadas $x^i = x^i(p)$ en el sistema x y coordenadas $y^i = y^i(p)$ relativamente al sistema y. La correspondencia

$$(x^1(p), \ldots, x^m(p)) \longrightarrow (y^1(p), \ldots, y^m(p))$$

establece un homeomorfismo

$$\phi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \longrightarrow y(U \cap V)$$

El homeomorfismo ϕ_{xy} se llama cambio de coordenadas.

Si $z : W \to \mathbf{R}^m$ es un sistema de coordenadas locales en M tal que $U \cap V \cap W = \emptyset$, entonces $\phi_{xz} = \phi_{yz} \circ \phi_{xy} : x(U \cap V \cap W) \to z(U \cap V \cap W)$.
Además se tienen las igualdades $\phi_{xx} = id_{x(U)}$ y $\phi_{xy} = (\phi_{yx})^{-1}$

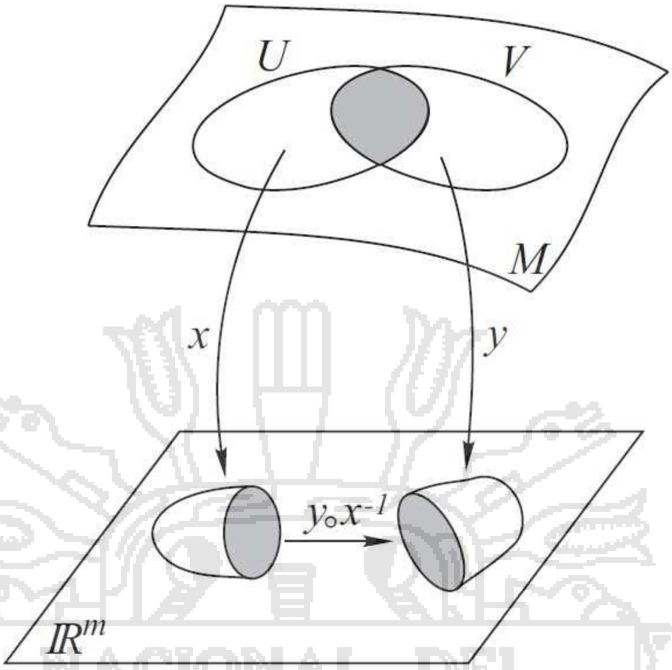

Figura 17:

Definición 2.35 Un atlas A sobre un espacio topológico M se dice **diferenciable, de clase** C^k $(k \geq 1)$, si todos los cambios de coordenadas ϕ_{xy}, x, y $\in$ A son aplicaciones de clase C^k. En este caso se denota $A \in C^k$.

Como $\phi_{yx} = (\phi_{xy})^{-1}$, se sigue que los ϕ_{xy} son, de hecho, difeomorfismos de clase C^k. En particular, si escribimos $\phi_{xy} : (x^1, ..., x^m) \longrightarrow (y^1, ..., y^m)$, entonces el determinante jacobiano det $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^i}$ es no nulo en todo punto de $x(U \cap V)$.

Definición 2.36 Sea A un atlas de dimensión m y clase C^k en un espacio topológico M. Un sistema de coordenadas $z : W \longrightarrow \mathbf{R}^n$ en M se dice **admisible** al atlas A si, para todo sistema de coordenadas locales $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, perteneciente a A, con $U \cap W = \Phi$, los cambios de coordenadas ϕ_{xz} y ϕ_{zx} son de clase C^k. En otras palabras, si $A \cup \{z\}$ es aún un atlas de clase C^k en M.

Ejemplo 2.23 Si A es un atlas de clase C^k sobre M y $x : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ pertenece a A, entonces la restricci n $y = x|_V$ es admisible respecto a A para cada subconjunto abierto $V \subset U$.

Definición 2.37 Un atlas A de dimensión m y de clase C^k sobre M, se dice que es maximal si contiene todos los sistemas de coordenadas locales que son admisibles respecto a A.

Todo atlas de clase C^k sobre M puede ser ampliado, de modo único, hasta convertir en un atlas maximal de clase C^k. Basta agregarle todos los sistemas de coordenadas admisibles.

Definición 2.38 Una **Variedad Diferenciable**, de dimensión m y de clase C^k es un par ordenado (M, A) donde M es un espacio topológico de Hausdorff, con base numerable y A es un atlas máximo de dimensión m y de clase C^k sobre M.

Observación

1. En términos mas explícitos, para demostrar que (M, A) es una variedad diferencial de dimensión m y de clase C^k se debe verificar las condiciones siguientes:

   i) M es un espacio topol gico de Hausdorff con base numerable.

   ii) A es una colecci n de homeomorfismos $x : U \to \mathbb{R}^m$, de conjuntos abiertos $U \subset M$ sobre abiertos $x(U) \subset \mathbb{R}^m$.

   iii) Los dominios U de los homeomorfismos $x \in A$ cubren M.

   iv) Dados $x : U \to \mathbb{R}^m$, $y : V \to \mathbb{R}^m$ elementos de A con $U \cap V = \emptyset$, entonces $\phi_{xy} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ es un homeomorfismo de clase C^k

   v) Dado un homeomorfismo $z : W \to \mathbb{R}^m$ de un abierto $W \subset M$ sobre un abierto $z(W) \subset \mathbb{R}^m$, tal que ϕ_{zx}, ϕ_{xz} son de clase C^k para todo $x \in A$, entonces $z \in A$.

2. Para todo $r < k$, una variedad de clase C^k puede ser vista como variedad de clase C^r, pues para cualquier atlas de clase C^k esta contenido en un único atlas maximal de clase C^r.

Ejemplo 2.24 Los Espacios Euclidianos
Consideremos en $\mathbb{R}^m$ el atlas A conteniendo el único sistema de coordenadas $x = id : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Es claro que A es un atlas de dimensión m y de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^m$

Ejemplo 2.25 Subvariedades Abiertas
Un subconjunto abierto W de una variedad diferencial M de clase C^k tiene una estructura natural de variedad diferencial de clase C^k, dada por el atlas maximal sobre W, formado

por todos los sistemas de coordenadas admisibles $x : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$ en M, cuyos dominios U se intersectan con W.

Ejemplo 2.26 Superficies en R^n
Toda superficie de dimensión m y de clase C^k,$M^m \subset R^n$, es una variedad diferencial de dimensión m y de clase C^k, con el atlas maximal A formado por todos los sistemas de coordenadas $x : U \longrightarrow R^m$, que son inversos de las parametrizaciones $\phi : U_0 \subset \mathbf{R}^m \longrightarrow U \subset M$, de clase C^k

Ejemplo 2.27 Producto de Variedades
Sean (M^n, A) y $(N^n, \mathbf{B})$ variedades diferenciales de clase C^k. Vamos a introducir en el espacio producto $M \times N$ una estructura de variedad diferencial de dimensión $m + n$ y de clase C^k, por medio del atlas $A \times \mathbf{B}$ formado por los sistemas de coordenadas $x \times y : U \times V \longrightarrow R^{m+n}$, dados por $(x \times y)(p, q) = (x(p), y(p))$ para todo $x \in A, y \in \mathbf{B}$

2.8. Variedades definidas por una colección de inyecciones

Sea X un conjunto. Si X posee estructura de variedad diferencial, entonces su topología queda perfectamente determinada por el atlas. Precisamente:

Lema 2.8 Sean X un conjunto (sin estructura topológica) y A una colección de inyecciones $x : U \subset X \longrightarrow R^n$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

i) Para cada $x \in A$, $x : U \longrightarrow R^n$, $x(U)$ es abierto en R^n.

ii) Los dominios U de las aplicaciones $x \in A$ cubren X.

iii) Si $x : U \longrightarrow R^n$, $y : V \longrightarrow R^n$ pertenecen a A y $U \cap V = \emptyset$, entonces $x(U \cap V)$, $y(U \cap V)$ son abiertos en R^n y la aplicación $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \longrightarrow y(U \cap V)$ es de clase C^k.
(Se sigue que $y \circ x^{-1} = (x \circ y^{-1})^{-1}$ es un difeomorfismo de clase C^k).
En estas condiciones, existe una y solamente una topología en X respecto a la cual A es un atlas de clase C^k sobre X.

La topología de una variedad M puede ser visualizada en la forma siguiente: Si un punto variable $p \in M$ tiende para un punto $p_0 \in M$, y si $x : U \longrightarrow R^n$ es un sistema de coordenadas locales en p_0, mas pronto o mas tarde el punto p estará en U y $x(p)$ tendera para $x(p_0)$ en R^n.

Debemos adicionar mas hipótesis al lema 2.8 si deseamos que la topología de X tenga base numerable.

Lema 2.9 La topología de X, definida por el atlas A satisfaciendo i), ii) y iii) tiene base numerable si y solo si:

iv) El cubrimiento de X por medio de los dominios U de las aplicaciones $x \in A$ admite un subcubrimiento numerable.

Para que $\tau(\mathsf{F})$ sea una topología Hausdorff, debemos dar a la familia F condiciones adicionales.

Lema 2.10 Sea X un conjunto no vacío y $\mathsf{F} = (U_i, \phi_i)$ una familia de funciones inyectivas $\phi_i : U_i \subset X \longrightarrow R^m$ que satisfacen las condiciones del Lema 2.8. La topología $\tau(\mathsf{F})$ es Hausdorff si y solo si para cualquier (U_i, ϕ_i), $(U_j, \phi_j) \in \mathsf{F}$ con $U_i \cap U_j = \emptyset$; no existe ninguna sucesión de puntos $z_n \in x(U \cap V)$ tal que $z_i \longrightarrow z \in x(U_i - U_j)$ y $(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(z_n) \longrightarrow z' \in \phi_j(U_j - U_i)$.

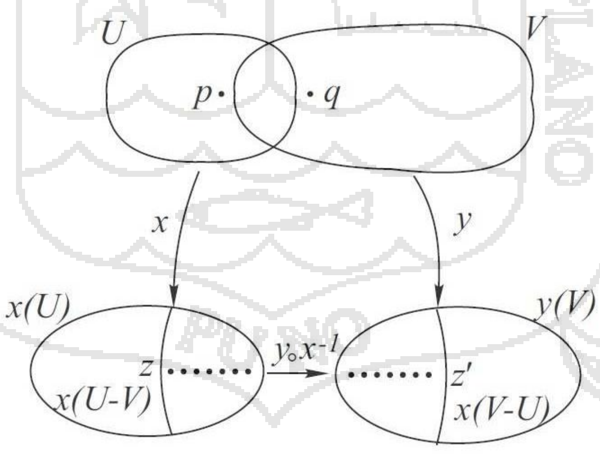

Figura 18:

2.9. Aplicaciones Diferenciables entre Variedades

Se puede desarrollar un cálculo diferencial en variedades. Para definir la noci n de derivada de una aplicación $f : M \longrightarrow N$ entre variedades, asociaremos a cada $p \in M$ un espacio vectorial, llamado espacio tangente a M en el punto p, denotado por TM_p. La derivada $f'(p)$ sera una transformación lineal de TM_p en $TN_{f(p)}$.
Los teoremas de la función inversa, las funciones implícitas, las formas locales; los conceptos de inmersión, mergullo y sumersión se extienden al contexto de variedades.

Definición 2.39 Sean M^m, N^n variedades de clase $C^r (r \geq 1)$. Se dice que una aplicación $f : M \longrightarrow N$ es diferenciable en el punto $p \in M$ si existen sistemas de coordenadas $x : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$ en M, y $y : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ en N, con $p \in U$ y $f(U) \subset V$ tales que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \longrightarrow y(V) \subset \mathbf{R}^n$ es diferenciable en $x(p)$.

La aplicación $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$ se llama expresión de f en los sistemas de coordenadas locales x, y.
En este caso, se demuestra que $f : M \longrightarrow N$ es continua en el punto $p \in M$.

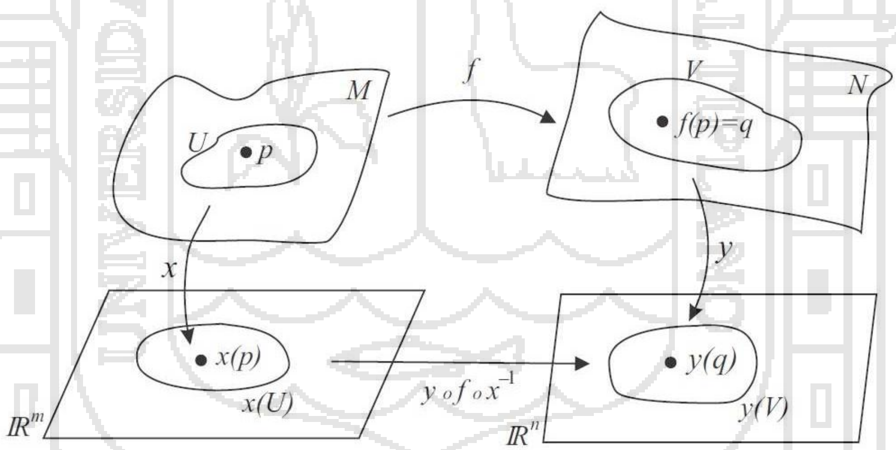

Figura 19:

Observación

Como los cambios de coordenadas en M y N son difeomorfismos de clase C^r, la definici n de diferenciabilidad no depende de los sistemas de coordenadas x, y. Para todo par de sistemas de coordenadas $x' : U' \longrightarrow \mathbf{R}^m$ en M, y $y' : V' \longrightarrow \mathbf{R}^n$ en N, con $p \in U'$, $f(U') \subset V'$, la aplicación $f_{x'y'} = y' \circ f \circ (x')^{-1}$ es también diferenciable en el punto $x'(p)$.

Definición 2.40 Decimos que $f : M \longrightarrow N$ es diferenciable si f es diferenciable en todos los puntos de M.

Definición 2.41 Decimos que $f : M \longrightarrow N$ es de clase C^k $(k \leq r)$ si, para cada $p \in M$, existen sistemas de coordenadas locales $x : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$ en M, $y : V \longrightarrow \mathbf{R}^n$ en N con $p \in U$ y $f(U) \subset V$ tales que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \longrightarrow y(V)$ es de clase C^k.

Se sigue de la definici n que una aplicación $f : M \longrightarrow N$ es de clase C^k si existen un atlas A sobre M y un atlas B sobre N tales que para cada $y \in B$ existe $x \in A$ respecto a los cuales la expresión de f es de clase C^k.

En efecto: Dado $p \in M$, sean $x \in A$, $y \in B$ tales que $f_{xy} : x(U) \longrightarrow y(V)$ es de clase C^k. Entonces $f_{x'y'} : x'(U \cap U') \longrightarrow y'(V \cap V')$ puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} f_{x'y'} &= y' \circ f \circ (x')^{-1} \\ &= y' \circ y^{-1} \circ y \circ f \circ x^{-1} \circ x \circ (x')^{-1} \\ &= (y' \circ y^{-1}) \circ f_{xy} \circ (x \circ (x')^{-1}) \\ &= \phi_{yy'} \circ f_{xy} \circ \phi_{x'x} \in C^K \end{aligned}$$

Definición 2.42 Un difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ es una biyección diferenciable cuya inversa es también diferenciable. Si ambas f y f^{-1} son de clase C^k, decimos que f es un difeomorfismo de clase C^k.

Ejemplo 2.28

Sean $U \subset \mathbf{R}^n$ un abierto, $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicación. Podemos considerar el conjunto U como una variedad diferencial de clase C^k. Entonces f es diferenciable en el sentido de las variedades diferenciales si y solo si f es diferenciable en el sentido de los espacios euclidianos.

Mas generalmente, si $M^m \subset \mathbf{R}^m$ y $N^p \subset \mathbf{R}^q$ son superficies de clase C^k, entonces una aplicaci n $f : M^m \longrightarrow N^p$ es de clase C^r $(r \leq k)$ en el sentido de las variedades diferenciales si y solo si es de clase C^r en el sentido de las superficies.

Ejemplo 2.29

Sean M^m una variedad diferencial de clase C^k y $x : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$ un sistema de coordenadas en M. Consideremos en U su estructura natural de subvariedad abierta de M. Entonces x es un difeomorfismo de clase C^k de U sobre $x(U)$.

Capítulo 3

3. Metodología de la Investigación

3.1. Tipo de Investigación

El tipo de investigación es del tipo descriptivo. Toda investigación se caracteriza por que los resultados sirven para profundizar los conocimientos del tema de investigación. También incrementan los conocimientos que existen en topología y variedades diferenciales .

3.2. Método

Los métodos que se usará son deductivo, analítico, ya que la ejecución del proyecto consistirá en la exploraci n, interpretaci n, análisis y síntesis.

3.3. Técnica

Lectura y análisis de materiales de consulta para la asimilación apropiada.

3.4. Estrategias

- Búsqueda de información de la materia objeto de investigación.
- Revisión de saberes previos necesarios bibliográficos o de internet que facilite interpretar la lectura científica que se va a encarar.

Capítulo 4

4. Exposición y Análisis de Resultados

4.1. Partición de la Unidad

En esta sección nos proponemos probar que dado un abierto de $\mathbf{R}^n$ y cualquier cubrimiento abierto de el, entonces siempre existe una C^∞-partición de la unidad subordinada al cubrimiento.

Definición 4.1 Una homotecia es una transformación afín que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor. En general una homotecia de razón (λ) diferente de 1 deja un único punto fijo, llamado centro.

Lema 4.1 Sea (M, A) una variedad de dimensión m y de clase C^k. Dado $p \in M$, y un abierto $A \subset M$ tal que $p \in A$, existe un sistema de coordenadas $(U, z) \in A$, con $p \in U \subset A$, tal que $z(U) = B(3)$.

Demostración. Considere cualquier $(\tilde{U}, y) \in A$ de M en p, se puede suponer sin perdida de generalidad que $y(p) = 0$, como $y(p) \in y(\tilde{U}) \subset \mathbf{R}^m$, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset y(\tilde{U})$, así se tiene $y^{-1}(B_r(0)) \subset \tilde{U} \subset A$.

La función $h : R^m \to R^m$ definida por: $h(v) = \dfrac{3v}{r}$ es una homotecia.

Se denota $U = y^{-1}(B_r(0))$ y considere la composición $z = h \circ y$, así se obtiene que $z(U) = (h \circ y)(U) = h(y(U)) = h(B_r(0)) = B(3)$

Para tal sistema de coordenadas usaremos letras U, V, W para representar los conjuntos $U = z^{-1}(B(3))$, $V = z^{-1}(B(2))$, $W = z^{-1}(B(1))$.

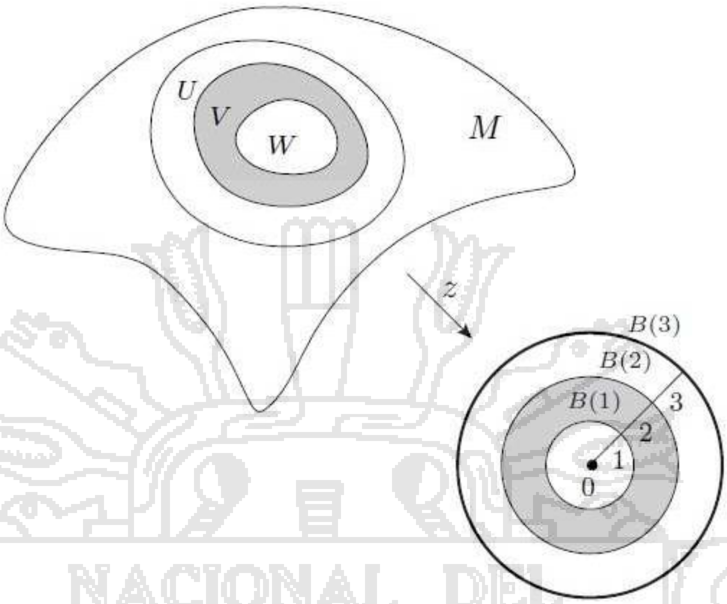

Figura 20:

Teorema 4.1 Sea (M, A) una variedad de dimensión m y clase C^k $(k \geq 1)$, $p \in M$ y sea $(U, z) \in A$. Entonces existen abiertos $W, V \subset U$ con $W \subset V$, $V \subset U$ y existe $\varphi_z \in C^k(M)$ tales que:

1. $\varphi_z(q) = 1, \ \forall q \in W$.

2. $0 < \varphi_z(q) \leq 1, \ \forall q \in V - W$.

3. $\varphi_z(q) = 0, \ \forall q \in M - V$.

Una función φ_z con las propiedades arriba sera llamada una **función auxiliar** del sistema de coordenadas z

Demostración. Basta probar la existencia de una función auxiliar definida en R^m, Afirmación 1: Existe una función $\phi \in C^\infty(R^m)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\phi(x) = 1, \ \forall x \in B_1[0]$.

2. $0 < \phi(x) \leq 1, \ \forall x \in B_2(0) - B_1[0]$.

3. $\phi(x) = 0, \ \forall x \in \mathbf{R}^n - B_2(0)$

En efecto: se sabe que la función $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & \text{si} \quad t > 0 \\ 0, & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

es de clase C^{∞} en R

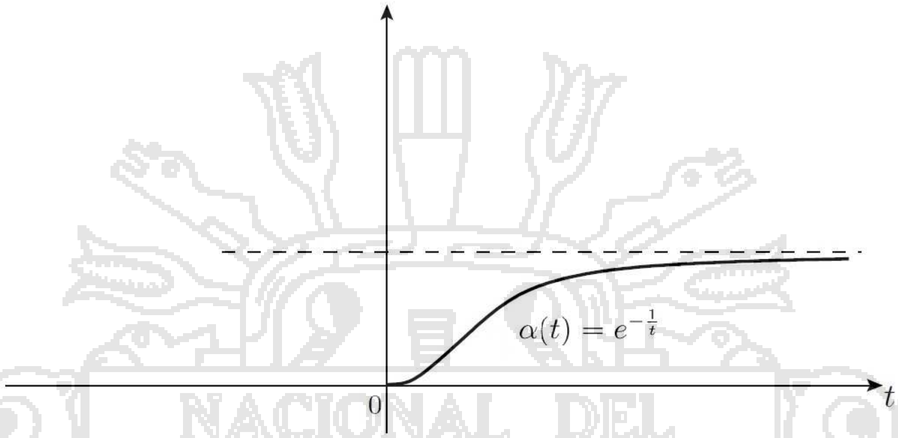

Figura 21:

Se considera ahora la función $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\beta(t) = \alpha(t+2).\alpha(-t-1) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(t+1)(t+2)}} & \text{si} \quad t \in]-2,-1[\\ 0 & \text{si} \quad t \in \mathbb{R} -]-2,-1[\end{cases}$$

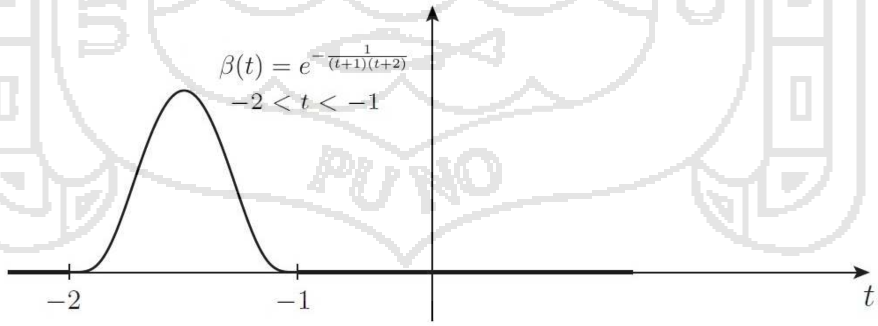

Figura 22:

Se sigue que $\beta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

A continuación, se define $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por :

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \beta(s)\, ds$$

Claramente $\psi(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ y $0 < \int_{-\infty}^{\infty} \beta(s)\, ds < \infty$.

Sea $b = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(s)\, ds$ y se considera $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\beta(s)ds}{b}$. Es claro que $\beta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Además, observe que:

$$\begin{aligned}
t \leq -2 &\implies \gamma(t) = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{t} \beta(s)\, ds = \frac{1}{b}0 = 0\\
-2 < t < -1 &\implies \gamma(t) = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{t} \beta\, ds < \frac{1}{b}b = 1\\
t \geq -1 &\implies \gamma(t) = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{t} \beta(s)\, ds = \frac{1}{b}b = 1
\end{aligned}$$

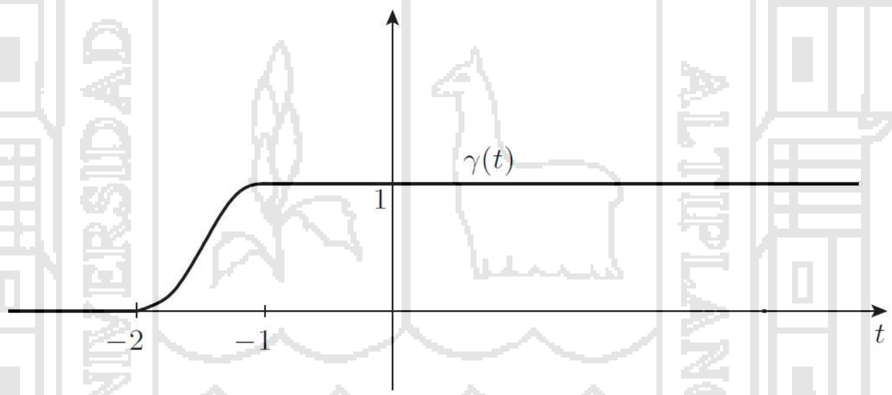

Figura 23:

Se define finalmente $\phi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \gamma(-\|x\|)$$

Observe que

$$\begin{aligned}
x \in B_1[0] &\implies -1 \leq -\|x\| \Rightarrow \phi(x) = \gamma(-\|x\|) = 1\\
x \in B_2(0) - B_1[0] &\implies 1 < \|x\| < 2 \Rightarrow \phi(x) = \gamma(-\|x\|) \in]0,1[\\
x \in \mathbb{R}^m - B_2(0) &\implies -\|x\| \leq -2 \Rightarrow \phi(x) = \gamma(-\|x\|) = 0
\end{aligned}$$

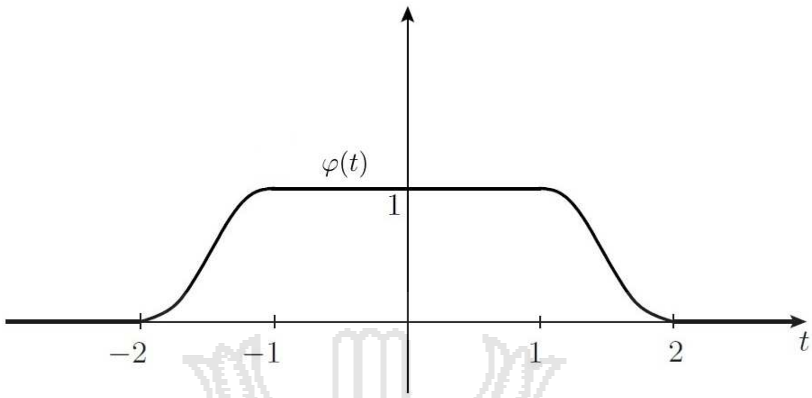

Figura 24:

Se sigue que $\phi \in C^{\infty}(R^m)$ y esto prueba la afirmación.

Afirmación 2: Dado $\varepsilon > 0$, existe una función $\phi_\varepsilon \in C^{\infty}(R^m)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\phi_\varepsilon = 1, \forall x \in B_\varepsilon[0]$.

2. $0 < \phi_\varepsilon \leq 1, \forall x \in B_{2\varepsilon}(0) - B_\varepsilon[0]$.

3. $\phi_\varepsilon = 0, \forall x \in R^m - B_{2\varepsilon}(0)$

En efecto: basta tomar $\phi_\varepsilon : R^m \to R$ definida por $\phi_\varepsilon(x) = \phi(\frac{x}{\varepsilon})$, donde ϕ es la función de la Afirmación 1.

A continuación, se construy funciones auxiliares en variedades.
Sea (M, A) una variedad de dimensión m y de clase C^k $(k \geq 1)$, $p \in M$ y sea $(U, z) \in A$, como $z(p) \in z(U) \subset R^m$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(z(p)) \subset z(U)$. Se considera la función $H : R^m \to R^m$ definida por:

$$H(x) = \frac{r}{3}x + z(p)$$

Es claro que H es una transformación afín inversible (por tanto un difeomorfismo de clase C^{∞}) y que $H(B_3(0)) = B_r(z(p)) \subset z(U)$. Denotando $W = (z^{-1} \circ H)(B_1(0))$ y $V = (z^{-1} \circ H)(B_2(0))$, se tiene que W, V son abiertos de M y $W \subset V \subset U$.
Defino $\varphi_z : M \to R$ como:

$$\varphi_z(q) = \begin{cases} (\phi \circ H^{-1} \circ z)(q), & \text{si} \quad q \in U \\ 0, & \text{si} \quad q \in M - U \end{cases}$$

en donde $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$ es una función auxiliar de la Afirmación 1 .
Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
q \in W &\Longrightarrow H^{-1}(z(q)) \in B_1[0] \\
&\Longrightarrow \varphi_z(q) = \phi(H^{-1}(z(q))) = 1 \\
q \in V - W &\Longrightarrow H^{-1}(z(q)) \in B_2(0) - B_1[0] \\
&\Longrightarrow \varphi_z(q) = \phi(H^{-1}(z(q))) \in]0,1[\\
q \in U - V &\Longrightarrow H^{-1}(z(q)) \in H^{-1}(z(U)) - B_2(0) \\
&\Longrightarrow \varphi_z(q) = \phi(H^{-1}(z(q))) = 0 \\
q \in M - U &\Longrightarrow \varphi_z(q) = 0
\end{aligned}
$$

Se sigue que $\varphi_z \in C^k(M)$ y esto prueba el teorema.

Definición 4.2 El soporte de una función diferenciable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es el siguiente conjunto:

$$\text{sopp}(f) = \{p \in M : f(p) = 0\}$$

Definición 4.3 Sea (M, A) una variedad diferenciable de clase C^k $(k > 1)$ y dimensión m. Una partición de la unidad de clase C^r $(r 6 k)$ sobre M es una familia de funciones $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq C^r(M)$ que cumple las tres condiciones siguientes:

1. $\phi_\alpha(p) > 0, \ \forall\, p \in M, \ \forall\, \alpha \in \Lambda$.
2. La familia de sus soportes $C = \{\text{sopp}(\phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es localmente finita en M.
3. $\sum_{\alpha\in\Lambda} \phi_\alpha(p) = 1, \ \forall\, p \in M$

Observación

1. Por la condici n 2), la suma en 3), es finita en cada punto de M.
2. Por las condiciones 1, y 3, se tiene que $0 \leq \phi_\alpha(p) \leq 1, \ \forall\, p \in M, \ \forall\, \alpha \in \Lambda$.
3. $\sum_{\alpha\in\Lambda} \phi_\alpha \in C^r(M)$.
4. Si Λ es un conjunto finito de indices, la condici n 2, es innecesaria.

Definición 4.4 Sea (M, A) una variedad diferenciable de clase C^k $(k \geq 1)$ y dimensión m y $C = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un cubrimiento de M. Se dice que una C^r- partición de la unidad $\{\phi_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ sobre M esta subordinada al cubrimiento C si y solo si para todo $\beta \in \Gamma$, existe $\alpha = \alpha(\beta) \in \Lambda$ tal que $sopp(\phi_\beta) \subseteq C_\alpha$.

Definición 4.5 Sean $C = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $C' = \{C_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ dos cubrimientos de una variedad M se dice que C' es un refinamiento de C si y solo si para todo $\beta \in \Gamma$, existe $\alpha = \alpha(\beta) \in \Lambda$ tal que $C_\beta \subseteq C_\alpha$.

Observación Con esta definici n, una C^r- partici n de la unidad $\{\phi_\beta\}_{\beta\in B}$ sobre M esta subordinada al cubrimiento C si y solo si sus soportes $\{sopp(\phi_\beta)\}_{\beta\in B}$ forman un cubrimiento de M que refina a C

Definición 4.6 Sean (M, A) una variedad diferenciable de clase C^k $(k \geq 1)$ y dimensión m y $C = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un cubrimiento de M. Se dice que una C^r- partición de la unidad $\{\phi_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ sobre M esta estrictamente subordinada al cubrimiento C si y solo si los conjuntos de indices Λ y Γ son iguales y $sopp(\phi_\alpha) \subset C_\alpha$, $\forall \alpha \in \Lambda$.

Proposición 4.1 Sean (M, A) una variedad diferenciable de clase C^k $(k \geq 1)$ y dimensión m y $C = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un cubrimiento abierto de M. Entonces C posee un refinamiento numerable $U = \{U_n\}_{n\in N}$ localmente finito formado por dominios de sistemas de coordenadas $(U_n, \phi_n) \in A$ tales que:

1. U es un cubrimiento abierto de M.
2. $\phi_n(U_n) = B_3(0)$, $\forall n \in N$.
3. Si denotamos $W_n = \phi_n^{-1}(B_1(0))$ y $V_n = \phi_n^{-1}(B_2(0))$ entonces la familia $\{W_n\}_{n\in N}$ es un cubrimiento abierto localmente finito de M.

Demostración. En primer lugar como M es un espacio topol gico de Hausdorff localmente compacto con base numerable entonces por topología general existe $\{K_i\}_{i\in N}$ familia numerable de compactos tales que $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ y $K_i \subseteq int(K_{i+1})$, $\forall i \in N$.

Afirmación 1: Existe un conjunto finito de indices J_1 tales que $(U_j, \phi_j) \in A$, $U_j \subseteq C_{\alpha_j} \cap int(K_3)$, $\phi_j(U_j) = B_3(0)$, $\forall j \in J_1$ y $K_2 \subseteq \bigcup_{j\in J} W_j$, donde $W_j = (\phi_j)^{-1}(B_1(0))$

En efecto, sea $p \in K_2$ entonces existe $(\tilde{U}, \tilde{\phi}) \in A(M)$ tal que $p \in \tilde{U}$. Observe que por hipótesis existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $p \in C_{\alpha_p}$ y como C_{α_p} y $int(K_3)$ son abiertos de M entonces podemos suponer que $\tilde{U} \subseteq C_{\alpha_p} \cap int(K_3)$.
Como $\tilde{\phi}(p) \in \tilde{\phi}(\tilde{U})$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(\tilde{\phi}(p)) \subset \tilde{\phi}(\tilde{U})$. Sea $H : R^m \longrightarrow R^m$ el isomorfismo afín tal que $H(B_3(0)) = B_r(\tilde{\phi}(p))$ y denotamos $U_p = (\tilde{\phi})^{-1}(B_r(\tilde{\phi}(p))$ y $\phi_p = H^{-1} \circ \tilde{\phi}_p : U_p \longrightarrow B_3(0)$.
Se sigue que $(U_p, \phi_p) \in A(M)$, $U_p \subset C_{\alpha_p} \cap int(K_3)$ y $\phi_p(U_p) = B_3(0)$.

Por otro lado, como $p \in \phi_p^{-1}(B_1(0))$ entonces $\{\phi_p^{-1}(B_1(0))\}_{p \in K_2}$ es un cubrimiento abierto de K_2 el cual es compacto, luego existen $p_1, ..., p_{n_1} \in K_2$ tales que $K_2 \subset \bigcup_{j=1}^{n_1} \phi_{p_j}^{-1}(B_1(0))$. Denotando

$$U_j = U_{p_j}, \quad \phi_j = \phi_{p_j}, \quad W_j = \phi_{p_j}^{-1}(B_1(0)) \quad y \quad \alpha_j = \alpha_{p_j}, \forall j \in J_1 = \{1, ..., n_1\}$$

La Afirmación 1 esta probada.
Vamos denotar:
U_j^1 al conjunto U_j cuando los indices $j \in J_1$
W_j^1 al conjunto W_j cuando los indices $j \in J_1$

Afirmación 2: Existe un conjunto finito de indices J_2 tales que $(U_j, \phi_j) \in A(M)$, $U_j \subset C_{\alpha_j} \cap (int(K_4) - K_1)$, $\phi_j(U_j) = B_3(0)$, $\forall j \in J_2$ y $K_3 - int(K_2) \subset \bigcup_{j \in J_2} W_j$, donde $W_j = (\phi_j)^{-1}(B_1(0))$.
En efecto, sea $p \in K_3 - int(K_2)$ entonces existe $(\tilde{U}, \tilde{\phi}) \in A(M)$ tal que $p \in \tilde{U}$. Observe que por hipótesis existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $p \in C_{\alpha_p}$, como C_{α_p} y $int(K_4) - K_1$ son abiertos de M entonces podemos suponer que $\tilde{U} \subseteq C_{\alpha_p} \cap (int(K_4) - K_1)$.
Como $\tilde{\phi}(p) \in \tilde{\phi}(\tilde{U})$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(\tilde{\phi}(p)) \subseteq \tilde{\phi}(\tilde{U})$. Sea $H : R^m \longrightarrow R^m$ el isomorfismo afín tal que $H(B_3(0)) = B_r(\tilde{\phi}(p))$ y denotamos $U_p = (\tilde{\phi})^{-1}(B_r\tilde{\phi}(p))$ y $\phi_p = H^{-1} \circ \tilde{\phi}_p : U_p \longrightarrow B_3(0)$. Se sigue que $(U_p, \phi_p) \in A(M)$, $U_p \subseteq C_{\alpha_p} \cap (int(K_4) - K_1)$ y $\phi_p(U_p) = B_3(0)$.
Por otro lado, como $p \in \phi_p^{-1}(B_1(0))$ entonces $\{\phi_p^{-1}(B_1(0))\}_{p \in K_3 - int(K_2)}$ es un cubrimiento abierto de $K_3 - int(K_2)$ el cual es compacto, luego existen $p_1, ..., p_{n_2} \in K_3 - int(K_2)$ tales que $K_3 - int(K_2) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_2} \phi_{p_j}^{-1}(B_1(0))$.
Denotando $U_j = U_{p_j}$, $\phi_j = \phi_{p_j}$, $W_j = \phi_{p_j}^{-1}(B_1(0))$, y $\alpha_j = \alpha_{p_j}$, $\forall j \in J_2 = \{1, ...n_2\}$
la Afirmación 2 esta probada.

Vamos denotar:

U_j^2 al conjunto U_j cuando los indices $\mathbf{j} \in \mathbf{J}_2$

W_j^2 al conjunto W_j cuando los indices $\mathbf{j} \in \mathbf{J}_2$.

En general, para $i \geq 3$, existe $\mathbf{J}_i$ conjunto finito de indices tales que $(U_j, \phi_j) \in A(M)$, $U_j \subseteq C_{\alpha_j} \bigcap (int(K_{i+2}) - K_{i-1})$, $\phi_j(U_j) = B_3(0)$, $\forall\, \mathbf{j} \in \mathbf{J}_i$ y $(K_{i+1} - int(K_i)) \subseteq \bigcup_{j \in J_i} W_j$, donde $W_j = (\phi_j)^{-1}(B_1(0))$.

Vamos denotar:

U_j^i al conjunto U_j cuando los indices $\mathbf{j} \in \mathbf{J}_i$

W_j^i al conjunto W_i cuando los indices $\mathbf{j} \in \mathbf{J}_i$.

Considerando $\mathcal{U} = \{U_j^i : \mathbf{j} \in J_i, i \in N\}$, tenemos que $\mathcal{U}$ es una familia numerable localmente finita de abiertos que refina a $\mathcal{C}$ que satisface la parte 1 y 2 de la proposición y la familia $\{W_j^i : \mathbf{j} \in J_i, i \in N\}$ satisface la parte 3 de la proposición.

Para simplificar la notacion, podemos considerar $\mathcal{U} = \{U_n : n \in N\}$, $\mathcal{W} = \{W_n : \mathbf{j} \in N\}$

Corolario 4.1 Sea (M, A) una variedad diferenciable de clase C^k $(k \geq 1)$ y dimensión m y $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de M. Entonces existe $\{\psi_n\}_{n \in N}$ C^k-partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\mathcal{C}$.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in N}$ el refinamiento de $\mathcal{C}$, donde cada U_n es el dominio de un sistema de coordenadas (U_n, ϕ_n) (de la Proposición 4.1). Para cada $n \in N$ consideremos la función auxiliar $\varphi_n \in C^k(M)$ asociada al sistema de coordenadas $(U_n, \phi_n) \in A$ (de el teorema 4.1), es decir:

1. $\varphi_n(p) = 1$, $\forall\, p \in W_n$.
2. $0 < \varphi_n(p) \leq 1$, $\forall\, p \in V_n - W_n$.
3. $\varphi_n(p) = 0$, $\forall\, p \in M - V_n$.

Observe que: $sopp(\varphi_n) = \overline{V_n}$. Ademas la familia $\{\varphi_n\}_{n \in N} \subseteq C^k(M)$ satisface $\varphi_n(p) \geq 0$, $\forall\, p \in M$, $\forall\, n \in N$ y $\{sopp(\varphi_n)\}_{n \in N} = \{\overline{V_n}\}_{n \in N}$ es una familia localmente finita. consideremos la función $\varphi : M \longrightarrow R$ definida por $\varphi = \sum_{n \geq 1} \varphi_n$ esta bien definida pues $\{sopp(\varphi_n)\}_{n \in N}$ es localmente finita, se sigue que $\varphi \in C^k(M)$. Además si $p \in M$ entonces existe $n \in N$ tal que $p \in W_n$, luego $\varphi(p) \geq \varphi_n(p) = 1$. Se sigue que $\varphi \geq 1$, $\forall\, p \in M$. Ahora definamos para cada $n \in N$, la función $\psi_n : M \longrightarrow R$ por $\psi_n = \frac{\varphi_n}{\varphi}$. Se sigue que

$\psi_n(p) \geq 0$, $\forall\, p \in M$, $n \in N$, ademas se tiene que $sopp(\psi_n) = sopp(\varphi_n)$, $\forall\, n \in N$, por tanto $\{sopp(\psi_n)\}_{n\in N}$ es una familia localmente finita. Además $\sum_{n,1} \psi_n = 1$.

Luego $\{\psi_n\}_{n\in N} \subseteq C^k(M)$ es la partici n de la unidad buscada.

Teorema 4.2 Sean (M, A) una variedad diferenciable de clase C^k $(k \geq 1)$ y dimensión m y $C = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un cubrimiento abierto de M. Entonces existe $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ C^k-partición de la unidad estrictamente subordinada al cubrimiento C.

Demostración. Sea $\{\psi_n\}_{n\in N}$ la C^k- partici n de la unidad subordinada al cubrimiento C del corolario anterior. Como la familia $U = \{U_n\}_{n\in N}$ de la proposición 4.1 es un refinamiento de C, dado $n \in \mathbf{N}$, existe $\alpha_n \in \Lambda$ tal que $U_n \subset C_{\alpha_n}$. Luego se define la función $f : \mathbf{N} \longrightarrow \Lambda$, donde $f(n) = \alpha_n$ si y solo si $U_n \subset C_{\alpha_n}$.

Dado $\alpha \in \Lambda$, consideremos $\psi_\alpha = \sum_{n\in f^{-1}(\alpha)} \psi_n$, (si $f^{-1}(\alpha) = \emptyset$ entonces definimos $\psi_\alpha = 0$).

Se sigue que $\psi_\alpha \in C^k(M)$, $\forall\, \alpha \in \Lambda$.

Afirmación 1: $sopp(\psi_\alpha) = \bigcup_{n\in f^{-1}(\alpha)} sopp(\psi_n)$

Sea $\varphi : M \longrightarrow \mathbf{R}$, definimos el núcleo de φ como el conjunto

$$N(\varphi) = \{x \in M, \varphi(x) = 0\}$$

Luego el soporte quedaría determinado por $sopp(\varphi) = M - N(\varphi)$, ademas se tiene:

$$N(\psi_\alpha) = N\left(\sum_{n\in f^{-1}(\alpha)} \psi_n\right) = \bigcap_{n\in f^{-1}(\alpha)} N(\psi_n)$$

y como U es una familia localmente finita, se tiene que:

$$sopp(\psi_\alpha) = M - N(\psi_\alpha) = \overline{\bigcup_{n\in f^{-1}(\alpha)} [M - N(\psi_n)]} = \bigcup_{n\in f^{-1}(\alpha)} \overline{M - N(\psi_n)} = \bigcup_{n\in f^{-1}(\alpha)} sopp(\psi_n)$$

. Afirmación 2: $\{sopp(\psi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia localmente finita.

En efecto, como U es una familia localmente finita, dado $p \in M$, existe $V \subset M$ con $p \in V$ y existe $\mathbf{J} = \{n_1, ..., n_k\}$ conjunto finito tal que $V \bigcap U_n = \emptyset$, $\forall\, n \in \mathbf{N} - \mathbf{J}$.

Observe que:

$$V \cap sopp(\psi_\alpha) = V \cap \left(\bigcup_{n\in f^{-1}(\alpha)} sopp(\psi_n)\right) = \bigcup_{n\in f^{-1}(\alpha)} (V \cap sopp(\psi_n)) \subseteq \bigcup_{n\in f^{-1}(\alpha)} (V \cap U_n)$$

Esto motiva a considerar el conjunto finito de índices $\Lambda_0 = \{f(n_1), ..., f(n_k)\} \subset \Lambda$. Si $V \cap sopp(\psi_\alpha) \neq \emptyset$ entonces existe $p \in V \cap sopp(\psi_\alpha)$, luego existe $n \in f^{-1}(\alpha)$ tal que $p \in V \cap U_n$ entonces existe $j \in \{1, ..., k\}$ tal que $n = n_j$, luego $f(n_j) = f(n) = \alpha$ y por tanto $\alpha \in \Lambda_0$. Hemos probado que si $V \cap sopp(\psi_\alpha) \neq \emptyset$ entonces $\alpha \in \Lambda_0$ o, equivalentemente, $V \cap sopp(\psi_\alpha) = \emptyset$, $\forall\, \alpha \in \Lambda - \Lambda_0$, lo cual prueba la afirmaci n.

Haciendo $\psi = \sum_{\alpha\in\Lambda} \psi_\alpha$ se tiene que $\psi \in C^k(M)$ y $\psi \geq 1$, luego para cada $\alpha \in \Lambda$, podemos definir $\phi_\alpha = \frac{\psi_\alpha}{\psi}$ y se sigue que $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es la C^k-partición de la unidad deseada.

4.2. Aplicaciones

El concepto de partici n de la unidad sirva para extender muchos resultados de la topología a variedades diferenciables.

Aplicación 1: (Teorema de Urysohn Diferenciable)

Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de clase $C^k (k \geq 1)$ y dimensión m. Si $F, G \subset M$ son dos conjuntos cerrados disjuntos entonces existe $f \in C^k(M)$ tal que:

1. $0 \leq f(p) \leq 1$, $\forall\, p \in M$.
2. $f(F) = 0$ y $f(G) = 1$.

Demostración. Como F y G son disjuntos entonces $\mathcal{C} = \{M - F, M - G\}$ es un cubrimiento abierto de M. Por el Teorema 4.2 existe $\{f, g\}$ C^k- partici n de la unidad de M estrictamente subordinada a $\mathcal{C}$, donde $sopp(f) \subset M - F$ y $sopp(g) \subset M - G$, como f, g pertenecen a la partici n de la unidad de M, entonces por la definici n 4.2 se tiene $0 \leq f \leq 1$ e $0 \leq g \leq 1$ $\forall p \in M$ y $f + g = 1$. Observe que $f(x) = 0$, $\forall\, x \in F$. Además si $x \in G$ entonces $g(x) = 0$, luego $f(x) = 1$, es decir $f(x) = 1$, $\forall\, x \in G$.

Dados los subconjuntos $F \subset U \subset \mathbb{R}^m$ donde F es cerrado y U es abierto entonces existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que $f^{-1}(0) = F$ y $f(\mathbb{R}^m - U) = 1$. Podemos extender este resultado a variedades.

Aplicación 2

Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de clase $C^k (k \geq 1)$ y dimensión m. Si $F \subset M$ es cerrado entonces existe $f \in C^k(M)$ tal que $f^{-1}(0) = F$.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cubrimiento abierto localmente finito formado por dominios de sistemas de coordenadas $(U_n, \phi_n) \in \mathcal{A}(M)$ tales que $\phi_n(U_n) = B_3(0)$, $\forall\, n \in$

$\mathbb{N}$. Denotemos $W_n = \phi_n^{-1}(B_1(0))$ y $V_n = \phi_n^{-1}(B_2(0))$. Para $n \in \mathbb{N}$ dado, denotemos $K_n = W_n \cap F$. Como la familia $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto de M, se tiene que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (W_n \cap F) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n\right) \cap F = M \cap F = F$$

Como $\phi_n(K_n) \subset B_2(0)$ es cerrado, entonces existe $g_n \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$ tal que $g_n^{-1}(0) = \phi_n(K_n)$ y $g_n(x) = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^m - B_2(0)$. Sea $f_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(p) = \begin{cases} (g_n \circ \phi_n)(p), & \text{si} \quad p \in U_n \\ 1, & \text{si} \quad p \in M - U_n \end{cases}$$

Se sigue que $f_n \in C^k(M)$ y

$$f_n(p) = 0 \Longleftrightarrow (g_n \circ \phi_n)(p) \Longleftrightarrow p \in \phi_n^{-1}(g_n^{-1}(0)) = \phi_n^{-1}(\phi_n(K_n)) = K_n$$

es decir

$$f_n^{-1}(0) = K_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

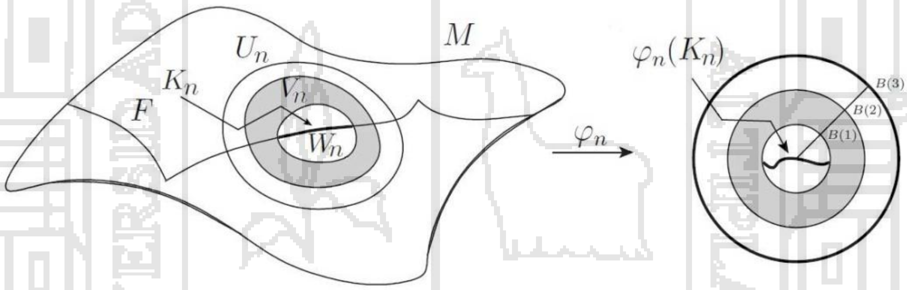

Figura 25:

Defino $f : M \to \mathbb{R}$ como $f(p) = \prod_{n=1} f_n(p)$. Vamos a probar que f esta bien definido, en efecto como U es una familia localmente finita, dado $p \in M$, existe $V \subset M$ con $p \in V$ y existe $J = \{n_1, ..., n_k\}$ conjunto finito tal que $V \cap U_n = \emptyset$, $\forall\, n \in \mathbb{N} - J$, luego $f_n(p) = 1$, $\forall\, n \in N - J$ y por tanto $f(p) = f_{n_1}(p)...f_{n_k}(p)$.

Se sigue que $f \in C^k(M)$ y además

$$f(p) = 0 \Leftrightarrow \exists\, j \in \{1, ..., k\} \text{ tal que } f_{n_j}(p) = 0 \Leftrightarrow \exists\, j \in \{1, ..., k\} \text{ tal que } p \in K_{n_j} \Leftrightarrow p \in \bigcup_{j=1}^{k} K_{n_j}$$

$$\Leftrightarrow p \in \bigcup_{j=1}^{k} (W_{n_j} \cap F) = \left(\bigcup_{j=1}^{k} W_{n_j}\right) \cap F = F$$

luego $f^{-1}(0) = F$.

Definición 4.7 Sean $(M, \mathcal{A}(M))$ y $(N, \mathcal{A}(N))$ variedades diferenciables de clase $C^k(k \geq 1)$ y dimensiones m y n respectivamente, $X \subset M$ un subconjunto arbitrario y una $f : X \longrightarrow N$ función.

1. Se dice que f es de clase C^r en $p \in X (r \leq k)$ si y solo si existe $U_p \subseteq M$ vecindad abierta de p y existe $F_p : U_p \longrightarrow N$ función de clase C^r tal que $F_p = f$ en $U_p \cap X$.

2. Se dice que f es de clase C^r en X si y solo si f es de clase C^r en p, $\forall p \in X$.

Aplicación 3

Si $(M, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable de clase C^k $(k \geq 1)$ y dimensión m, $X \subseteq M$ es un subconjunto cualquiera y $f \in C^r(X, \mathbb{R}^n)(r \leq k)$ entonces existe $V \subseteq M$ abierto con $X \subseteq V$ y existe $F \in C^r(V, \mathbb{R}^n)$ tal que $F|_X = f$.

Demostración. Dado $p \in X$, existe $U_p \subseteq M$ vecindad abierta de p y existe $F_p \in C^r(U_p, \mathbb{R}^n)$ tal que $F_p = f$ en $U_p \cap X$. Observe que $X \subseteq \bigcup_{p \in X} U_p$ y como X con la topología inducida por M es un espacio con base numerable entonces existen $p_1, ..., p_n ... \in X$ tal que $X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{p_n}$. Por comodidad, denotaremos U_n en vez de U_{p_n} y F_n en vez de F_{p_n}.
Sea $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{p_n}$ el cual es un abierto de M, entonces podemos considerar la variedad diferenciable $(V, \mathcal{A}(V))$ la cual tiene la misma suavidad y dimensión que M. Como $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto de V, entonces existe $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ C^k- partición de la unidad estrictamente subordinada al cubrimiento $\mathcal{U}$.
Para $n \in \mathbb{N}$ definamos la función $\lambda_n : V \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\lambda_n(p) = \begin{cases} \varphi_n(p)F_n(p), & \text{si} \quad p \in U_n \\ 0, & \text{si} \quad p \in V - U_n \end{cases}$$

Como $sopp(\lambda_n) \subseteq sopp(\varphi_n) \subseteq U_n$ se sigue que $\lambda_n \in C^r(V)$ y además $\{sopp(\lambda_j)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia localmente finita.
Finalmente definimos $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ como $F = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n$. Se sigue que $F \in C^r(V)$, además para $p \in X$ tenemos

$$F(p) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(p) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n F_n(p) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n f(p) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(p)\right) f(p) = f(p)$$

es decir $F|_X = f$
Cuando $X \subseteq M$ es un subconjunto cerrado, podemos decir mas sobre la extensión F de f.

4.3. Teorema de Tietze Diferenciable

Aplicación 4: (Teorema de Tietze Diferenciable)
Si $(M, \mathcal{A}(M))$ es una variedad diferenciable de clase $C^k (k \geq 1)$ y dimensión m, $X \subseteq M$ es un subconjunto cerrado y $f \in C^r(X, \mathbb{R}^n)$ $(r \leq k)$ entonces existe $F \in C^r(M, \mathbb{R}^n)$ tal que $F|_X = f$

Demostración. Por la aplicación 3 existe $V \subseteq M$ abierto con $X \subseteq V$ y existe $\tilde{F} \in C^r(V)$ tal que $\tilde{F}|_X = f$.

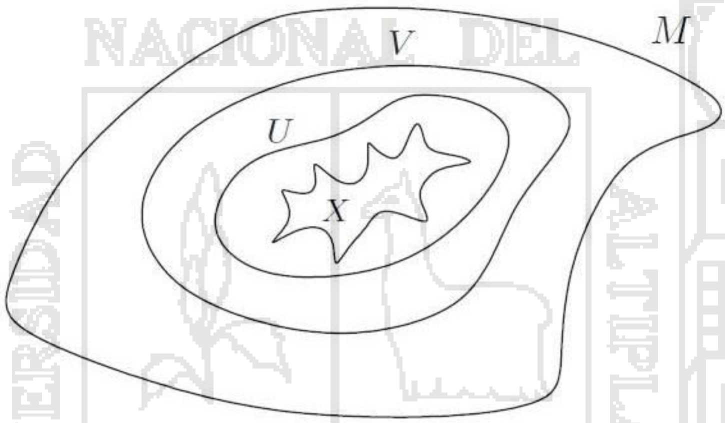

Figura 26:

Siendo M una variedad diferenciable, M es un espacio topol gico Hausdorf con base numerable, así M es un espacio topol gico normal y por Lema 2.7 existe un abierto $U \subset M$ tal que $X \subset U \subset \overline{U} \subset V$. Como X y $M - U$ son cerrados disjuntos entonces por el teorema de Urysohn diferenciable existe $\varphi \in C^k(M)$ tal que $\varphi(X) = 1$ y $\varphi(M - U) = 0$. Definamos $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$F(p) = \begin{cases} \varphi(p)\tilde{F}(p), & \text{si} \quad p \in V \\ 0, & \text{si} \quad p \in M - V \end{cases}$$

Observe que $\mathrm{sopp}(F) \subseteq \mathrm{sopp}(\varphi) \subseteq \overline{U} \subseteq V$ se sigue que $F \in C^r(M)$ y si $p \in X \subset V$ entonces

$$F(p) = \varphi(p)\tilde{F}(p) = f(p)$$

es decir $F|_X = f$

Observación

1. La aplicación 3 es valido si cambiamos $\mathbf{R}^n$ por cualquier variedad diferenciable N de clase C^k.

2. La aplicación 4 no es valido en general si reemplazamos $\mathbf{R}^n$ por otra variedad, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1 Consideremos $\mathbf{R}^2$ y S^1 como variedades de clase C^∞ dimensiones 2 y 1 respectivamente. Consideremos S^1 como subconjunto cerrado de $\mathbf{R}^2$ e id : $S^1 \longrightarrow S^1$ la función identidad la cual es de clase C^∞. Supongamos que id puede ser extendida a una función $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow S^1$ de clase C^∞(Hipt. Aux.)

Denotando $F = (f, g)$, por hipótesis tendríamos que

$$(\cos t, \operatorname{sen} t) = F(\cos t, \operatorname{sen} t) = (f(\cos t, \operatorname{sen} t), g(\cos t, \operatorname{sen} t)), \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Parametrizando S^1 por $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$I = \int_{S^1} (f\,dg - g\,df) = \int_0^{2\pi} [\cos t\, d(\operatorname{sen} t) - \operatorname{sen} t\, d(\cos t)]dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Por otro lado, como

$$f\,dg - g\,df = \left(f\frac{\partial g}{\partial x} - g\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(f\frac{\partial g}{\partial y} - g\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$$

Por el teorema de green tenemos:

$$I = \int_{S^1} (f\,dg - g\,df) = \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial g}{\partial y} - g\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial g}{\partial x} - g\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] dxdy$$

$$= 2\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) dxdy = 2\int_D \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} dxdy = 2\int_D \det JF\, dxdy$$

en donde $D = B_1[0]$. Pero como $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow S^1$ entonces $F'(x, y) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow T_{F(x,y)}S^1$ luego $F'(x, y)(e_1)$ y $F'(x, y)(e_2)$ son paralelos y por tanto $\det JF(x, y) = 0$, $\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Se sigue que $I = 0$ lo cual es una contradicción.

Conclusiones

Conforme a los objetivos propuestos:

- Se desarrolló una demostración del Teorema de Tietze Diferenciable utilizando las Aplicaciones de la Partici n de la Unidad.
- Se estudió espacios topol gicos compactos, en la sección 2.2 que ha permitido dar la base para entender la Partici n de la Unidad y sus Aplicaciones.
- En el Corolario 4.1 se demostró la existencia de la Partici n de Unidad subordinada a un cubrimiento abierto de una variedad Diferenciable.
- Se demostró las Aplicaciones de la Partici n de la Unidad en la sección 4.2: Aplicación 1(Teorema de Urysohn Diferenciable), Aplicación 2 y Aplicación 3.

Recomendaciones

- La investigación obtenida será útil para consultas de estudiantes o profesionales de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas, que se planteen problemas con objeto de aplicación del teorema Tietze Diferenciable ,también será benificiada toda persona interesada en comprender y profundizar sobre el tema.
- En las futuras investigaciones se sugiere estudiar y profundizar el Teorema de Tietze en topología diferencial.
- Antes de analizar la Investigación realizada, el lector o investigador previamente debe conocer: Topología, análsis en $\mathbf{R}^n$ y topología diferencial.

Bibliografía

[1] Elon Lages Lima, Variedades Diferenciáveis, Impreso no, 2007.

[2] Felipe Clímaco Ccolque Taipe, Variedades Diferenciales, Puno-Perú,Agosto del 2011.

[3] Gustavo N. Rubiano O., Topología General, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2002.

[4] Sidney A. Morris Topology Without Tears,Versi n del August 19, 2010.

[5] Manfredo P. Do Carmo, Geometrá Riemanniana, Projeto Euclides, Brasil, 2011.

[6] James R.Munkres, Topología, Prentice Hall, España, 2002.

[7] Sergio Plaza, Variedades Diferenciables, Grupo Editorial Chilena 2003.

[8] Elon Lages Lima, Elementos de Topogía Geral, Projeto Euclides, Brasil 2011.

[9] Elon Lages Lima, Análise no Espaco $\mathbb{R}^n$, Colecci n Matemática Universitaría, IMPA, 2004.

[10] https://editorialdinosaurio.files.wordpress.com/2012/03/topologc3ada-ii-2mar22.pdf

[11] http://www.emis.de/journals/DM/vX1/art6.pdf