



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS



**“APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE
ENERGÍA Y PRINCIPIO DE HAMILTON PARA LA
DEMOSTRACIÓN DE LA EXISTENCIA DE UNA TRAYECTORIA
MÁS RÁPIDA EN EL DESPLAZAMIENTO DE UN CUERPO EN
MOVIMIENTO”**

TESIS

PRESENTADA POR:

FABIAN DARIO PILCO OLAGUIVEL

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS:
FÍSICA**

PUNO – PERÚ

2023



Reporte de similitud

NOMBRE DEL TRABAJO

APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE ENERGÍA

AUTOR

FABIAN DARIO PILCO OLAGUIVEL

RECUENTO DE PALABRAS

19204 Words

RECUENTO DE CARACTERES

87982 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

95 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

2.3MB

FECHA DE ENTREGA

Jun 2, 2023 9:26 AM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Jun 2, 2023 9:27 AM GMT-5

● 14% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos

- 12% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 8% Base de datos de trabajos entregados
- 6% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

● Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 8 palabras)

Dr. Jose Quiñones Choquecota
CFP - 140

Dra. Juana Edelza Farallota Gomez

SubDirectora de Investigación de la
F.P. de Ciencias Físico-Matemáticas.

Resumen



DEDICATORIA

*A mi padre, que desde el cielo me
guía, protege y me ayuda en mi
camino y labor como físico*

*A mi madre por el esfuerzo que hizo
para poder darme una educación de
nivel superior, por el cariño, amor y
paciencia que ella siempre me tuvo*



AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres Dario y Lourdes, ya que gracias a ellos pude educarme en una institución de nivel superior, universidad la cual me brindo muchas satisfacciones personales y profesionales

Agradezco a mis docentes, compañeros y amigos, ya que ellos fueron parte de mi formación profesional en mi etapa universitaria, en cada experiencia con ellos aprendí muchas cosas.

Agradezco a mi asesor José Quiñonez Choquecota por haberme ayudado y dirigido en este trabajo, por su tiempo y predisposición a absolver mis dudas.



INDICE GENERAL

DEDICATORIA

AGRADECIMIENTOS

INDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

RESUMEN 9

ABSTRACT 10

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA..... 11

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA 11

1.3. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO 12

1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN 15

 1.4.1. Objetivo general 15

 1.4.2. Objetivos específicos 15

CAPITULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS 16

2.2. CURVAS PARAMETRIZADAS Y SUAVES 17

2.3. PARTICIONES Y SUMAS DE RIEMANN 18

2.4. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS 22

2.5. DINÁMICA DE UN CUERPO DESDE EL FORMALISMO NEWTONIANO
..... 24

2.6. LIGADURAS..... 29

2.7. COORDENADAS Y VELOCIDADES GENERALIZADAS 30



2.8. EL LAGRANGIANO Y LAS ECUACIONES DE LAGRANGE.....	30
2.9. SIMETRÍAS Y CANTIDADES CONSERVADAS	31
2.10. FUNCIONES HOMOGÉNEAS DE GRADO n.....	33
2.11. LA CONSERVACIÓN DE ENERGÍA	34
2.12. FUNCIONALES EN FISICA.....	40
2.13. EL PRINCIPIO DE HAMILTON	43
2.14. EL PROBLEMA DE LA BRAQUISTOCRONA.....	49
2.15. EL PÉNDULO DE HUYGENS.....	62
CAPITULO III	
MATERIALES Y MÉTODOS	
3.1. UBICACIÓN	65
3.2. ÁREA DE ESTUDIO	65
3.3. MATERIALES	65
3.4. MÉTODO.....	66
CAPITULO IV	
RESULTADOS Y DISCUSIÓN	
4.1. EL FUNCIONAL DEL TIEMPO PARA UNA CURVA.....	67
4.2. EXISTENCIA DE LA CURVA MÁS RÁPIDA ENTRE DOS PUNTOS.....	79
V. CONCLUSIONES.....	93
VI. RECOMENDACIONES	94
VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	95
ANEXOS.....	97

TEMA: Mecánica Clásica

ÁREA: Física Teórica

LINEA DE INVESTIGACION: Física Aplicada

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 14 de junio de 2023



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1:	Masa moviéndose por acción de una fuerza	25
Figura 2:	Movimiento de un cuerpo en un plano inclinado	28
Figura 3:	Espacio de configuración y curva que minimiza la acción.....	45
Figura 4:	Curvas distintas que unen dos puntos en un espacio de configuración	46
Figura 5:	Curva Braquistocrona	50
Figura 6:	Sistema de Coordenadas XY con puntos a distinta altura en X	51
Figura 7:	Curva Solución del problema de la braquistocrona	55
Figura 8:	Sistema de Coordenadas YX con puntos a distinta altura en Y	56
Figura 9:	La Cicloide como solución al problema de la braquistocrona.....	60
Figura 10:	Péndulo de Huygens	63
Figura 11:	Tiempo de recorrido entre dos puntos muy próximos	70
Figura 12:	Trayectoria que recorre un cuerpo por acción gravitatoria.....	77
Figura 13:	Caída libre de una masa	78
Figura 14:	Curva solución α_1 bajo ciertas condiciones	86
Figura 15:	Curva solución α_2 bajo ciertas condiciones	89
Figura 16:	Curva solución general α_3	91



ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

CE: Conservación de Energía

CG: Coordenadas generalizadas

LH: Ligaduras Holónomas

LNH: Ligaduras no Holónomas

MRU: Movimiento Rectilíneo Uniforme

MRUV: Movimiento Rectilíneo Uniforme Variado

PH: Principio de Hamilton



RESUMEN

La aplicación del principio de conservación de energía y principio de Hamilton son útiles en la demostración de la existencia de una trayectoria más rápida en el desplazamiento de un cuerpo en movimiento, estos principios se usan para realizar una formulación variacional y funcional del problema, que provienen del análisis de la dinámica de un cuerpo, y también de la conservación de energía; gracias a este funcional se conocerá el tiempo en el cual un cuerpo recorre una curva en el espacio. Para conocer la trayectoria más rápida se utiliza el principio de Hamilton aplicado al funcional, de esta forma se obtiene la curva más rápida, contenida en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con tres variables dependientes y una independiente que es el parámetro “ t ”, cabe resaltar que las ecuaciones de este sistema poseerán la forma de una ecuación de Euler-Lagrange, por ende al resolver este sistema de ecuaciones diferenciales se obtiene las tres componentes en el espacio de la curva más rápida, misma que coincide con la curva cicloide del problema de la braquistocrona; es decir se llega al mismo resultado ya estudiado por Newton y Johann Bernoulli de una manera alterna y novedosa, pero esta vez generalizando el problema a tres dimensiones y tomando en cuenta la velocidad inicial del cuerpo; de esta manera se demuestra que existe una curva solución en un espacio tridimensional tal que representa el camino más rápido entre dos puntos y es única.

Palabras Clave: Conservación de energía, Método variacional, Principio de Hamilton, Mínima trayectoria.



ABSTRACT

The application of the principle of conservation of energy and the Hamilton principle are useful to demonstrate the existence of a faster trajectory in the displacement of a moving body, these principles are used to carry out a variational and functional formulation of the problem that is derived of the analysis. of body dynamics, as well as the conservation of energy; Thanks to this function, the time in which the body travels a curve in space will be known. To know the fastest trajectory, the Hamilton principle applied to the functional is used, in this way the fastest curve is obtained, contained in a system of ordinary differential equations with three dependent variables and an independent one that is the parameter " l ", it must be pointed out that the equations of this system are presented in the form of the Euler-Lagrange equation, so that when solving this system of differential equations, the three components in space of the fastest curve are obtained, the same one that coincides with the cycloid curve of the brachistochrone problem; that is to say, the same result already studied by Newton and Johann Bernoulli is reached in an alternative and novel way, but this time generalizing the problem to three dimensions and taking into account the initial velocity of the body; in this way it is shown that there exists a solution curve in a three-dimensional space such that it represents the fastest path between the two points and is the only one.

Keywords: Conservation of energy, Variational method, Hamilton's principle, Minimum trajectory



CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

Esta investigación nace como una forma alterna de solucionar y probar de que existe una curva que es la trayectoria más rápida para un cuerpo que se mueve por acción de la gravedad, para probar lo antes expuesto de forma alterna, es necesario conocer las técnicas y procedimientos variacionales de la Mecánica tales como conocer el principio de Hamilton; también es necesario comprender las cantidades conservadas y no conservadas en un sistema físico; estos temas serán de gran ayuda posteriormente en esta investigación, ya que estos resultan ser la base y sustento con el cual se podrá formular una nueva demostración de la existencia de la curva en cuestión.

Cabe resaltar también que esta investigación está delimitada dentro de la Física Teórica, enmarcada en el contexto de una de las ramas de la Física denominada Mecánica Clásica, específicamente en las formulaciones variacionales de mencionada rama y también dentro de los sistemas físicos conservativos

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los métodos conocidos para demostrar la existencia de una curva que es la más rápida entre dos puntos cuando un cuerpo se mueve en esta trayectoria por acción de la gravedad poseen muchas dificultades en su análisis, ya que en estos métodos se utiliza un análisis muy geométrico; por tal razón, la presente investigación busca encontrar una forma alternativa de demostración no basada y sustentada en la geometría del problema.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar y demostrar que existe una trayectoria que es la más rápida para el recorrido de un cuerpo entre dos puntos, donde esta masa esté sujeta a un campo gravitatorio, de esta manera generar un forma alternativa para demostrar la existencia de



esta curva, utilizando nuevos métodos y conceptos más aplicados a la física, y así brindar una alternativa diferente a la solución geométrica y habitual del problema (braquistocrona), para así optimizar a un tiempo mínimo la duración del recorrido de un cuerpo entre 2 puntos.

1.3. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

En junio de 1696 Johann Bernoulli publica en la revista *Acta Eruditorum Lipsiae* un problema que trataba de encontrar y saber cuál era la curva más rápida entre dos puntos, donde caía un cuerpo por acción de la gravedad y donde dichos puntos se encontraban a distinta altura, la solución a este problema demora cierto tiempo, conforme a De Andrade y Ferreira Filho (2015) Johan Bernoulli descubrió que la solución correcta era una curva cicloide que conectaba a ambos puntos, esta curva resulta ser el producto de un análisis muy geométrico y matemático, poco después el 24 de enero de 1697 Newton resolvió este mismo problema de la braquistócrona o curva del descenso más rápido utilizando el cálculo de variaciones, los métodos y conceptos que se utilizaran en esta investigación están más aplicados a la física y no tanto a planteamientos netamente geométricos, en otras palabras se utilizara conceptos y herramientas que provienen de los procesos naturales existentes en el universo. La conservación energética tiene mucha relación con lo que Newton resolvió en 1697 donde el utilizo que “la magnitud de la energía potencial en la parte más alta de la braquistocrona, sería de la misma magnitud que la energía cinética en la parte más baja de la misma” (Cortes, 2015, p. 35) siendo la conservación de energía una de las herramientas más importantes que debe estar presente para abordar el problema de hallar una curva más rápida en el desplazamiento de un cuerpo entre dos puntos, desde cualquier perspectiva planteada.

La importancia del problema radica en que se usa una nueva forma de solución dejando de lado el formalismo geométrico utilizado por Bernoulli y Newton y



centrándose más en un análisis físico, un ejemplo claro de este formalismo geométrico es el problema de la Braquistocrona ya que según De Andrade y Ferreira Filho (2015) la solución a este problema es una curva cicloide que proviene de un análisis en la geometría del mencionado problema, ahora bien, los beneficios de este trabajo son diversos ya que más allá de demostrar que existe un camino más corto entre dos puntos, se puede conocer cuál es esta trayectoria al resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, también se contará con una ecuación que permite calcular el tiempo de recorrido de un cuerpo en movimiento por una curva suave a causa de un campo gravitatorio, cabe mencionar que esta ecuación será la principal protagonista para demostrar de que existe una curva que es la más rápida para el desplazamiento de un cuerpo entre dos puntos con este nuevo método alternativo, otro beneficio que con el que cuenta este trabajo es que posee una interpretación más física y didáctica comparada a la formulación y rigurosidad matemática con la que cuenta el cálculo de variaciones por medio del análisis geométrico del problema, esta nueva forma de solución permitirá fortalecer el edificio intelectual que los hombres han forjado por siglos de esfuerzo, ya que es un conocimiento auténtico, demostrado con un sustento matemático que permite que sea válida la expresión a hallar, es así que este trabajo se muestra como una alternativa a los métodos tradicionales para hallar el camino más rápido entre dos puntos, generándose así un nuevo conocimiento que formara parte de las herramientas subjetivas que poseen los humanos para poder solucionar problemas, aportando de esta manera una nueva alternativa de solución más física que geométrica al utilizar la ley de conservación de energía; esta ley de conservación significa que “existe una magnitud físicamente mensurable, como la energía total de un sistema, que no varía en ningún proceso físico. Dicho de otra manera, la energía total es la misma antes y después de que cualquier proceso tenga lugar” (Arruti, 2008), lo cual permitirá deducir algunas ecuaciones sobre la dinámica de un cuerpo que



al combinarlas con el cálculo infinitesimal aportaran ecuaciones que describen al problema desde una formulación matemática alternativa, este nuevo aporte permitirá posteriormente utilizar el principio de Hamilton que permitirá conocer las soluciones al problema, aportando así un nuevo método alternativo para la solución de este problema.

El problema es encontrar mediante un método alternativo la existencia de una curva más rápida entre dos puntos , donde un cuerpo se desplaza por acción de la gravedad, utilizando un nuevo método no convencional que posee una visión más física de lo ya antes solucionado según Valladares (2020) por Newton y Bernoulli en el caso del problema de la braquistocrona; dicho problema se encuentra en el contexto de la mecánica clásica específicamente en la mecánica lagrangiana, este problema puede ser fácilmente generalizado a otros campos y potenciales diferentes al campo gravitatorio tales como campos eléctricos, magnéticos, potenciales de interacción, etc.

La aplicación de la conservación de energía tiene una estrecha relación con el principio de Hamilton en el problema, ya que gracias a la conservación de energía se puede obtener un funcional que al aplicarlo sobre el principio de Hamilton dará como resultado las ecuaciones de la trayectoria más rápida entre los dos puntos, por lo que el problema se expresa en la siguiente interrogante: ¿Cómo el principio de conservación de energía y principio de Hamilton facilitan una demostración física de la existencia de una trayectoria más rápida en el desplazamiento de un cuerpo en movimiento?, pues estos principios generan un elemento funcional que al ser aplicados a las ecuaciones de Euler-Lagrange dan como resultado una curva solución, donde esta curva debe ser la curva más rápida para el desplazamiento de un cuerpo, es decir una curva óptima para el problema planteado.



1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.4.1. Objetivo general

Aplicar el principio de conservación de energía y principio de Hamilton para demostrar la existencia de una trayectoria más rápida entre dos puntos espaciales con la construcción y solución de las ecuaciones diferenciales que contienen las componentes vectoriales de la curva más óptima.

1.4.2. Objetivos específicos

- Determinar un funcional utilizando la conservación de energía para obtener una función del tipo Lagrangiano que define el tiempo de recorrido de un cuerpo en distintas curvas que unen dos puntos.
- Utilizar la formulación del principio de Hamilton para demostrar la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales que describen la trayectoria más rápida y óptima.

CAPITULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

En el presente capítulo se presenta las herramientas básicas necesarias para el desarrollo de los capítulos siguientes, se abordarán algunos conceptos referentes a curvas y trayectorias parametrizadas, dinámica de un cuerpo, cantidades conservadas, principios variacionales y las ecuaciones diferenciales de Lagrange; tales conceptos son imprescindibles para la demostración de la existencia de la más rápida trayectoria de desplazamiento de un cuerpo por acción de la gravedad.

2.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos en un espacio euclidiano es la norma del vector que une ambos puntos, para Deza V. (2015) esta distancia está dada como la siguiente definición:

Definición 2.1.1. (Distancia entre dos puntos en \mathbb{R}^2). Dado los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, se define la distancia "d" por la siguiente ecuación:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.1)$$

Esta definición fácilmente puede ser generalizada a tres dimensiones en un espacio euclidiano, es decir:

Definición 2.1.2. (Distancia entre dos puntos en \mathbb{R}^3). Dado los puntos $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ y $\vec{r}_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$, con $i = 1, 2, \dots, n$; se define la distancia entre \vec{r}_i y \vec{r}_{i-1} mediante la relación:

$$D = \|\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}\| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} \quad (2.2)$$

Comentario: D es un escalar; así como se generalizó la distancia de 2 dimensiones a 3, también es posible generalizar la distancia a dimensiones superiores a 3.

2.2. CURVAS PARAMETRIZADAS Y SUAVES

Según Ccolque (2013) el conjunto de puntos en el espacio \mathbb{R}^3 se puede definir como:

Definición 2.2.1. (El conjunto \mathbb{R}^3). El conjunto \mathbb{R}^3 es un conjunto de ternas ordenadas (x, y, z) de números reales; es decir $\mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R} \}$.

Definición 2.2.2. (Curva parametrizada) Sea una función $\vec{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\vec{\alpha}(l) = (x(l), y(l), z(l)) \quad (2.3)$$

Con $l \in I \subseteq \mathbb{R}$, a la función $\vec{\alpha}$ se le denomina curva parametrizada, con un parámetro l contenido en un subconjunto I de \mathbb{R} .

Para que los métodos del cálculo diferencial puedan ser aplicados se necesita dotar a la función $\vec{\alpha}$ de propiedades de diferenciabilidad, por lo que es necesaria la siguiente definición:

Definición 2.2.3. (Curva parametrizada diferenciable). Una curva parametrizada diferenciable es una función diferenciable $\vec{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un intervalo abierto $I = \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^3 .

Ccolque (2013) en su libro *Geometría Diferencial I* asegura que si el parámetro utilizado es l , tal que $l \in I = \langle a, b \rangle$ está contenido en el abierto I , entonces la primera derivada de la función $\vec{\alpha}$ con respecto al parámetro l será:

$$\vec{\alpha}'(l) = (x'(l), y'(l), z'(l)) = \frac{d\vec{\alpha}(l)}{dl} = \left(\frac{dx(l)}{dl}, \frac{dy(l)}{dl}, \frac{dz(l)}{dl} \right) \quad (2.4)$$



Conforme a lo anterior, si $\vec{\alpha}(l)$ es diferenciable entonces las funciones $x(l), y(l), z(l)$ son diferenciables y viceversa.

2.3. PARTICIONES Y SUMAS DE RIEMANN

Definición 2.3.1. (Partición). Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado con $a < b$; la familia de números $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ es llamado una partición \wp de $[a, b]$ si:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$$

Y se denota por:

$$\wp = \{x_k \in \mathbb{R} / k = 0, 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Conforme a Venero (2016) la partición es la encargada de dividir un intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \dots, n$; donde la longitud de cada subintervalo se denota por:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (2.5)$$

Definición 2.3.2. (Partición Regular). Se dice que la partición \wp definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ es regular si la longitud de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \dots, n$ tiene la misma medida, es decir:

$$\Delta x_k = (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Y por ende se debe cumplir que:

$$x_k = a + k \left(\frac{b-a}{n} \right), \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Las particiones son necesarias para poder definir un concepto matemático denominado *sumas superiores* y *sumas inferiores*, con las cuales se puede fundamentar y definir las *sumas de Riemann*, para esto es necesario según Venero (2016) definir lo siguiente:

Definición 2.3.3. (Números $M_k(f)$ y $m_k(f)$). Si $y = f(x)$ es una función acotada sobre el intervalo $[a, b]$, es decir, si existen dos números m y M tales que cumplen que:

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$$

Entonces dada una partición $\wp = \{x_k / k = 0, 1, \dots, n\}$ de $[a, b]$ se define (para $k = 1, 2, \dots, n$) el número $M_k(f)$ como:

$$M_k(f) = \text{Sup} \{ f(x) / x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

Que es el supremo (menor cota superior) de los valores de la función $f(x)$ sobre el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, y el número $m_k(f)$ se define como:

$$m_k(f) = \text{Inf} \{ f(x) / x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

Que es el ínfimo (mayor cota inferior) de los valores de la función $f(x)$ sobre el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, y además $M = \text{Sup} \{ f(x) / x \in [a, b] \}$ y $m = \text{Inf} \{ f(x) / x \in [a, b] \}$.

Con estos conceptos ya se puede definir las *sumas de Riemann*, estas serán de gran utilidad posteriormente en esta investigación, de acuerdo a Venero (2016) se tiene que:

Definición 2.3.4. (Sumas de Riemann). Dada una función f acotada sobre el intervalo $[a, b]$ entonces existen los números $M_k(f)$ y $m_k(f)$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$ tal que $m \leq m_k(f) \leq M_k(f) \leq M$ correspondientes a la partición $\wp = \{x_k / k = 0, 1, \dots, n\}$ del

intervalo $[a, b]$, se define la **suma superior** de f correspondiente a la partición \wp de $[a, b]$ al número:

$$U(f, \wp) = \sum_{k=1}^n M_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n M_k(f)\Delta x_k \quad (2.6)$$

Y la **suma inferior** de f correspondientes a la partición \wp de $[a, b]$ al número:

$$L(f, \wp) = \sum_{k=1}^n m_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n m_k(f)\Delta x_k \quad (2.7)$$

Donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}; \Delta x_k \geq 0$; a $U(f, \wp)$ y $L(f, \wp)$ se les denomina **sumas de Riemann**.

Teorema 2.3.5. Si f es integrable sobre $[a, b]$ y \wp una partición de $[a, b]$ entonces:

$$m(b-a) \leq L(f, \wp) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f, \wp) \leq M(b-a)$$

Teorema 2.3.6. Una función acotada f es integrable en $[a, b]$ sí y solo si para cada $0 < \varepsilon$ siempre es posible hallar una partición \wp , que depende de ε tal que:

$$U(f, \wp) - L(f, \wp) < \varepsilon$$

Teorema 2.3.7. Sea una partición \wp de $[a, b]$, entonces para cualquier valor

$\bar{x}_k \in [x_k - x_{k-1}]$ se tiene que:

$$L(f, \wp) \leq \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \leq U(f, \wp)$$

Y además si f es integrable entonces:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq U(f, \wp) - L(f, \wp)$$

Definición 2.3.8. (Norma de la partición). Se denomina norma de la partición

$\wp = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ de $[a, b]$ y se le denota por $|\wp|$ a la mayor de las longitudes $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, es decir:

$$|\wp| = \max\{\Delta x_k = x_k - x_{k-1} / k = 1, 2, \dots, n\}$$

Teorema 2.3.9. Sea f una función continua en $[a, b]$ entonces f es integrable sobre $[a, b]$.

De acuerdo a los teoremas (2.3.6), (2.3.7) y (2.3.9) se puede obtener como consecuencia el siguiente teorema:

Teorema 2.3.10. Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces para cada $0 < \varepsilon$ existe un $0 < \delta$ tal que:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Para toda partición \wp con $|\wp| < \delta$, y toda elección de $\bar{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Corolario 2.3.11. Si f es continua en $[a, b]$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\wp| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1})$$

Donde \bar{x}_k es un punto arbitrario de $[x_{k-1}, x_k]$ para toda partición $\wp = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ de $[a, b]$.

Observaciones: Se puede elegir a \bar{x}_k como: $\bar{x}_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$ como el punto medio del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de $[a, b]$.

La norma de la partición $|\wp|$ cuando tiende a cero $|\wp| \rightarrow 0$ se puede reformular como el límite cuando $n \rightarrow \infty$ es así que el corolario (2.3.11) se puede transformar como siguiente teorema:

Teorema 2.3.12. (La integral como una sumatoria). Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)\Delta x_k \quad (2.8)$$

Donde \bar{x}_k es un punto contenido en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de $[a, b]$.

2.4. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS

Teorema 2.4.1. (Teorema del Rolle). Sea f una función continua en $[x_{k-1}, x_k]$ y derivable en el abierto $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, si $f(x_{k-1}) = f(x_k)$, entonces existe un número $\bar{x}_k \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle$, tal que $f'(\bar{x}_k) = 0$.

Gracias al anterior teorema, se puede definir el siguiente teorema conocido como el del valor medio para derivadas, para Espinoza (2012) este es:

Teorema 2.4.2. (Teorema del valor medio para derivadas). Sea f una función continua en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, y derivable en el intervalo $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, entonces existe un $\bar{x}_k \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle$ tal que:

$$f'(\bar{x}_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (2.9)$$

Demostración: Sea una función g definida por $g(x) = f(x)[x_k - x_{k-1}] - x[f(x_k) - f(x_{k-1})]$; $g(x)$ es continua ya que $f(x)[x_k - x_{k-1}]$ es continua y $x[f(x_k) - f(x_{k-1})]$ es continua en $[x_{k-1}, x_k]$; ahora bien sea $g'(x) = f'(x)[x_k - x_{k-1}] - [f(x_k) - f(x_{k-1})]$, como $g'(x)$ existe en $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, entonces $g(x)$ es derivable en $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, también se cumple que:

$$g(x_{k-1}) = f(x_{k-1})[x_k - x_{k-1}] - x_{k-1}[f(x_k) - f(x_{k-1})] = x_k f(x_{k-1}) - x_{k-1} f(x_k)$$

$$g(x_k) = f(x_k)[x_k - x_{k-1}] - x_k[f(x_k) - f(x_{k-1})] = x_k f(x_{k-1}) - x_{k-1} f(x_k)$$

De lo que se tiene que $g(x_{k-1}) = g(x_k)$, aplicando el teorema de Rolle, entonces \exists

$\bar{x}_k \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle$ tal que $g'(\bar{x}_k) = 0$, ahora bien como:

$$g'(x) = f'(x)[x_k - x_{k-1}] - [f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

Entonces se tiene que:

$$g'(\bar{x}_k) = f'(\bar{x}_k)[x_k - x_{k-1}] - [f(x_k) - f(x_{k-1})] = 0$$

$$f'(\bar{x}_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Con lo cual queda demostrado.

2.5. DINÁMICA DE UN CUERPO DESDE EL FORMALISMO NEWTONIANO

La dinámica newtoniana está basada en tres axiomas formulados por Newton (1999), estos axiomas o leyes que rigen la mecánica mencionan lo siguiente:

Definición 2.5.1. (La Primera Ley de Newton). *Formula que, si sobre una partícula no actúan fuerzas (o la fuerza resultante es nula), este cuerpo conserva su estado de movimiento, es decir se queda quieto o con movimiento uniforme (sin aceleración).*

Para Abramson (2019) esta es una definición cualitativa de fuerza.

Definición 2.5.2. (La Segunda Ley de Newton). *Formula que en un sistema inercial se cumple que:*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \quad (2.10)$$

Donde \vec{F} es la fuerza resultante sobre la masa m , $\vec{r}(t)$ es el vector posición de la partícula de masa m que depende del parámetro, en este caso el tiempo t , y \vec{p} es el momento lineal (ver Figura 1).

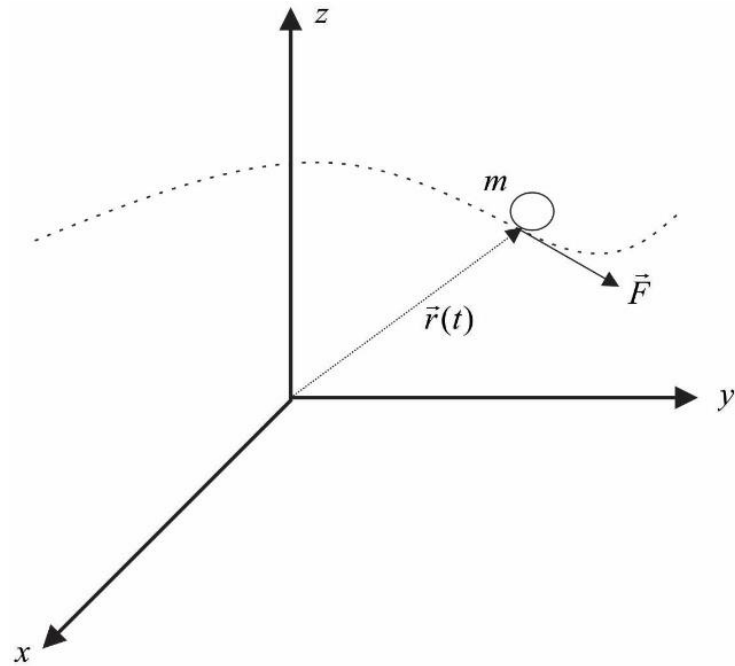


Figura 1: Masa moviéndose por acción de una fuerza

Nota: El grafico representa el movimiento de un cuerpo de masa m por una trayectoria $\vec{r}(t)$ donde este está sometido a una fuerza \vec{F} .

Observando la ecuación (2.10) existen tres ecuaciones, compactadas de forma vectorial, además la fuerza \vec{F} es la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre la partícula; la masa m actúa como constante de proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración $\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$ que proviene de derivar dos veces el vector posición de la partícula $\vec{r}(t)$ con respecto al tiempo; Abramson (2019) afirma que la segunda ley de Newton es una definición cuantitativa de fuerza.

Definición 2.5.3. (La Tercera Ley de Newton). Es una ley que proviene de forma empírica, es decir es una afirmación científica que es aplicable al mundo real, esta ley hace referencia a dos partículas que interactúan donde la fuerza que una hace a la otra es igual y opuesta a la que la segunda partícula hace sobre la primera.

Gracias a los aportes de Newton sobre la velocidad instantánea $\left(\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right)$ se pueden extraer algunos resultados importantes para esta investigación, si la aceleración está definida como el cambio de la velocidad con respecto al tiempo, es decir $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$; y además la aceleración \vec{a} es constante, entonces integrando se tiene que:

$$\vec{v} = \vec{a}dt \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}dt \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}(t - t_0)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

Ahora bien, la velocidad es el cambio de posición con respecto al tiempo $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, es decir:

$$\vec{r} = \vec{v}dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}dt$$

Utilizando $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$ en la anterior ecuación se tiene que:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^t [\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)] dt$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{a} \frac{(t^2 - t_0^2)}{2} - \vec{a}t_0(t - t_0)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{a} \frac{(t - t_0)(t + t_0)}{2} - \vec{a}t_0(t - t_0) = (t - t_0) \left[\vec{v}_0 + \vec{a} \frac{(t + t_0)}{2} - \vec{a}t_0 \right]$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (t - t_0) \left[\vec{v}_0 + \frac{\vec{a}}{2}(t - t_0) \right]$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{a}}{2}(t - t_0)^2$$

Donde \vec{r} es la posición final, \vec{r}_0 la posición inicial, t el tiempo final y t_0 el tiempo inicial,

utilizando esta última ecuación con $\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}(t - t_0)$ se tiene que:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{a}}{2}(t - t_0)(t - t_0) = \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{(\vec{v} - \vec{v}_0)}{2}(t - t_0)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \frac{(\vec{v} + \vec{v}_0)}{2}(t - t_0)$$

Donde \vec{v} es la velocidad final y \vec{v}_0 la velocidad inicial; esta última ecuación representa la variación de posición $\vec{r} - \vec{r}_0$ en un Movimiento Rectilíneo Uniforme Variado MRUV ($\vec{a} = cte$) en términos de la velocidad y tiempo, todo esto se puede expresar en el siguiente teorema:

Teorema 2.5.4. (Desplazamiento en un MRUV). *Sea un cuerpo con una velocidad final \vec{v}_i en un instante t_i , una velocidad inicial \vec{v}_{i-1} en un instante t_{i-1} , y además este cuerpo está sometido a una aceleración constante \vec{a} , entonces el desplazamiento $\vec{D} = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$ de un cuerpo se puede representar en términos de las velocidades asociadas a la posición inicial \vec{r}_{i-1} y final \vec{r}_i como:*

$$\vec{D} = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1} = \frac{(\vec{v}_i + \vec{v}_{i-1})}{2}(t_i - t_{i-1}) \quad (2.11)$$

Corolario 2.5.5. (Desplazamiento en una dirección). *Sea un desplazamiento \vec{D} , si el vector desplazamiento, la velocidad inicial y final están en la misma dirección (es decir en un plano inclinado, ver Figura 2), entonces la distancia (modulo del desplazamiento)*

recorrida por un cuerpo está en términos de las rapidezces inicial $\|\vec{v}_{i-1}\|$ y final $\|\vec{v}_i\|$ de la forma:

$$D = \|\vec{D}\| = \|\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}\| = \frac{\|\vec{v}_i\| + \|\vec{v}_{i-1}\|}{2} (t_i - t_{i-1})$$

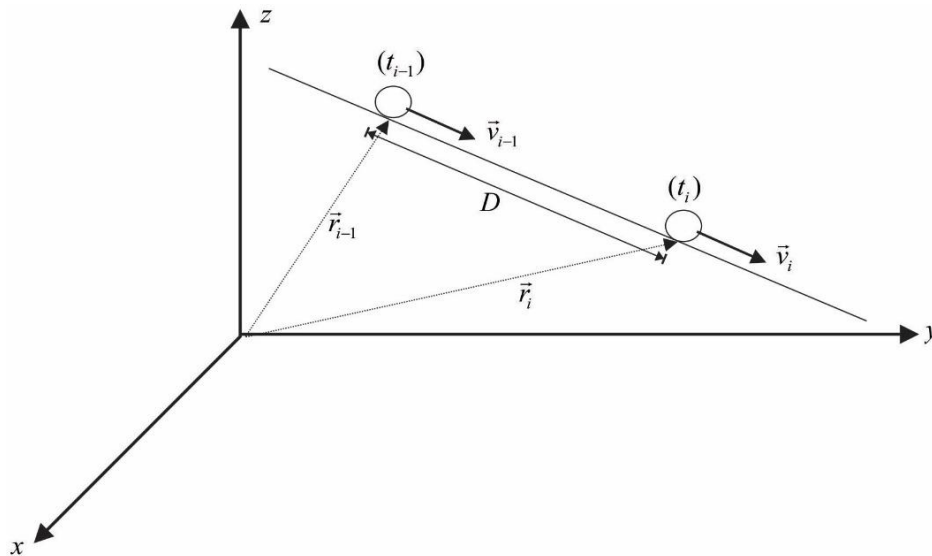


Figura 2: Movimiento de un cuerpo en un plano inclinado

Demostración: Del teorema (2.5.4) se tiene que:

$$\vec{D} = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1} = \frac{(\vec{v}_i + \vec{v}_{i-1})}{2} (t_i - t_{i-1})$$

Si el desplazamiento, la velocidad inicial y final están en la misma dirección, entonces posee el mismo vector unitario \hat{u} , es decir:

$$D\hat{u} = \|\vec{D}\|\hat{u} = \frac{\|\vec{v}_i\|\hat{u} + \|\vec{v}_{i-1}\|\hat{u}}{2} (t_i - t_{i-1}) \Rightarrow D = \|\vec{D}\| = \frac{\|\vec{v}_i\| + \|\vec{v}_{i-1}\|}{2} (t_i - t_{i-1})$$

$$\|\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}\| = \frac{\|\vec{v}_i\| + \|\vec{v}_{i-1}\|}{2} (t_i - t_{i-1})$$

2.6. LIGADURAS

De acuerdo a Terencio Soldovieri (2010) se llaman ligaduras a las restricciones sobre las coordenadas de un sistema, es decir, son condiciones matemáticas que restringen el movimiento de una partícula o sistema de partículas, estas pueden clasificarse de muchos modos, pero esta investigación tiene especial interés en las siguientes dos:

Definición 2.6.1. (Ligaduras holónomas). *Las ligaduras holónomas LH, son ligaduras independientes de las velocidades, sólo dependen de las posiciones de las partículas y el tiempo. Son integrables, por ende, es posible utilizarlas para eliminar las coordenadas dependientes, ya que expresan relaciones algebraicas entre las coordenadas. Este tipo de ligaduras holónomas para una sola partícula con vector de posición $\vec{r}(t)$ tienen la forma:*

$$g_h(\vec{r}(t), t) = 0 \quad (2.12)$$

Donde g_h es una función.

Definición 2.6.2. (Ligaduras no holónomas). *Se dice que una ligadura es no holónoma LNH si no se puede escribir como una ligadura holónoma, es decir son dependientes de la velocidad dada por $\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$; por lo tanto estas ligaduras no son integrables, para una sola partícula con posición $\vec{r}(t)$, la ligadura no holónoma tiene la forma:*

$$g_{nh}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = 0 \quad (2.13)$$

Donde g_{nh} es una función.

2.7. COORDENADAS Y VELOCIDADES GENERALIZADAS

Definición 2.7.1. (Coordenadas generalizadas). Se denomina coordenadas generalizadas CG en un sistema de p grados de libertad a las magnitudes cualesquiera q_1, q_2, \dots, q_p que caracterizan totalmente el estado de configuración del sistema.

Según Terencio Soldovieri (2010) se da el nombre de coordenadas generalizadas a una familia de coordenadas $\{q_1, q_2, \dots, q_p\}$ que caracterizan totalmente al sistema y además que son completamente independientes entre sí; al ser independientes quiere decir que estas coordenadas generalizadas provienen de un sistema que es integrable, por lo tanto hablar de coordenadas generalizadas hace referencia a un sistema holonomo y viceversa.

Definición 2.7.2. (Velocidades generalizadas). Sea $\{q_1, q_2, \dots, q_p\}$ una familia de coordenadas generalizadas, entonces se denomina velocidades generalizadas al conjunto $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p\}$ tal que se cumple:

$$\dot{q}_r = \dot{q}_r(t) = \frac{dq_r(t)}{dt}, \forall r = 1, 2, \dots, p$$

Donde $q_r = q_r(t)$ y $\dot{q}_r = \dot{q}_r(t)$ dependen explícitamente del tiempo.

2.8. EL LAGRANGIANO Y LAS ECUACIONES DE LAGRANGE

El Lagrangiano es una función matemática propuesta por *Jhosep Louis de Lagrange* en 1788, esta función contiene dos tipos de energía conocidas en física, la energía cinética T y la energía potencial U , la siguiente definición muestra dicha relación:

Definición 2.8.1. (El Lagrangiano). Sea un sistema con p grados de libertad, es decir con coordenadas generalizadas $\{q_1, q_2, \dots, q_p\}$ y velocidades generalizadas $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p\}$

dependientes del tiempo t ; y además sea T la energía cinética y U la energía potencial, entonces el lagrangiano se define como:

$$L = T - U = L(q_1(t), q_2(t), \dots, q_p(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_p(t), t) \quad (2.14)$$

Observaciones: En la cantidad $L = T - U$ se debe tener mucho cuidado en el signo menos, ya que si fuese $L = T + U$ se estaría afirmando que L es la energía mecánica del sistema.

Uno de los conceptos que revolucionaron la mecánica clásica, son las ecuaciones de Lagrange, cabe resaltar que estas ecuaciones son una reformulación de la mecánica Newtoniana; para Goldstein (1987) estas ecuaciones son el producto de varios análisis, uno de ellos es el principio variacional de Hamilton; en general estas ecuaciones son:

Teorema 2.8.2. (Ecuaciones de Lagrange). Sea un sistema con un Lagrangiano L , coordenadas generalizadas $\{q_1, q_2, \dots, q_p\}$ y velocidades generalizadas $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p\}$; si el sistema posee únicamente ligaduras holónomas (sistema holonomo), entonces se cumple que:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, p \quad (2.15)$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Lagrange.

2.9. SIMETRÍAS Y CANTIDADES CONSERVADAS

Las simetrías para Abramson (2019) son las transformaciones matemáticas (de coordenadas) que dejan algún objeto físico invariante, esta invariancia puede ser espacial o temporal, como ejemplo se tiene las siguientes simetrías:

Definición 2.9.1. (Simetría homogénea). Se denomina simetría homogénea si un objeto físico es invariante ante transformaciones de traslación.

Definición 2.9.2. (Simetría isotrópica). Se denomina simetría isotrópica si un objeto físico es invariante ante transformaciones de rotación.

Definición 2.9.3. (Simetría de traslación temporal). Se denomina simetría de traslación temporal si un objeto físico es invariante ante transformaciones temporales.

Ahora bien, gracias estas simetrías es posible encontrar algunas cantidades conservadas en algunos sistemas físicos en específico, por ejemplo, el momento lineal o el angular; en esta investigación se pondrá mucho énfasis en encontrar una cantidad conservada la cual es la energía para un cuerpo que está sometido a un campo gravitatorio, para esto es necesario hacer el siguiente análisis; sea un sistema con coordenadas generalizadas $\{q_1, q_2, \dots, q_p\}$ y velocidades generalizadas $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p\}$ entonces el Lagrangiano es el de la ecuación (2.14), por ende:

$$dL = \sum_{i=1}^p \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^p \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^p \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Utilizando la ecuación (2.15) se tiene que:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^p \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \dot{q}_i + \sum_{i=1}^p \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{i=1}^p \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Por la linealidad de la derivada se puede hacer:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^p \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

De lo cual se obtiene por último que:

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L \right] \quad (2.16)$$

Definición 2.9.4. (El Hamiltoniano). Sea un sistema con p grados de libertad, es decir con coordenadas generalizadas $\{q_1, q_2, \dots, q_p\}$, velocidades generalizadas $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p\}$ y además con un lagrangiano L , entonces el Hamiltoniano se define como:

$$H = \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L \quad (2.17)$$

Por ende, la ecuación (2.16) se convierte en $-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$, ahora bien si el lagrangiano posee una simetría de traslación temporal entonces es igual en cualquier momento, por ende $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, es así que $\frac{dH}{dt} = 0$, es decir H es constante y por lo tanto el Hamiltoniano es una magnitud conservada, esto se puede denotar en el siguiente teorema:

Teorema 2.9.5. Si el lagrangiano posee una simetría de traslación temporal $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ entonces el Hamiltoniano H es una cantidad conservada.

2.10. FUNCIONES HOMOGÉNEAS DE GRADO n

Las funciones homogéneas son importantes para definir algunas propiedades de ciertas cantidades en física, Kiseliov et al. (1984) define a estas funciones como:

Definición 2.10.1. (Función homogénea de grado n). Una función $f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_p)$ es homogénea de grado n si en sus argumentos se cumple la identidad:

$$f(\lambda q_1, \lambda q_2, \lambda q_3, \dots, \lambda q_p) = \lambda^n f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_p)$$

Un caso particular de esta definición son las funciones homogéneas de grado 2 donde se cumple que $f(\lambda q_1, \lambda q_2, \lambda q_3, \dots, \lambda q_p) = \lambda^2 f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_p)$, pero también existen funciones que son homogéneas respecto de algunas solas variables de la función, esto se define como:

Definición 2.10.2. (Función homogénea de grado n respecto de algunas variables).

Una función $f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_p, d_1, d_2, d_3, \dots, d_p)$ es homogénea de grado n respecto de las variables $\{d_1, d_2, d_3, \dots, d_p\}$ si se cumple la identidad:

$$f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_p, \lambda d_1, \lambda d_2, \lambda d_3, \dots, \lambda d_p) = \lambda^n f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_p, d_1, d_2, d_3, \dots, d_p)$$

2.11. LA CONSERVACIÓN DE ENERGÍA

Para poder definir la conservación de energía CE, es primero conocer algunos conceptos y definiciones previas, Goldstein (1987) establece que la suma vectorial de fuerzas provenientes de campos gravitatorios, electromagnéticos, etc, que se ejercen sobre una partícula dan como resultado la fuerza resultante \vec{F} ; una fuerza externa o exterior es una fuerza aplicada a un sistema donde no intervienen las fuerzas de interacción entre elementos del mencionado sistema, el siguiente ejemplo ilustra lo mencionado:

Ejemplo 2.11.1. (El átomo de Hidrogeno). Un átomo de hidrogeno está formado por un protón, un electrón y dependiendo del isotopo de hidrogeno, el número de neutrones; una fuerza externa es netamente una aplicada al átomo (sistema en general), donde no intervienen las fuerzas interacción entre protones neutrones y electrones.

La fuerza externa es necesaria para definir lo siguiente:

Definición 2.11.2. (Trabajo). El trabajo efectuado por una fuerza exterior \vec{F} sobre una partícula cuando ésta va del punto A hasta el punto B mediante un camino o curva parametrizada \vec{s} es:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (2.18)$$

Por la segunda ley de Newton dada en la ecuación (2.10), y asumiendo de ahora en adelante que m es una constante, se tiene que (2.18) es:

$$W_{AB} = \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m \left(d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} \right)$$

Conmutando el producto escalar y siendo $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ la velocidad de la partícula de masa m se obtiene que:

$$W_{AB} = \int_A^B m \frac{d\vec{s}}{dt} \cdot d\vec{v} = m \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \int_A^B \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} m \int_A^B d(\|\vec{v}\|^2)$$
$$W_{AB} = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_B\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}_A\|^2 \quad (2.19)$$

Donde $\|\vec{v}_B\|$ y $\|\vec{v}_A\|$ son las rapidezces en los puntos B y A respectivamente, la ecuación (2.19) es válida totalmente para cualquier trabajo efectuado por una fuerza exterior \vec{F} , para Arruti (2008) la energía está estrechamente relacionada con el concepto de trabajo, es por esto que de (2.19) se puede interpretar un tipo de energía en particular, que es la denominada energía cinética T :

Definición 2.11.3. (Energía cinética para una partícula). La energía cinética T de una partícula de masa m y módulo de velocidad $\|\vec{v}\|$ se define como:

$$T = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} m(\vec{v} \cdot \vec{v})$$

Es así que la ecuación (2.19) se puede reescribir como:

$$W_{AB} = T_B - T_A \quad (2.20)$$

Donde $T_B = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_B\|^2$ y $T_A = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_A\|^2$ son las energías cinéticas en los puntos B y A respectivamente, pero esto no es todo, Abramson (2019) afirma que existen fuerzas con la propiedad de que el trabajo que realizan cuando una partícula va de un punto A a un punto B no depende de la trayectoria o camino \vec{s} , estas fuerzas se denominan conservativas:

Definición 2.11.4. (Fuerzas conservativas). Una fuerza es conservativa si se puede expresar como el gradiente de un potencial U , es decir existe un función U llamada potencial tal que:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (2.21)$$

Reemplazando (2.21) a la definición del trabajo (2.18) se tiene que:

$$W_{AB} = \int_A^B (-\vec{\nabla}U) \cdot d\vec{s} = -\int_A^B \vec{\nabla}U \cdot d\vec{s} = -\int_A^B dU = -(U_B - U_A)$$

$$W_{AB} = U_A - U_B \quad (2.22)$$

Es así que: si en un sistema se asume que existen fuerzas conservativas, entonces se cumple que:

$$W_{AB} = W_{AB} \Rightarrow T_B - T_A = U_A - U_B$$

$$T_B + U_B = T_A + U_A \quad (2.23)$$

Donde $E_B = T_B + U_B$ es la energía total en el punto B y $E_A = T_A + U_A$ es la energía total en el punto A , como se ve en la ecuación (2.23) las energías en A y B son iguales, es decir se conservan, este resultado es el siguiente teorema:

Teorema 2.11.5. (Conservación de energía). *Sea un sistema físico sometido a fuerzas externas, si estas fuerzas son conservativas, es decir provienen de un potencial U de la forma $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, entonces la energía mecánica total es una magnitud conservada para dicho sistema.*

Teorema 2.11.6. *Si una partícula de masa m posee vínculos holónomos, es decir que su posición solo depende de las coordenadas generalizadas y además la posición \vec{r} es explícitamente independiente del tiempo, entonces la energía cinética asociada a esta partícula es una función homogénea de grado 2 respecto de las velocidades.*

Demostración: El vector posición en un espacio euclideo de una partícula de masa m es $\vec{r} = (x, y, z)$, al moverse la partícula en el espacio posee tres grados de libertad, estos grados de libertad son q_1, q_2, q_3 ; pero como posee vínculos holónomos entonces la partícula solo depende de las coordenadas generalizadas, y además de ser la posición explícitamente independiente del tiempo se tiene que:

$$x = x(q_1, q_2, q_3) = x(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3) = y(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3) = z(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

Compactando las tres anteriores ecuaciones en un único vector posición se obtiene que:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3) = \vec{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \frac{dq_1(t)}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \frac{dq_2(t)}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \frac{dq_3(t)}{dt}$$

Hallando la energía cinética para una partícula de masa m (definición 2.11.3) y utilizando el resultado anterior para \vec{v} :

$$T = \frac{1}{2} m(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \frac{dq_3}{dt} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \frac{dq_3}{dt} \right)$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \right)$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right) + 2 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right) + 2 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_3 \dot{q}_1 \right) \right]$$

$$T = T(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \frac{1}{2} m \left[\sum_{v=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_v} \dot{q}_j \dot{q}_v \right]$$

La función T se ve que es una función homogénea de grado 2 respecto de las velocidades, ya que:

$$T(q_1, q_2, q_3, \lambda \dot{q}_1, \lambda \dot{q}_2, \lambda \dot{q}_3) = \frac{1}{2} m \left[\sum_{v=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_v} (\lambda \dot{q}_j)(\lambda \dot{q}_v) \right] = \lambda^2 \left(\frac{1}{2} m \left[\sum_{v=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_v} \dot{q}_j \dot{q}_v \right] \right)$$

$$T(q_1, q_2, q_3, \lambda \dot{q}_1, \lambda \dot{q}_2, \lambda \dot{q}_3) = \lambda^2 T(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$$

Por ende, se ha demostrado que, si la partícula posee vínculos holónomos y su posición es explícitamente independiente del tiempo, entonces la energía cinética es una función homogénea de grado 2.

El Hamiltoniano Tiene una estrecha relación con la energía, esto sucede cuando se dota de ciertas propiedades al sistema en cuestión, esto resulta ser:

Teorema 2.11.7. (La energía como el Hamiltoniano). Si una partícula de masa m posee vínculos holónomos, es decir que su posición solo depende de las coordenadas generalizadas, además la posición es explícitamente independiente del tiempo y la función potencial U solo depende de las coordenadas generalizadas, entonces la energía mecánica total E es igual a al Hamiltoniano H :

$$E = T + U = H$$

Rápidamente del teorema (2.11.5) y (2.11.6) se puede llegar a decir que:

Corolario 2.11.8. Sea la energía cinética T una función homogénea de grado 2 respecto de las velocidades y U el potencial dependiente solo de las coordenadas generalizadas, entonces la energía mecánica total E es igual a al Hamiltoniano H , es decir $E = H$.

Demostración: Esta es la demostración para una partícula, la generalización para varias partículas es inmediata; para una partícula en el espacio las coordenadas generalizadas son q_1, q_2, q_3 , entonces el Lagrangiano de la ecuación (2.14) se convierte en:

$$L = T - U = L(q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dot{q}_3(t), t)$$

El Hamiltoniano es:

$$H = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \dot{q}_3 \right) - L$$

$$H = \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_3} \dot{q}_3 \right) - (T-U)$$

$$H = \left(\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \dot{q}_3 \right] - \left[\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_3} \dot{q}_3 \right] \right) - (T-U)$$



Como U solo depende de las posiciones entonces $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$, $\forall i = 1, 2, 3$ y además como

T es una función homogénea de grado 2 por el teorema de Euler para funciones

homogéneas se tiene que $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \dot{q}_3 = 2T$, entonces resulta que:

$$H = (2T - 0) - (T - U)$$

$$H = T + U = E$$

Donde E es la energía mecánica total, con todo esto queda demostrado.

2.12. FUNCIONALES EN FISICA

Para realizar el planteamiento variacional de los problemas de mecánica clásica es necesario definir un funcional, esto para después poder deducir ciertas ecuaciones que nos permiten hallar la solución al problema, estas ecuaciones son las de Euler-Lagrange; para poder definir un funcional Páez (2014) define primeramente lo siguiente:

Definición 2.12.1. Si $\vec{y} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ es una curva parametrizada regular, es decir diferenciable en el abierto I y con $\frac{d\vec{y}}{dx} \neq 0 \quad \forall x \in I$, esta se puede denotar como:

$$\vec{y} = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$$

Definición 2.12.2. Si x_a y x_b son la mayor cota inferior y menor cota superior del intervalo I respectivamente, a las posiciones de $\vec{y}(x_a)$ y $\vec{y}(x_b)$ se las puede denotar como:

$$\vec{y}(x_a) = \vec{y}_a \quad , \quad \vec{y}(x_b) = \vec{y}_b$$

Donde \vec{y}_a y \vec{y}_b son las condiciones de contorno.

Definición 2.12.3. La familia de funciones \vec{y} que cumplen con la definición (2.12.1) se denota como $C(I, \mathbb{R}^n)$, es decir:

$$\vec{y} = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \in C(I, \mathbb{R}^n)$$

Definición 2.12.4. Para toda curva $\vec{y} \in C(I, \mathbb{R}^n)$ se define su levantamiento a \mathbb{R}^{2n+1} como la curva $\tilde{\vec{y}}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$:

$$x \rightarrow \tilde{\vec{y}}(x) = (x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x))$$

Con $y'_i(x) = \frac{dy_i(x)}{dx}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Sea M una función diferenciable tal que $M: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, es decir:

$$\tilde{\vec{y}}(x) \rightarrow M(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$$

$$(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \rightarrow M(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$$

Para llegar a la definición de funcional es necesario construir una función F de tal manera que $F = M \circ \tilde{\vec{y}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow F(x) = M(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x))$$

Integrando la expresión anterior entre los extremos del intervalo I (definición 2.12.2) se puede obtener que:

$$\int_{x_a}^{x_b} F(x) dx = \int_{x_a}^{x_b} M(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x)) dx$$

De esta manera se puede obtener el funcional para la familia $C(I, \mathbb{R}^n)$ dado en la siguiente definición:

Definición 2.12.5. (Funcional para una familia de curvas). Sea $\vec{y} \in C(I, \mathbb{R}^n)$ una familia de curvas y $M : \vec{y}(x) \in \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que depende del levantamiento de \vec{y} ; el funcional para esta familia de curvas se define como la función $\ell : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{y} \rightarrow \ell(\vec{y}) = \int_{x_a}^{x_b} M(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x)) dx$$

$$\vec{y} \rightarrow \ell(\vec{y}) = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx$$

Páez (2014) define a la función M por la forma adoptada en la definición (2.12.5) como una función del tipo *Lagrangiana*; ahora bien, en la física aparecen muchos funcionales, para Abramson (2019) muchos de ellos resuelven problemas de gran relevancia en relatividad o teoría cuántica de campos; un ejemplo de un funcional en física es el siguiente:

Ejemplo 2.12.6. (Funcional del problema de la Braquistocrona). El funcional que define el tiempo de recorrido de una curva bidimensional $(x, y(x))$ es:

$$t_{ab} = \int_a^b \frac{ds}{v} = \int_a^b \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v} = \int_a^b \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy(x)}} = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx$$

$$t_{ab} [y(x)] = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx$$

Donde t_{ab} es el funcional, este mide el tiempo de recorrido de un cuerpo desde el punto $(a, y(a))$ al punto $(b, y(b))$, cuando una partícula pasa por la curva:



$\{(x, y(x)) \in \mathbb{R}^2 / x \in \langle a, b \rangle\}$, y a la vez este cuerpo se mueve en la curva por acción de la gravedad.

2.13. EL PRINCIPIO DE HAMILTON

Definición 2.13.1 (Acción). La acción S es la magnitud física que expresa el producto de la energía implicada en un proceso E por el tiempo t que dura este proceso, es decir $S = Et$.

En física, Pérez Rojas & Castro Díaz Balart (2000) sostienen que la acción tiene una importancia capital en todas las construcciones teóricas de la física, tales como la mecánica clásica, mecánica cuántica no relativista y relativista, teoría clásica de campos, relatividad general, etc. Esta relevancia de la acción proviene de su principal aporte en las teorías físicas la cual se conoce como *el principio de mínima acción* que afirma que cuando un sistema pasa de un estado a otro, lo hace de manera que la acción es un extremo (es mínima o máxima dependiendo del sistema) entre esos dos mencionados estados; ”la acción de Hamilton S no es una magnitud directamente observable, como la energía o el momento; la acción se construye definiendo previamente una nueva función asociada a todo sistema mecánico, la Lagrangiana, que se obtiene restando la energía potencial de la cinética”(Pérez Rojas & Castro Díaz Balart, 2000, Pag. 39).

El termino principio significa la “base, origen, razón fundamental sobre la cual se procede discurrendo en cualquier materia” (ASALE & RAE, s. f., 2022), por ende, en física un principio es la base fundamental sobre la cual se construye una teoría, los principios suelen ser considerados como parte de una axiomática ya que resultan ser lógicos o intuitivos en la naturaleza, en otro caso también son los que coinciden y se adecuan perfectamente para los fenómenos naturales que son antiintuitivos: como es el

caso de la invariancia de la rapidez de la luz en sistemas de medición distintos y relativos entre sí.

Sánchez de Santos (2012) asegura que el principio de Hamilton PH, es equivalente a las ecuaciones de Lagrange y a su vez a la segunda ley de Newton, de manera que desde este principio se puede construir toda la teoría de la Mecánica tomando como postulado básico el principio de Hamilton.

Principio 2.13.2. (Principio de Hamilton). *El movimiento del sistema entre los puntos temporales t_1 y t_2 es tal que la integral:*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \quad (2.24)$$

tiene un valor mínimo sobre la trayectoria real del sistema, con respecto a variaciones de trayectoria.

Para Abramson (2019) esto quiere decir que: de todas las posibles trayectorias que conectan los puntos $\{t_1, q_1(t_1), \dots, q_n(t_1), \dot{q}_1(t_1), \dots, \dot{q}_n(t_1)\}$ con los puntos $\{t_2, q_1(t_2), \dots, q_n(t_2), \dot{q}_1(t_2), \dots, \dot{q}_n(t_2)\}$ en un espacio de configuraciones, la integral (2.24) evaluada sobre la trayectoria que realmente sigue el sistema posee el menor valor; para ilustrar esto gráficamente en un espacio de configuración de 3 dimensiones se utilizara solo 1 grado de libertad, es decir el sistemas poseerá coordenadas $\{t, q_1(t), \dot{q}_1(t)\}$ (ver Figura 3); en mencionado espacio existe una familia de curvas que conectan los puntos $\{t_1, q_1(t_1), \dot{q}_1(t_1)\}$ con los puntos $\{t_2, q_1(t_2), \dot{q}_1(t_2)\}$.

Ahora bien, en este espacio de configuración $\{t, q_1(t), \dot{q}_1(t)\}$, por el principio de Hamilton

existe una curva que posee la característica hacer que $S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1(t), \dot{q}_1(t)) dt$ sea

mínima (ver Figura 3).

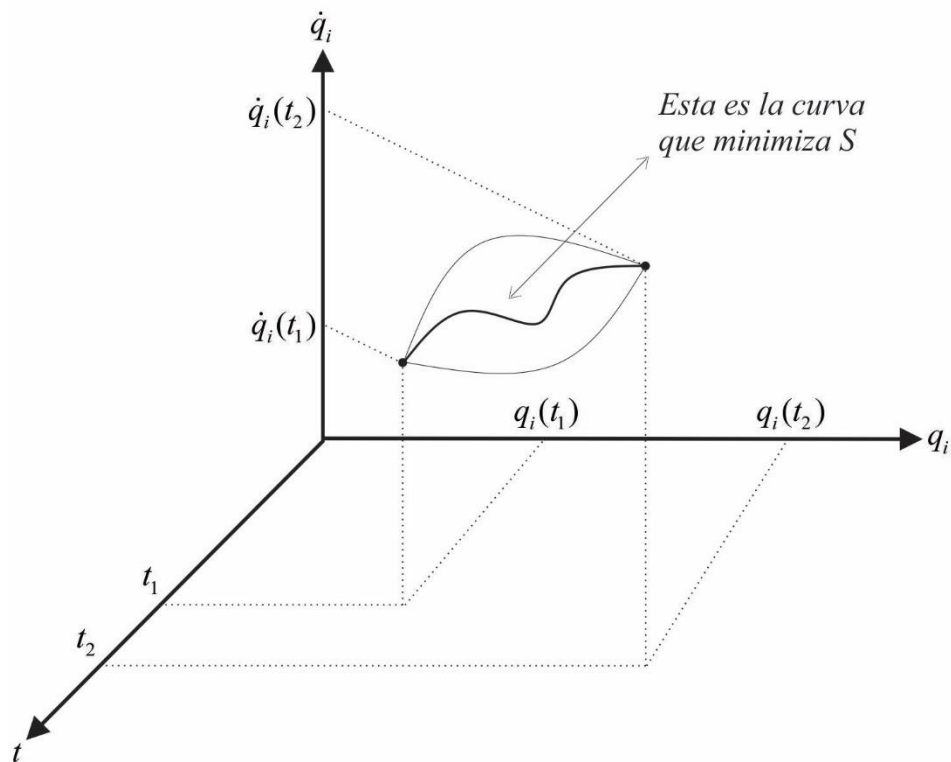


Figura 3: Espacio de configuración y curva que minimiza la acción

Nota: El grafico muestra las posibles trayectorias o curvas que conectan dos puntos distintos del espacio de configuración para un sistema con un grado de libertad, dentro de las posibles curvas se encuentra la curva que minimiza la acción S .

En general, la ecuación (2.24) es un funcional que mide la acción S , esta acción depende de la trayectoria conformada por los puntos $\{t, q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)\}$ del espacio de configuración del sistema cuando $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$; uno de los resultados principales del principio de Hamilton es que es posible encontrar las ecuaciones de Lagrange, para esto Goldstein (1987) define un conjunto de curvas en un espacio de configuración de tal manera que:

Definición 2.13.3. (*Familia de trayectorias en un espacio de configuración* $\{t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n\}$). Sea un espacio de configuración $\{t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n\}$; se define una familia de curvas que conectan dos puntos en este espacio como el conjunto de trayectorias:

$$q_i(t, \alpha) = q_i(t, 0) + \alpha \eta_i(t), \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{d}{dt}[q_i(t, \alpha)] = \dot{q}_i(t, \alpha) = \dot{q}_i(t, 0) + \alpha \dot{\eta}_i(t), \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Tal que $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$.

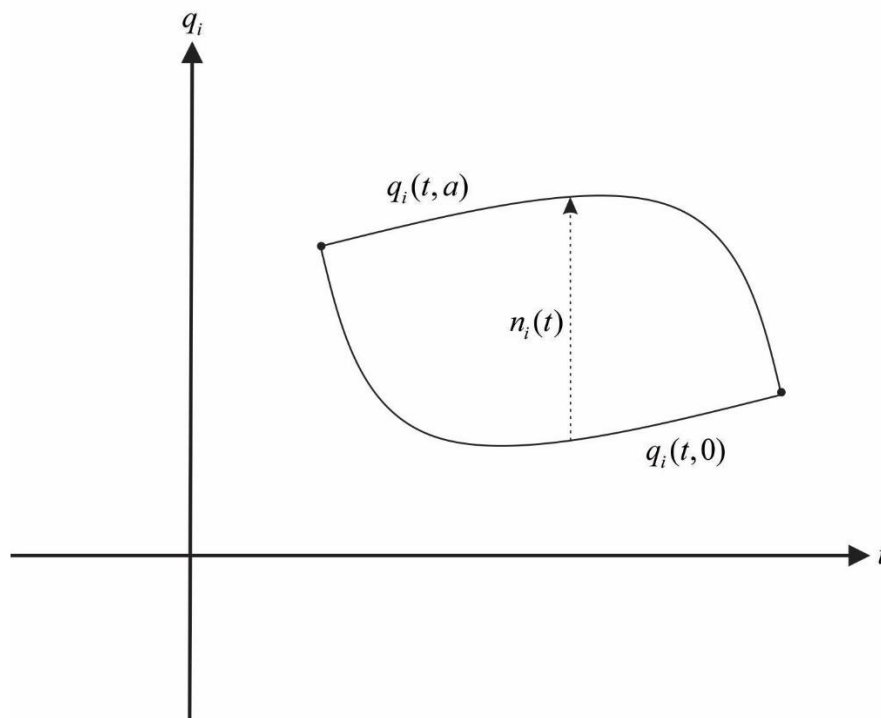


Figura 4: *Curvas distintas que unen dos puntos en un espacio de configuración*

En la definición (2.13.3) la curva que posee las coordenadas $q_i(t, 0), \dot{q}_i(t, 0), \forall i = 1, 2, \dots, n$ en el espacio de configuraciones, representa la curva que realmente sigue el sistema, es decir la que minimiza la acción; en cambio las curvas $q_i(t, \alpha), \dot{q}_i(t, \alpha), \forall i = 1, 2, \dots, n$ que unen los dos mismos puntos que une la trayectoria real hacen que la acción no sea mínima.

La acción S de la ecuación (2.24) para la curva $q_i(t, \alpha), \dot{q}_i(t, \alpha), \forall i = 1, 2, \dots, n$ y $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ es:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1(t, \alpha), \dots, q_n(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_n(t, \alpha)) dt$$

Con todo esto, en la ecuación anterior se puede hallar un mínimo de la siguiente manera:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left[\int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1(t, \alpha), \dots, q_n(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_n(t, \alpha)) dt \right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1(t, \alpha), \dots, q_n(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_n(t, \alpha)) dt \right] \delta\alpha$$

Por la regla de Leibniz de derivación parcial bajo la integral se tiene que:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta\alpha = \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} L(t, q_1(t, \alpha), \dots, q_n(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_n(t, \alpha)) dt \right] \delta\alpha$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \delta\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \delta\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \delta\alpha \right) dt$$

Como t no depende de α , entonces $\frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0$, por lo tanto:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \delta\alpha \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) \delta\alpha dt$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{dq_i}{dt} \right] \right) \delta\alpha dt$$

Sean las velocidades generalizadas $\frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i(t, \alpha)}{dt} \equiv \frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial t}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$; y además

por lo que Pita Ruiz (1995) en su libro *Calculo Vectorial* sustenta acerca del teorema de

Cauchy se tiene que $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{dq_i}{dt} \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial q_i}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right]$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, entonces se puede

llegar a:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta \alpha = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right] \right) \delta \alpha dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt \delta \alpha \right) + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right] dt \delta \alpha \right)$$

Ahora bien si $\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right] dt = d \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right]$, entonces la integral $\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right] dt \delta \alpha \right)$ se

resume a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right] dt \delta \alpha \right) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right] \right) \delta \alpha = \left(\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right]_{t_1}^{t_2} - \left[\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} d \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \right) \right] \right) \delta \alpha$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right] dt \delta \alpha \right) = \left(\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right]_{t_1}^{t_2} - \left[\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] dt \right] \right) \delta \alpha$$

Una de las condiciones que se establecen en el espacio de configuración es que

$q_i(t_1, \alpha) = q_i(t_1, 0)$ y $q_i(t_2, \alpha) = q_i(t_2, 0)$, por tal razón no hay variaciones en los extremos,

es decir $\frac{\partial q_i(t_1, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial q_i(t_2, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, entonces se tiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right] dt \delta \alpha \right) = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] dt \delta \alpha$$

Por ende, se tiene que:



$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta \alpha = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt \delta \alpha \right) - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] dt \delta \alpha \right) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \right) dt \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \delta \alpha$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta \alpha = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \right) dt \delta q_i$$

Para hallar el mínimo se tiene que hacer $\delta S = 0$, es de esta manera que se puede hallar la curva que minimiza S , entonces:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \right) dt \delta q_i = 0$$

Si el sistema es holonomo, es decir solo depende de las posiciones entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

La ecuación anterior a este párrafo resulta ser, en forma compacta, las ecuaciones de Lagrange, es decir las ecuaciones que describen la trayectoria real del sistema, mismas que aparecen en el teorema (2.8.2.).

2.14. EL PROBLEMA DE LA BRAQUISTOCRONA

En el siglo XVII de acuerdo a De Teresa (2007), en el continente europeo se formulan algunos de los más importantes problemas matemáticos y físicos, uno de ellos fue el cálculo de variaciones, entre los trabajos variacionales más destacados se encuentra el de Fermat en óptica geométrica (1662), el estudio de cuerpos moviéndose en fluidos formulado por Newton y el problema que dio origen al cálculo variacional: el problema de la braquistocrona.

Este problema denominado *problema de la braquistocrona* se establece cuando se desea calcular la trayectoria más rápida entre dos puntos (ver Figura 5) donde un cuerpo se desplaza por acción de la gravedad:

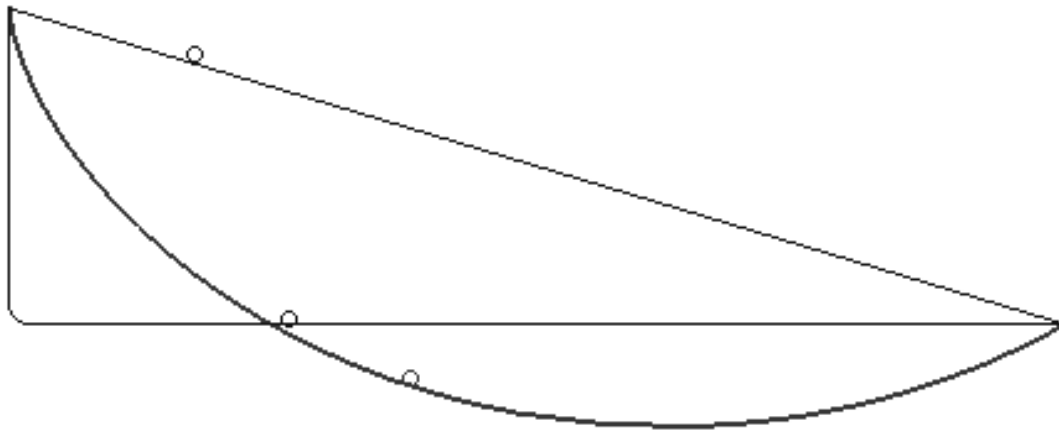


Figura 5: Curva Braquistocrona

Nota: En el gráfico se observa tres posibles trayectorias entre dos puntos en común para estos desplazamientos, la curva cícloide o braquistocrona representa la más rápida entre ambas posiciones. Adaptado de *Comparación entre una trayectoria braquistocrona, y otras dos trayectorias posibles*, por Wikipedia, 2021, Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Curva_braquist%C3%B3crona).

Para poder dar solución a tal problema es necesario definir lo siguiente: para Spiegel et al. (2011) en su libro *Análisis Vectorial*, señalan que:

Definición 2.14.1 (Norma de la diferencial de la posición en un espacio euclidiano

bidimensional). Sea un espacio bidimensional con vector de posición $\vec{s} = (x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$

y diferencial de posición $d\vec{s} = (dx, dy) = dx\hat{i} + dy\hat{j}$, entonces su norma de $d\vec{s}$ es:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Donde $ds^2 = d\vec{s} \cdot d\vec{s}$ y $\|d\vec{s}\| = ds$

Ahora bien, la forma de hallar un funcional con dimensiones de tiempo resulta ser de la siguiente manera: la velocidad es la variación de la distancia dividida con respecto a la

variación de tiempo, si la variación de distancia se toma como la norma de la diferencial de posición, se tiene que:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v}$$

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v} \Rightarrow t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v}$$

Es decir, el tiempo se puede calcular por medio de una integral, además este tiempo posee la forma de un funcional, el cual permite obtener una curva (x, y) bidimensional de manera que t sea mínimo; para hallar esta curva primeramente es necesario conocer la velocidad v en cualquier instante, para eso se necesita poseer un sistema de coordenadas donde se encuentren los dos puntos a distinta altura (A y B); este sistema coordenado puede ser (ver figura 6):

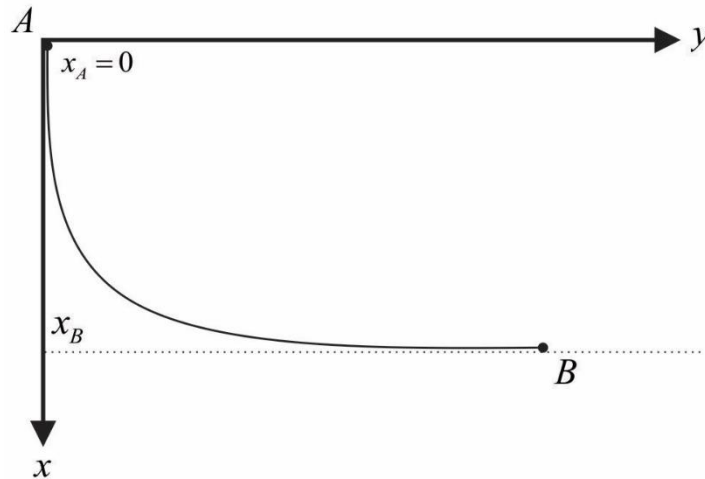


Figura 6: Sistema de Coordenadas XY con puntos a distinta altura en X

Nota: En el grafico se observa un sistema de coordenadas XY, ya que Y se encuentra en el eje horizontal y X en el eje vertical con sentido hacia abajo (sistema XY a derechas); además se encuentran los puntos A y B a una distinta altura, donde ambos están conectados por una curva que es una posible trayectoria entre A y B.



Si el cuerpo de masa m se desplaza desde el reposo en A hasta B , utilizando la conservación de energía en el sistema de coordenadas "XY" dado en el grafico 6 se tiene que:

$$E = \frac{1}{2}mv_A^2 - mgx_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgx_B$$

Si en A se parte del reposo, entonces $v_A = 0$, además del sistema de coordenadas "XY" se tiene que $x_A = 0$, es así que:

$$E = \frac{1}{2}m(0)^2 - mg(0) = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgx_B$$

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgx_B$$

Ahora bien como es un caso conservativo, la energía E será $E = \frac{1}{2}mv^2 - mgx$, donde v y x son la posición y velocidad en cualquier instante en el sistema de coordenadas planteado, por lo tanto:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgx = 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgx_B$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = gx$$

$$v = \sqrt{2gx}$$

De esta manera se obtuvo la velocidad en cualquier instante en el sistema de coordenadas estudiado, reemplazando este valor a la integral que nos da el tiempo es:

$$t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v} \Rightarrow t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gx}} = \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gx}}$$

El tiempo que recorre una masa m entre los puntos A y B por una curva bidimensional en "XY" será:

$$t(A \rightarrow B) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gx}} = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gx}}$$
$$t(A \rightarrow B) = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gx}} dx^2 = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{2gx}} dx = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gx}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{(y'(x))^2 + 1}{x}} dx$$

La forma de obtener el tiempo $t(A \rightarrow B)$ mínimo es asumir que la función $f(x, y, y')$ definida por:

$$f(x, y, y') = \sqrt{\frac{(y'(x))^2 + 1}{x}} = \left(\frac{(y'(x))^2 + 1}{x} \right)^{1/2}$$

debe cumplir con las ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{(y'(x))^2 + 1}{x} \right)^{-1/2} \left(\frac{2y'(x)}{x} \right) \right] - 0 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{(y'(x))^2 + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{2y'(x)}{x} \right) \right] = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y'(x)}{\sqrt{x} \sqrt{(y'(x))^2 + 1}} \right] = 0 \Rightarrow \frac{y'(x)}{\sqrt{x} \sqrt{(y'(x))^2 + 1}} = Cte$$

Por conveniencia, sea la constante $Cte = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, con a un numero arbitrario, entonces se tendrá que:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{x} \sqrt{(y'(x))^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \Rightarrow \frac{(y'(x))^2}{(x)((y'(x))^2 + 1)} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{2a}{x} = \frac{(y'(x))^2 + 1}{(y'(x))^2} \Rightarrow \frac{2a}{x} = 1 + \frac{1}{(y'(x))^2} \Rightarrow \frac{2a}{x} - 1 = \frac{1}{(y'(x))^2}$$

$$\frac{2a-x}{x} = \frac{1}{(y'(x))^2} \Rightarrow (y'(x))^2 = \frac{x}{2a-x} \Rightarrow y'(x) = \sqrt{\frac{x}{2a-x}} \Rightarrow y(x) = \int dy(x) = \int \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx$$

Utilizando el cambio de variable $x = a(1 - \cos \theta)$, $dx = a \sin \theta d\theta$ y reemplazando está en la anterior ecuación, se tiene que:

$$y = \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{2a - a(1 - \cos \theta)}} a \sin \theta d\theta$$

$$y = \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{2a - a + a \cos \theta}} a \sin \theta d\theta = a \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{a + a \cos \theta}} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} d\theta$$

$$y = a \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{a(1 + \cos \theta)}} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} d\theta = a \int \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos^2 \theta)}{(1 + \cos \theta)}} d\theta$$

$$y = a \int \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)}} d\theta = a \int \sqrt{(1 - \cos \theta)^2} d\theta = a \int (1 - \cos \theta) d\theta$$

$$y = a(\theta - \sin \theta) + C$$

Donde se debe cumplir que $C = 0$ para que la curva pase por el punto $A = (0,0)$

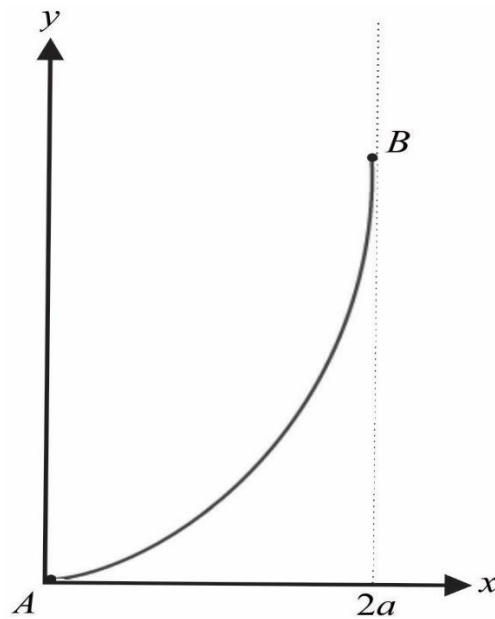
(condición inicial); es decir las ecuaciones:

$$x = a(1 - \cos \theta)$$

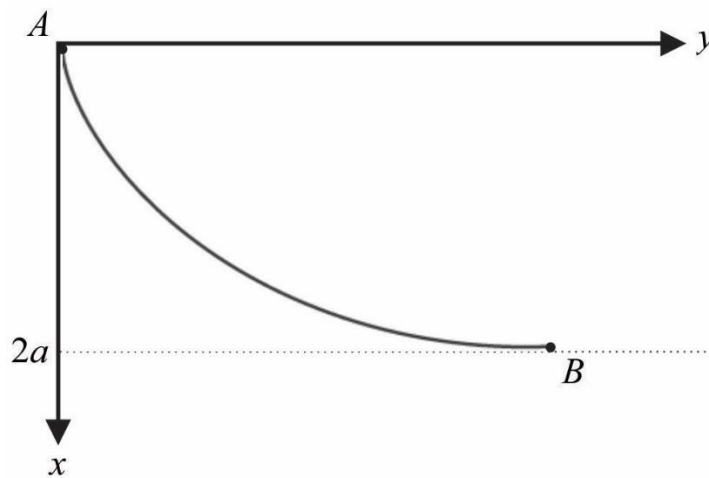
$$y = a(\theta - \sin \theta)$$

son las ecuaciones paramétricas de la solución (curva buscada que minimiza el tiempo) de un cuerpo que empieza su recorrido en el origen; esta curva dada por un parámetro θ es una cicloide (curva que describe un punto fijo a un círculo de radio a cuando “rueda

sin deslizar” por la parte de abajo del eje horizontal, esto en la Figura 7(b) se aprecia claramente), si estas curvas se grafican tienen la siguiente forma (ver Figura 7):



(a)



(b)

Figura 7: Curva Solución del problema de la braquistocrona

Nota: En el gráfico (a) se observa la traza dada por las ecuaciones $x = a(1 - \cos\theta)$ y $y = a(\theta - \sin\theta)$, como se asumió un sistema de coordenadas dado por un eje "y" horizontal y un eje "x" vertical con sentido hacia abajo entonces la gráfica (a) debe girarse para obtener el gráfico (b), el cual es consistente con el sistema coordenado elegido y su respectiva solución.

De todo esto se concluye que la curva de menor tiempo para el movimiento por acción de la gravedad de un cuerpo entre dos puntos a distinta altura es una curva cicloide, la cual resulta ser la solución al problema de la braquistocrona.

La solución mostrada en los párrafos anteriores al problema de la braquistocrona es una solución cuando escogemos un sistema de coordenadas donde el eje x está en la dirección vertical (ver Figura 6), para Goldstein (1987) si se utiliza un sistema donde el eje y es el vertical con un sentido hacia abajo, y el eje x es el horizontal (ver Figura 8) entonces la conservación de energía (análogamente al sistema XY) resulta ser:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

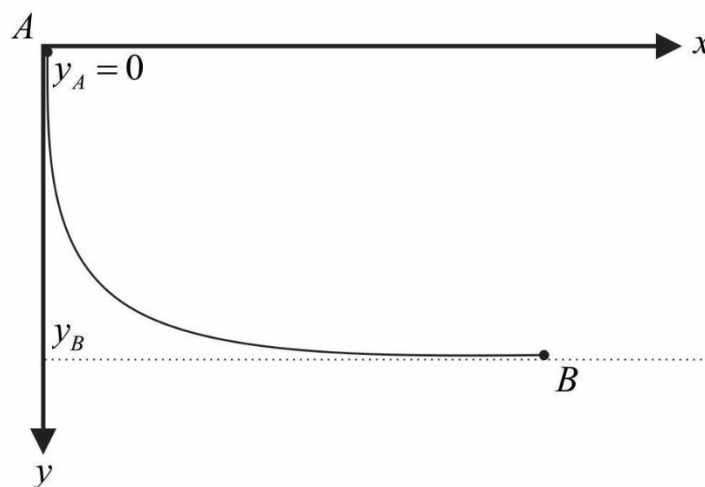


Figura 8: Sistema de Coordenadas YX con puntos a distinta altura en Y

Nota: En el gráfico se observa un sistema de coordenadas YX, ya que X se encuentra en el eje horizontal y Y en el eje vertical con sentido hacia abajo (sistema YX no a derechas); además se encuentran los mismos puntos A y B del sistema XY a una distinta altura, ambas posiciones están conectadas por una curva en donde un cuerpo puede caer por acción de la gravedad, la curva de este gráfico no es la que más rápido hace caer al cuerpo, la curva que más rápido hace caer a un cuerpo es la cicloide tal como se vio en la Figura 7. Adaptado de *Mecánica Clásica* (p. 42), por Herbert Goldstein, 1987.

Por lo tanto, la función del tipo lagrangiano que se aplicara a las ecuaciones de Euler-

Lagrange (similarmente al caso cuando $v = \sqrt{2gx}$ en el sistema XY de la Figura 6) es:

$$j(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para hallar la curva optima se obtiene que:

$$\frac{\partial j}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial j}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{2g}{(\sqrt{2gy})^3} \sqrt{1+(y')^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{2gy}} \right) = 0$$

$$\left(-\frac{g\sqrt{1+(y')^2}}{(\sqrt{2gy})^3} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{2gy}} \right) = 0$$

$$\left(-\frac{g\sqrt{1+(y')^2}}{(\sqrt{2gy})^3} \right) - \left(\frac{y''(\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{2gy}) - y' \left(\frac{d}{dx} \sqrt{2gy} + 2gy(y')^2 \right)}{(\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{2gy})^2} \right) = 0$$

$$\left(-\frac{g\sqrt{1+(y')^2}}{(\sqrt{2gy})^3} \right) - \left(\frac{y''(\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{2gy}) - y' \left(\frac{gy' + g[(y')^3 + y2y'y'']}{\sqrt{2gy} + 2gy(y')^2} \right)}{(\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{2gy})^2} \right) = 0$$

$$\left(-\frac{g\sqrt{1+(y')^2}}{(\sqrt{2gy})^3} \right) - \left(\frac{y''(\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{2gy}) - \left(\frac{g(y')^2 + g(y')^4 + 2gy(y')^2 y''}{\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{2gy}} \right)}{(1+(y')^2)(2gy)} \right) = 0$$

Multiplicando por $\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{2gy}$ a ambos lados de la ecuación anterior se posee que:

$$\left(-\frac{g(1+(y')^2)}{(2gy)} \right) - \left(\frac{y''(1+(y')^2)(2gy) - (g(y')^2 + g(y')^4 + 2gy(y')^2 y'')}{(1+(y')^2)(2gy)} \right) = 0$$

$$-\frac{(1+(y')^2)}{2y} - y'' + \frac{(g(y')^2 + g(y')^4 + 2gy(y')^2 y'')}{(1+(y')^2)(2gy)} = 0$$

Multiplicando por $(1+(y')^2)(2gy)$ a ambos lados de la ecuación anterior se tiene:

$$-g(1+(y')^2)^2 - y''(1+(y')^2)(2gy) + (g(y')^2 + g(y')^4 + 2gy(y')^2 y'') = 0$$

$$-g(1+(y')^2)^2 - 2gyy'' - 2gy(y')^2 y'' + g(y')^2 + g(y')^4 + 2gy(y')^2 y'' = 0$$

$$-g(1+(y')^2)^2 - 2gyy'' + g(y')^2 + g(y')^4 = 0$$

$$-g(1+(y')^2)^2 - 2gyy'' + g(y')^2(1+(y')^2) = 0 \Rightarrow (1+(y')^2)[g(y')^2 - g(1+(y')^2)] - 2gyy'' = 0$$

$$(1+(y')^2)[g(y')^2 - g - g(y')^2] - 2gyy'' = 0$$

$$-g(1+(y')^2) - 2gyy'' = 0 \Rightarrow -g - g(y')^2 - 2gyy'' = 0$$

$$g = -2gyy'' - g(y')^2$$

$$2yy'' + (y')^2 + 1 = 0 \tag{2.25}$$

La solución a la ecuación (2.25) en general para Goldstein (1987) es:

$$\frac{y}{a} = 1 - \text{Cos} \left[\frac{x - k + \sqrt{y(2a - y)}}{a} \right] \tag{2.26}$$

donde a y k son constantes; esta solución general a la ecuación (2.25) se puede poner en forma paramétrica, es decir esta puede venir dada por:

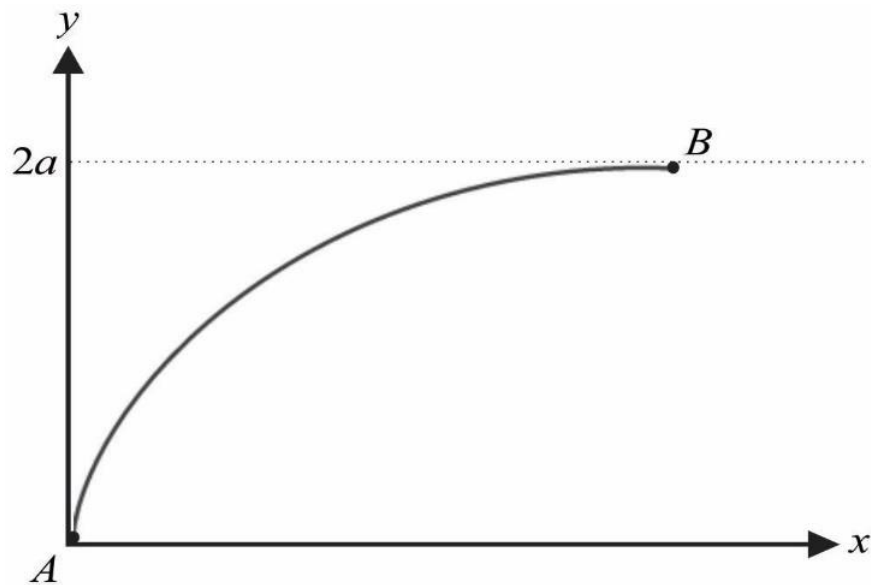
$$x = a(\theta - \sin \theta) + k \quad , \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (2.27)$$

Para que se cumpla la condición de que esta solución pase por el origen $A = (0,0)$ (condición inicial planteada en el sistema YX), entonces la constante k debe ser nula, es decir $k = 0$, por lo que las curvas (2.26) y (2.27) se modifican como (2.28) y (2.29):

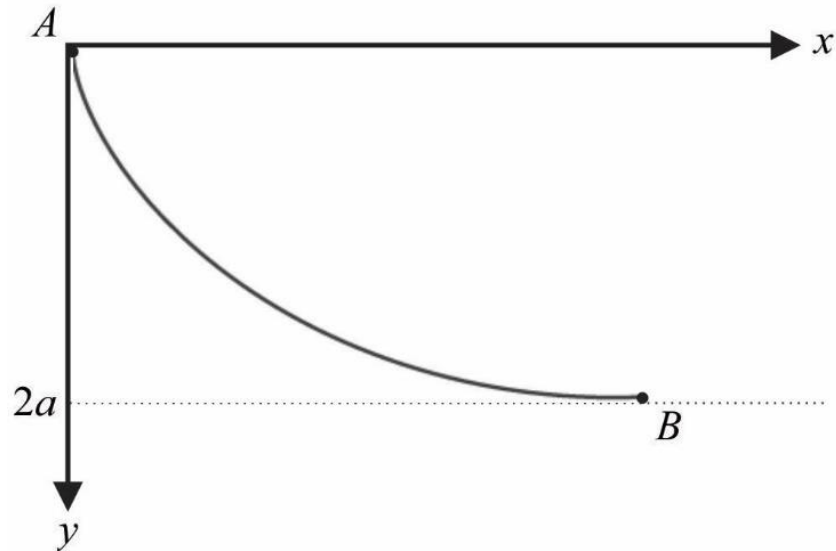
$$\frac{y}{a} = 1 - \cos \left[\frac{x + \sqrt{y(2a - y)}}{a} \right] \quad (2.28)$$

$$x = a(\theta - \sin \theta) \quad , \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (2.29)$$

Tal que la gráfica de estas ecuaciones equivalentes es (ver Figura 9):



(a)



(b)

Figura 9: La Cicloide como solución al problema de la braquistocrona

Nota: En el grafico (a) se observa la traza dada por las ecuaciones $x = a(\theta - \text{Sin}\theta)$ $y = a(1 - \text{Cos}\theta)$, como se asumió un sistema de coordenadas dado por un eje "x" horixontal y un eje "y" vertical con sentido hacia abajo entonces la gráfica (a) debe invertirse para obtener el grafico (b) el cual es consistente con el sistema coordenado elegido y su respectiva solución.

En la Figura 9(a), la curva resulta ser una cicloide descrita con la ecuación (2.28), o de forma paramétrica con (2.29), siendo esta la solución si el cuerpo parte desde el origen.

Para verificar que efectivamente (2.27) es la solución general a (2.25) se tiene que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{d(a(1 - \text{Cos}\theta))/d\theta}{d(a(\theta - \text{Sin}\theta) + k)/d\theta} = \frac{a\text{Sin}\theta}{a(1 - \text{Cos}\theta)} = \frac{\text{Sin}\theta}{1 - \text{Cos}\theta}$$

$$y' = \frac{\text{Sin}\theta}{1 - \text{Cos}\theta} \quad (2.30)$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{1}{dx/d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\text{Sin}\theta}{1 - \text{Cos}\theta} \right) \frac{1}{a(1 - \text{Cos}\theta)}$$

$$y'' = \left(\frac{\text{Cos}\theta(1 - \text{Cos}\theta) - \text{Sin}^2\theta}{(1 - \text{Cos}\theta)^2} \right) \frac{1}{a(1 - \text{Cos}\theta)} = \frac{\text{Cos}\theta - \text{Cos}^2\theta - \text{Sin}^2\theta}{a(1 - \text{Cos}\theta)^3} = \frac{\text{Cos}\theta - 1}{a(1 - \text{Cos}\theta)^3}$$

$$y'' = \frac{\text{Cos}\theta - 1}{a(1 - \text{Cos}\theta)^2(1 - \text{Cos}\theta)} = -\frac{1}{a(1 - \text{Cos}\theta)^2}$$

$$y'' = -\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2} \quad (2.31)$$

Reemplazando (2.30) y (2.31) en (2.25) se obtiene que:

$$2(a(1-\cos\theta))\left(-\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}\right) + \left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\frac{2\cos\theta - 2}{(1-\cos\theta)^2} + \frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2} + 1 = 0$$

$$\frac{2\cos\theta - 2}{(1-\cos\theta)^2} + \frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2} + \frac{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta}{(1-\cos\theta)^2} = 0$$

$$(2\cos\theta - 2\cos\theta) + (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 1 - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

Con lo cual se demuestra que efectivamente (2.27) es la solución general en forma paramétrica a la ecuación diferencial (2.25); también se puede demostrar que (2.26) y (2.27) son equivalentes, esto se logra reemplazando (2.27) en (2.26), es decir:

$$\frac{y}{a} = 1 - \cos\left[\frac{x - k + \sqrt{y(2a - y)}}{a}\right]$$

$$\frac{a(1-\cos\theta)}{a} = 1 - \cos\left[\frac{(a(\theta - \sin\theta) + k) - k + \sqrt{(a(1-\cos\theta))(2a - (a(1-\cos\theta)))}}{a}\right]$$

$$1 - \cos\theta = 1 - \cos\left[\frac{a\theta - a\sin\theta + \sqrt{(a - a\cos\theta)(a + a\cos\theta)}}{a}\right]$$

$$1 - \cos\theta = 1 - \cos\left[\frac{a\theta - a\sin\theta + \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\theta}}{a}\right]$$



$$1 - \cos \theta = 1 - \cos \left[\frac{a\theta - a \sin \theta + \sqrt{a^2 \sin^2 \theta}}{a} \right]$$

$$1 - \cos \theta = 1 - \cos \theta$$

Lo que demuestra, como se había mencionado que (2.26) y (2.27) son equivalentes.

En resumen, la ecuación diferencial (2.25) tiene solución en general, dicho en otras palabras esto demuestra que *existe y es única la solución para la ecuación diferencial* $2yy'' + (y')^2 + 1 = 0$, *tal que su solución es la curva paramétrica (2.27).*

2.15. EL PÉNDULO DE HUYGENS

En 1658, el astrónomo, físico y matemático holandés Christiaan Huygens (1629-1695) se encontraba trabajando en la mejora de un péndulo, uno donde el periodo no dependiera de la amplitud angular tal y como sucedía en el caso del péndulo circular, esto con el fin de mejorar la precisión en cuanto refiere a la medición del tiempo, de esta manera Huygens se puso a estudiar el periodo de un péndulo forzado a seguir una trayectoria cicloidal, llegando a la conclusión de que este tipo de péndulos son isócronos o tautócronos (que no dependen de la amplitud angular de su movimiento); Huygens en su obra *Horologium Oscillatorium* (Huygens, 1673) hace una demostración geométrica del hecho de que un péndulo forzado a seguir una trayectoria cicloidal posee un periodo independiente de la amplitud angular.

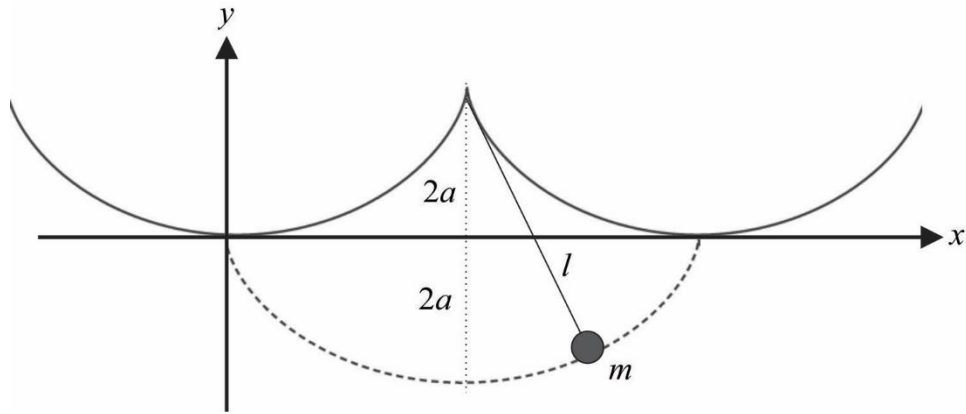


Figura 10: Péndulo de Huygens

Nota: En el gráfico se observa la trayectoria cicloidal que recorre una masa m ligada a una cuerda que choca con dos paredes en forma de cicloide, que respectivamente son las responsables de generar una trayectoria cicloidal que recorre la masa. Adaptado de *Péndulo Cicloidal*, por Wikipedia, 2021, Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9ndulo_cicloidal)

La curva cicloide que recorre la masa m vista en la figura 10 se puede representar paramétricamente como:

$$x = a(\theta - \sin(\theta))$$

$$y = -a(1 - \cos \theta)$$

Con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Desde el formalismo Lagrangiano o Hamiltoniano es posible llegar a encontrar el periodo de oscilación el cual es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}} \equiv 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Donde claramente se observa que el periodo no depende de la amplitud angular, lo cual resulta ser muy diferente comparado con un péndulo circular que no necesariamente da pequeñas oscilaciones, y que si depende de la amplitud angular.

Esto puede considerarse como una de las primeras relaciones entre el tiempo de recorrido de una masa sobre una curva cicloide. Con lo que respecta al péndulo cicloide el mismo



Huygens “descubrió que no era más preciso que el péndulo simple”(Bustillos et al., 2009, Pag. 17), pero mucho más allá de la precisión para medir el tiempo, Huygens descubrió una importante propiedad de la curva cicloide, la cual resulta ser el isocronismo o tautocronismo.



CAPITULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. UBICACIÓN

Al poseer la investigación un carácter teórico con un formalismo matemático aplicado a la física, este estudio se desarrolla en la Universidad Nacional del Altiplano-Puno; durante el desarrollo de la investigación, se utilizará ambientes de la Biblioteca Central, y biblioteca especializada de la Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura.

3.2. ÁREA DE ESTUDIO

Este estudio de investigación se encuentra dentro del área de la Mecánica Clásica, específicamente en la formulación variacional, y de los sistemas conservativos de dicha rama.

3.3. MATERIALES

Dado el formalismo matemático que se utiliza en este estudio, los materiales a utilizar son los siguientes:

- Dinámica de una masa puntual, cuantitativamente dada por la segunda ley de Newton.
- Principio de conservación de energía: principio que permite afirmar que la energía no puede desaparecer, sino solo transformarse en sistemas físicos que son netamente conservativos.
- Particiones y sumas infinitesimales, integral en el sentido de Riemann.
- El principio de Hamilton: principio variacional del cual se puede obtener las curvas de movimiento que describen a un sistema físico.
- Curva solución del problema de la braquistocrona en dos dimensiones.
- Fuentes bibliográficas referentes al tema: artículos, libros, tesis, entrevistas, cartas.



3.4. MÉTODO

La investigación está basada en un problema planteado en el siglo XVII, problema de la braquistocrona; este estudio busca desarrollar teórica e inductivamente una solución generalizada a un espacio tridimensional de dicho problema, y a velocidades iniciales de un cuerpo distintas del reposo. Esta inspiración propia, al buscar desarrollar una generalización, recurre a un método alternativo con sustento formal encontrado en el cálculo variacional, en el análisis de los procesos de sumas infinitesimales y por último en dos principios físicos denominados conservación de energía y principio de Hamilton; con estos conceptos mencionados, el trabajo será encontrar la existencia de una curva que es la más rápida entre dos puntos de manera que cumpla con la generalización ya comentada.

Método de investigación:

El método que se utiliza en esta investigación tiene un enfoque cualitativo, de diseño de tipo no experimental, según su finalidad esta investigación es de tipo básica, con alcance explicativo y según su fuente de datos es documental.

Técnicas:

Análisis y aplicación de teoremas matemáticos, utilización de principio físicos, comparación con problemas similares como por ejemplo el caso de la braquistocrona, análisis de datos referentes al tema revisados en fuentes bibliográficas.

Estrategias:

Las estrategias para el desarrollo de esta investigación son: Analizar el problema de investigación, comparar la investigación con problemas similares, revisar y demostrar teoremas referentes al problema, sintetizar la información bibliográfica recolectada.



CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el presente capítulo, se expone el resultado fundamental de la investigación, el cual es encontrar de que existe y es única una curva que sea la más rápida para el desplazamiento de un cuerpo en movimiento por acción de la gravedad.

El resultado de esta investigación es demostrar la existencia y unicidad de una curva optima, la cual tiene la característica de minimizar el tiempo de recorrido para un cuerpo cuando este se desplaza por esta trayectoria, tal que el cuerpo este sometido a un campo gravitatorio, para esto debe generarse un funcional que defina el tiempo de recorrido por una curva, este funcional será definido en este capítulo gracias a la conservación de energía, siendo también este funcional parte de los resultados de esta investigación.

4.1. EL FUNCIONAL DEL TIEMPO PARA UNA CURVA

Sea un campo conservativo de fuerzas que actúa sobre una partícula de masa m , es decir estas fuerzas provienen de una función potencial U de la forma:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Entonces la energía mecánica total para dicho sistema (de masa m) se conserva (teorema 2.11.5) y, por ende:

$$E = T + U = Cte$$

De la ecuación anterior, la energía siempre es constante, ósea es independiente de cualquier parámetro en la cual se la pueda evaluar, lo que matemáticamente se puede poner como:

Definición 4.1.1. (Energía Constante Discretizada). Si la energía total se conserva en un sistema, entonces la energía total es la misma cuando se evalúa en algún valor $l_i, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$ del parámetro discreto $l = \{l_0, l_1, \dots, l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{n-1}, l_n\}$, es decir:

$$E(l_0) = \dots = E(l_{i-1}) = E(l_i) = E(l_{i+1}) = \dots = E(l_n)$$

$$T(l_0) + U(l_0) = \dots = T(l_{i-1}) + U(l_{i-1}) = T(l_i) + U(l_i) = T(l_{i+1}) + U(l_{i+1}) = \dots = T(l_n) + U(l_n)$$

Si los valores del parámetro discreto l cumplen que $l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_{i-1} < l_i < l_{i+1} < \dots < l_n$ entonces el conjunto de valores reales $\{l_0, l_1, \dots, l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{n-1}, l_n\} \subset \mathbb{R}$ es una partición de $[l_0, l_n] \subset \mathbb{R}$.

Si el potencial al cual se somete la masa m , es el potencial para campo gravitatorio constante g , entonces eligiendo por simplicidad como sistema de referencia un espacio euclidiano se tendría que:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \Rightarrow -mg\hat{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} \Rightarrow U = mgz$$

Observaciones: la fuerza gravitatoria apunta en el sentido contrario del eje Z , por lo tanto la fuerza es $\vec{F} = mg(-\hat{k})$.

Es decir existe una función potencial $U = mgz$ (donde z es la componente de la altura), a consecuencia de la existencia de este potencial el sistema es energéticamente conservativo, por lo tanto de la definición (4.1.1) se tiene que:

$$T(l_0) + U(l_0) = T(l_i) + U(l_i)$$

Utilizando la definición (2.11.3) (energía cinética) de masa constante m y función potencial para campo gravitatorio constante g se tiene que:

$$\frac{1}{2} m \|\vec{v}(l_0)\|^2 + mgz(l_0) = \frac{1}{2} m \|\vec{v}(l_i)\|^2 + mgz(l_i)$$

Donde \vec{v} y z son funciones del parámetro l , de la ecuación anterior se puede reescribir que:

$$\frac{1}{2} m \|\vec{v}(l_0)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}(l_i)\|^2 = mgz(l_i) - mgz(l_0)$$

$$\frac{1}{2} \|\vec{v}(l_0)\|^2 - \frac{1}{2} \|\vec{v}(l_i)\|^2 = gz(l_i) - gz(l_0)$$

$$\frac{1}{2} [\|\vec{v}(l_0)\|^2 - \|\vec{v}(l_i)\|^2] = g [z(l_i) - z(l_0)] \Rightarrow \|\vec{v}(l_0)\|^2 - \|\vec{v}(l_i)\|^2 = 2g [z(l_i) - z(l_0)]$$

$$\|\vec{v}(l_i)\|^2 = \|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g [z(l_i) - z(l_0)]$$

$$\|\vec{v}(l_i)\| = \pm \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g [z(l_i) - z(l_0)]}$$

Ya que el módulo de un vector es un valor real positivo, entonces de la ecuación anterior se tiene que:

$$\|\vec{v}(l_i)\| = \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g [z(l_i) - z(l_0)]}$$

Esta ecuación me indica el valor de la rapidez $\|\vec{v}(l_i)\|$ que es evaluada en un valor l_i del parámetro l ; de la misma manera expuesta, se puede obtener una rapidez $\|\vec{v}(l_{i-1})\|$ evaluada en l_{i-1} , es decir:

$$\|\vec{v}(l_{i-1})\| = \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g [z(l_{i-1}) - z(l_0)]}$$

Teorema 4.1.2. (Tiempo de recorrido de un cuerpo entre dos puntos muy próximos). Si $\vec{\alpha}(l) = (x(l), y(l), z(l))$ es una curva parametrizada diferenciable con una partición $l = \{l_0, l_1, \dots, l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{n-1}, l_n\} \subset \mathbb{R}$ donde existe un cuerpo de masa m que se desplaza por esta curva $\vec{\alpha}(l)$, poseyendo una velocidad $\vec{v}(l_i)$ en la posición $\vec{\alpha}(l_i)$; y con puntos muy próximos entre $\vec{\alpha}(l_{i-1})$ y $\vec{\alpha}(l_i)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$; entonces el tiempo de recorrido de una partícula desde $\vec{\alpha}(l_{i-1})$ hacía $\vec{\alpha}(l_i)$ es:

$$\Delta t_i = \frac{2 \|\vec{\alpha}(l_i) - \vec{\alpha}(l_{i-1})\|}{\|\vec{v}(l_i)\| + \|\vec{v}(l_{i-1})\|}$$

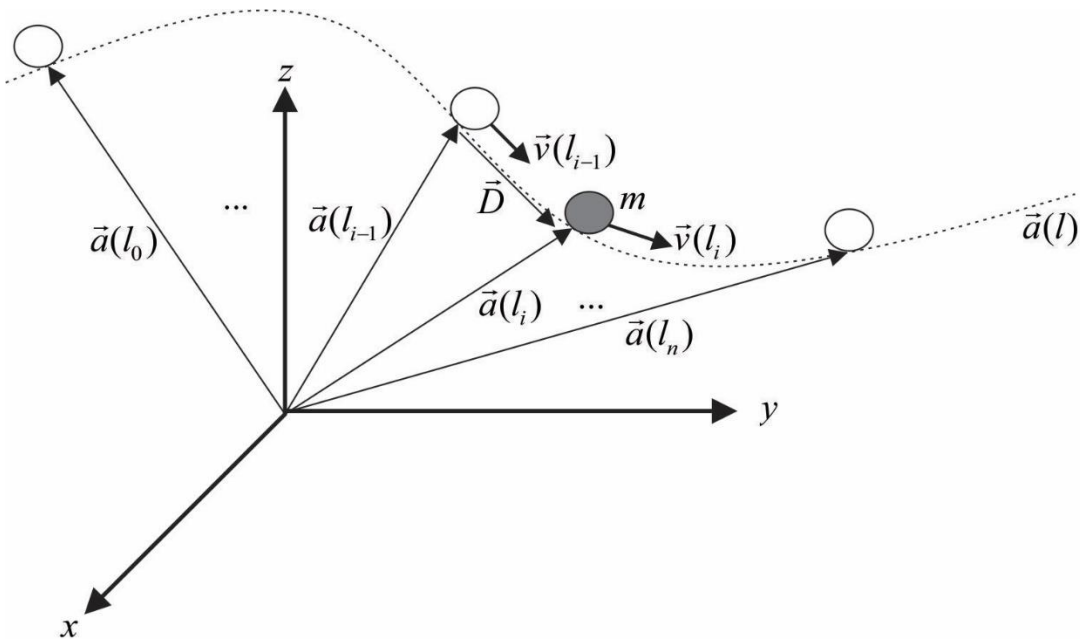


Figura 11: Tiempo de recorrido entre dos puntos muy próximos

Demostración: El vector desplazamiento \vec{D} del gráfico se tiene que es igual a:

$$\vec{D} = \vec{\alpha}(l_i) - \vec{\alpha}(l_{i-1})$$

Por el teorema (2.5.4.) se puede obtener que:

$$\vec{D} = \vec{\alpha}(l_i) - \vec{\alpha}(l_{i-1}) = \frac{(\vec{v}_i + \vec{v}_{i-1})}{2} (t_i - t_{i-1})$$

$$2[\vec{\alpha}(l_i) - \vec{\alpha}(l_{i-1})] = [\vec{v}_i + \vec{v}_{i-1}](t_i - t_{i-1})$$

Aplicando el valor absoluto a ambos lados de la ecuación:

$$2\|\vec{\alpha}(l_i) - \vec{\alpha}(l_{i-1})\| = \|\vec{v}_i + \vec{v}_{i-1}\|(t_i - t_{i-1})$$

Al ser un recorrido entre dos puntos muy próximos se cumple que $\|\vec{v}_i + \vec{v}_{i-1}\| \cong \|\vec{v}_i\| + \|\vec{v}_{i-1}\|$,

entonces se tiene que:

$$2\|\vec{\alpha}(l_i) - \vec{\alpha}(l_{i-1})\| = (\|\vec{v}_i\| + \|\vec{v}_{i-1}\|)(t_i - t_{i-1})$$

$$t_i - t_{i-1} = \frac{2\|\vec{\alpha}(l_i) - \vec{\alpha}(l_{i-1})\|}{\|\vec{v}_i\| + \|\vec{v}_{i-1}\|} \Rightarrow \Delta t_i = \frac{2\|\vec{\alpha}(l_i) - \vec{\alpha}(l_{i-1})\|}{\|\vec{v}_i\| + \|\vec{v}_{i-1}\|}$$

Con lo cual queda demostrado.

Si al teorema anterior (4.1.2) se le reemplaza las rapidezces

$\|\vec{v}(l_i)\| = \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]}$ y $\|\vec{v}(l_{i-1})\| = \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]}$ que

proviene de un campo gravitacional conservativo, y también se le aplicara las

definiciones (2.2.2) de curvas parametrizadas diferenciables entonces:

$$\Delta t_i = \frac{2\|\vec{\alpha}(l_i) - \vec{\alpha}(l_{i-1})\|}{\|\vec{v}_i\| + \|\vec{v}_{i-1}\|} = \frac{2\|(x(l_i), y(l_i), z(l_i)) - (x(l_{i-1}), y(l_{i-1}), z(l_{i-1}))\|}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]} + \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]}}$$

$$\Delta t_i = \frac{2\|(x(l_i) - x(l_{i-1}), y(l_i) - y(l_{i-1}), z(l_i) - z(l_{i-1}))\|}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]} + \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]}}$$

$$\Delta t_i = \frac{2\sqrt{(x(l_i) - x(l_{i-1}))^2 + (y(l_i) - y(l_{i-1}))^2 + (z(l_i) - z(l_{i-1}))^2}}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]} + \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]}}$$

En la partición $\{l_0, l_1, \dots, l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{n-1}, l_n\} = [l_0, l_n] \subset \mathbb{R}$, la longitud de cada subintervalo se denota por $\Delta l_i = l_i - l_{i-1}$; multiplicando por Δl_i al numerador de la anterior expresión se tiene que:

$$\Delta t_i = \frac{2\sqrt{(x(l_i) - x(l_{i-1}))^2 + (y(l_i) - y(l_{i-1}))^2 + (z(l_i) - z(l_{i-1}))^2}}{l_i - l_{i-1}} \Delta l_i$$

$$\Delta t_i = \frac{2\sqrt{\left(\frac{x(l_i) - x(l_{i-1})}{l_i - l_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(l_i) - y(l_{i-1})}{l_i - l_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{z(l_i) - z(l_{i-1})}{l_i - l_{i-1}}\right)^2}}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]} + \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]}} \Delta l_i$$

Si x, y, z son funciones continuas en el intervalo $[l_{i-1}, l_i]$, y derivables en el intervalo $\langle l_{i-1}, l_i \rangle$ entonces por el teorema (2.4.2) existe un $\bar{l}_i \in \langle l_{i-1}, l_i \rangle$ tal que:

$$x'(\bar{l}_i) = \frac{x(l_i) - x(l_{i-1})}{l_i - l_{i-1}}, y'(\bar{l}_i) = \frac{y(l_i) - y(l_{i-1})}{l_i - l_{i-1}}, z'(\bar{l}_i) = \frac{z(l_i) - z(l_{i-1})}{l_i - l_{i-1}}$$

De esta manera se puede obtener que:

$$\Delta t_i = \frac{2\sqrt{(x'(\bar{l}_i))^2 + (y'(\bar{l}_i))^2 + (z'(\bar{l}_i))^2}}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]} + \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]}} \Delta l_i$$

$$\Delta t_i = \frac{2\|(x'(\bar{l}_i), y'(\bar{l}_i), z'(\bar{l}_i))\|}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]} + \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]}} \Delta l_i$$

La curva $\vec{\alpha}(l) = (x(l), y(l), z(l))$ al ser diferenciable, se cumple que

$\vec{\alpha}'(l) = (x'(l), y'(l), z'(l))$, por lo tanto:

$$\Delta t_i = \frac{2\|\vec{\alpha}'(\bar{l}_i)\|}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]} + \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]}} \Delta l_i$$

Multiplicando por la conjugada (

$\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]} - \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]}$) en el numerador y

denominador de la anterior ecuación se tiene que:

$$\Delta t_i = \frac{2\|\vec{\alpha}'(\bar{l}_i)\| \left[\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]} - \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]} \right]}{\left[\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)] \right] - \left[\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)] \right]} \Delta l_i$$

$$\Delta t_i = \frac{2\|\vec{\alpha}'(\bar{l}_i)\| \left[\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]} - \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]} \right]}{\left[\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2gz(l_i) + 2gz(l_0) \right] - \left[\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2gz(l_{i-1}) + 2gz(l_0) \right]} \Delta l_i$$

$$\Delta t_i = \frac{2\|\vec{\alpha}'(\bar{l}_i)\| \left[\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]} - \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]} \right]}{-2g[z(l_i) - z(l_{i-1})]} \Delta l_i$$

Dividiendo el numerador y denominador por $l_i - l_{i-1}$:

$$\Delta t_i = \frac{2\|\vec{\alpha}'(\bar{l}_i)\| \left[\frac{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_i) - z(l_0)]} - \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l_{i-1}) - z(l_0)]}}{l_i - l_{i-1}} \right]}{-2g \left[\frac{z(l_i) - z(l_{i-1})}{l_i - l_{i-1}} \right]} \Delta l_i$$

Si se define como $f(l) = \sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}$, con $\|\vec{v}(l_0)\|^2$ y $z(l_0)$ constantes,

entonces se tiene que:

$$\Delta t_i = \frac{2 \|\bar{\alpha}'(\bar{l}_i)\| \left[\frac{f(l_i) - f(l_{i-1})}{l_i - l_{i-1}} \right]}{-2g \left[\frac{z(l_i) - z(l_{i-1})}{l_i - l_{i-1}} \right]} \Delta l_i$$

Por el teorema (2.4.2) existe un $\bar{l}_i \in \langle l_{i-1}, l_i \rangle$ tal que:

$$f'(\bar{l}_i) = \frac{f(l_i) - f(l_{i-1})}{l_i - l_{i-1}}, z'(\bar{l}_i) = \frac{z(l_i) - z(l_{i-1})}{l_i - l_{i-1}}$$

Es así que el tiempo de movimiento de un cuerpo entre dos puntos muy próximos es:

$$\Delta t_i = \frac{2 \|\bar{\alpha}'(\bar{l}_i)\| [f'(\bar{l}_i)]}{-2g [z'(\bar{l}_i)]} \Delta l_i = \frac{\|\bar{\alpha}'(\bar{l}_i)\| [f'(\bar{l}_i)]}{-g [z'(\bar{l}_i)]} \Delta l_i$$

Como $f(l) = \sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}$ entonces se tiene que:

$$f'(l) = \frac{df(l)}{dl} = \frac{d}{dl} \left(\sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]} \right) = \frac{-2g \left[\frac{dz(l)}{dl} \right]}{2\sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}}$$

$$f'(l) = \frac{-g \left[\frac{dz(l)}{dl} \right]}{\sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} = \frac{-g [z'(l)]}{\sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}}$$

$$f'(\bar{l}_i) = \frac{-g [z'(\bar{l}_i)]}{\sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(\bar{l}_i) - z(l_0)]}}$$

Reemplazando la anterior expresión en Δt_i se tiene que:

$$\Delta t_i = \frac{\|\bar{\alpha}'(\bar{l}_i)\| \left[\frac{-g [z'(\bar{l}_i)]}{\sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(\bar{l}_i) - z(l_0)]}} \right]}{-g [z'(\bar{l}_i)]} \Delta l_i$$

$$\Delta t_i = \frac{\|\vec{\alpha}'(\bar{l}_i)\|}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(\bar{l}_i) - z(l_0)]}} \Delta l_i$$

Como se aprecia en la anterior ecuación, el tiempo Δt_i es una función del parámetro discreto l_i ; si estas pequeñas variaciones de tiempo se suman en su totalidad se obtiene un tiempo total, esto matemáticamente es sumar en los elementos de la partición $\{l_0, l_1, \dots, l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{n-1}, l_n\}$:

$$\tau = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$$

$$\tau = \sum_{i=1}^n \frac{\|\vec{\alpha}'(\bar{l}_i)\|}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(\bar{l}_i) - z(l_0)]}} \Delta l_i$$

Es decir, el tiempo τ es el tiempo en el cual demora una partícula de masa m en recorrer una trayectoria dada por la curva $\vec{\alpha}$ desde $\vec{\alpha}(l_0)$ hasta $\vec{\alpha}(l_n)$, con una velocidad inicial $\vec{v}(l_0)$ y a una altura inicial $z(l_0)$, siempre y cuando $\vec{\alpha} = (x, y, z)$; la ecuación anterior a este párrafo describe al tiempo como una suma discreta, pero dentro de esta sumatoria aparecen elementos que son funciones del valor medio del parámetro discreto, esta discretización permite realizar lo siguiente: para obtener un tiempo τ con una aproximación al valor real (en la naturaleza) del tiempo que un cuerpo recorre una trayectoria $\vec{\alpha}$ se debe poseer una partición con muchos elementos $\{l_0, l_1, \dots, l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{n-1}, l_n\}$, es decir el valor de n debe tender al infinito, por ende las sumatorias anteriores a este párrafo se deben reescribir como:

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta t_i$$

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\|\bar{\alpha}'(\bar{l}_i)\|}{\sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(\bar{l}_i) - z(l_0)]}} \Delta l_i$$

Se asumió que la curva $\bar{\alpha}$ es una curva parametrizada diferenciable en el abierto $\langle l_0, l_n \rangle$, esto implica que curva entre los parámetros $[l_0, l_n]$ es una curva continua siempre y cuando $n \rightarrow \infty$, entonces por el teorema (2.3.12) se obtiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\|\bar{\alpha}'(\bar{l}_i)\|}{\sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(\bar{l}_i) - z(l_0)]}} \Delta l_i = \int_{l_0}^{l_n} \frac{\|\bar{\alpha}'(l)\|}{\sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} dl$$

$$\tau = \int_{l_0}^{l_n} \frac{\|\bar{\alpha}'(l)\|}{\sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} dl$$

De esta manera se obtuvo un funcional que determina el tiempo de recorrido desde un punto $\bar{\alpha}(l_0)$ a $\bar{\alpha}(l_n)$ en una curva $\bar{\alpha}(l)$, esto se puede poner de manera formal utilizando la definición (2.12.5), es decir, se tiene que:

Definición 4.1.3. (El Funcional del Tiempo). Sea $\bar{\alpha}(l) = (x(l), y(l), z(l)) \in C(\langle l_0, l_n \rangle, \mathbb{R}^3)$ una familia de curvas que conectan $\bar{\alpha}(l_0)$ con $\bar{\alpha}(l_n)$, y $M : \tilde{\alpha}(l) \in \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$M(l, x(l), y(l), z(l), x'(l), y'(l), z'(l)) = \frac{\|\bar{\alpha}'(l)\|}{\sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} \quad \text{una función que}$$

depende del levantamiento de $\bar{\alpha}$; el funcional para esta familia de curvas se define como la función

$\tau : C(\langle l_0, l_n \rangle, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\bar{\alpha} \rightarrow \tau(\bar{\alpha}) = \int_{l_0}^{l_n} \frac{\|\bar{\alpha}'(l)\|}{\sqrt{\|\bar{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} dl \quad (4.1)$$

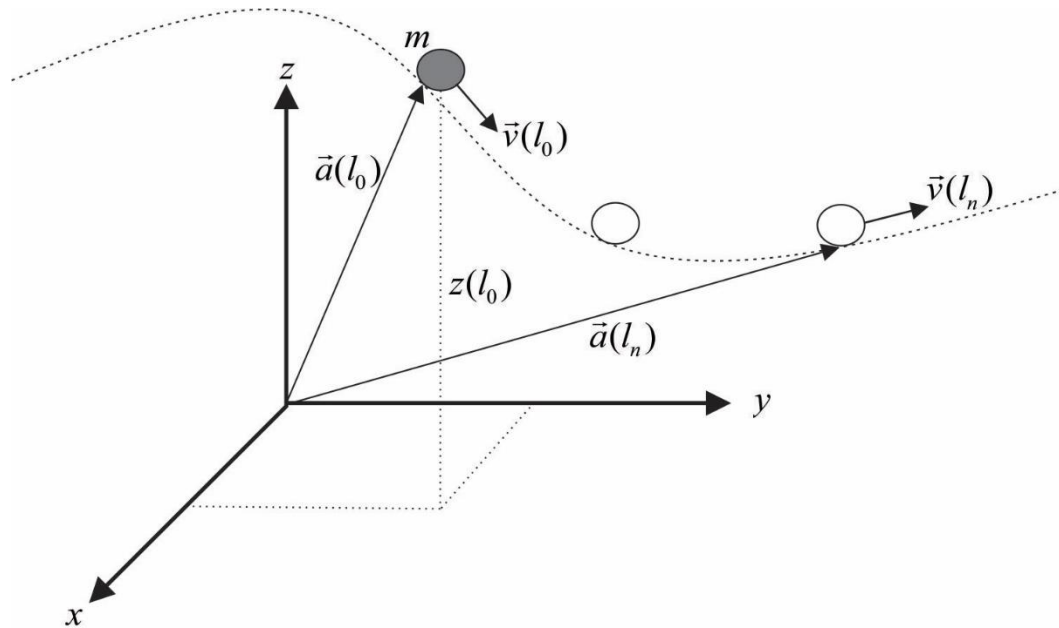


Figura 12: Trayectoria que recorre un cuerpo por acción gravitatoria

Nota: El gráfico representa una posible trayectoria que une los puntos $\vec{a}(l_0)$ y $\vec{a}(l_n)$, donde el cuerpo de masa m posee inicialmente una velocidad $\vec{v}(l_0)$, una altura $z(l_0)$, y también donde la masa cae por acción gravitatoria; el tiempo que recorre este cuerpo entre los puntos $\vec{a}(l_0)$ y $\vec{a}(l_n)$ se puede calcular con el funcional del tiempo (4.1.3), obviamente conociendo como es explícitamente la curva \vec{a} .

Observación: las derivadas con respecto a l de $x(l)$, $y(l)$ y $z(l)$ no representan ningún tipo de velocidad ya que el parámetro l es adimensional, además también es válido que

$$\vec{\alpha}'(l) = \frac{d\vec{\alpha}(l)}{dl} \text{ o lo mismo que: } x'(l) = \frac{dx(l)}{dl}, y'(l) = \frac{dy(l)}{dl} \text{ y } z'(l) = \frac{dz(l)}{dl}.$$

Ejemplo 4.1.4 (Caída libre de un cuerpo en reposo). El recorrido de una partícula en caída libre partiendo del reposo ($\|\vec{v}(l_0)\| = 0$) viene dada por la trayectoria

$\vec{\alpha}(l) = (a_1, a_2, h-l)$, con $z(l) = h-l$, $a_1 = Cte$ y $a_2 = Cte$, el tiempo que demora en caer desde una altura $z(l_0 = 0) = h$ hasta el suelo $z(l_n = h) = 0$, utilizando el funcional (4.1)

es:

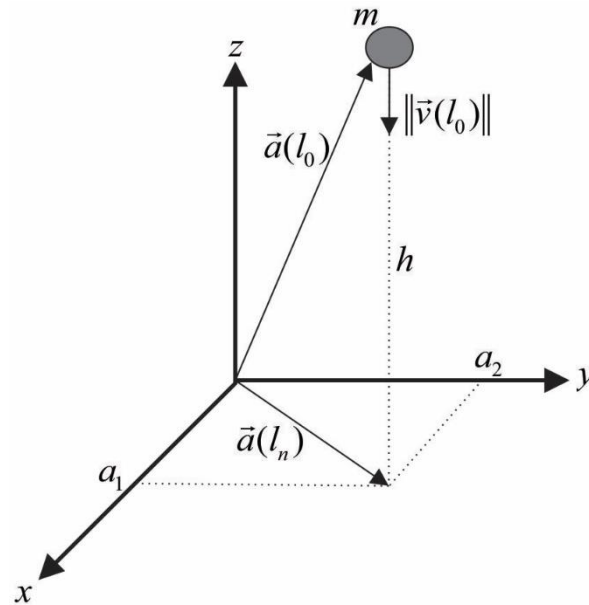


Figura 13: Caída libre de una masa

$$\tau = \int_0^h \frac{\|\vec{a}'(l)\|}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} dl = \int_0^h \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + \left(\frac{dz(l)}{dl}\right)^2}}{\sqrt{0^2 - 2g[z(l) - h]}} dl = \int_0^h \frac{\left|\frac{dz(l)}{dl}\right|}{\sqrt{0^2 - 2g[z(l) - h]}} dl$$

$$\tau = \int_0^h \frac{\left|\frac{d(h-l)}{dl}\right|}{\sqrt{0^2 - 2g[z(l) - h]}} dl = \int_0^h \frac{|-1|}{\sqrt{-2g[(h-l) - h]}} dl = \int_0^h \frac{1}{\sqrt{2gl}} dl$$

$$\tau = \int_0^h \frac{l^{-1/2}}{\sqrt{2g}} dl = \frac{2l^{1/2}}{\sqrt{2g}} \Big|_0^h = \sqrt{\frac{2l}{g}} \Big|_0^h = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

De esta manera se obtiene el tiempo de vuelo cuando un cuerpo cae desde el reposo y desde una altura h sobre el nivel de referencia $z = 0$, despejando la altura h se tiene que:

$$\tau^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow h = \frac{g\tau^2}{2}$$

Esta expresión de la altura h es la que se acostumbra estudiar en los primeros años de la carrera de Física.

4.2. EXISTENCIA DE LA CURVA MÁS RÁPIDA ENTRE DOS PUNTOS

En la anterior sección se obtuvo un funcional que definía el tiempo de recorrido de un cuerpo en una determinada trayectoria; en esta sección, se busca encontrar alguna trayectoria que es la que minimiza el funcional (4.1), es decir, la trayectoria que utiliza el menor tiempo en recorrer un camino que une dos puntos distintos, esta curva cumplirá matemáticamente que:

$$\delta\tau = 0$$

$$\delta \int_{l_0}^{l_n} \frac{\|\vec{\alpha}'(l)\|}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} dl = \delta \int_{l_0}^{l_n} M(l, x(l), y(l), z(l), x'(l), y'(l), z'(l)) dl = 0$$

Donde $M = M(l, x(l), y(l), z(l), x'(l), y'(l), z'(l)) = \frac{\|\vec{\alpha}'(l)\|}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}}$ es una

función del tipo lagrangiana, el principio de Hamilton avala que si $\delta\tau = 0$, entonces se debe cumplir equivalentemente por analogía que:

$$\delta \int_{l_0}^{l_n} M(l, x(l), y(l), z(l), x'(l), y'(l), z'(l)) dl = 0$$

≡

$$\int_{l_0}^{l_n} \left[\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{d}{dl} \left[\frac{\partial M}{\partial x'} \right] \right) \delta x + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{d}{dl} \left[\frac{\partial M}{\partial y'} \right] \right) \delta y + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{d}{dl} \left[\frac{\partial M}{\partial z'} \right] \right) \delta z \right] dl = 0$$

El sistema analizado es *holonomo*, ya que los vínculos del sistema (en este caso la trayectoria $\vec{\alpha}(l) = (x(l), y(l), z(l))$ que restringe el movimiento del cuerpo) no dependen

de las velocidades generalizadas, las cuales viene siendo x', y' y z' ; por esta razón en la ecuación anterior a este párrafo se puede asumir que cada parte de la suma es nula, esto para que sea la integral sea igual a cero; es decir se cumple, siendo holonomo el sistema que:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{d}{dl} \left[\frac{\partial M}{\partial x'} \right] = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{d}{dl} \left[\frac{\partial M}{\partial y'} \right] = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{d}{dl} \left[\frac{\partial M}{\partial z'} \right] = 0$$

Utilizando que $M = \frac{\|\vec{\alpha}'(l)\|}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} = \frac{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}}$, con

$\|\vec{v}(l_0)\|$ y $z(l_0)$ condiciones iniciales (constantes), se puede obtener:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{d}{dl} \left[\frac{\partial M}{\partial x'} \right] = 0 \Rightarrow 0 - \frac{d}{dl} \left[\frac{1}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} \frac{x'(l)}{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}} \right] = 0$$

$$\frac{d}{dl} \left[\frac{1}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} \frac{x'(l)}{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}} \right] = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} \frac{x'(l)}{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}} = C_1 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{d}{dl} \left[\frac{\partial M}{\partial y'} \right] = 0 \Rightarrow 0 - \frac{d}{dl} \left[\frac{1}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} \frac{y'(l)}{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}} \right] = 0$$

$$\frac{d}{dl} \left[\frac{1}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} \frac{y'(l)}{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}} \right] = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} \frac{y'(l)}{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}} = C_2 \quad (4.3)$$

De las ecuaciones (4.2) y (4.3) se tiene que:

$$\frac{1}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} \frac{1}{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}} = \frac{C_1}{x'(l)} = \frac{C_2}{y'(l)} \quad (4.4)$$

$$y'(l) = \frac{C_2}{C_1} x'(l) \quad (4.5)$$

$$\frac{dy(l)}{dl} = \frac{C_2}{C_1} \frac{dx(l)}{dl} \Rightarrow dy = \frac{C_2}{C_1} dx$$

$$y = \frac{C_2}{C_1} x + C_3 \quad (4.6)$$

Por último, se tiene que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{d}{dl} \left[\frac{\partial M}{\partial y'} \right] = 0 \Rightarrow \frac{g \sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}}{\left(\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]} \right)^3}$$

$$- \frac{d}{dl} \left[\frac{1}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}} \frac{z'(l)}{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}} \right] = 0$$

Utilizando (4.4) en la anterior ecuación se tiene que:

$$\Rightarrow \frac{g \sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}}{\left(\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]} \right)^3} - \frac{d}{dl} \left[\frac{C_1}{x'(l)} z'(l) \right] = 0$$

$$\frac{g\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}}{\left(\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2} - 2g[z(l) - z(l_0)]\right)^3} - C_1 \frac{z''(l)x'(l) - x''(l)z'(l)}{(x'(l))^2} = 0 \quad (4.7)$$

Ahora bien, de (4.2) se tiene que:

$$\frac{1}{\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2} - 2g[z(l) - z(l_0)]} \frac{x'(l)}{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}} = C_1$$

Multiplicando en ambos lados de la ecuación por $\frac{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]}$ se obtiene

que:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2} - 2g[z(l) - z(l_0)]\right)^3} \frac{\left((x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2\right)x'(l)}{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}} = \frac{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]} C_1$$

$$\frac{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}}{\left(\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2} - 2g[z(l) - z(l_0)]\right)^3} x'(l) = \frac{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]} C_1$$

$$\frac{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}}{\left(\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2} - 2g[z(l) - z(l_0)]\right)^3} = \frac{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]} \frac{C_1}{x'(l)}$$

Multiplicando ambos lados por la gravedad g :

$$\frac{g\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}}{\left(\sqrt{\|\vec{v}(l_0)\|^2} - 2g[z(l) - z(l_0)]\right)^3} = g \frac{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]} \frac{C_1}{x'(l)}$$

Reemplazando esta última ecuación en (4.7) se tiene que:

$$g \frac{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]} \frac{C_1}{x'(l)} - C_1 \frac{z''(l)x'(l) - x''(l)z'(l)}{(x'(l))^2} = 0$$

$$g \frac{(x'(l))^2 + (y'(l))^2 + (z'(l))^2}{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]} - \frac{z''(l)x'(l) - x''(l)z'(l)}{x'(l)} = 0$$

Reemplazando (4.5) en la anterior ecuación se puede llegar a:

$$g \frac{(x'(l))^2 + \left(\frac{C_2}{C_1} x'(l)\right)^2 + (z'(l))^2}{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]} - \frac{z''(l)x'(l) - x''(l)z'(l)}{x'(l)} = 0$$

$$g \frac{(x'(l))^2 \left[1 + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2\right] + (z'(l))^2}{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]} - \frac{z''(l)x'(l) - x''(l)z'(l)}{x'(l)} = 0$$

$$g \frac{(x'(l))^2 \left[1 + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2\right] + (z'(l))^2}{\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)]} = z''(l) - \frac{x''(l)}{x'(l)} z'(l)$$

$$g(x'(l))^2 \left[1 + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2\right] + g(z'(l))^2 = z''(l) \left[\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)] \right]$$

$$- \frac{x''(l)}{x'(l)} z'(l) \left[\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)] \right]$$

$$g(x'(l))^2 \left[1 + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2\right] + \frac{x''(l)}{x'(l)} z'(l) \left[\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)] \right] =$$

$$z''(l) \left[\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g[z(l) - z(l_0)] \right] - g(z'(l))^2 \quad (4.8)$$

Las ecuaciones de Euler Lagrange $\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{d}{dl} \left[\frac{\partial M}{\partial x'} \right] = 0, \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{d}{dl} \left[\frac{\partial M}{\partial y'} \right] = 0 \right)$ y

$\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{d}{dl} \left[\frac{\partial M}{\partial z'} \right] = 0\right)$ generaron 3 ecuaciones diferenciales expresadas en las ecuaciones

(4.2), (4.3) y (4.8); es decir se tiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales con tres variables dependientes (x, y y z) y una variable independiente la cual es el parámetro l , la solución a este sistema de ecuaciones diferenciales viene a ser $\vec{\alpha} = (x(l), y(l), z(l))$, donde $\vec{\alpha}$ es la curva más rápida para el desplazamiento de un cuerpo entre dos puntos por acción gravitatoria.

Para obtener una solución rápida lo conveniente es utilizar como parámetro al eje x (dado que no existe ninguna restricción para no poder utilizarlo como parámetro), es decir $x(l) = x = l$ y $x'(l) = 1, x''(l) = 0$, entonces se cumple dada la condición anterior y las ecuaciones (4.6) , (4.8) que:

$$x(l) = l \quad (4.9)$$

$$y(l) = \frac{C_2}{C_1}l + C_3 \quad (4.10)$$

$$g \left[1 + \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \right] = z''(l) \left[\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2g(z(l) - z(l_0)) \right] - g(z'(l))^2 \quad (4.11)$$

De esta manera las ecuaciones (4.9) , (4.10) y la $z(l)$ obtenida de (4.11) son la solución al problema, donde aparecen constantes como $\frac{C_2}{C_1}$, C_3 que pueden ser obtenidas de las condiciones iniciales de (4.9) y (4.10) , también se observa que aparecen constantes en (4.11) como $\|\vec{v}(l_0)\|$ y $z(l_0)$, estos valores dependen del problema y de su configuración inicial; otro resultado obtenido es, que de acuerdo a las ecuaciones (4.9) y (4.10) en el plano xy se forma una recta con pendiente igual a $\frac{C_2}{C_1}$.

Ahora bien, si a la ecuación (4.11) se le da las condiciones de que el cuerpo parte del reposo, es decir $\|\vec{v}(l_0)\| = 0$, la componente $y(l)$ es constante ($y(l) = C_3$ o lo mismo que

$\frac{C_2}{C_1} = 0$) y por último que el punto inicial donde empieza el movimiento se ubica en el

plano xy es decir $z(l_0) = 0$, entonces se obtiene en (4.11) que :

$$g \left[1 + (0)^2 \right] = z''(l) \left[0^2 - 2g(z(l) - 0) \right] - g(z'(l))^2$$

$$g = -2gz(l)z''(l) - g(z'(l))^2$$

$$2z(l)z''(l) + (z'(l))^2 + 1 = 0 \quad (4.12)$$

Si se nota bien, la ecuación diferencial (4.12) tiene la misma forma que la ecuación (2.25); la solución a esta ecuación diferencial es la curva cicloide del problema de la braquistocrona, por lo tanto, la solución a (4.12) existe, es única y viene dada de forma paramétrica por:

$$l = -a(\theta - \sin \theta) + k_1 \quad , \quad z = -a(1 - \cos \theta)$$

Las anteriores ecuaciones se diferencian de (2.27) en un signo negativo en a , esto sucede ya que el sistema de referencia utilizado en este capítulo tiene al eje vertical “ z ” con un *sentido hacia arriba*, mismo que se visualiza en la Figura 11 que es de donde se obtiene el funcional del tiempo (4.1.3) y se realiza todo el análisis; es así que de las ecuaciones (4.9), (4.10) y la $z(l)$ obtenida de (4.12), se obtiene la curva solución $\vec{\alpha}_1 = (x, y, z)$ con:

$$x = l = -a(\theta - \sin \theta) + k_1$$

$$y = C_3$$

$$z = -a(1 - \cos \theta)$$

En otras palabras, la curva solución bajo las condiciones: $\|\vec{v}(l_0)\| = 0$, $y(l) = C_3$ y

$z(l_0) = 0$ es:

$$\vec{\alpha}_1 = (x, y, z) = (-a(\theta - \sin \theta) + k_1, C_3, -a(1 - \cos \theta))$$

donde a , k_1 y C_3 son constantes que se hallan de las condiciones iniciales; se nota también que $y = C_3$ es una ligadura y que $\vec{\alpha}_1$ esta reparametrizada por θ ; gráficamente esta curva solución $\vec{\alpha}_1$ es:

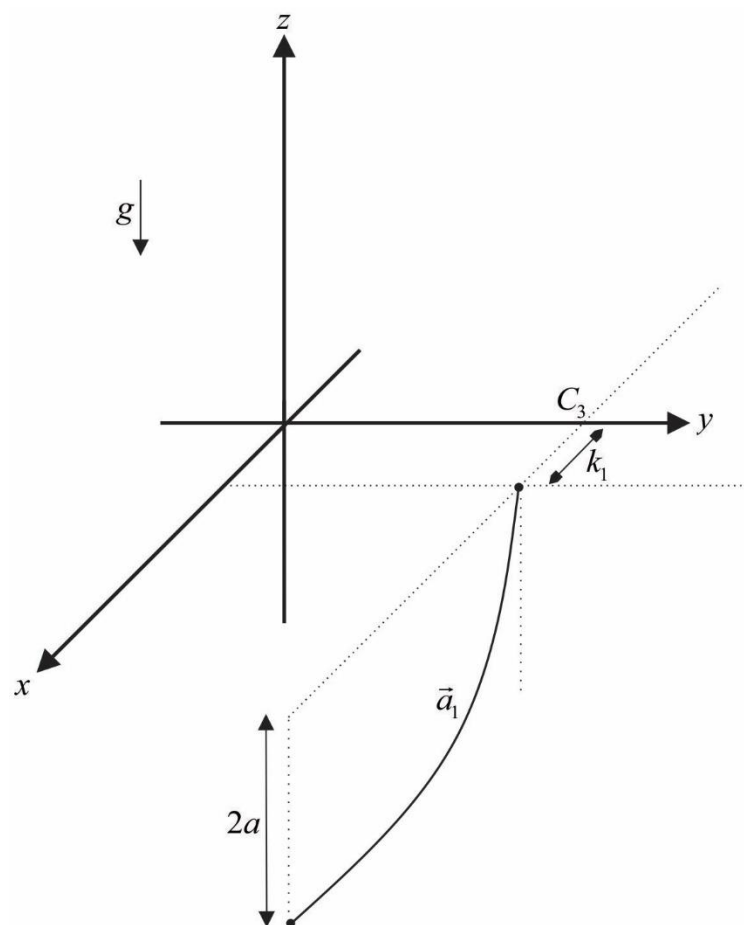


Figura 14: Curva solución $\vec{\alpha}_1$ bajo ciertas condiciones

Esta solución dada por la curva $\vec{\alpha}_1$ resulta ser la curva cicloide del problema de la braquistocrona, con la diferencia que ahora está contenida en el plano $y = C_3$ de un espacio tridimensional.

Pero esto no es todo, se puede generalizar un poco más, si a la ecuación (4.11) dada por:

$$g \left[1 + \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \right] = z''(l) \left[\|\vec{v}(l_0)\|^2 - 2gz(l) + 2gz(l_0) \right] - g(z'(l))^2$$

se le realiza un cambio de variable de la forma $-2g\varphi(l) = \|\vec{v}(l_0)\|^2 + 2gz(l_0) - 2gz(l)$,

entonces se tiene que $\varphi'(l) = z'(l)$ y $\varphi''(l) = z''(l)$, donde $\|\vec{v}(l_0)\|$ y $z(l_0)$ son condiciones

de la configuración inicial del problema; es así que se puede reescribir que:

$$g \left[1 + \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \right] = \varphi''(l) [-2g\varphi(l)] - g(\varphi'(l))^2$$
$$1 + \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 = -2\varphi(l)\varphi''(l) - (\varphi'(l))^2 \quad (4.13)$$

La ecuación (4.13) es casi semejante a la ecuación (2.25) excepto por el factor izquierdo

de la igualdad: $\left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2$, esto se soluciona si solo ahora se propone *una sola condición* la

cual es que la componente “y” de la curva solución sea constante ($y = C_3$), con esta

condición en la ecuación (4.10) se ve claramente que $\frac{C_2}{C_1} = 0$, por lo tanto aplicando esta

condición a la ecuación (4.13) se tiene que:

$$1 + (0)^2 = -2\varphi(l)\varphi''(l) - (\varphi'(l))^2 \Rightarrow 1 = -2\varphi(l)\varphi''(l) - (\varphi'(l))^2$$
$$2\varphi(l)\varphi''(l) + (\varphi'(l))^2 + 1 = 0 \quad (4.14)$$

La ecuación (4.14), que es semejante a (2.25), también tiene solución en forma paramétrica dada por:

$$l = -a(\theta - \text{Sin } \theta) + k_2 \quad , \quad \varphi = -a(1 - \text{Cos } \theta) \quad (4.15)$$

Las anteriores ecuaciones se diferencian de (2.27) en un signo negativo en a por la misma razón explicada en la obtención de la solución de (4.12); del cambio de variable aplicado

$-2g\varphi(l) = \|\vec{v}(l_0)\|^2 + 2gz(l_0) - 2gz(l)$ se puede extraer que:

$$\varphi = z - \left(z(l_0) + \frac{\|\vec{v}(l_0)\|^2}{2g} \right)$$

entonces la ecuación (4.15) se puede convertir como:

$$x = l = -a(\theta - \text{Sin } \theta) + k_2 \quad , \quad z = -a(1 - \text{Cos } \theta) + \left(z(l_0) + \frac{\|\vec{v}(l_0)\|^2}{2g} \right) \quad (4.16)$$

Por lo tanto de las ecuaciones (4.9), (4.10) y el $z(l)$ obtenido de resolver la ecuación

diferencial (4.11) con la condición $\frac{C_2}{C_1} = 0$, se obtiene la curva solución $\vec{\alpha}_2 = (x, y, z)$

con:

$$x = -a(\theta - \text{Sin } \theta) + k_2$$

$$y = C_3$$

$$z = -a(1 - \text{Cos } \theta) + \left(z(l_0) + \frac{\|\vec{v}(l_0)\|^2}{2g} \right)$$

Es así que la curva solución bajo la condición $y = C_3 \left(\frac{C_2}{C_1} = 0 \right)$ es:

$$\vec{\alpha}_2 = (x, y, z) = \left(-a(\theta - \text{Sin } \theta) + k_2, C_3, -a(1 - \text{Cos } \theta) + \left(z(l_0) + \frac{\|\vec{v}(l_0)\|^2}{2g} \right) \right)$$

donde a, k_2 y C_3 son constantes que se hallan de las condiciones iniciales y los valores $z(l_0), \|\vec{v}(l_0)\|$ son las condiciones dadas del problema; si se nota, en la anterior ecuación, la curva $\vec{\alpha}_2$ esta reparametrizada por un parámetro θ , y el eje "y" al ser constante se comporta como una ligadura holónoma; gráficamente la trayectoria solución $\vec{\alpha}_2$ es:

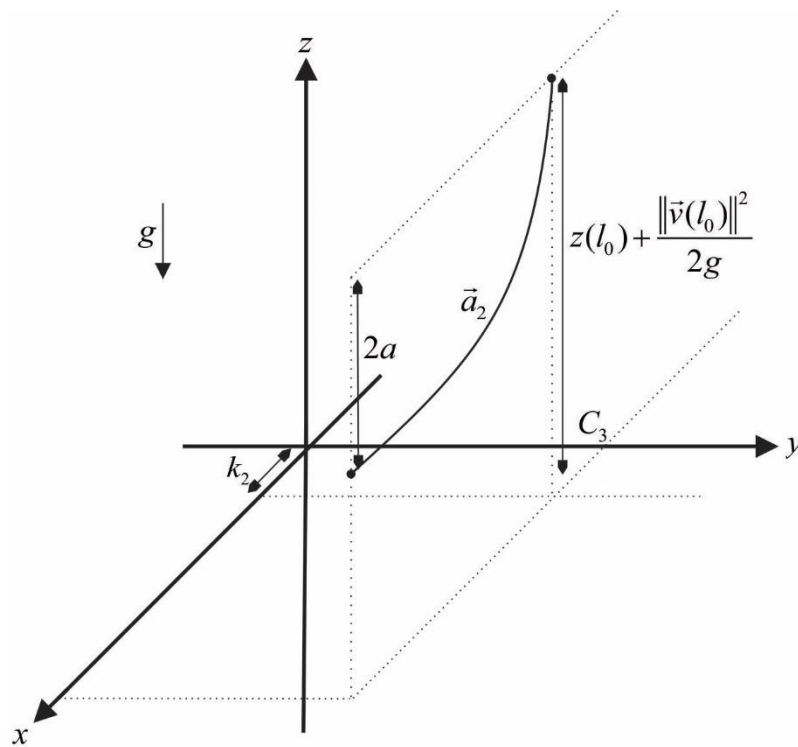


Figura 15: Curva solución $\vec{\alpha}_2$ bajo ciertas condiciones

La solución $\vec{\alpha}_2$ resulta ser también una curva cicloide del problema de la braquistocrona, trasladada y contenida en el plano $y = C_3$.

Por último, es factible hacer una generalización total de la solución, de lo expuesto se sabe que al aplicar el cambio de variable de la forma $-2g\varphi(l) = \|\vec{v}(l_0)\|^2 + 2gz(l_0) - 2gz(l)$ a la ecuación (4.11) se puede obtener (4.13) de lo cual resulta que:

$$w^2 = 1 + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 = -2\varphi(l)\varphi''(l) - (\varphi'(l))^2$$

Tal que se define a w como: $w = \sqrt{1 + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2}$ una constante, de esta manera se puede

obtener que:

$$1 = \frac{-2\varphi(l)\varphi''(l)}{w^2} - \frac{(\varphi'(l))^2}{w^2} \Rightarrow 1 = -2\left(\frac{\varphi(l)}{w}\right)\left(\frac{\varphi''(l)}{w}\right) - \left(\frac{\varphi'(l)}{w}\right)^2$$

Aplicando el cambio de variable $\Lambda(l) = \frac{\varphi(l)}{w}$, también se tiene que $\Lambda'(l) = \frac{\varphi'(l)}{w}$ y

$\Lambda''(l) = \frac{\varphi''(l)}{w}$, por lo tanto la anterior ecuación queda como:

$$2\Lambda(l)\Lambda''(l) + (\Lambda'(l))^2 + 1 = 0 \quad (4.17)$$

Esta ecuación (4.17) al ser semejante a la ecuación (2.25), tiene como solución paramétrica a:

$$l = -a(\theta - \sin \theta) + k_3, \quad \Lambda = -a(1 - \cos \theta) \quad (4.18)$$

Las anteriores ecuaciones, a diferencia de (2.27), tienen un signo negativo en a ya que el eje vertical “ z ” posee un sentido hacia arriba; de los cambios de variable $\Lambda(l) = \frac{\varphi(l)}{w}$ y

$-2g\varphi(l) = \|\vec{v}(l_0)\|^2 + 2gz(l_0) - 2gz(l)$ se puede deducir que:

$$\Lambda = \frac{\varphi}{w} = \frac{z - \left(z(l_0) + \frac{\|\vec{v}(l_0)\|^2}{2g}\right)}{w}$$

entonces (4.18) se puede transformar como las siguientes ecuaciones:

$$x = l = -a(\theta - \sin \theta) + k_3, \quad z = -aw(1 - \cos \theta) + \left(z(l_0) + \frac{\|\vec{v}(l_0)\|^2}{2g}\right) \quad (4.19)$$

De las ecuaciones (4.9), (4.10) y la z de la ecuación (4.19), hallada de resolver en forma general (4.11), se obtiene la curva solución general $\vec{\alpha}_3 = (x, y, z)$ con:

$$x = l = -a(\theta - \text{Sin } \theta) + k_3$$

$$y = \frac{C_2}{C_1}l + C_3 = \frac{C_2}{C_1}(-a(\theta - \text{Sin } \theta) + k_3) + C_3$$

$$z = -aw(1 - \text{Cos } \theta) + \left(z(l_0) + \frac{\|\vec{v}(l_0)\|^2}{2g} \right) = -a\sqrt{1 + \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2} (1 - \text{Cos } \theta) + \left(z(l_0) + \frac{\|\vec{v}(l_0)\|^2}{2g} \right)$$

Es así que la curva solución de forma general $\vec{\alpha}_3 = (x, y, z)$ es:

$$\vec{\alpha}_3 = \left(-a(\theta - \text{Sin } \theta) + k_3, \frac{C_2}{C_1}(-a(\theta - \text{Sin } \theta) + k_3) + C_3, -a\sqrt{1 + \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2} (1 - \text{Cos } \theta) + \left[z(l_0) + \frac{\|\vec{v}(l_0)\|^2}{2g} \right] \right) \quad (4.20)$$

Donde a, k_3, C_1, C_2 y C_3 son constantes que se hallan de las condiciones iniciales, y los valores $z(l_0), \|\vec{v}(l_0)\|$ son las condiciones dadas del problema; también mencionar que en la ecuación anterior, la curva $\vec{\alpha}_3$ esta reparametrizada por un parámetro θ ; gráficamente esta trayectoria $\vec{\alpha}_3$, que es la solución general, es:

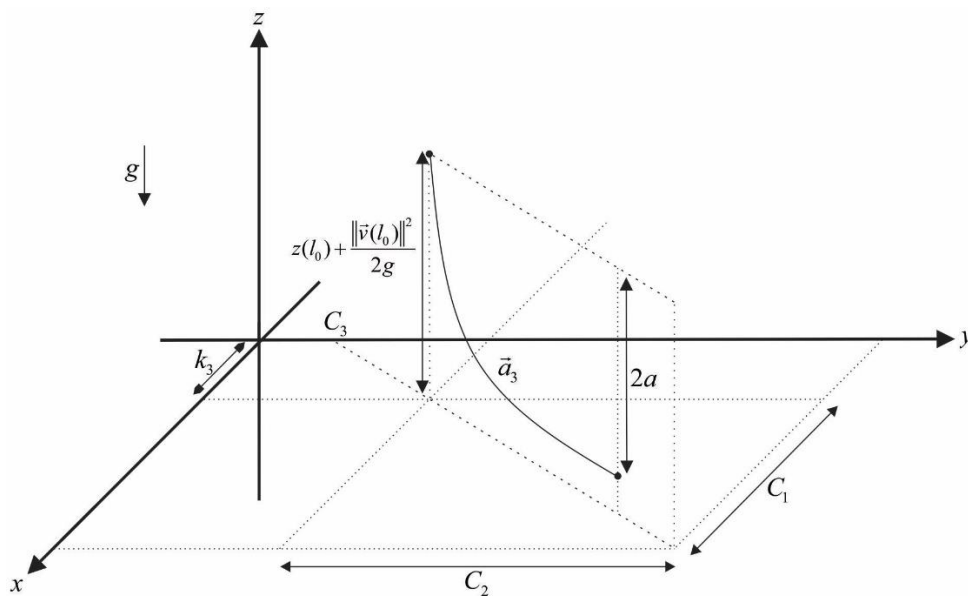


Figura 16: Curva solución general $\vec{\alpha}_3$



Por lo que se puede concluir que: *para el sistema de 3 ecuaciones diferenciales, dadas por (4.2), (4.3) y (4.8) existe y es única la solución, tal que esta solución resulta ser la curva descrita por la ecuación (4.20), que es una curva cicloide igual a la del problema de la braquistocrona, como se ve se llegó al mismo resultado que obtuvo Newton y Bernoulli en 1697, excepto por una diferencia; en esta investigación se consideró la velocidad inicial $\vec{v}(l_0)$, elemento que no estuvo considerado en las soluciones de Newton y Bernoulli, ya que Bernoulli planteó el problema cuando un cuerpo caía del reposo; pero como se observa esto se soluciona en la ecuación (4.20), ya que esta solución general sí contiene y toma en cuenta a la velocidad inicial $\vec{v}(l_0)$; la traza de (4.20) también es una cicloide, con la diferencia que se encuentra en un espacio tridimensional y ya no en un espacio bidimensional mismo en el cual Newton y Bernoulli dieron su solución.*

Comentario: en el análisis realizado se consideró que la gravedad g debe ser siempre paralela al eje "z", este hecho es fundamental ya que da consistencia a todo el trabajo realizado.



V. CONCLUSIONES

Las conclusiones de este trabajo de investigación son interesantes y novedosas ya que generalizan un problema histórico en la Física, estas son las siguientes:

- De la conservación de energía y dinámica se halló un funcional que permite calcular el tiempo de recorrido de un cuerpo por una curva cualesquiera en el espacio cuando el cuerpo se mueve por efectos gravitatorios.
- Gracias al principio de Hamilton aplicado al funcional se obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales, tal que su solución es la curva más óptima en cuanto se refiere a rapidez de un cuerpo que se traslada por tal trayectoria bajo influencia gravitatoria.
- Existe y es única la solución del sistema de ecuaciones diferenciales que describen la curva más óptima, de manera que esta solución, descrita por (4.20), es una trayectoria que tiene como traza a la curva cicloide.
- El sistema de ecuaciones diferenciales que contiene la solución de la curva más óptima resulta ser una generalización del problema de la braquistocrona a tres dimensiones y a velocidades iniciales distintas al reposo, ya que se considera que el cuerpo no necesariamente inicia su movimiento a velocidad nula, y donde la solución es una curva contenida en el espacio.
- La curva solución en este trabajo resulta ser la cicloide del problema de la braquistocrona, si se hubiera obtenido otra curva pues la unicidad de la solución no sería consistente, por ende, esta teoría es consistente con los trabajos realizados anteriormente por otros investigadores.



VI. RECOMENDACIONES

- En el presente trabajo el funcional que calcula el tiempo de recorrido utiliza curvas diferenciables o suaves como las trayectorias, ¿Qué sucederá si las curvas no son diferenciables y/o continuas?
- El futuro de esta investigación radica en generalizar este modelo físico a potenciales distintos al gravitatorio, como recomendación el potencial eléctrico.
- La investigación usa como condición que las ligaduras (trayectorias) sean holónomas, ¿qué sucederá en un sistema no holonomo, es decir donde las ligaduras están moviéndose?



VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Abramson, G. (2019). *Mecánica Clásica: Notas de clase*. <https://goo.gl/ZLnCxS>
- [2] Arruti, A. M. (2008). Conservación de la energía y simetría. *Revista Física y Sociedad*, 19, 6.
- [3] ASALE, R.-, & RAE. (s. f.). *Modo de cita | Diccionario de la lengua española*. «Diccionario de la lengua española» - Edición del Tricentenario. Recuperado 17 de abril de 2023, de <https://dle.rae.es/contenido/cita>
- [4] Bustillos, O., Sassine, A., & Brasil, S. (2009). *A MAGIA DA CURVA CICLÓIDE - BRAQUISTÓCRONA E TAUTÓCRONA*.
- [5] Ccolque Taípe, F. C. (2013). *Geometría Diferencial I con Problemas Resueltos* (1.^a ed.). Talleres de la Unidad de Publicaciones UNA PUNO.
- [6] Córtes, G. A. (2015). *La braquistocrona: Un experimento discrepante útil para la enseñanza del principio de conservación de la energía mecánica*- [Universidad Pedagógica Nacional]. <http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/2103/TE-18584.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [7] De Andrade, M. A., & Ferreira Filho, L. G. (2015). Uma abordagem geométrica ao problema da braquistócrona. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 37(2), 2309-1-2309-6. <https://doi.org/10.1590/S1806-11173721786>
- [8] De Teresa, L. (2007). Euler y el cálculo de variaciones. *Miscelanea Matemática*, 25-31.
- [9] Deza V., N. (2015). *Geometría Analítica* (1.^a ed.). Editora Kano S.R.L.
- [10] Espinoza Ramos, E. (2012). *Análisis Matemático Para Estudiantes de Ciencias e Ingenierías* (6.^a ed., Vol. 1). Edukperú.
- [11] Goldstein, H. (1987). *Mecánica clásica*. Reverte. <https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=vf2JiybeDc4C&oi=fnd&pg=PR5&dq=Mec%C3%A1nica+cl%C3%A1sica&ots=njjQWVN7PN&sig=laiiPgHNMjAzQ-MKNNfMNTKCCf0#v=onepage&q=Mec%C3%A1nica%20cl%C3%A1sica&f=false>



- [12] Huygens, C. (1673). *Horologium Oscillatorium*.
- [13] Kiseliov, A., Krasnov, M., & Makarenko, G. (1984). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Editorial Mir.
<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=be378f190c2caf3846ef1428dc20244b>
- [14] Newton, I. (1999). *Principia mathematica philosophiae naturalis. The Principia (Mathematical Principles of Natural Philosophy): A New Translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman assisted by Julia Budenz*.
- [15] Páez Sánchez, J. (2014). *Principios variacionales de orden superior y con funciones de varias variables*. <https://upcommons.upc.edu/handle/2099.1/22813>
- [16] Pérez Rojas, H., & Castro Díaz Balart, F. (2000). El principio de Acción Mínima en el centenario del Quantum. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 23(46), 37-68.
- [17] Pita Ruiz, C. (1995). *Cálculo vectorial*. Mcgrawhill. México.
- [18] Sánchez de Santos, J. M. (2012). *O principio de Hamilton*. Servizo de Publicacións da Universidade de Santiago de Compostela.
- [19] Spiegel, M. R., Lipschutz, S., & Spellman, D. (2011). *Análisis vectorial*.
- [20] Terencio Soldovieri, C. (2010). *Introducción a la mecánica de Lagrange Hamilton*. Venezuela.
- [21] Valladares, C. (2020). *El problema de la curva braquistócrona. Contexto histórico, la solución de Johann Bernoulli y una deducción analítica de la ecuación*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.13244.56966>
- [22] Venero Baldeon, J. A. (2016). *Análisis Matemático* (2.^a ed.). Gemar.



ANEXOS



Universidad Nacional
del Altiplano Puno



Vicerrectorado
de Investigación



Repositorio
Institucional

DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo Fabian Doris Pilco Olagueuel
identificado con DNI 70984469 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional, Programa de Segunda Especialidad, Programa de Maestría o Doctorado

Ciencias Fisico Matemáticas
, informo que he elaborado el/la Tesis o Trabajo de Investigación para la obtención de Grado
 Título Profesional denominado:

Aplicación del principio de conservación de energía y principio de Hamilton para la demostración
de la existencia de una trayectoria más rápida en el desplazamiento de un cuerpo en movimiento
" Es un tema original.

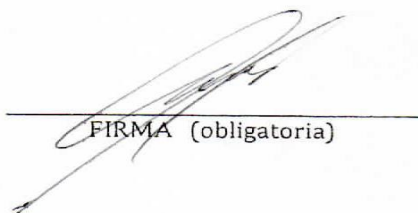
Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y no existe plagio/copia de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como tuyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno 31 de mayo del 2023


FIRMA (obligatoria)



Huella



AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo Fabian Dario Pico Olave
identificado con DNI 70984469 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional, Programa de Segunda Especialidad, Programa de Maestría o Doctorado

Ciencias Físico Matemáticas
informo que he elaborado el/la Tesis o Trabajo de Investigación para la obtención de Grado

Título Profesional denominado:

Aplicación del principio de conservación de energía y principio de Hamilton para la demostración de la existencia de una trayectoria más rápida en el desplazamiento de un cuerpo inercialmente

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los "Contenidos") que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia:

Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno 31 de marzo del 2023


FIRMA (obligatoria)



Huella