UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

TESIS

GENERALIZACIÓN DE PATRONES Y NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE ROSASPATA

PRESENTADA POR:

FREDY EDGAR CUELA CALSÍN

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAGÍSTER SCIENTIAE EN EDUCACIÓN

MENCIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

PUNO, PERÚ

2021

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

TESIS

GENERALIZACIÓN DE PATRONES Y NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE ROSASPATA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO ESCUELA DE POSGRADO COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN PUNO-PERÚ

PRESENTADA POR:
FREDY EDGAR CUELA CALSÍN

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAGÍSTER SCIENTIAE EN EDUCACIÓN

MENCIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

APROBADA POR EL SIGUIENTE JURADO:

PRESIDENTE ....
Dra. BRISVANI BONIFAZ VALDEZ

PRIMER MIEMBRO ....
Dr. GODOFREDO HUAMAN MONROY

SEGUNDO MIEMBRO ....
M.Sc. LUCIO BERNARDO CONDORI PILCO

ASESOR DE TESIS ....
Dr. LINO VILCA MAMANI

Puno, 23 de agosto del 2021

ÁREA: Logros de aprendizaje de la Matemática.
TEMA: Generalización de Patrones y Niveles de Algebrización en Estudiantes de Educación Secundaria de Rosaspata.
LÍNEA: Características de aprendizaje logrados en la Matemática

DEDICATORIA

- A Dios por haberme permitido llegar hasta este objetivo.

- A mis padres por ser ejemplo de vida y por su apoyo incondicional.

- A mi amada esposa e hijos por la comprensión y el apoyo a lo largo de este camino.

AGRADECIMIENTOS

- A Dios por la inmensidad de su amor y por regalarme la oportunidad de vivir.
- A la Universidad Nacional del Altiplano de Puno, por darme la oportunidad de formar parte de la EPG de la maestría en Educación, en mención didáctica de la matemática.
- A todos mis profesores de la Maestría en Didáctica de la Matemática de la Escuela de Postgrado, por enseñarme el verdadero papel de un educador en didáctica de la matemática.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

Pág.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

El propósito de esta investigación es determinar el grado de correlación entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata en el año 2019. Metodológicamente, la investigación es de tipo descriptivo relacional; la muestra está constituida por 85 estudiantes, a quienes se les aplicó como técnica el examen y como instrumento la prueba de generalización de patrones algebraicos y la prueba de niveles de algebrización. Se utilizó la prueba de hipótesis la correlación de Pearson aplicada por medio del software SPSS. Así mismo existe un grado de correlación alta y positiva entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización en los estudiantes del cuarto y quinto grado de educación secundaria de Rosaspata en el año académico 2019, esta afirmación se evidencia con el coeficiente de correlación de Pearson r= 0,841 y su respectiva prueba de hipótesis de la distribución de T de Student cuyo valor es Tc = 14,15 el cual permite confirmar la hipótesis de trabajo. El nivel de generalización de patrones en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación secundaria de Rosaspata, es regular y deficiente en 38,82% y 42,35% respectivamente; por lo que los estudiantes tienen dificultades en la identificación de patrones en una secuencia y dificultades en la representación de objetos matemáticos. La investigación permitió concluir que los estudiantes tienen dificultades al traducir los lenguajes cotidianos al lenguaje matemático.

Palabras clave: Algebrización de problemas, dimensiones de algebrización, generalización de patrones, niveles de algebrización, pensamiento algebraico.

ABSTRACT

The purpose of this research is to determine the degree of correlation between the generalizationof patterns and the levels of algebrization of problems in the students of the fourth and fifth grade of high school of the High School Educational Institution of Rosaspata in the year 2019. Methodologically, the research is of a relational descriptive type; the sample is constituted by 85 students, to whom the test was applied as a technique and as an instrument the test of generalization of algebraic patterns and the test of algebrization levels. Pearson's correlation hypothesis test was used, applied by means of SPSS software. Likewise, there is a high and positive degree of correlation between the generalization of patterns and the levels of algebrization in the students of the fourth and fifth grade of high school of Rosaspata in the academic year 2019, this statement is evidenced by Pearson's correlation coefficient r= 0.841 andits respective hypothesis test of Student's T distribution whose value is Tc = 14.15 which allows confirming the working hypothesis. The level of generalization of patterns in the students of the fourth and fifth grades of high school in Rosaspata is regular and deficient in 38.82% and 42.35% respectively; therefore, the students have difficulties in the identification of patterns in a sequence and difficulties in the representation of mathematical objects. The research allowed concluding that students have difficulties in translating everyday languages into mathematical language.

Keywords: Algebrization of problems, dimensions of algebrization, generalization of patterns, levels of algebrization, algebraic thinking.

INTRODUCCIÓN

El trabajo de investigación, Generalización de patrones y niveles de algebrización en estudiantes de educación secundaria de Rosaspata, es una investigación descriptiva y el diseño de investigación es relacional, tiene como propósito determinar el grado de correlación entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata en el año 2019.

La investigación se plantea en un estudio realizado con 85 estudiantes los cuales fueron evaluados con dos pruebas, los cuales han sido analizados mediante una verificación estadística apropiada. Para efectos de la presente investigación se utilizó los conceptos relacionados al presente trabajo propuestos por Piaget, Krutestskii, Castro, Cañadas, Molina y Dorfler quienes manifiestan que en la vida cotidiana las generalizaciones son de gran importancia para la generación de ideas, hipótesis y argumentaciones matemáticas.

La estructura del presente trabajo de investigación consta de cuatro capítulos, siguiendo el esquema del perfil de tesis.

En el primer capítulo, se fundamenta el planteamiento del problema, se menciona el problema general de investigación y los problemas específicos a los que se responden al final de investigación; así mismo se consideran los objetivos generales y específicos como también se explica la justificación de la investigación.

En el segundo capítulo, se sustenta el marco teórico referido a los antecedentes de investigación, así mismo, se desarrolla el sustento teórico, considerando los aportes científicos y teóricos de diferentes autores relacionados al tema generalización de patrones y los niveles de algebrización de problemas; de la misma forma se plantean las hipótesis.

En el tercer capítulo, se expone el diseño metodológico de la investigación en la que se señala el tipo y diseño; así mismo se describe la población y muestra de estudio; por otro lado, se considera las técnicas e instrumentos de recolección de datos, procedimiento de la investigación, plan de tratamiento de datos y el diseño estadístico.

En el cuarto capítulo, se presentan los resultados de la investigación mediante tablas de frecuencias porcentuales y figuras estadísticas con sus respectivas pruebas de hipótesis, análisis e interpretaciones; así mismo, se presentan las discusiones correspondientes; considerando las investigaciones que anteceden a nuestra investigación, con las teorías de diferentes autores respecto al tema en estudio.

Finalmente, se presentan las conclusiones que son resultados de la investigación, considerando algunas sugerencias que pueden ser útiles para la muestra en estudio; así mismo se presenta las referencias bibliográficas y anexos

CAPÍTULO I

REVISIÓN DE LITERATURA

1.1. Marco Teórico

1.1.1 Generalización de Patrones Algebraicos

Piaget y colaboradores han sido unos de los primeros autores en tratar la generalización destacándola como proceso fundamental en la construcción del conocimiento estableciendo relaciones entre los conceptos de generalización y abstracción; por consiguiente, la generalización estaría sometida a la abstracción y tendría como tarea el establecimiento de regularidades en lo real. Hablan sobre un tipo de abstracción empírica, en la que la generalización es de naturaleza extensional, es decir, solo implica el paso de algunos a todos (Piaget, 1975).

Más próximo al ámbito matemático, Krutestskii (1976) considera la generalización como la habilidad para generar conocimiento matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles: la habilidad personal para ver lo general y conocido en lo que es particular y concreto, y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado.

Castro *et al.* (2010) definen generalizar como: "extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos" (p. 58).

En consecuencia, Cañadas y Castro (2007) consideran que la generalización implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares. Es un paso clave, el más costoso en términos cognitivos dentro del razonamiento inductivo. Así mismo ellos destacan la importancia de la generalización para generar conocimiento matemático y señalan que "es posible llegar a la generalización a través de la abstracción de lo que es regular y común, a partir del descubrimiento de patrones" (p.55).

Hasta aquí se entiende que los autores citados, coinciden en manifestar que la generalización de patrones queda vinculada al uso de la letra como número general. Durante la resolución de éstas, la letra tiene distintas funciones, primero como representanta de un número concreto, luego como una representación de una relación funcional, y posteriormente como incógnita.

Dörfler (1991) señala que, tanto en la vida cotidiana como en el pensamiento científico, las generalizaciones son de gran importancia ya sea en la construcción de conceptos o proposiciones como en la generación de ideas, hipótesis o argumentaciones. (p. 63).

Según Cañadas *et al.* (2011), la relación entre el álgebra y la expresión de generalización se ha incrementado desde el trabajo de autores como Mason, Graham, Pimm o Gowar (1985). Desde ese trabajo ha tomado fuerza la idea de que el lenguaje algebraico no es el único camino para generalizar.

En primer lugar, Dörfler (1991) distingue entre generalizaciones empíricas y generalizaciones teóricas. Las primeras consisten en encontrar una cualidad o propiedad común entre muchos objetos o situaciones y darse cuenta de que esos objetos tienen algo en común y general a esos objetos y situaciones. Nosotros nos centraremos en este tipo de generalizaciones.

Radford (2010) diferencia entre: (a) generalización algebraica, cuando los estudiantes llegan a obtener una expresión que les permite obtener cualquier caso particular, y (b) generalización aritmética, cuando los estudiantes manifiestan numéricamente haber identificado el patrón común de los casos particulares y lo utilizan para obtener cualquier otro caso particular, pero sin introducirse en el contexto algebraico.

Cañadas *et al.* (2008) también diferencian la generalización textual (a la que denominan verbal) cuando los estudiantes expresan con lenguaje natural lo común que han identificado en los casos particulares y lo aplican en cualquier otro caso particular.

Dörfler (1991), Cañadas *et al.* (2011), y Radford (2010), en primer lugar, dan la importancia a la generalización de patrones algebraicos, tanto en el pensamiento individual como en el desarrollo de la comunicación como medios de pensamiento y comunicación, en ese sentido la generalización que los estudiantes utilizan mediante dibujos o esquemas, son denominados por Radfor como generalización pictórica. En consecuencia, Las tareas de generalización involucran la búsqueda de patrones y su solución exige hallar un elemento a partir de otros datos conocidos, se trata de generar, a partir de los casos particulares dados, nuevos casos particulares o la expresión del término general. Para ello es necesario generar una pauta o patrón de comportamiento de los elementos conocidos.

Referente a ello, Moss y Beatty (2006) indican que las tareas de generalización son también conocidas como tareas de secuencias numéricas o secuencias geométricas crecientes. Las autoras presentan patrones de crecimiento en diferentes contextos. Proponen a los estudiantes una serie de secuencias numéricas o geométricas y piden que la expresen como una función o "regla". Dentro de las tareas de generalización se puede diferenciar entre las tareas que presentan diferentes casos particulares y se identificar el patrón y llegar a la generalización; y aquellas que se plantean esas mismas cuestiones, pero sólo a partir de un caso particular.

Se puede afirmar que de acuerdo al planteamiento de las autoras, en las tareas de generalización se proporciona únicamente una secuencia numérica y la acción consiste en hallar el término general de la misma, esto da entender que la generalización de patrones es usada como una ruta de aprendizaje hacia al álgebra un puente de tránsito de la aritmética al algebra, los autores citados hasta aquí, se refieren a que la generalización de patrones numéricos y la formulación simbólica de relaciones entre las variables, llevan a los estudiantes a desarrollar capacidades para el desarrollo de la generalización algebraica; es decir, la generalización algebraica de un patrón se basa en notar algo común en el contexto del problema planteado y que es generalizado para todos los términos de la secuencia, lo cual sirve para garantizar la construcción de expresiones de elementos de la secuencia más allá del campo perceptual mediante la inducción.

1.1.1.1. Dimensiones de la Generalización De Patrones

a) Patrones

Castro *et al.* (2010) definen el patrón (o pauta) como: "lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (p. 57). Cañadas y Castro (2007) apuntan que los patrones matemáticos están relacionados con una regla general, no solo con casos particulares. Los estudiantes se basan en una conjetura que es cierta para casos particulares, y han de validarla para nuevos casos, para deducir que la conjetura es cierta en general.

La relación entre patrones y generalización ha sido reconocida por diversos autores. Pólya (1966) señala que el reconocimiento de patrones es esencial en la habilidad para generalizar ya que, al partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos.

La idea básica de la noción de patrón es que surgen a partir de la repetición de una situación con regularidad (Stacey, 1989). Por otro lado, Kaput (1999) presenta la idea de patrón y estructura cuando se refiere a la generalización del siguiente modo: extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos (p. 136).

El uso de patrones es uno de los caminos para promover el pensamiento algebraico y enseñar a generalizar a los alumnos (NCTM, 2000).

Así, Moss y London (2011), señalan que cuando se priorizan las representaciones visuales, y se ayuda a los estudiantes a focalizarse en los patrones como un camino para discernir reglas generales, están mejor capacitados para encontrar, expresar y justificar reglas funcionales.

Los autores citados muestran su planteamiento coincidentemente en que una de las actividades que se pueden establecer sobre los patrones es llegar a generalizarlos para poder describirlos y cuantificarlos, puesto que, a partir de la observación de las regularidades y verificación de los patrones en una determinada situación, se permite generalizar dicho patrón. De este modo los patrones juegan un papel destacado en los procesos de generalización, puesto que estimulan la observación, formulación, argumentación y validación de conjeturas

Atendiendo a la definición de patrón que asumimos en el marco teórico, entre las respuestas en que los alumnos trabajan con algún patrón distinguiremos varias subcategorías, adaptando la clasificación realizada por Lin *et al.* (2004).

Estas subcategorías se presentan a continuación:

- **Uso de patrón inapropiado:** El alumno usa algún patrón que no es pertinente a la cuestión trabajada.
- **Uso de patrón apropiado pero incompleto:** El alumno usa un patrón que corresponde a la tarea trabajada pero no es completo.
- **Uso de patrón apropiado y completo:** El alumno usa un patrón que corresponde a la tarea trabajada y resulta útil y completo para llevarla a cabo.

b) Representaciones

El término representación goza de múltiples significados según el campo en que se utilice, por lo que es importante determinar qué entenderemos por representación en nuestro trabajo.

Según la Real Academia Española (2001), podemos destacar como aplicables al campo de la Didáctica de las Matemáticas las siguientes.

Fernández (1997, citado por Espinosa, 2005) define la representación como "el conjunto de herramientas (acciones, signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los que los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático" (p. 2).

Rico (2009) manifiesta que se representa para hacer presente algo, pero ese algo es distinto y existente a lo que la representación sustituye. El mismo autor identifica las representaciones como “todas aquellas herramientas signos o gráficos que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas” (p. 3).

Como se puede observar, todas las definiciones presentadas son acordes entre sí y encierran tras ellas un complejo campo de estudio. Existe un acuerdo en hacer una distinción entre representaciones internas y representaciones externas.

Goldin y Kaput (1996) consideran que las representaciones internas son las configuraciones que no son directamente observables, pero que se pueden inferir a través de lo que se dice o se hace. Las representaciones externas son las configuraciones observables tales como las palabras, gráficos, dibujos, etc. que representan cuestiones que son accesibles a la observación.

Castro y Castro (1997) distinguen entre representaciones internas como imágenes mentales, y representaciones externas como las que tienen una traza o soporte físico tangible.

Duval (1999) define como representación externa la producida como tal por un sujeto o sistema, que se efectúa a través de un sistema semiótico y es accesible a todos quienes conocen dicho sistema. Por otro lado, describe la representación interna como aquella que pertenece a un sujeto y que no es comunicada a otro a través de la producción de una representación externa.

Como plantea el mismo Duval, las representaciones externas no tienen como única función la comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática, la cual depende directamente del tipo de representación utilizada. Este autor destaca la importancia de trabajar con varias representaciones ligadas a un mismo objeto, ya que esa diversificación, ayudará potencialmente a la comprensión del objeto estudiado.

Cucoo (2001) define las representaciones externas como las que nos permiten comunicamos fácilmente con otras personas. Estas se hacen escribiendo en papel, dibujando, haciendo representaciones geométricas o ecuaciones. Este autor define las representaciones internas como las imágenes que creamos en la mente para representar procesos u objetos matemáticos. Este tipo de representaciones son más difíciles de describir.

Martínez (2006) destaca que diversos autores proponen que el trabajo con distintos tipos de representaciones externas permite una mejor aproximación a los objetos matemáticos.

En nuestro trabajo, nos centraremos en el análisis de las representaciones externas, y usaremos el término representación para referirnos a las representaciones externas consideradas como objeto, adoptando la definición usada por Castro y Castro (1997): "notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes" (p. 96).

Las representaciones externas juegan una doble función: actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, y permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan. Pero, según Rico (2009), una representación no cobra sentido por sí sola y de forma aislada, sino que debe contemplarse dentro de un sistema de significados y relaciones.

De ahí la necesidad de definir qué son estos sistemas de representación, y qué tipo de sistemas se consideran en el campo en que estamos trabajando.

Gómez (2007), se refiere a los sistemas de representación como "los sistemas de signos por medio de los cuales se designa un concepto" (p. 41), y señala que los sistemas de representación organizan los símbolos mediante los cuales se hacen presentes los conceptos matemáticos, aportan distinto significado para cada concepto, y por lo tanto, un mismo concepto admite y necesita varios sistemas de representación complementarios.

Rico (2009) apunta que una característica distintiva de los conceptos y estructuras matemáticas es la necesidad de emplear diversas representaciones distintas para captarlos en toda su complejidad Presentamos a continuación una clasificación de tipos de representaciones que vamos a utilizar al analizar las producciones de los estudiantes, basándonos en todo lo expuesto hasta el momento, y partiendo de la clasificación establecida por Kolloffel *et al.* (2009) para otros contenidos matemáticos, que más tarde fue restructurada por Cañadas y Figueiras (2011).

El aporte que dan los autores citados es que identifican cuatro sistemas de representación en su estudio: (a) aritmética, (b) algebraica, (c) textual y (d) sintética (textual-aritmética). En el presente estudio englobamos las representaciones aritméticas y algebraicas en un orden superior: representaciones simbólicas. Además, añadimos los sistemas de representación tabular y pictórica, frecuentes y útiles en tareas relacionadas con el pensamiento algebraico, entendiendo que representar es sustituir, dar presencia a un ausente y, por tanto, confirmar su ausencia. La representación supone en este caso una dualidad representante representado. Se representa para hacer presente algo, pero ese algo es distinto y existente, a lo cual la representación sustituye.

- **Verbal:** Se sirven del lenguaje natural para exponer la información de forma cohesionada. En el caso de los protocolos que llevan a cabo los estudiantes al resolver una tarea, permiten expresar el proceso de razonamiento de forma secuencial (Cañadas y Figueiras, 2007).

- **Tabular:** La RAE (2001), define tabla como un “cuadro o catálogo de números de especie determinada, dispuestos en forma adecuada para facilitar los cálculos”.

Las tablas toman parte en el campo de las representaciones en el contexto del pensamiento funcional. Brizuela y Roth (2002) lo ponen de manifiesto y estudian los distintos modos en que los estudiantes representan información de problemas en forma de tablas de producción propia.

Nos referimos aquí a la representación tabular como aquella en la que los alumnos se valen de una tabla de datos para la organización y representación de cantidades numéricas, expresiones verbales, o relaciones entre elementos de la tarea.

- **Pictórica:** Se utiliza un sistema de representación visual, por lo general un dibujo, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas de la tarea, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueras, 2007).

- **Simbólica:** Las representaciones simbólicas son aquellas de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento (Rico, 2009, p. 8).

- Distinguimos dentro de las representaciones simbólicas dos subtipos: numéricas y algebraicas.

- **Numérica:** Se sirven de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático que suelen organizarse para realizar un cómputo.

- **Algebraica:** Se caracterizan por el uso del simbolismo algebraico para expresar un enunciado o generalizar las operaciones aritméticas. Son las representaciones que suponen un mayor grado de abstracción en los estudiantes.

- **Múltiples:** Van Somersen (1998, citado por Cañadas, et al., 2011) consideran las representaciones múltiples como aquellas que resultan de la combinación de dos o más sistemas de representación de los definidos en este trabajo.

Señalamos algunas subcategorías que distinguimos dentro de las representaciones pictóricas y tabulares. En las representaciones pictóricas, consideramos las siguientes:

- **Hacen dibujo completo:** dibujo correspondiente en número de mesas y niños y en su disposición con el presentado en el ejemplo genérico.

- **Hacen dibujo incompleto:** dibujo que se corresponde en la disposición de mesas y niños al del ejemplo genérico, pero al que le falta algún elemento.

- **Hacen dibujo que no se corresponde con el ejemplo genérico:** el dibujo difiere en la disposición de las mesas y/o los niños respecto al presentado en el ejemplo genérico.

- **Sustitución de un número por n:** El alumno responde con una expresión en la que sustituye el número de mesas y/o niños por la letra n.

- **Sustitución de una palabra por n:** El alumno responde con una expresión en la que sustituye la palabra mesas y/o la palabra niños por la letra n.

- **Representación pictórica con n:** El alumno hace un dibujo (similar o no al presentado en el ejemplo genérico) en el que sustituye los elementos correspondientes a las mesas y/o niños por letras n.

- **Operación con n:** El alumno responde con una expresión en la que iguala la letra n con el resultado de una operación.

1.1.2 Niveles de Algebrización

Godino *et al.* (2013), el carácter algebraico está esencialmente ligado al reconocimiento por el sujeto que realiza la actividad de la regla que conforma el objeto intensivo, la consideración de la generalidad como una nueva entidad unitaria y su materialización mediante cualquier registro semiótico para su posterior tratamiento analítico. Este triple proceso (reconocimiento o inferencia de la generalidad, unitarización y materialización) va a permitir definir dos niveles primarios del pensamiento algebraico, distinguibles de un nivel más avanzado en el que el objeto intensivo es visto como una nueva entidad representada con lenguaje alfanumérico.

En síntesis, podemos establecer que nuestro modelo de algebrización se basa en la interpretación de la *práctica algebraica* como resultado de un proceso de generalización del cual se obtiene un tipo de objeto matemático que denominaremos objeto intensivo, que viene a ser la regla que genera la clase, el tipo o generalidad implicada. Luego, la formulación de esta regla, pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen o describen, como una entidad unitaria emergente del sistema. Por tanto, además de la generalización que da lugar al conjunto, hay un proceso de *unitarización*. Por otra parte, la nueva entidad unitaria tiene que ser hecha ostensiva o *materializada* mediante un nombre, icono, gesto o un símbolo, a fin de que pueda participar de otras prácticas, procesos y operaciones. El objeto ostensivo que materializa al objeto unitario emergente de la generalización es otro objeto que refiere a la nueva entidad intensiva, por lo que tiene lugar un proceso de *representación* que acompaña a la generalización y materialización. Finalmente, el símbolo se desprende de los referentes a los cuales representa/sustituye para convertirse en objeto sobre el cual se realizan acciones (*proceso de reificación*). Estos símbolos-objetos forman nuevos conjuntos sobre los cuales se definen operaciones, propiedades y estructuras, esto es, sobre los cuales se opera de manera sintáctica, analítica o formal. Los tipos de objetos y procesos algebraicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico en los niveles superiores de algebrización. Pero los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, incluso gestual (Radford, 2003).

De este modo, proponemos utilizar tres criterios para distinguir los niveles de razonamiento algebraico:

- La presencia de "objetos algebraicos" intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación).
- Tipo de lenguajes usados para expresar dichos objetos.
- El tratamiento que se aplica (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales).

Proponemos distinguir dos niveles de algebrización primarios (que llamamos proto-algebraicos). Dichos niveles están enmarcados entre un nivel 0 de algebrización y un tercer nivel en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica.

El nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro. No se trata por tanto de niveles exclusivamente matemáticos (centrados en las tareas), sino de estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas (centrados en la relación de los sujetos con las tareas). Además, el cambio en alguna de las variables del problema puede dar lugar a nuevas prácticas matemáticas con progresivo nivel de algebrización.

Los criterios básicos para definir los niveles de algebrización son:

1) **Generalización**. Generación o inferencia de intensivos.

2) **Unitarización.** Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.

3) **Formalización y ostensión.** Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.

4) **Transformación.** Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones.

1.1.2.1 Dimensiones de Niveles de Algebrización

Ilustraremos las descripciones de los niveles de algebrización con ejemplos de actividades pertenecientes a las tres facetas o campos del razonamiento algebraico que propone Kaput (2008), esto es, estructuras/operaciones, funciones/patrones y modelización

a) Ausencia de razonamiento algebraico (nivel cero)

En este nivel intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos o literales que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas funcionales, el reconocimiento de la relación de un término con el siguiente, no implica la determinación de una regla que generaliza la relación de los casos particulares.

Ejemplo 1. Calcula el término que falta: $1500 - 925 =$ _______

Suponiendo que el resultado 575 se obtiene mediante el algoritmo usual de la sustracción, el número desconocido, representado por una línea horizontal (___), es simplemente el resultado de efectuar la operación indicada en el primer miembro de la igualdad; el signo igual expresa el resultado de la operación. Se trata, por tanto, de una actividad típicamente aritmética. El trabajo consiste en calcular el número particular que se debe asignar a la línea horizontal de la derecha.

Ejemplo 2. En los libros de educación primaria encontramos abundantes enunciados de problemas como el siguiente:

- El Ayuntamiento plantó al comienzo de la primavera 25 cajas de petunias. Cada caja contenía 20 petunias. Tras unos días de sequía murieron 72 petunias. ¿Cuántas quedan aún?

- Un alumno puede razonar del siguiente modo: El número total de petunias que se plantaron fueron 25 cajas, por 20 petunias en cada caja, total 500 petunias. Como después se estropearon 72, habrá que descontarlas del total, o sea, quedan; 500 – 72 = 428 petunias.

En esta práctica matemática intervienen números particulares, operaciones aritméticas aplicadas a dichos números y la igualdad como resultado de la operación.

b) Nivel incipiente de algebrización (nivel 1)

En el **ejemplo 2**, un alumno podría haber razonado de la siguiente forma: "puesto que 24386 + 6035 = 30421, entonces para calcular 24386 + 6035 + 715 es suficiente añadir al resultado 30421 + 715, dando como suma total 31136. Asimismo, podría haber razonado que los resultados son iguales dos a dos, puesto que el orden en que se suman dos términos es irrelevante.

El alumno no tiene porqué nombrar a estos razonamientos "propiedades asociativa y conmutativa"; lo esencial es que establece una relación genérica entre números y unas propiedades reutilizables de sus operaciones. Es aquí que se establece un primer paso en la algebrización del razonamiento.

En un nivel 1 de algebrización, intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados con símbolos o letras, pero sin operar con dichos objetos.

En tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal. En el caso de prácticas matemáticas que ponen en juego incógnitas y relaciones (ecuaciones) el uso de materializaciones simbólicas (__, …, [ ],) para las cantidades desconocidas marca un primer nivel de algebrización si la determinación del valor desconocido no se hace mediante la mera asignación del resultado de operaciones sobre objetos particulares. Asimismo, la aplicación de propiedades relacionales y estructurales del semigrupo **N** de los naturales, expresadas con lenguaje numérico y natural, es también propia del nivel 1 de algebrización.

Ejemplo 3:

$$\boldsymbol{a})\ \ 15+11=11+[\ \ ];\ \ \boldsymbol{b})\ 10+[\ \ ]=15+15;\ \ \boldsymbol{c})\ 3x\,[\ \ \ ]=672$$

La tarea a) se puede resolver sin realizar directamente las operaciones, evocando la propiedad conmutativa de la suma de los números naturales. La b) se puede resolver mediante descomposición y aplicando la propiedad asociativa:

$$10+[\ \ \ ]=10+5+15=10+(5+15)=10+20$$

Luego el número que falta es 20. La c) se puede resolver reconociendo que la división es la operación inversa de la multiplicación. Algunos alumnos de 12-13 años persisten en resolver la expresión c) mediante ensayo y error, sin reconocer la relación inversa entre la división y multiplicación (“síndrome de la inversa de la multiplicación”; Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 8). La resolución mediante ensayo y error, probando sucesivos números, sería una práctica de nivel 0 de algebrización.

En los tres casos las tareas se resuelven evocando propiedades algebraicas de las operaciones con números naturales, y no realizando los cálculos sobre los números particulares que intervienen, o mediante ensayo y error. Esta es la razón por la que le asignamos un primer nivel de algebrización. **Ejemplo 4** (*balanza algebraica*): ¿Cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza para que quede equilibrada?

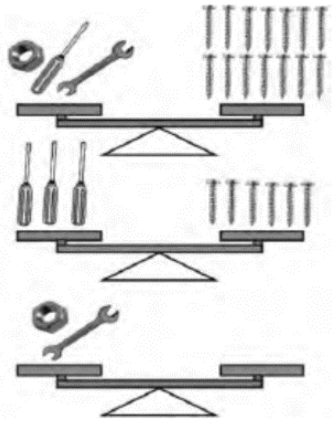


Figura 1. Balanza algebraica

Solución: La segunda balanza indica que 3 destornilladores pesan igual que 6 tornillos; luego 1 destornillador pesa igual que 2 tornillos. En la primera balanza hay 14 tornillos en el plato de la derecha; si quitamos el destornillador habrá que quitar 2 tornillos para que se mantenga el equilibrio.

Luego en la tercera balanza hay que poner $14 - 2 = 12$; 12 (tornillos).

Como se ve se están aplicando propiedades estructurales del semianillo $(\mathbb{N}, +, \times)$, aunque con un lenguaje natural. Se puede asignar el nivel 1 de algebrización a cada una de las etapas en que se descompone la tarea.

Ejemplo 5 (*áreas y perímetros*): Indica el lado de un cuadrado y la base y altura de un rectángulo que tengan igual área y distinto perímetro.

Solución 1: Supongamos que el lado del cuadrado es 6; el perímetro será 24 (cuatro veces el lado) y el área 36 (lado por lado). Un rectángulo de área 36 puede estar formado por una base de 12 y una altura de 3 (12x3=36); en este caso el perímetro será12+12+3+3=30, que es diferente de 24.

En esta resolución interviene los objetos intensivos, fórmulas generales de cálculo del área de un cuadrado (lado por lado), del rectángulo (base por altura), perímetro del cuadrado (4 por lado) y perímetro del rectángulo (2 veces la base más dos veces la altura). Sin embargo, dichas reglas no aparecen enunciadas de manera general y explícita, sino particularizadas con valores numéricos específicos. La actividad matemática que se realiza es de índole aritméticogeométrica sin ningún carácter algebraico (nivel 0).

Solución 2: Supongamos que el lado del cuadrado es 6; el perímetro será 24 y el área 36. Podemos encontrar muchos rectángulos cuya área sea 36, y perímetro diferente de 24. Por ejemplo, si la base fuera 4, la altura sería 9 (36/4=9), el perímetro 26; si la base fuera 2, la altura sería 18 (36/2=18), el perímetro 40. En general, la altura sería 36 dividido por la base.

En esta segunda solución se genera un objeto intensivo: el conjunto de soluciones posibles para la base y altura del rectángulo una vez fijada el área del cuadrado. Se establece una relación general entre la altura y la base del rectángulo (altura=Área/base), aunque dicha regla se enuncia con lenguaje aritmético y natural.

Esta actividad matemática supone un nivel 1 de razonamiento algebraico.

c) Nivel intermedio de Algebrización (Nivel 2)

Este nivel de algebrización lo definimos mediante la siguiente regla2: Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma:

$$Ax \pm B = C$$

En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

Ejemplo 6: Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después que se usa cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?

Solución 1: Si Juan tuviera 2 monedas podría jugar; al meterlas en la máquina obtendría 4, pagaría 4 y se quedaría con 0, por lo que no podría volver a jugar. Si Juan tuviera 3 moneda, al meterlas en la máquina obtendría 6, al pagar 4 se queda con 2. Vuelve a meterlas, obtiene 4; al pagar 4 se queda sin dinero. Luego Juan tenía al principio 3 monedas.

La actividad matemática desarrollada en esta resolución no pone en juego ningún nivel de algebrización. El sujeto trabaja con valores particulares de las variables de la tarea y opera aritméticamente con ellos. Veamos la siguiente solución:

Solución 2: Juan comienza con n monedas (cantidad desconocida); al ponerlas en la máquina obtiene ***2n***; paga 4 y se queda con ***2n-4***. Introduce en la máquina ***2n-4*** y obtiene el doble, o sea, ***2 (2n-4)***. Al pagar 4 se queda sin dinero, o sea:

$$2(2n-4)-4=0; \quad 4n-8-4=0; \quad 4n-12=0; \quad n=3$$

La solución 2 es claramente de nivel 2. La cantidad desconocida de monedas (incógnita) se representa simbólicamente mediante una ecuación de la forma: $\boldsymbol{Ax+B=C}$.

d) Nivel consolidado de Algebrización (Nivel 3)

En el **Ejemplo 6** (*balanza algebraica*) la exposición en lenguaje natural podría haberse formalizado: puesto que ***3d=6t*** (3 destornilladores = 6 tornillos); dividiendo por 3 ambos miembros ***d=2t***. Además, en la primera balanza, $\boldsymbol{p+d+l=14\,t}$ (pieza, destornillador, llave = 14 tornillos). Entonces, si se quita el destornillador del platillo izquierdo el equilibrio se mantiene si quitamos un peso equivalente, o sea 2 tornillos.

Esta explicación de la actividad matemática realizada supone un nivel consolidado de algebrización (nivel 3) ya que se han planteado de manera simbólica las ecuaciones y se aplica una técnica de sustitución para resolver la ecuación requerida.

Este nivel puede ser descrito de la siguiente forma: Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo:

$$Ax \pm B = Cx \pm D$$

La formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Evidentemente, se pueden identificar niveles más avanzados de razonamiento algebraico, como aquellos que implican el reconocimiento, enunciado y justificación de propiedades estructurales de los objetos matemáticos que intervienen en la práctica correspondiente (números, medidas, transformaciones geométricas,).

1.2. Antecedentes

Según Belizario (2018) El objetivo del estudio es evaluar el conocimiento algebraico de los docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno - 2017, se consideró como variable, de estudio el conocimiento algebraico, concretamente el dominio del álgebra escolar y como dimensiones de estudio se consideró los niveles de algebrización planteado por Godino. La metodología pertenece al tipo descriptivo y diseño diagnóstico, sustentado en el análisis cuantitativo. Los resultados muestran un nivel regular (con una nota de 15,31) de conocimiento algebraico, con diferencias significativas entre los niveles de algebrización 1, 2 y 3, 4. Es por ello que se sugiere realizar cursos formativos específicos sobre los contenidos algebraicos elementales, a fin de capacitar a los docentes para que puedan promover en los alumnos el progresivo desarrollo del pensamiento algebraico.

Para Gaita y Wilhelmi (2017), tuvo el propósito de analizar tareas con recuento de patrones en figuras geométricas a partir de generalizaciones, utilizando algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). La investigación se realiza con seis estudiantes de 16 a 17 años de edad que provienen de comunidades nativas amazónicas del Perú y que han terminado su Educación Básica Regular del Sistema Educativo Peruano. En el trabajo, los autores presentan actividades con patrones geométricos que pueden ser resueltas tanto de forma aritmética como algebraica que propicien el progreso gradual de un nivel de algebrización a otro. Se muestra que las actividades con patrones geométricos han podido ser resueltas de manera aritmética y algebraica, según haya sido necesario. Por ello, ha sido posible diagnosticar el nivel algebraico de estudiantes resolviendo situaciones de este tipo y construyendo procesos de estudio potenciales que propicien el progreso gradual de un nivel de algebrización a otro.

De acuerdo a Paredes (2015) la investigación propone desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes del primer grado de secundaria de la Institución Educativa Arequipa de la región Arequipa. El estudio corresponde a una investigación cualitativa educacional, de tipo aplicada proyectiva. La muestra se caracterizó por ser intencional criterial y estuvo conformada por 20 estudiantes del primer grado y tres docentes del Área Matemática a quienes se aplicó entrevistas y pruebas de desarrollo. Los hallazgos evidencian que la mayoría de las estudiantes no presentan indicios de pensamiento algebraico que permita un adecuado aprendizaje del Álgebra; asimismo, se constató que las estudiantes presentan serias dificultades en el manejo de la generalización de patrones, aspecto básico a tener en cuenta para el inicio del desarrollo del pensamiento algebraico. Sustentada en la Teoría Cultural de Objetivación y los resultados del diagnóstico con fines de revertir el problema, se propone una estrategia didáctica centrada en la generalización de patrones que, al abordar objetivamente el desarrollo del pensamiento algebraico, pretende constituirse en una alternativa innovadora y pertinente de la práctica educativa acordes con las demandas de la sociedad actual. Por tanto, los estudiantes logran desarrollar su pensamiento algebraico cuando participan en actividades de generalización de patrones.

Coz y Castillo (2019) propuso determinar los niveles de desarrollo del pensamiento algebraico identificados en los estudiantes del primer y segundo grados de educación secundaria de la institución educativa particular Ingeniería de Huancayo. La metodología aplicó técnicas de observación y la prueba pedagógica, el instrumento fue el cuestionario acorde a las situaciones reales. Concluyó en lo siguiente: Según las descripciones para estos niveles cuyo propósito es subir su razonamiento algebraico dado por los doctores Juan G.y Lilia, nuestros alumnos del primer y segundo grado de la “Institución Educativa Particular Ingeniería”, durante el periodo escolar 2016, se obtuvo un 90% del nivel cero de su proceso para algebrizar, ello representa que los estudiantes realizaron las actividades con procesos no algebraicos, mientras que el 8% presenta un nivel uno escaso para algebrizar y una mínima cantidad tiene una presencia algebraica sólo el 2%. Ello representa que pensamiento algebraico de los estudiantes es escaso ello significa que recién está en principios.

Bautista *et al.* (2021) En el artículo de investigación se reportan los resultados de un trabajo realizado con 38 estudiantes de una institución educativa pública colombiana, en los que se analizó el desarrollo de su razonamiento algebraico elemental, usando patrones y secuencias numéricas o geométricas. El trabajo se desarrolló en tres fases: diagnóstica, interventiva y de contraste, además, durante el desarrollo de cada prueba se hicieron entrevistas basadas en las tareas que resolvían los estudiantes. Los resultados muestran que las soluciones iniciales atendían una heurística: identificar una regla recursiva, que utilizaban para encontrar un término faltante, la que expresaban en lenguaje numérico, natural o icónico, utilizando objetos extensivos y procesos aritméticos. La implementación de la propuesta, permite en los estudiantes, un aumento progresivo del poder heurístico en la resolución de problemas, dando variadas y ricas soluciones a las actividades que se les plantearon. Concluyó que la actividad matemática de la mayoría de los estudiantes se ubica entre los niveles cero al dos de algebrización, destacándose, los niveles uno y el proto–algebraicos de nivel dos, solucionando problemas de valores faltantes, sin llegar a modificar las expresiones algebraicas producidas.

Para García (2018) en su investigación tuvo como propósito analizar los niveles de algebrización de estudiantes de primer grado de educación secundaria en la resolución de tareas estructurales. La metodología es de Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. A partir de ello, considerando las características de los rasgos de RAE propuestas por Godino *et al.* (2012). Se concluye que predominan las generalizaciones para valores cercanos, ya que los estudiantes manifiestan procedimientos aritméticos. Luego de los resultados, el nivel de algebrización predominante en los estudiantes en cada tarea fue nivel 1, ya que realizan correctamente las propiedades y operaciones, además de realizar generalizaciones. Asimismo, podemos concluir que los estudiantes están listos para avanzar a otro nivel y que sí pueden resolver estos tipos de tarea. Esto se visualiza en las soluciones de los estudiantes que logran alcanzar rasgos del nivel 3 de algebrización, ya que utilizan variables y realizan tratamientos para encontrar un patrón general (Godino *et al*., 2014).

De acuerdo a Julian (2017) , analiza epistémicamente tareas estructurales y los niveles de algebrización en la resolución de tareas presentes en los libros de texto, según el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) con aspectos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). Identifica el nivel 1, que solo se utilizan las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad, donde solo se resolvió a través de cálculos mentales. Por otro lado, el mayor nivel de algebrización que se identifica en el libro de Matemática 6 fue el nivel 2, en una tarea que corresponde al área de una región rectangular, en el que realizan una ecuación de primer grado para su resolución y movilizan las propiedades de los números racionales. Finalmente, en la tesis, encuentra que los argumentos presentes en los textos seleccionados no propician la justificación de los procedimientos, además que en dichas tareas no se pide sostener un término general, como puede ser el caso de progresiones o manipular expresiones con variables.

Godino *et al.* (2015) en su artículo titulado "Evaluación de conocimientos didáctico – matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros" analizan los resultados de aplicar un cuestionario de evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental a una muestra de estudiantes del Grado en Maestro en Educación Primaria. El objetivo fue la elaboración de un diagnóstico sobre la competencia algebraica elemental y su didáctica de los futuros maestros, que permita enmarcar un programa formativo para estos, que garantice finalmente procesos de estudio efectivos en la educación primaria, en donde los resultados muestran un bajo nivel de conocimientos generalizado en las distintas componentes del conocimiento didáctico - matemático, con diferencias significativas entre las universidades. Se concluye que es necesario revisar los programas de formación y planificar el diseño de acciones formativas específicas sobre los contenidos algebraicos elementales, a fin de capacitar a los futuros maestros para que puedan promover en los alumnos de primaria el progresivo desarrollo del pensamiento algebraico

Zapatera (2013) en su artículo concluye que los estudiantes con mayor éxito comienzan con estrategias aditivas y después cambian a estrategias funcionales, que invertir el proceso presenta una mayor demanda cognitiva y que muy pocos estudiantes son capaces de expresar la regla general algebraicamente. El análisis de la progresión de los estudiantes nos ha permitido definir descriptores de una trayectoria de aprendizaje que ayuda a diagnosticar la comprensión de los estudiantes y a describir su progreso en términos de crecimiento a través de diez niveles de desarrollo.

Vanegas (2017) en su trabajo de tesis concluye que la caracterización de formas de pensamiento algebraico, clasificadas en: 1) proto-algebraica, 2) transicional, 3) proto-simbólica y 4) simbólica-instrumental, no sólo aportan elementos para comprender la actividad algébrica desplegada por los estudiantes, sino que eventualmente pueden ser útiles para direccionar los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar.

Castro *et al.* (2017), tuvo como propósito identificar desempeños de niños cuando resuelven tareas algebraicas propuestas en tal colección. Los resultados obtenidos señalan que, si bien los niveles son útiles para asignar grados de algebrización a las tareas propuestas en la colección, y predicen cierta actividad algebraica desarrollada por los niños, la variedad de tareas en los textos y las prácticas que podrían realizar los niños son muy amplias y los criterios no dan cuenta de ellas. Por lo tanto, los resultados obtenidos en esta investigación son parciales por naturaleza.

Según Montaño (2016) en su investigación tuvo como propósito determinar el grado de los niveles de algebrización en que se encuentran las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de noveno grado de la educación básica de la Institución Educativa Núcleo Técnico Agropecuario. Los datos recolectados se presentan desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico, Concluye que la mayoría de los estudiantes tienden a utilizar los algoritmos de las operaciones básicas en sus prácticas matemáticas haciendo uso de cantidades extensivas, en algunos casos se reconocen intensivos es decir cantidades generales, que representan con incógnitas, pero no son capaces de operar con ellas. Además, las prácticas matemáticas de este grupo de estudiantes se movilizan entren el nivel 0 y 1 de algebrización.

Carraher (2007) examinan cuestiones que surgen en la realización de tareas de generalización de 15 estudiantes de tercer grado (8 años) sobre figuras geométricas, como introducción a las funciones lineales. Se centran en los conceptos de patrones, funciones y generalización en educación matemática, examinado cómo los estudiantes producen y representan generalizaciones durante la implementación de dos lecciones de un estudio longitudinal basado en la propuesta Early-algebra.

Presentan a los alumnos dos tareas en las que han de expresar su capacidad de generalización a partir del descubrimiento de un patrón. Teniendo en cuenta los resultados del experimento concluyen que los niños desarrollaron diferentes tipos de generalización de forma correcta (incluso algunas que los investigadores no habían tenido en cuenta en un principio). Los estudiantes están inclinados a pensar en las funciones lineales recursivamente. Opinan que no es pertinente introducir la generalización directamente en la forma en que la encontramos en el campo de las matemáticas para estudiantes en edades tempranas. Los alumnos deben aprender primero a cómo hacer generalizaciones matemáticas sobre problemas sobre los que ellos han podido identificar patrones, relaciones o estructuras. Gradualmente, aprenderán a formular esas generalizaciones usando notación algebraica, y también aprenderán a derivar nueva información a través de otras expresiones algebraicas, propias o ajenas.

Ake (2020) en su artículo concluye que los futuros docentes presentan dificultades para resolver tareas utilizando un conocimiento algebraico consolidado. Se concluye que es necesario proporcionar a los futuros maestros escenarios en donde experimenten procesos de desarrollo para el pensamiento algebraico relacionados con la generalización de las propiedades estructurales y relaciones funcionales que subyacen en las ideas matemáticas.

En tareas de generalización, es clave la identificación de patrones. En ese sentido destacamos estudios como el de Cole (2004), propone a niños de educación infantil la realización y continuación de patrones dados mediante figuras coloreadas. En educación primaria, va un poco más lejos, proponiendo los pasos para que se dé la generalización.

La misma autora indica las tareas sobre patrones idóneas para cada etapa: en educación infantil, los alumnos han de reconocer, describir y extender patrones tales como secuencias de sonidos o patrones numéricos simples, y trasladar de una representación a otra. Durante los primeros años de educación primaria, sugiere plantear tareas como describir, extender, hacer generalizaciones sobre patrones numéricos y geométricos, y representar y analizar patrones y funciones, usando palabras, tablas y gráficos. Ya en los últimos años de educación primaria y comienzo de la secundaria, las tareas idóneas serán representar, analizar y generalizar variedad de patrones con tablas, gráficos, palabras y cuando sea posible, reglas simbólicas.

Valbuena *et al.* (2021) en su artículo concluye que es relevante que los estudiantes con talento excepcional en matemáticas puedan recibir una enseñanza que brinde oportunidades que fortalezcan las habilidades que poseen desde temprana edad. Por lo que es una necesidad implementar secuencias didácticas para el desarrollo del razonamiento algebraico; para diseñar las secuencias es necesario: (i) realizar una planificación y organización de las actividades, en la investigación se ordenó por los niveles de algebrización y argumentación para identificar el progreso de las competencias matemáticas; (ii) identificar las dificultades que se pueden presentar en el desarrollo de las secuencias, en este caso se presentaron en los patrones y ecuaciones con una incógnita; (iii) analizar si el objetivo de las secuencias fue el esperado, en las actividades al iniciar solo se evidenció un progreso en la competencia argumentativa, no obstante, al finalizar las secuencias didácticas se logró un avance significativo en las competencias de resolución de problemas y de argumentación al establecerse en nivel 2 de algebrización y de argumentación.

En el estudio de Lannin (2005), 25 alumnos de sexto grado trabajan con tareas de patrones en las que se requiere el desarrollo y la justificación de generalizaciones. Los estudiantes eran generalmente capaces de llevar a cabo generalizaciones apropiadas y justificar por medio del uso de ejemplos genéricos. Los estudiantes que usaron esquemas geométricos fueron más exitosos dando argumentos generales y justificaciones válidas. Sin embargo, se realizó una pequeña discusión en grupo, en la que los estudiantes raramente justificaban sus generalizaciones, y en la que algunos se centraban más en valores particulares que en relaciones generales. Cuando las estrategias de los estudiantes salían a la luz en las discusiones, se pudo examinar el poder matemático y la validez de la variedad de estrategias y justificaciones introducidas por los propios estudiantes.

Bautista *et al.* (2021) en su articulo concluye que la "implementación de la propuesta, permitió en los estudiantes, un aumento progresivo del poder heurístico en la resolución de problemas, dando variadas y ricas soluciones a las actividades que se les plantearon. Algunos lograron generalizar patrones utilizando lenguaje natural o simbólico-literal. Se puede concluir que la actividad matemática de la mayoría de los estudiantes se ubica entre los niveles cero al dos de algebrización, destacándose, los niveles uno y el proto-algebraicos de nivel dos, solucionando problemas de valores faltantes, sin llegar a modificar las expresiones algebraicas producidas" (p. 125).

Gaita & Wilhelmi (2019) en su artículo concluye que "las situaciones de recuento con patrones son un contexto apropiado para el desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). Dependiendo del término solicitado en una serie, los recursos necesarios varían desde la representación efectiva y el simple conteo a la necesidad de determinación de reglas generales; desde el lenguaje natural, icónico y meramente aritmético al lenguaje simbólico-literal y su manipulación sintáctica; desde la prueba empírica con extensivos a la demostración formal. Por ello, es posible proponer situaciones que permitan diagnosticar el nivel algebraico de estudiantes y determinar procesos de estudio potenciales para su desarrollo y afianzamiento" (p.8).

Supo y Gaita (2021) en su artículo concluye que "la propuesta de la institución Innova Schools trabaja los diferentes significados de la linealidad y, además, sí se propicia la evolución del RAE al trabajar situaciones asociadas a la linealidad. En el nivel primario la actividad se centra en los significados informal, aritmético y proporcional y en el nivel secundario, en el significado funcional. En relación a la evolución del RAE, es en los primeros grados del nivel primario que la actividad algebraica es de nivel 0 y 1, luego esta actividad aumenta hasta los niveles 2 y 3 en los grados posteriores de dicho nivel, y en el nivel secundario la actividad matemática aumenta hasta el nivel 4. Sin embargo, pese a reconocer una evolución del Razonamiento Algebraico consideramos que se debe evaluar la propuesta en los grados del nivel secundario (7mo, 8vo y 9no)" (p. 89).

CAPÍTULO II

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1. Identificación del problema

El razonamiento, unido a conocimientos relativos a patrones, regularidades, estructuras o lenguaje algebraico, será un componente fundamental del pensamiento algebraico que deben desarrollar los estudiantes de la Institución Educativa Secundaria (IES) de Rosaspata, las razones que impulsan esta investigación pueden asimilarse a las consideraciones de las que se nutre la propuesta Early-Algebra.

En ese sentido, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) argumenta que el álgebra ha de ser tratada desde la educación infantil en adelante. La intención es ayudar a los alumnos a construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior (2000, p. 37).

Esto quiere decir que el currículo en el área de matemática en educación secundaria debe desarrollar de seis habilidades: generalización, abstracción, análisis, dinamismo, modelización y organización. Por otra parte, este currículo se marca como meta global en el álgebra el entendimiento de relaciones cuantitativas y como metas particulares el trabajo con las ecuaciones, las variables y las funciones.

De lo expuestos en los párrafos anteriores, podemos concluir que todos ponen de manifiesto la importancia de introducir el álgebra en edades tempranas, a través de tareas relacionadas con la generalización, debido a que el pensamiento algebraico desde edades tempranas pueden favorecer el desarrollo de conceptos matemáticos complejos, unas matemáticas elementales “algebrizadas” pueden promover en los alumnos, un mayor grado de generalidad en su pensamiento y aumentar su capacidad de expresar generalidad.

Las ideas expuestas son algunas de las que conforman la base del Early-Algebra que consiste en la "algebrización del currículo" a fin de promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, para ello, se recomienda un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos del IES de Rosaspata exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan o argumenten.

Junto a todo lo anterior, hay que considerar que las investigaciones sobre el Early-Algebra se empezaron a realizar en la década de los 90, es por ello que se pretende ejecutar el trabajo de investigación consistente en correlacionar los niveles de generalización de patrones con los niveles de algebrización en los estudiantes del IES Rosaspata, cuyos resultados permitirán propiciar el desarrollo del pensamiento algebraico en las aulas de matemática.

2.2. Enunciados del problema

2.2.1 Enunciado general

- ¿Cuál es el grado de correlación entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata en el año 2019?

2.2.2 Enunciados específicos

- ¿Cuál es el nivel de generalización de patrones de los alumnos del cuarto y quinto grado de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata?
- ¿Cuál es el nivel de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata?

2.3. Justificación

El presente trabajo de investigación, se justifica por las siguientes razones:

Como justificación metodológica se plantea que, si cuestionamos a alguien ajeno al campo del pensamiento numérico sobre la posibilidad de introducir contenido algebraico en educación primaria o en educación infantil, es posible que la respuesta fuera una negación. A priori, esos contenidos pueden considerarse "demasiado avanzados" o "difíciles" para alumnos de esas edades. Sin embargo, estudios recientes argumentan que el pensamiento algebraico desde edades tempranas puede favorecer el desarrollo de conceptos matemáticos complejos (Blanton y Kaput, 2005). Unas matemáticas elementales “algebrizadas” pueden promover en los alumnos, un mayor grado de generalidad en su pensamiento y aumentar su capacidad de expresar generalidad (Molina, 2009).

Como justificación práctica, las ideas expuestas son algunas de las que conforman la base de la propuesta curricular denominada Early-Algebra. Esta propuesta consiste en la “algebrización del currículo” (Kaput, 2000) y sugiere promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, para ello, recomienda un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan o argumenten (Blanton y Kaput, 2005). En ese sentido, cabe destacar estudios recientes como el que actualmente llevan a cabo Blanton y Brizuela, que llegan a trabajar el desarrollo del pensamiento algebraico con alumnos de la etapa de educación infantil (Pappano, 2012).

Como Justificación metodológica, hay que considerar que las investigaciones sobre el Early- Algebra se empezaron a realizar en la década de los 90. Se trata de una propuesta en proceso de crecimiento y, desde este trabajo, queremos realizar una pequeña aportación con el planteamiento de un problema que se adecúa a la estructura y extensión de un trabajo fin de máster puesto que la generalización se desarrollada a través del uso de patrones y regularidades, que induce a implementar situaciones que relacionen diferentes procesos en la formación matemática, con el propósito de otorgar significados a la generalidad, como un camino alterno de tener acceso al pensamiento algebraico

2.4. Objetivos

2.4.1 Objetivo general

- Determinar el grado de correlación entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata en el año 2019.

2.4.2 Objetivos específicos

- Identificar el nivel de generalización de patrones de los alumnos del cuarto y quinto grado de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata.
- Precisar el nivel de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata.

2.5. Hipótesis

2.5.1 Hipótesis general

- Existe un alto grado de correlación entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata en el año 2019.

2.5.2 Hipótesis específicas

- El nivel de generalización de patrones de los alumnos del cuarto y quinto grado de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata es regular.
- El nivel de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata es incipiente.

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Lugar de estudio

El presente estudio de investigación se realizó en la Institución Educativa Secundaría Rosaspata, departamento de Puno, provincia de Huancané, distrito de Rosaspata. Limita por el norte con la provincia de San Antonio de Putina; por el este con Bolivia; por el sur con la provincia de Moho, la provincia de Puno y el Lago Titicaca, y; por el oeste con la provincia de Azángaro y la provincia de San Román. La institución educativa está conformada por alumnos del 1ro al 5to año de secundaria, entre el sexo masculino y femenino.

3.2. Población

La población de estudio, está integrada por todos los estudiantes matriculados en el año académico 2019 en la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata del Distrito de mismo nombre que se detalla en la siguiente tabla:

Tabla 1

Distribución de estudiantes de la IES de Rosaspata que conforman la población de estudio - 2019.

Grado	Sección	N°de estudiantes
Primero	A	18
	B	16
	C	14
	D	13
Segundo	A	14
	B	12
	C	13
Tercero	A	12
	B	14
Cuarto	A	20
	B	16
Quinto	A	31
	B	18
Total		**211**

Fuente: Nómina de Matriculas 2019. IES de Rosaspata

3.3. Muestra

La muestra está conformada por todos los estudiantes del cuarto y quinto grados conformados por 85 estudiantes que se detallan a continuación:

Tabla 2

Distribución de estudiantes de la IES de Rosaspata, que conforman la muestra de estudio - 2019.

Grado	Sección	N° de estudiantes
cuarto	A	20
	B	16
quinto	A	31
	B	18
Total		**85**

Fuente: Nómina de Matriculas 2019. IES de Rosaspata

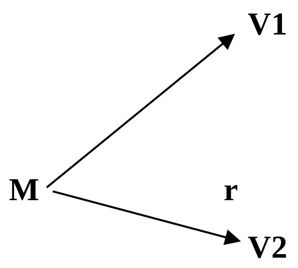
3.4. Método de investigación

La investigación es de tipo no experimental, el diseño de investigación que corresponde es el descriptivo correlacional, que según Sierra Bravo (1994), el diseño descriptivo correlacional se caracteriza porque comprende los siguientes pasos:

a) Se recoge datos respecto a cada variable para describirlos en función a sus dimensiones.

b) Se aplicó un modelo estadístico de correlación para hallar su coeficiente de correlación y tomar la decisión correspondiente a la hipótesis general.

El esquema que corresponde a la investigación es:



Donde:

V1 : Generalización de patrones

V2 : Niveles de algebrización

r : Coeficiente de Correlación de Pearson.

M : Muestra de Estudio

3.5. Descripción detallada de métodos por objetivos específicos

3.5.1 Técnicas e instrumentos de investigación

a) **Técnica de investigación:** Se aplicó la técnica de examen para cada variable.

b) **Instrumentos de recolección de datos:** Se aplicó la prueba de generalización de patrones algebraicos y otra prueba con el nivel de algebrización propuesto por Lilia P. Aké y Juan Godino (2013) en su tesis titulado Evaluación de Razonamiento Algébrico.

3.5.2 Validez y confiabilidad de los instrumentos

La validación de los instrumentos de investigación se realizó mediante la validez externa y confiabilidad interna, para la validez se realizó mediante la evaluación de juicio de expertos para lo cual se recurrió a la opinión de dos docentes doctores de reconocida trayectoria de la FCEDUC de la UNA-Puno, los cuales han determinado la validez de los ítems de los instrumentos aplicados en el estudio.

Para este procedimiento se solicitó mediante una solicitud de validación de expertos, anexando la matriz de consistencia, los instrumentos de investigación y la ficha de validación donde se determinó la correspondencia de los criterios, coherencia entre variable, dimensión, ítems, calidad de representatividad y la calidad de lenguaje; los expertos consideraron que son pertinentes los instrumentos de investigación.

3.5.3 Confiabilidad de los instrumentos

Para la confiabilidad de los instrumentos de investigación se utilizó el Alpha de Cronbach o coeficiente de consistencia interna que oscila entre cero y uno, donde un coeficiente de cero (0) significa nula confiablidad y uno (1) representa un máximo de confiablidad (Hernández-Sampieri & Mendoza, 2018). El Alpha de Cronbach se calcula de la siguiente manera:

$$\propto = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}\left[1-\frac{\sum s^2}{s_x^2}\right]$$

Donde:

α = Alpha de Cronbach

n = número de ítems

S2 = varianza de cada ítem

= varianza del puntaje total

Para establecer la confiabilidad y validez del instrumento de la prueba de generalización de patrones algebraicos se aplicó una prueba piloto a 30 estudiantes de la muestra, en dos momentos con un intervalo de 12 días entre las dos mediciones y en las mismas condiciones (test y pre test), método riguroso de dar fiabilidad porque evalúa la estabilidad de las mediciones, las cuáles mediante la varianza de los ítems y el análisis de la fiabilidad de Alpha de Cronbach arrojó una confiabilidad de $\alpha = 0{,}826$ y de acuerdo al análisis superó el 0,8 por lo tanto el instrumento tiene una confiabilidad buena.

Del mismo modo para la confiabilidad y validez del instrumento prueba de niveles de algebrización se aplicó una prueba piloto a 30 estudiantes de la muestra, calculando la fiabilidad con Alpha de Cronbach fue $\alpha = 0{,}793$ para asegurar su pertinencia y eficacia, los resultados obtenidos se muestran con la aplicación del programa SPSS v22.

3.5.4 Plan de recolección de datos

Se Presentó la solicitud a la directora de la Institución Educativa pidiendo permiso para aplicar los instrumentos de investigación.

Se sensibilizó a los estudiantes, para ello se les explicó la forma en que serán aplicados los instrumentos de recolección de datos para fines de una investigación educativa.

Se aplicó los instrumentos de investigación en cada grado.

3.5.5 Diseño de contrastación de hipótesis.

a) Se definió el coeficiente de correlación con la siguiente fórmula:

$$r = \frac{n\left(\sum fxydxdy\right) - \left(\sum fxdx\right)\left(\sum fydy\right)}{\sqrt{\left[n\left(\sum fxdx^2\right) - \left(\sum fxdx\right)^2\right]\left[n\left(\sum fydy^2\right) - \left(\sum fydy\right)^2\right]}}$$

b) 5.Se definió los parámetros como una regla de decisión:

Tabla 3

Escala de valores de correlación de Pearson

valor		**interpretación**
de:	r:	
	± 1.00	correlación perfecta (positiva o negativa)
± 0.90	± 0.99	correlación muy alta (positiva o negativa)
± 0.70	± 0.89	correlación alta (positiva o negativa)
± 0.40	± 0.69	correlación moderada (positiva o negativa)
± 0.20	± 0.39	correlación baja (positiva o negativa)
± 0.01	± 0.19	correlación muy baja (positiva o negativa)
± 0.00		correlación nula (positiva o negativa)

Se formuló las hipótesis estadísticas para la prueba de hipótesis con el coeficiente de correlación de Pearson (r), y su nivel de significancia, en base a la muestra determinada con las variables V1 y V2.

3.5.6 Plan de análisis e interpretación de datos

Para poder analizar e interpretar los datos, se formularon las siguientes hipótesis:

- **Hipótesis Nula (H_0)**: La generalización de patrones, no tiene un grado de correlación con el nivel de algebrización en los estudiantes. $r = (V1 \leftrightarrow V2) = 0$

- **Hipótesis Alternativa (Ha)**: La generalización de patrones, tiene un grado de correlación con el nivel de algebrización en los estudiantes. $r = (V1 \leftrightarrow V2) \neq 0$

3.5.7 Operacionalización de variables

Tabla 4

Operacionalización de variable 1

Variable	Dimensiones	Indicadores	Escala
Generalización de patrones algebraicos.	Identificación de patrones	Identifica una característica común Aplica la característica común a secuencias Deduce una extensión directa a la secuencia	Muy Bueno 17 - 20 Bueno 14 - 16 Regular 11 - 13 Deficiente 00 - 10
	Representación de objetos matemáticos	Representación mediante dibujos. Sustitución de números por variables. Sustitución de palabras por variables	

Tabla 5

Operacionalización de variable 2

Variable	Dimensiones	Indicadores	Escala
Niveles de algebrización	Ausencia del razonamiento algebraico (nivel cero).	Se opera con objetos extensivos. No se diferencian propiedades. Se usa lenguaje para objetos extensivos.	Muy Bueno 17 - 20 Bueno 14 - 16 Regular 11 - 13 Deficiente 00 - 10
	Nivel incipiente de algebrización (nivel 1).	En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones. En tareas funcionales se calcula con objetos extensivos. El lenguaje es natural, numérico, icónico, símbolos que refieren a los intensivos reconocidos.	
	Nivel intermedio de algebrización (nivel 2)	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma: Ax+B=C En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables. Símbolo literal, usado para referir a los intensivos reconocidos.	
	Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3)	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma Ax+B=Cx+D Se opera con las indeterminadas o variables. Simbólico literal, los símbolos se usan de manera analítica	

CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Generalización de Patrones Algebraicos.

En este capítulo, se organizan los datos obtenidos a través de la prueba de generalización de patrones del anexo 01, distribuida en tablas y figuras que a continuación se detallan.

Tabla 6

Generalización de patrones algebraicos en estudiantes de secundaria Rosaspata - 2019

		Dimensiones					
		Identificación de patrones		**Representación de objetos matemáticos**		**Total**	
		f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Muy Bueno	17 - 20	5	5.88	3	3.53	4	4.71
Bueno	14 - 16	8	9.41	17	20.00	12	14.12
Regular	11 - 13	33	38.82	32	37.65	33	38.82
Deficiente	00 - 10	39	45.88	33	38.82	36	42.35
Total		85	100	85	100	85	100

En la tabla 06, referente a la generalización de patrones algebraicos los estudiantes demostraron los siguientes resultados:

De los 85 estudiantes, el 42,35% se encuentran en el nivel deficiente, el 38,82% se encuentran en el nivel regular, el 14,12% se encuentran en el nivel bueno y el 4,71% en el nivel muy bueno.

Esta información permite deducir que los estudiantes en su mayor porcentaje se encuentran en bajos niveles de generalización de patrones algebraicas esto significa que el 81,17% de los estudiantes tienen dificultades de identificar patrones; es decir aun no pueden identificar una característica común en los ejercicios; aun no pueden aplicar las características comunes a todos los términos de la secuencia y aun no pueden deducir una expresión directa que permita calcular el valor de cualquier término de la secuencia. Por otro lado, los estudiantes tienen dificultades en representar los objetos matemáticos; es decir, no utilizan dibujos para realizar la representación de los objetos matemáticos, tampoco sustituyen las cantidades numéricas o palabras con alguna variable.

4.1.1 Generalización de patrones algebraicos dimensión identificación de patrones.

Los datos recolectados se refieren a los siguientes indicadores: Identifica una característica común en los ejercicios; aplica la característica común a toda a secuencia de términos; deduce una expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia, dichos resultados fueron procesados de la siguiente manera.

Tabla 7

Nivel identificación de patrones algebraicas en estudiantes de secundaria Rosaspata - 2019.

	Indicadores							
	Identifica una característica común		**Aplica la característica común a secuencias**		**Deduce una extensión directa a la secuencia**		**Promedio**	
	f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Muy Bueno	3	3.53	5	5.88	6	7.06	5	5.88
Bueno	15	17.65	2	2.35	7	8.24	8	9.41
Regular	25	29.41	38	44.71	36	42.35	33	38.82
Deficiente	42	49.41	40	47.06	36	42.35	39	45.88
Total	85	100	85	100	85	100	85	100

En la tabla 07, referente a la identificación de patrones algebraicas de 85 estudiantes, se pueden apreciar la siguiente información:

Referente al indicador identifica una característica común en una secuencia, el 49,41% se encuentran en el nivel deficiente, el 29,41% se encuentran en el nivel regular, el 17, 65% en el nivel bueno y el 3,53% en el nivel muy bueno.

Referente al indicador aplica la característica común a todos los términos de la secuencia, el 47,06% se encuentran en el nivel deficiente, el 44,71% en el nivel regular, el 2,35% en el nivel bueno y el 5,88% en el nivel muy bueno.

Referente al indicador deduce una expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia, el 42,35% se encuentran en el nivel deficiente, el 42,35% en el nivel regular, el 8,24% en el nivel bueno y el 7,06% en el nivel muy bueno.

Como promedio de esta dimensión se tiene que, de un total de 85 estudiantes, el 45,88% se encuentran en el nivel deficiente, el 38,82% en el nivel regular, el 9,41% en el nivel bueno y el 5,88% en el nivel muy bueno.

4.1.2 Generalización de patrones algebraicos dimensión representación de patrones algebraicos.

Los datos recolectados se refieren a los siguientes indicadores: Hace dibujos para representar objetos matemáticos, Sustituye los números por una variable, Sustituye una palabra por una variable; dichos resultados fueron procesados de la siguiente manera:

Tabla 8

Nivel identificación de representación de patrones algebraicas en estudiantes de secundaria Rosaspata - 2019.

	Indicadores							
	Representación mediante dibujos		Sustitución de números por variables		Sustitución de palabras por variables		PROMEDIO	
	f	%	f	%	f	%	f	%
Muy Bueno	4	4.71	2	2.35	3	3.53	3	3.53
Bueno	19	22.35	16	18.82	15	17.65	17	20.00
Regular	32	37.65	31	36.47	33	38.82	32	37.65
Deficiente	30	35.29	36	42.35	34	40.00	33	38.82
Total	85	100	85	100	85	100	85	100

En la tabla 08, referente a la representación de objetos matemáticos de 85 estudiantes, se pueden apreciar la siguiente información:

Referente al indicador representa objetos matemáticos mediante dibujos, el 35,29% se encuentran en el nivel deficiente, el 37,65% se encuentran en el nivel regular, el 22,35% en el nivel bueno y el 4,71% en el nivel muy bueno.

Referente al indicador sustituye números por variables el 42,35% se encuentran en el nivel deficiente, el 36,47% en el nivel regular, el 18,82% en el nivel bueno y el 2,35% en el nivel muy bueno.

Referente al indicador sustituye palabras por variables, el 40% se encuentran en el nivel deficiente, el 38,82% en el nivel regular, el 17,65% en el nivel bueno y el 3,53% en el nivel muy bueno.

Como promedio de esta dimensión se tiene que, de un total de 85 estudiantes, el 38,82% se encuentran en el nivel deficiente, el 37,65% en el nivel regular, el 20% en el nivel bueno y el 3,53% en el nivel muy bueno.

4.2. Niveles de Algebrización.

En esta parte, se organizan los datos obtenidos a través de la prueba de algebrización del anexo 02, distribuida en tablas y figuras que a continuación se detallan.

Tabla 9

Niveles de algebrización en estudiantes de secundaria Rosaspata - 2019.

Niveles		Nivel Cero		Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Total	
		f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Muy bueno	17 - 20	56	65.88	12	14.12	0	0	0	0	17	20
Bueno	14 - 16	21	24.71	54	63.53	8	9.41	0	0	21	24.71
Regular	11 - 13	8	9.41	14	16.47	35	41.18	6	7.06	16	18.82
Deficiente	00 - 10	0	0.00	5	5.88	42	49.41	79	92.94	31	36.47
Total		85	100	85	100	85	100	85	100	85	100

En la tabla 09, referente a los niveles de algebrización, los estudiantes demostraron los siguientes resultados:

De los 85 estudiantes, el 36, 47% se encuentran en el nivel deficiente, el 18,82% se encuentran en el nivel regular, el 24,71% se encuentran en el nivel bueno y el 20% en el nivel muy bueno.

Esta información permite deducir que los estudiantes en su mayor porcentaje se encuentran en bajos niveles de algebrización esto significa que el 55,29% de los estudiantes tienen dificultades en algebrización; es decir los estudiantes llegan a lo sumo a nivel incipiente de algebrización con ciertas excepciones.

4.2.1 Ausencia del razonamiento algebraico (nivel cero).

Los datos recolectados se refieren a los siguientes indicadores: se opera con objetos extensivos, no se diferencian propiedades, se usa el lenguaje natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos o incluso letras que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos; dichos resultados fueron procesados de la siguiente manera.

Tabla 10

Ausencia de razonamiento algebraico en estudiantes de secundaria Rosaspata - 2019.

Criterio	**Opera con objetos extensivos**		**No se diferencian propiedades**		**Se usa lenguaje para objetos extensivos**		**Promedio**	
	f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Siempre	58	68.24	57	67.06	53	62.35	56	65.88
Casi siempre	20	23.53	21	24.71	22	25.88	21	24.71
Rara vez	7	8.24	7	8.24	10	11.76	8	9.412
Nunca	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0
Total	85	100	85	100	85	100	85	100

En la tabla 10 referente a la ausencia de razonamiento algebraico en 85 estudiantes de secundaria, se pueden apreciar la siguiente información:

Referente al indicador opera con objetos extensivos, en el 8,24% de estudiantes se observan rara vez, en el 23,53% de estudiantes se observa casi siempre, en el 68,24% se observa siempre.

Referente al indicador no se diferencian propiedades, en el 8,24% de estudiantes se observan rara vez, en el 24,71% de estudiantes se observa casi siempre, en el 67,06% se observa siempre.

Referente al indicador Se usa lenguaje natural numérico para objetos extensivos, en el 11,76% de estudiantes se observan rara vez, en el 25,88% de estudiantes se observa casi siempre, en el 62,35% se observa siempre.

Como promedio de esta dimensión se tiene que, de un total de 85 estudiantes, en el 9,41% de estudiantes se observan raras veces los indicadores planteados, en el 24,71% de estudiantes se observan los indicadores casi siempre y en el 65,88% de estudiantes se observan siempre los indicadores propuestos para el nivel cero de algebrización.

4.2.2 Nivel incipiente de algebrización (Nivel 1).

Los datos recolectados se refieren a los siguientes indicadores: en tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones, en tareas funcionales se calcula con objetos extensivos, el lenguaje es natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos; dichos resultados fueron procesados de la siguiente manera:

Tabla 11

Nivel incipiente de algebrización en estudiantes de secundaria Rosaspata - 2019.

Criterio	**En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones**		**En tareas funcionales se calcula con objetos extensivos**		**El lenguaje es natural, numérico, icónico, símbolos que refieren a los intensivos reconocidos**		**Promedio**	
	f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Siempre	13	15.29	12	14.12	10	11.76	12	14.12
Casi siempre	56	65.88	55	64.71	52	61.18	54	63.53
Rara vez	12	14.12	13	15.29	16	18.82	14	16.47
Nunca	4	4.71	5	5.88	7	8.24	5	5.88
Total	85	100	85	100	85	100	85	100

En la tabla 11, referente al nivel incipiente de algebrización en 85 estudiantes de secundaria, se pueden apreciar la siguiente información:

Referente al indicador en tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones, en el 4,71% de estudiantes nunca se observan el indicador referido, en el 14,12% de estudiantes se observa rara vez este indicador, en el 65,88% se observan casi siempre y en el 15,29% se observa siempre la presencia de este indicador.

Referente al indicador en tareas funcionales se calcula con objetos extensivos, en el 5,88% de estudiantes nunca se observan el indicador referido, en el 15,29% de estudiantes se observa rara vez este indicador, en el 64,71% se observan casi siempre y en el 14,12% se observa siempre la presencia de este indicador.

Referente al indicador en el lenguaje es natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, en el 8,24% de estudiantes nunca se observan el indicador referido, en el 18,82% de estudiantes se observa rara vez este indicador, en el 61,18% se observan casi siempre y en el 11,76% se observa siempre la presencia de este indicador.

Como promedio de esta dimensión se tiene que, de un total de 85 estudiantes, en el 5,88% de estudiantes no se observan los indicadores referidos, en el 16,47% se observan raras veces los indicadores planteados, en el 63,53% de estudiantes se observan los indicadores casi siempre y en el 14,12% de estudiantes se observan siempre los indicadores propuestos para el nivel incipiente de algebrización.

4.2.3 Nivel intermedio de algebrización (nivel 2).

Los datos recolectados se refieren a los siguientes indicadores: En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma: Ax+B=C, en tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión, simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal; dichos resultados fueron procesados de la siguiente manera:

Tabla 12

Nivel intermedio de algebrización en estudiantes de secundaria Rosaspata - 2019

Criterio	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma: Ax+B=C		En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables		Simbólico literal, usado para referir a los intensivos reconocidos.		Promedio	
	f	%	f	%	f	%	f	%
Siempre	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0
Casi siempre	6	7.06	9	10.59	8	9.41	8	9.41
Rara vez	37	43.53	32	37.65	36	42.35	35	41.18
Nunca	42	49.41	44	51.76	41	48.24	42	49.41
Total	85	100	85	100	85	100	85	100

En la tabla 12, referente al nivel intermedio de algebrización en 85 estudiantes de secundaria, se pueden apreciar la siguiente información:

Referente al indicador en tareas estructurales las ecuaciones son de la forma: Ax+B=C, en el 49,91% de estudiantes nunca se observan el indicador referido, en el 43,53% de estudiantes se observa rara vez este indicador, en el 7,06% se observan casi siempre la presencia de este indicador.

Referente al indicador en tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión., en el 51,76% de estudiantes nunca se observan el indicador referido, en el 37,65% de estudiantes se observa rara vez este indicador, en el 10,59% se observan casi siempre la presencia de este indicador.

Referente al indicador simbólico literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal, en el 48,24% de estudiantes nunca se observan el indicador referido, en el 42,35% de estudiantes se observa rara vez este indicador, en el 9,41% se observan casi siempre la presencia de este indicador.

Como promedio de esta dimensión se tiene que, de un total de 85 estudiantes, en el 49,41% de estudiantes no se observan los indicadores referidos, en el 41,28% se observan raras veces los indicadores planteados, en el 9,41% de estudiantes se observan los indicadores casi siempre los indicadores propuestos para el nivel intermedio de algebrización.

4.2.4 Nivel consolidado de algebrización (nivel 3).

Los datos recolectados se refieren a los siguientes indicadores: En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma: Ax+B=Cx+D, se opera con las indeterminadas o variables; simbólico literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto; dichos resultados fueron procesados de la siguiente manera:

Tabla 13

Nivel consolidado de algebrización en estudiantes de secundaria Rosaspata - 2019.

Criterio	**En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma: Ax+B=Cx+D**		**Se opera con las indeterminadas o variables.**		**Simbólico literal, los símbolos se usan de manera analítica.**		**Promedio**	
	f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Siempre	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0
Casi siempre	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0
Rara vez	4	4.71	5	5.88	8	9.41	6	7.06
Nunca	81	95.29	80	94.12	77	90.59	79	92.94
Total	85	100	85	100	85	100	85	100

En la tabla 13, referente al nivel consolidado de algebrización en 85 estudiantes de secundaria, se pueden apreciar la siguiente información:

Referente al indicador en tareas estructurales las ecuaciones son de la forma: Ax+B=Cx+D, en el 95,29% de estudiantes nunca se observan el indicador referido, en el 4,71% de estudiantes se observa rara vez la presencia de este indicador.

Referente al indicador se opera con las indeterminadas o variables, en el 94,12% de estudiantes nunca se observan el indicador referido, en el 5,88% de estudiantes se observa rara vez la presencia de este indicador.

Referente al indicador simbólico literal, los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto en el 90,59% de estudiantes nunca se observan el indicador referido, en el 9,41% de estudiantes se observa rara vez la presencia de este indicador.

Como promedio de esta dimensión se tiene que, de un total de 85 estudiantes, en el 92,94% de estudiantes no se observan los indicadores referidos, en el 7,06% se observan raras veces los indicadores planteados para el nivel consolidado de algebrización.

4.3. Grado de correlación entre generalización de patrones y niveles de algebrización en estudiantes de Educación Secundaria de Rosaspata.

El logro del objetivo general requiere de una evidencia que justifique el grado de correlación existente entre las variables de generalización de patrones y niveles de algebrización que se evidencian en el proceso de resolución de problemas de matemática, para dicha información se calcula el coeficiente de correlación de Pearson.

4.3.1 Coeficiente de correlación

$$r = 0,841$$

4.3.2 Hipótesis Estadística:

Para poder analizar e interpretar los datos, se formularon las siguientes hipótesis:

Hipótesis Nula (H_0): la generalización de patrones algebraicos no tiene ningún grado de correlación con los niveles de algebrización en los estudiantes.

$$r = (V1 \leftrightarrow V2) = 0$$

Hipótesis Alternativa (Ha): la generalización de patrones algebraicos tiene algún grado de correlación con los niveles de algebrización en los estudiantes.

$$r = (V1 \leftrightarrow V2) \neq 0$$

4.3.3 Nivel de significancia:

Si α = 0.05, entonces t tabulada es $\mathbf{t_t}$ = 1,96 Este valor se encuentra en la tabla estadística de distribución t de Student con una probabilidad de confianza del 95% de tipo bilateral.

a) Se Calcuta el valor de Tc en base a la siguiente fórmula:

b) Se procede a la toma de decisiones comparando los valores de la t_c con t_t siendo así: Si $t_c \geq t_t$ = 1,96 entonces se rechaza la hipótesis nula (**H_0**), y se acepta la hipótesis alternativa, caso contrario se acepta la **Ho**.

4.3.4 Prueba de hipótesis:

$$t_c = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

t_c = 14,15

Figura 2. Prueba de hipótesis

La prueba de hipótesis estadística de la distribución **Te** calculada **(t_c = 14,15)** y el valor del coeficiente de correlación de Pearson **r = 0,841,** indican que se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, esto quiere decir que, existe un grado de correlación alta y positiva entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización en los estudiantes del cuarto y quinto grado de educación secundaria de Rosaspata en el año académico 2019.

Los resultados se asemejan con lo señalado por, Belizario (2018) que concluye en su estudio, diferencias significativas entre los niveles de algebrización 1, 2 y 3, 4 influyendo directamente los patrones algebraicos. Para Gaita y Wilhelmi (2017) muestra que las actividades con patrones geométricos han podido ser resueltas de manera aritmética y algebraica, diagnosticando el nivel 0 y 1 de algebrización. Del mismo modo, Cole (2004) considera que, las tareas de generalización, es clave la identificación de patrones. Asimismo, Paredes (2015) sostiene que, los estudiantes logran desarrollar su pensamiento algebraico cuando participan en actividades de generalización de patrones.

CONCLUSIONES

- **PRIMERA. -**Existe un grado de correlación alta y positiva entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización en los estudiantes del cuarto y quinto grado de educación secundaria de Rosaspata en el año académico 2019, esta afirmación se evidencia con el coeficiente de correlación de Pearson r= 0,841 y su respectiva prueba de hipótesis de la distribución de T de student cuyo valor es Tc = 14,15 el cual permite confirmar la hipótesis de trabajo.

- **SEGUNDA. -** El nivel de generalización de patrones en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación secundaria de Rosaspata, es regular y deficiente en 38,82% y 42,35% respectivamente; por lo que los estudiantes tienen dificultades en la identificación de patrones en una secuencia y dificultades en la representación de objetos matemáticos esta conclusión se evidencia en la tabla 03. Tomando la teoría de Cañadas y Castro (2007), la generalización implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares este es el aspecto primordial para el razonamiento inductivo.

- **TERCERA. -** El nivel de algebrización observada en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación secundaria de Rosaspata, es deficiente y regular juntos en el 55,29%, y bueno y muy bueno juntos en el 44, 71%; por lo que los estudiantes tienen dificultades la utilización de lenguajes para poder sustituir números por letras palabras por letras, esta conclusión se evidencia en la tabla 06. Respecto a esta conclusión, Godino *et al.* (2013), los niveles de algebrización está ligado al reconocimiento de la regla que conforma el objeto matemático, la generalidad y su materialización para su posterior tratamiento analítico del objeto matemático.

RECOMENDACIONES

- A las autoridades de la Dirección Regional de Educación de Puno, realizar acciones de capacitación dirigido a los docentes de la institución educativa secundaria de Rosaspata en temas de identificación de patrones de una secuencia de términos a través de razonamiento inductivo a fin de desarrollar en los estudiantes pensamientos algebraicos reflexivos y competitivos en la resolución de problemas de matemática.

- Al director de la institución educativa secundaria de Rosaspata realizar jornadas de reflexión con los docentes del área de matemática sobre asuntos que involucren el desarrollo de niveles de algebrización en la resolución de problemas de matemática a fin de superar las dificultades de resolución de problemas de matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Aké, L., Castro, W. F., Godino, J. D. (2011). *Conocimiento didáctico-matemático sobre el razonamiento algebraico elemental: un estudio exploratorio*. En M. Marín, G.

Aké, L., Godino, J. D. y Gonzato, M. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 39-52.

Ake, L. P. (2020). El carácter algebraico en el conocimiento matemático de maestros en formación. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, *49*. https://doi.org/10.17227/ted.num49-9871

Baldeón, M. D., Holguin, J. A., & Villa, G. M. (2020). Provocación por desafíos: Experiencia optimizadora del abordaje de tareas matemáticas con alta demanda cognitiva. *Revista Electrónica Educare*, *24*(3), 1–20. https://doi.org/10.15359/ree.24-3.9

Bautista, J. L.; Bustamante, M. H. Amaya, T. (2021). Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas (artículo de investigación). Educación Matemática, vol. 33, núm.

Belizario, B. (2018). Evaluación del conocimiento algebraico en docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno – 2017: Universidad Nacional del Altiplano.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the

Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2001). Additive relations and functional tables. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 309-319.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y aprendizaje, 34*(4).

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2011). *Graphical representation and generalization in sequences problems.* Trabajo presentado en el CERME 7, Rzeszów, Polonia.

Carraher, D. W. (2007). *Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester*. file:///C:/Users/PC-05/Downloads/Dialnet-UnaPropuestaDeCambioCurricular-2887578.pdf

Castro, E, Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: ICE UB/Horsori.

Castro, W. F., Martínez, J. D., & Pino, L. R. (2017). *Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar : análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes* [Universidad de Antioquia]. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/8489

Coz, L. y Castillo, L. (2019). *Desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos del primer y segundo grados de educación secundaria - caso: Institución Educativa Particular Ingeniería de Huancay*o (tesis para optar el Título Profesional en Pedagogía y Humanidades - Especialidad: Matemática y Física): Universidad Nacional del Centro del Perú.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. V. Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Espinosa, M. E. (2005). Los sistemas de representación en la solución de problemas de algebra elemental. *ALAMMI*, *2*.

Gaita, C., y Wilhelmi, M. (2017). Identificación de razonamiento algebraico elemental en tareas de recuento con patrones. Obtenido de Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/gaita_wilhelmi.pdf

Gaita, R., & Wilhelmi, M. R. (2019). Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental mediante Tareas de Recuento con Patrones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(63), 269–289. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a13

García, J. L. (2018). *Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de tareas estructurales de números racionales* (tesis de maestría). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú. Disponible en http://hdl.handle.net/20.500.12404/12308

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *32*(1), 199–219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Neto, T., Fernández Blanco, M. T., Contreras, Á., Díaz-Batanero, C., Estepa, A., & Lasa, A. (2015). Evaluación de conocimientos didáctico – matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros. *Revista de educación*, *370*. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5215501

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2013). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias* (en prensa).

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.

Godino, J.D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M.R. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2015). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias, 32 (1), 199-219. Obtenido de http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/287515/375668

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada: Universidad de Granada.

González Trujillo, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas*. (Tesis Maestría). Facultad de ciencias: Universidad Nacional de Colombi

Julian, E. C. (2017). *Configuración epistémica e identificación de niveles de algebrización en tareas estructurales de los textos oficiales del V ciclo de educación primaria* [Pontificia Universidad Catolica del Peru]. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/9282

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*

Kaput, J. J., Carraher, D. W., y Blanton, M. L. (Eds.) (2008). *Algebra in the Early Grades.* New York: Lawrence Erlbaum, Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing

Lannin, J. K., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3-28.

Lin, F., Yang, K y Chen, C. (2004). The features and relationships of reasoning, proving and understanding proof in number patters. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*, 227-256.

Martínez, M. V., Fernández, F. y Flores, P. (2007). *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental*.

Montaño, L. (2016). *Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de Grado Noveno de la Institución Educativa Núcleo Técnico Agropecuario* [Universidad del Valle]. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/13210/0586318.pdf?sequence=1

Moss, J. y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning, 1*, 441-465.

Moss, J., y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning*, 1(4), 441–465.

Moss, J., y London, S. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Functions and Co-variation.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for*

Paredes, E. C. (2015). Estrategia didáctica centrada en la generalización de patrones para desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de secundaria (tesis de maestría). Lima: Universidad San Ignacio de Loyola.

Radford, L. (2012). *Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental issues*. International Congress on Mathematical Education, Seúl, Corea.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 147-164

Supo, R. A., & Gaita, C. R. (2021). Valoración de una propuesta educativa para el desarrollo del razonamiento algebraico a través de la noción de linealidad. *Quintaesencia*, *12*, 82–90. https://doi.org/10.54943/rq.v12i.111

Valbuena, S., Rivera, A., & Padilla, I. A. (2021). Álgebra temprana en estudiantes con talento excepcional de educación básica primaria. *Panorama*, *15*(29), 294–314. https://doi.org/10.15765/pnrm.v15i29.3083

Vanegas, J. A. (2017). *Un modelo de algebrización relativo a las ecuaciones lineales. el caso de estudiantes de educación básica.* [Universidad Autonoma de Guerrero]. http://ri.uagro.mx/handle/uagro/471

Zapatera, A. (2013). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de Generalización de Patrones. Una trayectoria de Aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(1), 87–114. https://doi.org/10.12802/relime.18.2114

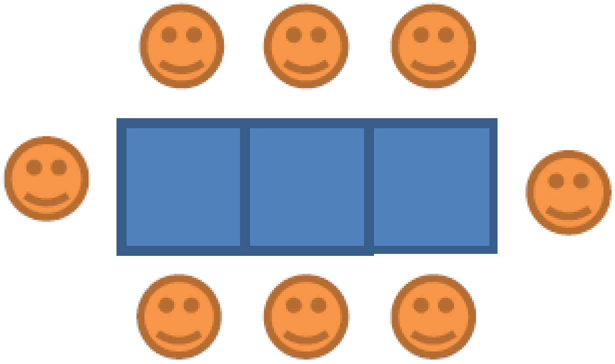
ANEXOS

Anexo 1. Prueba de generalización de patrones para estudiantes de educación secundaria

APELLIDOS Y NOMBRES: …………………………………………………………

En la siguiente imagen podemos ver a un grupo de personas que se han reunido para merendar.

También podemos ver las mesas cuadradas en las que van a sentarse:



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior.

Cada persona tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber una persona sentada.

Responde a las siguientes preguntas:

1) ¿Cuántas personas pueden sentarse a merendar si juntamos 3 mesas?

2) ¿Cuántos personas pueden sentarse si juntamos 6 mesas?

3) Y si tuviéramos 120 mesas ¿cuántas personas podrían sentarse en ellas?

4) Representa los datos obtenidos hasta ahora sobre el número de mesas y el número de personas en una tabla.

5) Explica cómo podemos averiguar el número de personas que pueden sentarse a merendar a partir del número de mesas. ¿Cómo sabes que eso es así?

6) Si tenemos un número cualquiera de mesas **(*n*),** ¿cómo calcularías el número de personas que se pueden sentar en ellas?

Si tenemos ***n*** mesas, entonces se pueden sentar _____ personas.

7) Representa los datos obtenidos hasta ahora en una tabla.

8) ¿Cuántas mesas necesitaríamos para que pudieran merendar 12 personas?

9) ¿Y para que merendaran 58 personas?

10) Explica cómo podemos averiguar el número de mesas que se necesitan a partir del número de personas que se quieren sentar.

Anexo 2. Prueba de algebrización para estudiantes de educación secundaria

APELLIDOS Y NOMBRES:

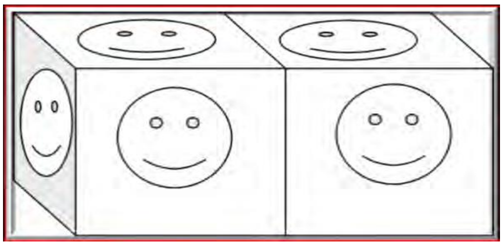
……………………………………………………………………

1) Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 soles al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

2) Tres amigos, Pedro, Antonio y Pablo, no se ponen de acuerdo sobre su edad. Pedro es más viejo que Pablo; Pablo es más joven que Antonio; Antonio, a su vez, es más viejo que Pedro. ¿Quién tiene más edad?, ¿quién menos?

3) Una bacteria se reproduce por reproducción celular. De cada una se obtienen dos. ¿Cuántas bacterias formarán parte de la cuarta generación? ¿Y en la quinta generación? ¿Y en la generación número 100?

4) Una compañía fabrica barras de colores uniendo cubos en una fila. La compañía usa una máquina para etiquetar y poner pegatinas de caritas sonrientes en las barras. La máquina coloca exactamente una pegatina en cada cara, es decir, cada cara expuesta de cada cubo tiene que tener una pegatina. Por ejemplo, una barra de longitud 2 (dos cubos) necesitaría diez pegatinas. a) ¿Cuántas pegatinas se necesitan para una barra de: Tres cubos; cuatro cubos; diez cubos; veinte cubos? Con esta información determina ¿Cuál es la regla a seguir para hallar el número de pegatinas para una barra de longitud cualquiera? b) Identifica conocimientos de tipo algebraico que se ponen en juego al resolver este problema. c) ¿Cómo explicarías la resolución del problema a un niño que no ha podido resolverlo?



5) Una editorial necesita cortar hojas rectangulares, cuyo ancho es la mitad de su largo, para imprimir en cada página una superficie de 300 cm2. Si los márgenes son de 2 cm. arriba y abajo y 2.5 cm. en cada lado, determina ¿cuáles son las dimensiones de la hoja?

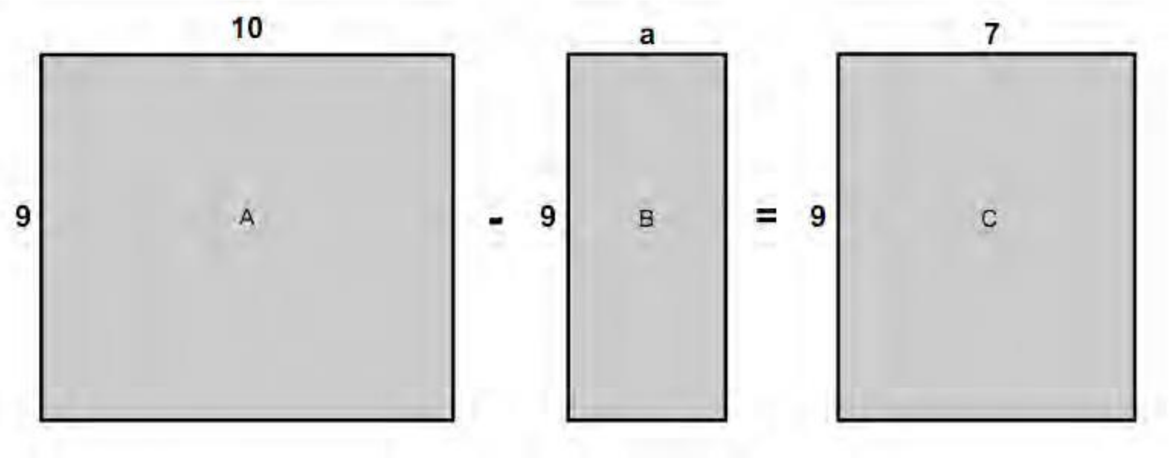
6) 588 pasajeros deberán viajar de una ciudad a otra. Dos trenes están disponibles. Un tren se compone sólo de vagones de 12 asientos, y el otro sólo de vagones de

16 asientos. Suponiendo que el tren con vagones de 16 asientos tendrá ocho vagones más que el otro tren, a) ¿Cuántos vagones se adjuntaría a las locomotoras de cada tren para que los 588 pasajeros puedan viajar? b) Identifica conocimientos de tipo algebraico que se ponen en juego al resolver este problema. c) ¿Cómo explicarías la resolución del problema a un niño que no ha podido resolverlo?

7) Juan prepara una limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de zumo de limón. María utiliza 5 cucharadas de azúcar y 20 cucharadas de concentrado de zumo de limón. a) ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce, la de Juan o la de María, o tienen el mismo sabor? b) Si Juan quiere preparar una limonada con el mismo sabor que la anterior pero con 24 cucharadas de limón, ¿Cuántas cucharadas de azúcar debe poner? c) ¿Cuántas cucharadas de azúcar se debe poner para un número cualquiera de cucharadas de limón?
8) Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de transporte. Por cada alumno que va en coche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela, ¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de transporte?

9) Si 2 sándwich cuestan 6 soles, ¿cómo puedes calcular el coste de 50 sándwiches?

10) ¿Cuál es el ancho del rectángulo B, para que la siguiente relación entre áreas sea
11) verdadera?:



Anexo 3.

MATRIZ DE CONSISTENCIA DE LA INVESTIGACIÓN

Generalización de patrones y niveles de algebrización en estudiantes de educación secundaria de Rosaspata

Interrogantes	Objetivos	Hipótesis	Variables	Métodos	Pruebas estadísticas
Problema General: ¿Cuál es el grado de correlación entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata en el año 2017? **Problemas específicos:** ¿Cuál es el nivel de generalización de patrones de los alumnos del cuarto y quinto grado de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata? ¿Cuál es el nivel de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata?	**Objetivo General:** Determinar el grado de correlación entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata en el año 2017. **Objetivos Específicos:** Identificar el nivel de generalización de patrones de los alumnos del cuarto y quinto grado de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata. Precisar el nivel de algebrizacion de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata.	**Hipótesis General** Existe un alto grado de correlación entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata en el año 2017. **Hipótesis Específicas:** El nivel de generalización de patrones de los alumnos del cuarto y quinto grado de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata es regular. El nivel de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata es incipiente.	**Variable 1** Generalización de patrones algebraicos. - Identificación de patrones. - Representación de objetos matemáticos **Variable 2** Niveles de algebrización. - Ausencia del razonamiento algebraico (nivel cero). - Nivel incipiente de algebrización (nivel 1). - Nivel intermedio de algebrización (nivel 2) - Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3)	**Enfoque:** Cuantitativo **Tipo:** No experimental **Diseño:** Descriptivo correlacional	Prueba de correlación de Pearson

1.1. Matriz de validación

Título: Generalización de patrones y niveles de algebrización en estudiantes de educación secundaria de Rosaspata

Objetivo: Determinar el grado de correlación entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación Secundaria de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata en el año 2017.

Variable 1	Dimensiones	Indicadores	Ítems y respuestas	Escala de valoración (puntos)	CRITERIOS DE EVALUACIÓN: CLARIDAD			OBJETIVIDAD			COHERECIA			PERTINENCIA		
					B	R	D	B	R	D	B	R	D	B	R	D
Generalización de patrones algebraicos.	Identificación de patrones	Identifica una característica común	1) ¿Cuántas personas pueden sentarse a merendar si juntamos 3 mesas? 2) ¿Cuántos personas pueden sentarse si juntamos 6 mesas? 3) Y si tuviéramos 120 mesas ¿cuántas personas podrían sentarse en ellas? 4) Representa los datos obtenidos hasta ahora sobre el número de mesas y el número de personas en una tabla. 5) Explica cómo podemos averiguar el número de personas que pueden sentarse a merendar a partir del número de mesas. ¿Cómo sabes que eso es así? 6) Si tenemos un número cualquiera de mesas (n), ¿cómo calcularías el número de personas que se pueden sentar en ellas? Si tenemos n mesas, entonces se pueden sentar personas. 7) Representa los datos obtenidos hasta ahora en una tabla. 8) ¿Cuántas mesas necesitaríamos para que pudieran merendar 12 personas? 9) ¿Y para que merendaran 58 personas? 10) Explica cómo podemos averiguar el número de mesas que se necesitan a partir del número de personas que se quieren sentar.	Muy Bueno: 17 – 20, Bueno: 14 – 16, Regular: 11 – 13, Deficiente 00 – 10	X			X				X		X		
		Aplica la característica común a secuencias			X				X		X			X		
		Deduce una extensión directa a la secuencia			X			X			X			X		
	Representación de objetos matemáticos	Representación mediante dibujos.			X			X				X		X		
		Sustitución de números por variables.			X			X			X			X		
		Sustitución de palabras por variables			X				X		X			X		

NOMBRES Y APELLIDOS DEL EXPERTO: Dr. Felipe Gutiérrez Osco **Celular:** **CARGO:** Docente principal de la FCEDUC UNA Puno

Dr. Felipe Gutiérrez Osco
DOCENTE FCEDUC-UNA-PUNO

2.1. Matriz de validación

Variable 1	Dimensiones	Indicadores	Escala de valoración (puntos)	CRITERIOS DE EVALUACIÓN											
				CLARIDAD			OBJETIVIDAD			COHERECIA			PERTINENCIA		
				B	R	D	B	R	D	B	R	D	B	R	D
Niveles de algebrización	Ausencia del razonamiento algebraico (nivel cero).	Se opera con objetos extensivos.	Muy Bueno: 17 – 20, Bueno: 14 – 16, Regular: 11 – 13, Deficiente 00 – 10	X				X		X				X	
		No se diferencian propiedades.		X			X			X			X		
		Se usa lenguaje para objetos extensivos.		X			X			X				X	
	Nivel incipiente de algebrización (nivel 1).	En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones.		X				X		X				X	
		En tareas funcionales se calcula con objetos extensivos.		X				X			X			X	
		El lenguaje es natural, numérico, icónico, símbolos que refieren a los intensivos reconocidos.		X			X				X			X	
	Nivel intermedio de algebrización (nivel 2)	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma: Ax+B=C		X			X			X			X		
		En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables.		X			X			X				X	
		Simbolo literal, usado para referir a los intensivos reconocidos.		X				X		X				X	
	Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3)	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma Ax+B=Cx+D		X				X		X				X	
		Se opera con las indeterminadas o variables.		X				X			X		X		
		Simbólico literal, los simbolos se usan de manera analítica		X			X				X			X	

NOMBRES Y APELLIDOS DEL EXPERTO: Dr. Felipe Gutiérrez Osco **Celular:** **CARGO:** Docente principal de la FCEDUC UNA Puno

Dr. Felipe Gutiérrez Osco
DOCENTE FCEDUC-UNA-PUNO

1.1. Matriz de validación

Título: Generalización de patrones y niveles de algebrización en estudiantes de educación secundaria de Rosaspata

Objetivo: Determinar el grado de correlación entre la generalización de patrones y los niveles de algebrización de problemas en los alumnos del cuarto y quinto grado de educación Secundaria de la Institución Educativa Secundaria de Rosaspata en el año 2017.

Variable 1	Dimensiones	Indicadores	Ítems y respuestas	Escala de valoración (puntos)	CRITERIOS DE EVALUACIÓN											
					CLARIDAD			OBJETIVIDAD			COHERECIA			PERTINENCIA		
					B	R	D	B	R	D	B	R	D	B	R	D
Generalización de patrones algebraicos.	Identificación de patrones	Identifica una característica común	1) ¿Cuántas personas pueden sentarse a merendar si juntamos 3 mesas? 2) ¿Cuántos personas pueden sentarse si juntamos 6 mesas? 3) Y si tuviéramos 120 mesas ¿cuántas personas podrían sentarse en ellas? 4) Representa los datos obtenidos hasta ahora sobre el número de mesas y el número de personas en una tabla. 5) Explica cómo podemos averiguar el número de personas que pueden sentarse a merendar a partir del número de mesas. ¿Cómo sabes que eso es así? 6) Si tenemos un número cualquiera de mesas (*n*), ¿cómo calcularías el número de personas que se pueden sentar en ellas? Si tenemos *n* mesas, entonces se pueden sentar personas. 7) Representa los datos obtenidos hasta ahora en una tabla. 8) ¿Cuántas mesas necesitaríamos para que pudieran merendar 12 personas? 9) ¿Y para que merendaran 58 personas? 10) Explica cómo podemos averiguar el número de mesas que se necesitan a partir del número de personas que se quieren sentar.	Muy Bueno: 17 – 20, Bueno: 14 – 16, Regular: 11 – 13, Deficiente 00 – 10	X			X				X		X		
		Aplica la característica común a secuencias			X				X		X			X		
		Deduce una extensión directa a la secuencia			X			X			X			X		
	Representación de objetos matemáticos	Representación mediante dibujos.			X			X				X		X		
		Sustitución de números por variables.			X			X			X			X		
		Sustitución de palabras por variables			X				X		X			X		

NOMBRES Y APELLIDOS DEL EXPERTO: Dr. Wenceslao Quispe Yapo **Celular:** 924 509539 **CARGO:** Docente principal de la FCEDUC UNA Puno

Dr. Wenceslao Quispe Yapo
Facultad Ciencias de la Educación
UNA - PUNO

2.1. Matriz de validación

Variable 1	Dimensiones	Indicadores	Escala de valoración (puntos)	CRITERIOS DE EVALUACIÓN: CLARIDAD B	CLARIDAD R	CLARIDAD D	OBJETIVIDAD B	OBJETIVIDAD R	OBJETIVIDAD D	COHERECIA B	COHERECIA R	COHERECIA D	PERTINENCIA B	PERTINENCIA R	PERTINENCIA D
Niveles de algebrización	Ausencia del razonamiento algebraico (nivel cero).	Se opera con objetos extensivos.	Muy Bueno: 17 – 20, Bueno: 14 – 16, Regular: 11 – 13, Deficiente 00 – 10	X				X		X				X	
		No se diferencian propiedades.		X			X			X			X		
		Se usa lenguaje para objetos extensivos.		X			X			X				X	
	Nivel incipiente de algebrización (nivel 1).	En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones.		X				X		X				X	
		En tareas funcionales se calcula con objetos extensivos.		X				X			X			X	
		El lenguaje es natural, numérico, icónico, simbolos que refieren a los intensivos reconocidos.		X			X				X			X	
	Nivel intermedio de algebrización (nivel 2)	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma: Ax+B=C		X			X			X			X		
		En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables.		X			X			X				X	
		Simbolo literal, usado para referir a los intensivos reconocidos.		X				X		X				X	
	Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3)	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma Ax+B=Cx+D		X				X		X				X	
		Se opera con las indeterminadas o variables.		X				X			X		X		
		Simbólico literal, los simbolos se usan de manera analítica		X			X				X			X	

NOMBRES Y APELLIDOS DEL EXPERTO: Dr. Wenceslao Quispe Yapo **Celular:** 924 509539 **CARGO:** Docente principal de la FCEDUC UNA Puno

Dr. Wenceslao Quispe Yapo
Facultad Ciencias de la Educación
UNA - PUNO