UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

TESIS

LA GENERALIZACIÓN DE LA SUMA DE CUADRADOS A TRAVÉS DE RECURSOS DIDÁCTICOS EN LOS ESTUDIANTES DEL TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

PRESENTADA POR:

HUMBERTO SALAZAR MAMANI

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAGÍSTER SCIENTIAE EN EDUCACIÓN

CON MENCIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

PUNO, PERÚ

2022

Reporte de similitud

NOMBRE DEL TRABAJO

LA GENERALIZACIÓN DE LA SUMA DE CUADRADOS A TRAVÉS DE RECURSOS DIDÁCTICOS EN LOS ESTUDIANTES DEL TE

AUTOR

HUMBERTO SALAZAR MAMANI SALAZAR MAMANI

RECUENTO DE PALABRAS

29514 Words

RECUENTO DE CARACTERES

146980 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

123 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

2.6MB

FECHA DE ENTREGA

Dec 22, 2023 6:24 AM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Dec 22, 2023 6:26 AM GMT-5

14% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base c

- 13% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 8% Base de datos de trabajos entregados
- 4% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossr

Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Bloques de texto excluidos manualmente
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 8 palabras)

Dr. Wenceslao Quispe Yapo
DOCENTE FCEDUC-UNA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO ESCUELA DE POSGRADO COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN PUNO-PERÚ

Rubén Jared Luque Coyla
ING. ESTADÍSTICO E INFORMÁTICO
CIP. 116625

Resumen

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

TESIS

LA GENERALIZACIÓN DE LA SUMA DE CUADRADOS A TRAVÉS DE RECURSOS DIDÁCTICOS EN LOS ESTUDIANTES DEL TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

PRESENTADA POR:

HUMBERTO SALAZAR MAMANI

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAGÍSTER SCIENTIAE EN EDUCACIÓN

CON MENCIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

APROBADA POR EL JURADO SIGUIENTE:

PRESIDENTE	.... Dr. FELIPE GUTIÉRREZ OSCO
PRIMER MIEMBRO	.... Dr. GODOFREDO HUAMÁN MONROY
SEGUNDO MIEMBRO	.... Dr. CARLOS JAVIER QUIZA MAMANI
ASESOR DE TESIS	.... Dr. WENCESLAO QUISPE YAPO

Puno, 26 de abril de 2022

ÁREA: Estrategias metodológicas de la educación matemática.

TEMA: La generalización de la suma de cuadrados a través de recursos didácticos en los estudiantes de tercer grado de educación secundaria.

LÍNEA: Comprobación de la eficiencia y eficacia de estrategias metodológicas en la educación matemática

DEDICATORIA

El presente trabajo investigativo lo dedico principalmente a Nuestro Creador, por ser el inspirador y dador de fuerza para continuar en este proceso de desarrollo profesional.

Dedico esta tesis a mis padres, Anastacio y Paula que hicieron posible la realización exitosa de este trabajo, y en especial a Roxana, mi esposa; que inspira mi vida con su constante apoyo y amor y mis amados hijos Yoshua David, André David y Anel Ruth por ser ellos la fuerza motriz de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los docentes de la Maestría en Educación de la Universidad Nacional del Altiplano, por sus enseñanzas y orientación en la realización de la investigación.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

ÍNDICE DE TABLAS

Pág.

ÍNDICE DE FIGURAS

Pág.

ÍNDICE DE ANEXOS

Pág.

RESUMEN

La práctica de la generalización es un proceso poderoso en el aprendizaje matemático desde inicial hasta la universidad. Es crucial que los maestros del nivel secundario, tengan una comprensión profunda del proceso de generalización. La teoría de la actividad proporciona principios básicos que permiten definir la generalización como una actividad que se desarrolla a través de herramientas y mediación de materiales, internalización del conocimiento social y su transformación a través del aprendizaje y el desarrollo. El problema de investigación es ¿Las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos, de la sucesión de los cuadrados de los n primeros términos son más efectivos para desarrollar la capacidad de generalización en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria, en comparación con la enseñanza convencional? La metodología de investigación fue cuantitativa, de alcance explicativo y de diseño cuasi experimental de cuatro grupos de Solomon, con una muestra de 128 estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria “Perú BIRF”. Para la recolección de datos se utilizó la técnica de evaluación y como instrumento la prueba para valorar la capacidad de generalización de los estudiantes tanto para el pre y pos test. Los resultados evidencian que el uso de las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos permite lograr un mayor desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de los n primeros términos. Por lo tanto, se concluye que usar diferentes representaciones en los procesos de enseñanza permitieron desarrollar la capacidad de generalización algebraica.

Palabras clave: Desarrollo de la capacidad, didáctica del álgebra, educación, generalización, suma de cuadrados.

ABSTRACT

The practice of generalization is a powerful process in mathematical learning from early childhood education through college. It is crucial that high school teachers, have a deep understanding of the generalization process, know its origins, and levels it can reach. Activity theory provides basic principles that allow defining generalization as an activity that develops socially and historically through tools and mediation of materials, internalization of social knowledge and its transformation through learning and development. The research problem is: Are the graphic and symbolic representations, as didactic resources, of the succession of the squares of the first n terms, are they more effective in developing the generalization capacity in students of the third grade of secondary education, compared to the conventional education? The research methodology was quantitative, explanatory scope and quasi-experimental design with four Solomon groups, with a sample of 128 students of the third grade of secondary education of the Secondary Educational Institution "Peru BIRF". The evaluation technique was used and the test as an instrument was used to assess the generalization capacity of the students for both the pre and post test. The results show that the use of graphic and symbolic representations as didactic resources allows to achieve a greater development of the generalization capacity of the succession of the squares of the first n terms. Therefore, it is concluded that using different representations in the teaching processes allowed to develop the ability of algebraic generalization.

Keywords: Algebra didactics, education, generalization and sum of squares, skill development.

Dra. Brenda Karen Salas Mendizábal
DOCENTE

INTRODUCCIÓN

El informe de investigación titulado "La generalización de la suma de cuadrados a través de recursos didácticos en el alumnado del grado tercero de educación secundaria" reporta los resultados empírico y teóricos que fundamentan la consecución del objetivo: Determinar que el uso de los recursos didácticos como las representaciones gráficas y simbólicas de la sucesión de los cuadrados de los n primeros términos son más efectivos para desarrollar la capacidad de generalización en comparación con la enseñanza convencional en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" durante el año escolar 2020. El estudio pretende comprender cómo desarrollar la habilidad de generalizar expresiones algebraicas y proponer actividades didácticas que permitan al docente mejorar su praxis pedagógica.

Diversos estudios han enfocado su interés en analizar las dificultades de la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar en general, y en particular los procesos de la generalización. Estos estudios han evidenciado que la generalización es un fenómeno complejo, es así que las investigaciones reportadas por (Socas y Castros, 2015), recomiendan que para desarrollar la capacidad de generalización es necesario el desarrollo del razonamiento algebraico a partir de actividades como la observación, identificación de patrones de formación, verbalización de procesos de razonamiento, caracterización de regularidades, el reconocimiento de relaciones y variaciones entre magnitudes u objetos; de tal manera que estas actividades desarrollen en los estudiantes la argumentación, la justificación, la formulación de conjeturas, entre otras. En este sentido este trabajo pretende comprender cómo se puede apoyar al alumnado en el desarrollo de la capacidad de generalización en la educación secundaria.

El informe está organizado en cuatro capítulos y concusiones. En el primer capítulo se construye un marco teórico sobre la generalización y exposición de antecedentes los mismos que fundamentan la investigación. En el segundo capítulo, se explicó el planteamiento del problema sintetizado en la interrogante ¿Las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos, de la sucesión de los cuadrados de los n primeros términos son más efectivos para desarrollar la capacidad de generalización, en comparación con la enseñanza convencional en el alumnado del grado tercero de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" durante el año escolar 2020? Así mismo, el estudio se justifica por la importancia de comprender el asunto de desarrollo de la capacidad de generalización en los adolescentes y proponer actividades didácticas que permitan al docente conducir sesiones de aprendizaje de álgebra que viabilicen desarrollar la capacidad de generalización.

En el tercer capítulo se estableció la ubicación geográfica del estudio, la muestra y metodología de investigación, se hace una descripción minuciosa de los procedimientos estadísticos de análisis y prueba de hipótesis. En primera instancia, se realizó una descripción del proceder de la prueba de hipótesis, seguidamente, se explica cómo se realizó el análisis de la distribución de datos, que permitió determinar que los calificativos de las pre y pos prueba de generalización de la suma de cuadrados no se distribuyen de forma normal, en un tercer momento, se explica cómo se realizó el análisis comparativo utilizando las pruebas de Wilcoxon y U de Mann Whitney.

En el cuarto capítulo se expone los resultados relevantes del estudio, además de hace una descripción detallada de las pruebas de hipótesis, además la discusión de los resultados empíricos, antecedentes y la teoría que fundamenta la investigación. Como resultado más relevante se encontró que, los registros de representaciones como recursos didácticos son efectivos para desarrollar la capacidad de generalización de la suma de cuadrados.

Como colofón, se presenta las conclusiones, en concordancia con los objetivos de la investigación, así como las recomendaciones o sugerencias que demuestran la utilidad de este estudio.

CAPÍTULO I
REVISIÓN DE LITERATURA

1.1. Marco teórico

Vygotsky (1986) consideró que todos los conceptos aprendidos por los humanos se internalizan a través de un proceso de generalización. Clasificó los conceptos internalizados en:

a) Conceptos espontáneos, estos son creados por la experiencia cotidiana y personal y pueden formarse sin enseñanza escolar.
b) Conceptos científicos, son los que no se puede observar o experimentar directamente, estos deben enseñarse creando condiciones para aprender la formación de un "concepto experimental ideado artificialmente" (Vygotsky, 1986).

Estos dos tipos de conceptos forman un proceso unitario; están continuamente relacionados y contribuyen recíprocamente al desarrollo del otro. El desarrollo general del sujeto y el aprendizaje son dos procesos simultáneos que dependen cualitativamente el uno del otro (Vygotsky, 1986). La dualidad cualitativa entre desarrollo y aprendizaje se basa esencialmente en los tipos de experiencias del aprendiz. La experiencia cotidiana proporciona conocimiento de un contacto físico directo con el entorno cuando usa sus sentidos para analizar, comparar, clasificar y sintetizar. A través de una educación sistemática, se experimenta situaciones "diseñadas artificialmente" en las que, en colaboración con otro compañero o un adulto con mayor conocimiento, analiza, compara, clasifica y sintetiza a un alto nivel psicológico y el sujeto transita por su *zona de desarrollo próximo* (Vygotsky, 1978).

En contraposición a las ideas de Vygotsky, Piaget igualmente identificó, de manera similar a Vygotsky, dos experiencias diferentes que un niño debería experimentar durante un proceso de aprendizaje:

a) Experiencias físicas, teniendo contacto directo con los objetos. En esta experiencia, el conocimiento se extrae de las propiedades físicas del objeto haciendo abstracción de ellos.
b) Experiencias lógico-matemáticas, con base en las experiencias físicas, el sujeto realiza un conjunto de acciones que modifican los objetos, lo que transforma el proceso en una experiencia de aprendizaje.

Las perspectivas de Vygotsky y Piaget, citado por Rubinshtein (1994); sobre el aprendizaje son complementarias entre sí de la siguiente manera: todos los días los conceptos se aprenden predominantemente a través de experiencias físicas, donde los conceptos científicos se aprenden preferentemente a través de experiencias lógico-matemáticas, además este aprendizaje es esencialmente social, se aprende interactuando con otros sujetos. La teoría del pensamiento de Rubinshtein y el trabajo de Krutetskii sobre el aprendizaje apoyan la teoría combinada de Vygotsky y Piaget citado por Rubinshtein (1994) y dividió los pensamientos humanos en dos:

a) *Pensamientos empíricos/visuales* es el resultado de comparar e identificar las características externas que son similares o idénticas en las cosas.
b) *Pensamientos teóricos/abstractos* es el resultado del análisis y la abstracción que surgen mientras los datos recibidos por los sentidos se transforman para determinar la esencia de las cosas.

Por otro lado, Krutetskii (1976) descubrió dos formas en que los escolares aprenden conceptos matemáticos a través de la generalización, son los siguientes:

a) El primer método, denominado generalización empírica, consiste en una generalización gradual a través del análisis de una serie de ejemplos particulares en los que los atributos no esenciales se modifican sistemáticamente.
b) El segundo método, denominado generalización teórica, es la capacidad de generalizar una solución solo a partir de un solo ejemplo al identificar las conexiones y/o relaciones internas involucradas en la tarea. Es mejor generalizar soluciones y métodos para abordar un problema en lugar de generalizar aspectos particulares o externos de un problema.

a) Una definición para la generalización en matemáticas

El concepto de generalización se entiende más comúnmente como una dualidad entre ir de lo particular a lo general y ver lo particular a través de lo general. Con el fin de proporcionar una comprensión del pensamiento involucrado en un proceso de generalización matemática, se entiende la generalización como un proceso de generalización desde la perspectiva de las teorías desarrolladas por los psicólogos educativos A. N. Leontief, V. A. Krutetskii, y S. L. Rubinshtein y Ed Dubinsky educador matemático.

b) La actividad humana en la interpretación de Leontief

Reflexiones sobre la categoría de actividad objetivada sostiene que "La actividad es una unidad molecular, no un componente de la vida física y corporal del sujeto… es la unidad de vida mediada por el reflejo psicológico, dicha finalidad primordial es ayudar al sujeto a encontrar su camino en el mundo objetivo." Definió la actividad humana como un proceso en el cual se realizan transferencias mutuas entre el sujeto y el objeto. Además, Leontief enfatizó que "la actividad no es una reacción ni un grupo de reacciones, sino un sistema que tiene formato, sus transiciones y trasformaciones internas, su desarrollo". La actividad es un fenómeno esencialmente social, como lo enfatiza Leontief, no se la consigue contemplar como extraída de asociaciones sociales, de la vida y la sociedad. Para que una actividad ocurra, tiene que existir una necesidad o motivo. Cuando la necesidad se manifiesta, se convierte en un motivo para la actividad que permite satisfacer dicha necesidad. Desde esta perspectiva, no existe la actividad sin una causa, la "actividad sin motivo" no es una actividad exenta de motivo, sino una actividad con un motivo subjetivo y de manera objetiva y escondido (Leontief, 1978).

La teoría de la actividad de Leontief se desarrolla y expande sus interpretaciones e implicaciones en tres direcciones. Según Engestrom (2001) hay tres generaciones de investigación que contribuyen a la evolución de la teoría de la actividad. Primera generación centrada en el trabajo de Vygotsky sobre la tríada del desarrollo humano Sujeto-Objeto-Mediación. La segunda generación se forma mediante la diferenciación de Leontief entre la acción individual y la actividad colectiva. La tercera generación introduce la interconectividad e interacción de al menos dos sistemas de actividad.

c) Generalización matemática como sistema de actividad

En matemáticas, la necesidad de resolver una situación matemática se convierte en el motivo para identificar una actividad mental o un proceso mental que tiene como objetivo descubrir una solución aceptada por la comunidad matemática. Como actividad mental, se genera y determina mediante acciones mentales como el análisis, la reseña, abstracción y la generalización identificados por (Rubinstein, 1994) como componentes críticos en un proceso de pensamiento. Cada una de estas acciones tiene el propósito de facilitar al proceso de resolución de la situación matemática. Todas estas acciones, para ser realizadas, requieren una serie de operaciones que necesitan ser manipuladas en las condiciones específicas impuestas por el problema que debe ser resuelto.

d) Los objetivos de la actividad de generalización

Se resalta una vez más que la generalización se considera un proceso y no un resultado (Rubinstein, 1994 y Krutetskii, 1976). Rubinstein (1994) propuso estudiar el pensamiento como un proceso (un proceso de generalización) que deriva de actividades mentales como el análisis y la síntesis en lugar de estudiar la asimilación del conocimiento, que es el resultado de un proceso de pensamiento. Según Krutetskii (1976) las habilidades son los "rasgos individuales de la actividad mental de los que depende la relativa rapidez del dominio de las habilidades y hábitos y sus distinciones cualitativas" (p. 14), y en la línea del enfoque de Rubinstein, investigó qué habilidades se necesitan para aprender matemáticas. Además, Krutetskii notó que: "la aptitud para aprender matemáticas se manifiesta por la habilidad de un alumno para generalizar material matemático". La generalización es un proceso mental que apoya el aprendizaje matemático. Krutetskii (1976) diferenciaba entre dos niveles de la capacidad de generalizar materiales matemáticos:

- **Primer nivel:** la capacidad de un niño para identificar algo general que ya conoce en casos particulares y aplicar lo general a lo particular.

- **Segundo nivel:** la capacidad de un niño para encontrar algo general que no conoce a partir de casos aislados y particulares, por ejemplo, para encontrar el término 100 o *n* para la secuencia de números que tienen un patrón de regularidad. Su objetivo es descubrir un concepto general a partir de casos particulares.

e) Las acciones de análisis, síntesis y abstracción.

Rubinshtein (1994) consideró que las acciones mentales como el análisis y la síntesis en y la abstracción deben llevarse a cabo para realizar una actividad de generalización. Davydov (1990) describe estas acciones de la siguiente manera:

- **El análisis** es el método o técnica lógica mediante el cual los objetos se representan mediante atributos comunes observados. Esta acción tiene el propósito de identificar las características que algunos objetos tienen en común. Se realiza a través de operaciones que conducen a conocer cada objeto. Las operaciones utilizadas delinean cómo un objeto es similar o idéntico a otros objetos. Estas propiedades comunes se denominan atributos del objeto (Davydov 1990).
- **Síntesis** es el método o técnica lógica que utiliza los atributos observados a través del análisis para crear un nuevo sistema (p. 44).
- **La abstracción** es la delimitación mental de ciertas propiedades de los objetos y su segregación de todas las demás propiedades (p. 38).

Krathwohl (2002) ofrece descripciones similares para el análisis, la síntesis en Una revisión de la Taxonomía de Bloom: una descripción general. Dubinsky (1991) discute el proceso de abstracción en su obra *La abstracción reflexiva en el pensamiento matemático avanzado*. Para una presentación más detallada de la actividad de generalización, describiré los significados que el análisis y la síntesis tienen en la taxonomía de Bloom revisada y cómo Dubinsky interpretó los tres tipos de abstracción de Piaget en el estudio del pensamiento matemático.

El proceso de análisis implica fraccionar el "material en sus partes constituyentes y detectar cómo las partes se relacionan entre sí y con una estructura o propósito general" (Krathwohl, 2002). Sus subcategorías son la diferenciación, organización y atribución. La síntesis es el proceso que reúne "elementos para formar un todo nuevo, coherente o hacer un producto original" (Krathwohl, 2002). Tiene las subcategorías de generación, planificación y producción. La siguiente acción incluida en los esquemas para la actividad de generalización es la abstracción. Para la descripción de este proceso, se utiliza la revisión de Dubinsky del trabajo de Piaget, sobre el proceso de abstracción en matemáticas, disperso en muchos artículos y libros escritos por Piaget en sus últimos 15 años de vida.

Piaget consideró tres etapas del proceso de abstracción, Dubinsky (1991):

a) Abstracción empírica, consiste en derivar declaraciones de las propiedades externas de los datos dados. Como explicó Dubinsky, significa extender las propiedades de ser particulares a "algunos" datos (los dados) a "todos" los datos posibles.
b) Abstracción pseudo-empírica, es intermediario entre la abstracción empírica y la abstracción reflexiva. La pseudo-abstracción consiste en derivar nuevas propiedades mediante la transformación de los datos iniciales.
c) Abstracción reflexiva, en este proceso, para delinear las propiedades generales, el foco está en un solo caso y las acciones se coordinaron mediante el uso de funciones mentales elevadas que están involucradas en operaciones lógico-matemáticas (por ejemplo, usando leyes, propiedades, conceptos matemáticos conocidos).

Las tres etapas del proceso de abstracción están interrelacionadas. Las abstracciones pseudo-empíricas y reflexivas están utilizando los resultados de la abstracción empírica. Antes de realizar una abstracción reflexiva, los procesos de abstracciones empíricas y pseudo-empíricas pueden llevarse a cabo más de una vez. Además, si consideramos todas las acciones involucradas en el proceso de generalización (análisis, síntesis y abstracción), no hay un orden estricto en el que se realicen. Sin embargo, se puede dirigir a través de una actividad de generalización utilizando como referencia las tres rutas a través de la generalización descritas por Rubinshtein.

f) Las tres rutas de Rubinshtein a través de la generalización

Davydov (1990) identifica en Rubinshtein tres rutas hacia la generalización, que describen las acciones tomadas para completar la actividad de generalización:

a) **Primera ruta, "generalización empírica".** El objetivo es encontrar una declaración general que se logra a través de acciones que tienen el propósito de determinar qué tienen en común algunos objetos. Esta acción se realiza a través de operaciones que conducen a identificar cada objeto. Estas operaciones suelen ser comparaciones que describen cómo un objeto es similar o idéntico a otros objetos. (Rubinshtein,1957) la describió de la siguiente manera:

La primera ruta es una generalización empírica elemental, que se logra como resultado de la comparación al señalar las propiedades generales (similares) en las que coinciden los fenómenos que se comparan. Ésta es la generalización de Locke ... Esta forma puede usarse de una manera práctica, y de hecho se usa, en las etapas iniciales de la cognición, hasta que se eleva al nivel de conocimiento teórico ... Este tipo de generalización es simplemente una selección de una serie de propiedades que se dan de forma empírica, directa y sincera; por tanto, no es capaz de conducir al descubrimiento de nada más allá de lo que los sentidos dan directamente ... Lo general, al que se llega así, permanece dentro de los confines de los enunciados empíricos (p.150).

Para la generalización empírica, la operación mental primaria es la comparación, que es el método o técnica lógica por la cual se determinan los atributos comunes de objetos particulares (Davydov, 1990, p. 38). Las operaciones aplicadas durante la acción de comparación utilizan solo lo que se da inmediatamente y la información recibida a través de los sentidos. No se realiza ninguna transformación en los datos de la fila.

b) **La segunda ruta se llama generalización científica o teórica.** Se enfoca a la actividad mental en el análisis y la abstracción. El propósito del análisis es distinguir lo que es esencial de lo que no es esencial. Lo esencial de un objeto es una característica que permanece sin cambios en el objeto cuando se transforma durante sus interacciones con otros objetos. Cuando se delinea lo esencial, se abstrae de inmediato. Entonces el resumen puede sintetizarse en una conclusión concreta, mediante una restauración mental e interpretación de los fenómenos observados. Esta generalización se describe como:

"No es simplemente una selección sino también una transformación ... La transformación de lo que se da inmediatamente, que conduce a un concepto abstracto de un fenómeno, consiste en romper el contacto ... de las circunstancias concomitantes, que complican o enmascaran la esencia de los fenómenos". (Davydov, 1990, p. 193)

c) Rubinshtein mencionó una tercera ruta a través de la generalización que se puede tomar. Esta ruta requiere una derivación teórica que se “realiza mediante un movimiento bidireccional de lo general a lo particular o viceversa: la generalización y la cognición teórica están interrelacionadas” (Davydov, 1990, p. 194).

g) Tres categorías de actividades de generalización matemática

De forma similar a la descripción de Rubinshtein de los tres tipos de procesos de pensamiento que pueden desarrollarse durante una actividad de generalización, Dubinsky propone tres categorías de actividades de generalización matemática, tres formas o maneras de generalización matemática, la generalización empírica, la generalización pseudo-empírica y la generalización reflexiva. Las categorías de generalización matemática de cada una de ellas son:

a) **La primera categoría de actividades de generalización matemática.** Una actividad de generalización empírica involucra las acciones de análisis, síntesis y abstracción empírica. El propósito de la acción de análisis es separar la situación del problema en partes distintas. Luego, al comparar las partes entre ellas, determinamos las propiedades comunes de estos componentes.

b) **La segunda categoría de actividades de generalización matemática involucra la generalización pseudo-empírica.** Las acciones utilizadas en este proceso son análisis, síntesis y pseudo-abstracción.

c) **La tercera categoría de actividades matemáticas es la generalización reflexiva**. En una generalización reflexiva, las acciones involucradas son análisis, síntesis y abstracción reflexiva.

Durante el desarrollo de las sesiones muchos de nuestros docentes aplican las bases teóricas desconociendo de su aplicación teórica mas no en la práctica.

1.2. Antecedentes

Vlassis *et al*. (2017) sobre el desarrollo del pensamiento algebraico a través de una actividad de generalización basada en patrones figurativos, discuten diferentes enfoques pedagógicos para fomentar la comprensión algebraica, y se presenta una actividad específica llamada "Carré bordé" como caso de estudio. El estudio aborda la necesidad de ir más allá de la enseñanza formal de técnicas algebraicas y destaca la importancia de desarrollar un pensamiento algebraico que utilice tanto notaciones formales como informales. Se enfoca en la generalización como elemento central del álgebra y aborda la relevancia de las actividades de generalización basadas en patrones figurativos.

La investigación se centra en la actividad "Carré bordé" y tiene dos objetivos: 1) diseñar una explotación didáctica de la actividad, progresando en los procesos de razonamiento y simbolización, y 2) analizar los razonamientos y simbolizaciones de los estudiantes.

En términos de razonamiento, se identifican tres hallazgos principales: algunos estudiantes comprenden rápidamente la actividad y sus estructuras, otros necesitan un apoyo significativo del maestro, y la transición a la fase sin material presenta desafíos para algunos estudiantes. En cuanto a la simbolización, el uso de patrones figurativos lleva a una variedad de fórmulas de generalización, pero muchos estudiantes se mantienen en un nivel "contextual". Algunos estudiantes de primer año producen fórmulas contextuales, lo cual es considerado un avance significativo.

Se destaca que la actividad requiere una perspectiva diferente sobre el uso del lenguaje algebraico, más allá de aplicar técnicas familiares, y subraya la importancia de la capacidad de los estudiantes para cambiar entre niveles de lenguaje.

Vlassis *et al*. (2017) concluyen que la actividad "Carré bordé" muestra potencial para el desarrollo progresivo del pensamiento algebraico, pero requiere un apoyo sustancial del maestro. La fase de compartir las diferentes fórmulas producidas juega un papel crucial en la progresión hacia la generalización algebraica simbólica.

En Mathematizing "Frogs": heuristics, proof, and generalization in the context of a recreational problem, William (1981) aborda la resolución de problemas matemáticos y la generalización a través del análisis detallado de un problema recreativo llamado "el salto de la rana". Higginson critica la "fijeza funcional" en la resolución de problemas, instando a los maestros de matemáticas a evitar ver los problemas únicamente como ilustraciones de conceptos o teoremas particulares. En este estudio se destaca la importancia de la "mathematization" de problemas auténticos para comprender tanto los problemas como las matemáticas. En lugar de elegir varias aplicaciones para demostrar un teorema, Higginson toma un enfoque inverso, examinando un problema para identificar cuántos conceptos matemáticos diferentes están integrados en él.

Posteriormente, explora generalizaciones del problema original, cambiando reglas como el número de ranas en cada extremo del tablero y la cantidad de espacios en blanco entre ellas. Higginson presenta fórmulas para calcular el número total de movimientos necesarios en diferentes situaciones. El autor concluye destacando que, al igual que en la naturaleza, la concepción ecológica de las matemáticas nunca está "terminada". Propone continuar explorando otras características del problema de las ranas y considerar su aplicación en problemas relacionados, como el juego del Solitario.

Zapatera (2018) es su estudio "Cómo alumnos de Educación Primaria resuelven problemas de generalización de patrones: Una trayectoria de aprendizaje", se enfoca en analizar cómo los estudiantes de Educación Primaria abordan problemas de generalización de patrones. La investigación examina el nivel de éxito, las estrategias utilizadas y la progresión de 106 alumnos de 3º a 6º de Educación Primaria. Los resultados indican que los estudiantes exitosos comienzan con estrategias aditivas y luego cambian a estrategias funcionales, demostrando que invertir el proceso es cognitivamente más demandante. Además, pocos estudiantes logran expresar la regla general algebraicamente.

El autor destaca la importancia de introducir el pensamiento algebraico desde los primeros años de la Educación Primaria, sugiriendo dos corrientes: el pre-álgebra y el álgebra temprana. La generalización de patrones se presenta como una herramienta clave para desarrollar el pensamiento algebraico, y el estudio propone una trayectoria de aprendizaje con diez niveles para evaluar la comprensión y el progreso de los estudiantes.

Los resultados revelan que, aunque la mayoría de los estudiantes puede coordinar estructuras numéricas y espaciales desde 2º grado, la expresión algebraica de reglas generales presenta un desafío significativo. Además, se destaca la importancia de estrategias aditivas y funcionales en la resolución de problemas. En conclusión, el estudio ofrece insights valiosos para los educadores al proponer una trayectoria de aprendizaje y resaltar la importancia de la generalización de patrones para desarrollar el pensamiento algebraico desde edades tempranas.

El estudio de Lasprilla y Camelo (2012) proporciona una interesante perspectiva sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de 8 y 9 años. El enfoque en los medios semióticos de objetivación, según la teoría cultural de la objetivación de Radford, ofrece una lente única para comprender cómo los niños abordan tareas de generalización de patrones figurales. Destacan la importancia de abordar el álgebra escolar desde edades tempranas, y señala las dificultades asociadas con enfoques tradicionales que priorizan procesos algorítmicos sobre la construcción del pensamiento algebraico. El planteamiento del problema destaca la influencia del profesor y las percepciones en el desarrollo del pensamiento del estudiante, subrayando la necesidad de considerar los medios semióticos de objetivación como clave para dar sentido a los conceptos matemáticos.

El análisis de las producciones de los estudiantes revela la emergencia de diversos medios semióticos, desde gestos hasta símbolos escritos, y cómo estos se utilizan en el proceso de generalización. Es notable que, a pesar de emplear medios similares, cada estudiante adopta una forma única de expresar y comprender los patrones. Además, la interacción social y la colaboración entre los estudiantes desempeñan un papel crucial en el desarrollo de significados y la superación de dificultades.

Las conclusiones resaltan la correspondencia entre los medios semióticos identificados y los propuestos por la teoría de objetivación de Radford, así como la conexión entre los estratos de generalidad y los niveles de generalidad propuestos por Mason. Se destaca el hecho de que, a pesar de operar en el estrato factual, los estudiantes logran desarrollar pensamiento algebraico, lo cual apoya la idea de que este tipo de pensamiento puede emerger tempranamente con la orientación pedagógica adecuada.

En síntesis, la investigación proporciona una valiosa contribución al campo de la enseñanza del álgebra, resaltando la importancia de los medios semióticos en la construcción del pensamiento algebraico y abogando por enfoques pedagógicos que fomenten la expresión y comprensión diversificada de los estudiantes.

Rivera y Sánchez (2015), en su estudio titulado Generalización de patrones: una vía al desarrollo del pensamiento variacional, destacan su enfoque en el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de Educación Básica Primaria a través de la generalización de patrones. La utilización de una secuencia didáctica basada en la adaptación de un cuento infantil es una elección interesante para abordar la transición de la aritmética al álgebra, evitando un corte didáctico. La metodología de investigación, con su enfoque en el diseño secuencial y la atención a la complejidad creciente en cada fase, demuestra una planificación cuidadosa. La colaboración en parejas y grupos, junto con el uso de material concreto, añade dinamismo al proceso de aprendizaje. La documentación a través de cámaras digitales y la toma de notas proporcionan una base sólida para el análisis.

Los resultados indican que los estudiantes logran identificar y expresar patrones tanto en lengua natural como simbólica. Sin embargo, se señalan dificultades al expresar la forma general de un patrón, destacando la importancia de abordar repetidas situaciones donde los estudiantes formulen hipótesis y construyan explicaciones. La discusión de resultados ofrece perspectivas valiosas sobre las áreas de mejora y las direcciones futuras de investigación.

Las conclusiones reflejan una comprensión sólida de los logros y desafíos del enfoque utilizado. La conexión entre el uso de tablas como registro de representación y la identificación de relaciones entre cantidades es destacada como eficaz. Además, se resalta la importancia de la presentación de la secuencia didáctica en un contexto literario para mejorar la comprensión de las situaciones matemáticas.

En resumen, la investigación de Rivera y Sánchez destaca por su enfoque metodológico y la atención cuidadosa a la progresión de la complejidad en el desarrollo del pensamiento variacional. Proporciona una contribución significativa al campo de la enseñanza de patrones y generalización en la Educación Básica Primaria.

En su estudio "Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria" (Zapatera, 2018), el autor aborda la introducción del pensamiento algebraico desde las primeras etapas escolares, desafiando la tradición que posterga el álgebra a la Educación Secundaria. Destaca la corriente del Early-Algebra, que aboga por el desarrollo temprano del pensamiento algebraico, identificando la generalización de patrones como una vía efectiva para lograrlo.

Zapatera contextualiza la necesidad de introducir el álgebra en etapas tempranas, contrarrestando críticas a la enseñanza tradicional del álgebra que ha llevado a un rechazo generalizado. Citando a diversos investigadores, señala que los niños llegan a la escuela con capacidades naturales de generalización, lo que contradice la idea piagetiana de postergar tareas algebraicas hasta la Educación Secundaria. El estudio destaca la importancia de la generalización de patrones como estrategia para iniciar el pensamiento algebraico. Menciona la clasificación de estrategias de resolución de problemas propuesta por Zapatera y Callejo (2011), que incluye estrategias aditivas, funcionales y proporcionales. La clasificación pone de manifiesto la diversidad de enfoques que los estudiantes pueden emplear para abordar tareas de generalización de patrones lineales.

Además, el autor destaca la relevancia de tres elementos clave: estructuras espacial y numérica, relación funcional y proceso inverso. Estos elementos son fundamentales para que los estudiantes continúen una sucesión, identifiquen un término lejano y determinen la posición de una figura, respectivamente. La investigación resalta cómo diversas corrientes educativas y estándares curriculares, tanto a nivel internacional como nacional, respaldan la introducción del pensamiento algebraico desde edades tempranas. La secuencia de tareas propuesta en el estudio proporciona a los maestros una herramienta gradual y adaptable para fomentar el pensamiento algebraico en sus clases, permitiendo ajustes según las necesidades y niveles de complejidad de los estudiantes.

En resumen, Zapatera contribuye al campo de la didáctica de las matemáticas al proporcionar una secuencia de tareas fundamentada en investigaciones, con el propósito de introducir eficazmente el pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones en la Educación Infantil y Primaria.

En el estudio: Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones figurales, (Valenzuela., J y Gutiérrez, V. 2018), abordan de manera detallada la investigación sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones figurales. La metodología de Experimento de Enseñanza utilizada, junto con la fase diagnóstica y las sesiones de intervención, proporcionan un marco claro para comprender el enfoque de la investigación. El estudio destaca la importancia de la generalización de patrones en el desarrollo del pensamiento algebraico, señalando las limitaciones de la enseñanza tradicional del álgebra escolar. La necesidad de superar la enseñanza centrada en la manipulación de expresiones simbólicas y problemas ficticios se aborda de manera convincente.

La revisión de estrategias de generalización en sucesiones de figuras es informativa, especialmente al identificar las dificultades que los estudiantes enfrentan, como la tendencia a utilizar estrategias aritméticas en lugar de enfoques visuales o explícitos. La propuesta de promover la estrategia visual para inducir patrones y expresar reglas generales parece ser una contribución valiosa al campo de la educación matemática.

Los resultados obtenidos de la fase diagnóstica y la intervención didáctica son presentados de manera clara, destacando la transición de estrategias aritméticas a estrategias visuales en la fase de intervención. La inclusión de ejemplos concretos, como el caso del grupo de Genaro, agrega profundidad y contexto a los hallazgos. Las conclusiones ofrecen una reflexión significativa sobre la eficacia de la estrategia visual, destacando el desarrollo en la habilidad de inducir relaciones generales mediante el análisis visual de los elementos de la sucesión. Además, las implicaciones didácticas proporcionan orientación para futuras investigaciones y prácticas educativas, subrayando la importancia de promover estrategias de visualización desde niveles educativos básicos.

La investigación de Roig, Ana-Isabel y Llinares, S. (2008) titulada "Fases en la abstracción de patrones lineales" se propone caracterizar los procesos de abstracción de estudiantes de secundaria en problemas de generalización de patrones lineales, centrándose en las fases de Participación y Anticipación. La generalización es fundamental para el aprendizaje matemático, y los problemas de generalización se utilizan para introducir el álgebra en el aula.

El estudio involucró a 511 estudiantes de 4º de educación secundaria, quienes respondieron a dos problemas de generalización de patrones, y 71 de ellos fueron entrevistados para verbalizar sus procesos de razonamiento. El análisis se centró en cómo los estudiantes coordinaban la información para abstraer el patrón.

Los resultados muestran una distinción entre las fases de Anticipación y Participación. Algunos estudiantes construyeron el patrón antes de abordar el problema (Anticipación), mientras que otros lo construyeron durante la resolución (Participación). La mayoría de los estudiantes inició el problema de manera recursiva, evidenciando la Fase de Participación. Dentro de la Fase de Participación, se identificaron dos momentos del proceso de abstracción: Proyección y Anticipación Local. La Proyección implica construir términos de la sucesión sin abstraer el patrón, mientras que la Anticipación Local implica abstraer el patrón y usarlo para anticipar nuevos términos.

En términos de la teoría de la Abstracción Reflexiva de Piaget, la Fase de Anticipación se asemeja al Nivel 3 de generalización conceptual, mientras que la Proyección y

Anticipación Local se asocian con los Niveles 1 y 2, respectivamente, que implican el reconocimiento del carácter recursivo y la comprensión de procedimientos o generalizaciones locales.

El trabajo de título Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones de (Cañadas *et al.* 2012) se enfoca en el estudio de cómo los estudiantes de secundaria expresan la generalización al resolver problemas relacionados con sucesiones lineales y cuadráticas. La investigación destaca la importancia de la representación gráfica como una herramienta útil para lograr la generalización y analiza su conexión con otras formas de representación. Los autores abordan la relación entre el álgebra y la expresión de la generalización, señalando que el lenguaje algebraico no es la única forma de expresarla. Se destaca el papel del lenguaje natural y de la representación gráfica en el proceso inductivo de generalización.

El estudio se basa en la participación de 359 estudiantes de secundaria y se centra en el análisis de diferentes tipos de generalización, considerando representaciones numéricas, algebraicas, verbales y gráficas. Los resultados muestran que la generalización aritmética es la más común entre los estudiantes, seguida de la generalización gráfica, verbal y algebraica. Se observa que la representación gráfica se utiliza con mayor frecuencia cuando está presente en el enunciado del problema. En cuanto a la metodología, se utilizó un cuestionario escrito con seis problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas. Los estudiantes trabajaron individualmente, y se analizó tanto el proceso de generalización como la expresión de estas generalizaciones en diferentes sistemas de representación.

En suma, el estudio proporciona una visión detallada de cómo los estudiantes abordan la generalización en contextos inductivos, destacando la importancia de la representación gráfica y su relación con otras formas de representación. Además, sugiere la necesidad de guiar a los estudiantes hacia el pensamiento algebraico mediante tareas que involucren casos particulares expresados en diversas representaciones.

Villa (2006), en su estudio titulado: El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en torno a su validación, aborda la perspectiva de la generalización en el ámbito matemático, centrándose en la validación de este proceso, especialmente en relación con patrones numéricos y geométricos. Destaca la importancia del álgebra como el lenguaje que expresa la generalidad en las matemáticas. El autor reflexiona sobre la naturaleza de la generalización, identificando variables visuales en patrones geométricos y discutiendo la variedad de expresiones simbólicas en patrones aritméticos. El informe subraya que, en la enseñanza del álgebra, la generalización a menudo se limita y destaca la falta de claridad sobre sus significados y variables. Se señala que la validación de la generalización en el aula a menudo depende de la autoridad del docente y la agilidad perceptual de los estudiantes, destacando la necesidad de reflexión y validación más allá de estos aspectos.

Villa (2006), destaca la importancia de las competencias de los estudiantes para dar explicaciones y argumentos, así como la justificación de estrategias seleccionadas. Se aborda la imposibilidad de encontrar una única expresión simbólica en algunos casos, subrayando la necesidad de incluir reflexiones sobre la variedad de expresiones y contextos en el aula. En cuanto a la generalización en patrones geométricos, se señala la presencia de variables visuales y la importancia de las competencias de los estudiantes para explicar y argumentar sus procedimientos. Se destaca la necesidad de incluir reflexiones sobre la variedad de expresiones y contextos en el aula.

El reporte de investigación concluye subrayando que la validación no debe limitarse a una búsqueda de respuestas únicas y correctas, sino que debe redefinirse para incluir al estudiante en el proceso. Se propone recontextualizar el significado de la validación y establecer condiciones que permitan a los estudiantes participar en este proceso. En general, la investigación de Villa aborda de manera detallada y reflexiva la complejidad de la generalización matemática, destacando la importancia de la validación y la necesidad de involucrar a los estudiantes en este proceso.

La investigación sobre desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras, realizada por (Valenzuela y Gutiérrez 2018) se centra en el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. El estudio aborda la falta de eficacia de la enseñanza tradicional del álgebra escolar y propone la estrategia visual como medio para inducir patrones en tareas de sucesiones aritméticas de figuras.

La visualización se define como una habilidad, proceso y producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre representaciones externas. Se señala que la visualización es fundamental en la actividad matemática, permitiendo analizar objetos matemáticos complejos y abstractos a través de representaciones externas. En cuanto a la generalización de sucesiones, se aborda la noción de conjunto ordenado y proceso infinito. La representación de figuras en sucesiones de crecimiento lineal se presenta como una tarea rica en contexto para la generalización.

El método utilizado es el Experimento de Enseñanza, con una fase diagnóstica y un proceso iterativo de planificación, ejecución y evaluación en cuatro sesiones de intervención. Se destaca la importancia de la generalización de patrones en el desarrollo del pensamiento algebraico, especialmente en el contexto de sucesiones de figuras. La metodología del Experimento de Enseñanza se aplicó con 28 alumnos en la fase diagnóstica y 30 en la intervención. Se destacan las actividades del investigador-docente, que incluyen la definición de objetivos, la explicación de la naturaleza del trabajo y la orientación durante las sesiones.

Se presentan dos tareas, una en la fase de diagnóstico y otra en la intervención, ambas relacionadas con sucesiones de figuras. Los resultados muestran que las estrategias aritméticas predominaron en la fase diagnóstica, pero la estrategia visual se volvió más eficaz en la intervención.

En la fase de intervención, la estrategia visual permitió a los estudiantes establecer relaciones numérico-espaciales y expresar verbalmente la regla de crecimiento. Se destaca la importancia de promover estrategias de visualización desde los niveles básicos de educación y la necesidad de que los docentes manejen diferentes patrones de inducción. En suma, la investigación aborda de manera integral el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la generalización visual, destacando la importancia de la estrategia visual en la inducción de patrones y la expresión verbal de reglas de crecimiento.

Ellis *et al.* (2017) en su reporte de investigación de título: Generalization across Domains: The Relating Forming-Extending Generalization Framework, abordan la importancia de la generalización en matemáticas y presentan un marco integral, el Relating-Forming-Extending, para caracterizar la actividad de generalización de los estudiantes. Destacan los desafíos que enfrenta la instrucción matemática al tratar de fomentar la creación y expresión de generalizaciones matemáticas normativas. El estudio resalta la centralidad de la generalización en la construcción de nuevos conocimientos matemáticos, citando investigaciones que la sitúan como un componente esencial del pensamiento matemático. A pesar de esta importancia, se señalan las dificultades persistentes de los estudiantes para crear afirmaciones matemáticas generales correctas.

El estudio presenta un marco teórico que define la generalización como una actividad en la cual los estudiantes, en contextos socioculturales e instructivos específicos, participan en identificar similitudes entre casos, extender su razonamiento más allá de su origen, y/o derivar resultados más amplios a partir de casos particulares. Se enfatiza un enfoque orientado al actor para comprender los procesos mediante los cuales los estudiantes construyen relaciones de similitud que perciben como significativas. Así mismo, se incorpora la abstracción, distinguiendo entre pseudoempirical abstraction, reflecting abstraction y reflected abstraction. Se exploran las relaciones entre las formas de generalización y las formas de abstracción, destacando la importancia de entender cómo los estudiantes construyen la generalidad en contextos matemáticos más variados y avanzados.

El estudio utiliza entrevistas individuales semi-estructuradas con estudiantes de educación media, secundaria y universitarios en ámbitos como álgebra, álgebra avanzada, matemáticas discretas y combinatoria. Se presentan tareas específicas de dominio para valorar las generalizaciones cercanas y lejanas.

El marco Relating-Forming-Extending identifica formas de generalización basadas en datos de diversos niveles y dominios matemáticos. Se destaca un caso que muestra cómo los estudiantes pueden generalizar su razonamiento en problemas más allá de las tareas de patrones típicas. El estudio contribuye a la comprensión de cómo los estudiantes pueden aprovechar las abstracciones iniciales en generalizaciones que luego reflexionan y transforman en actividades posteriores.

En síntesis, el estudio aborda la necesidad de comprender cómo los estudiantes generan generalizaciones en contextos matemáticos variados y avanzados, proporcionando un marco integral que vincula la generalización con formas específicas de abstracción.

Este estudio, titulado "Generalization in the Learning of Mathematics," (Hashemia *et al.*

2013) exploran el concepto de generalización desde perspectivas psicológicas y matemáticas. Los autores, buscan destacar la importancia de la generalización en el aprendizaje de conceptos matemáticos y proponen su aplicación más amplia. En términos generales, la generalización se define como la búsqueda de una imagen más amplia o el considerar grupos limitados para explorar conceptos en áreas más extensas. Desde una perspectiva psicológica, implica dar las mismas respuestas a estímulos similares. El estudio aborda tres tipos de generalización según Tall (2002): expansiva, reconstructiva y disyuntiva.

Desde la perspectiva de Tall, la generalización en el pensamiento matemático puede manifestarse en tres tipos: expansiva, reconstructiva y disyuntiva. La expansiva extiende la información existente sin cambiar las ideas previas, la reconstructiva implica cambios en las ideas previas para incorporar nueva información, y la disyuntiva resuelve problemas mediante la adición de información desconectada. Mason (2000), por otro lado, presenta dos procesos, especialización y generalización, como fundamentales para la enseñanza de conceptos matemáticos y la resolución de problemas. La especialización se refiere al uso de casos específicos para comprender mejor un concepto, y la generalización ocurre después de la especialización y se aplica a nuevos conceptos relacionados.

El estudio destaca la importancia de la generalización en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos, especialmente en áreas como el cálculo y sus derivadas e integrales. Se argumenta que la generalización ayuda a superar las dificultades al reducir la distancia cognitiva entre el conocimiento previo de los estudiantes y los nuevos conceptos. Aunque el estudio menciona la falta de atención a la generalización en la enseñanza de las matemáticas y aboga por su aplicación más frecuente, también reconoce que muchos profesores y estudiantes tienden a olvidar utilizar este enfoque.

En resumen, el artículo aborda la importancia de la generalización en el aprendizaje de las matemáticas, ofrece perspectivas tanto psicológicas como matemáticas sobre el concepto, y destaca su utilidad en la enseñanza de conceptos matemáticos complejos, especialmente en el ámbito del cálculo.

En el estudio titulado: Levels of generalization in linear patterns, (García y Martinón 1998), se adentran en la propuesta de niveles de generalización basados en el desempeño espontáneo de los estudiantes al resolver problemas de generalización lineal. Los autores exploran la adquisición de cada nivel en relación con la generalización real lograda y proporcionan características del proceso de generalización de los estudiantes. Concluyen con un esquema de descomposición genética de la estructura conceptual de los patrones lineales que los estudiantes desarrollan al abordar problemas de generalización lineal. También ofrecen observaciones didácticas para la enseñanza y el aprendizaje.

La investigación revisa la teoría sobre la generalización de patrones en matemáticas escolares, criticando los enfoques centrados en las respuestas escritas de los estudiantes. Proponen niveles de generalización que reflejen el desempeño estudiantil y sirvan como guía didáctica. Se destaca la importancia de la Abstracción Reflexiva en el proceso de generalización.

La metodología implica entrevistas grabadas en video con estudiantes de educación secundaria y un experimento de enseñanza interactiva. La interacción permite a los estudiantes contribuir a la discusión en clase, promoviendo normas socio matemáticas para mejorar la comprensión del patrón lineal.

Los resultados y discusiones revelan niveles de desarrollo cognitivo en la generalización de patrones lineales. El Nivel-1 aborda la actividad procedural, donde los estudiantes reconocen el carácter iterativo y recursivo del patrón. En el Nivel-2, hay comprensión procedural y generalización local, donde los estudiantes establecen invariantes específicas. El Nivel-3 representa la comprensión conceptual y generalización global, donde los estudiantes generalizan estrategias a problemas similares.

Se concluye con un esquema de desarrollo que descompone genéticamente la estructura cognitiva del patrón lineal a través de problemas de generalización. Se señala que el tiempo y la exposición a nuevas situaciones son clave para estabilizar las nuevas estructuras cognitivas.

Correa (2017) en su tesis de maestría titulado Estrategias y formas de razonamiento en estudiantes de undécimo grado en tareas de generalización de sucesiones y series polinomiales, que fue presentado en Universidad de Medellín, se platea el siguiente problema ¿Qué estrategias y formas de razonamiento emergen de los estudiantes del grado undécimo en la generalización de sucesiones y series polinomiales, a través de la actividad matemática en el aula?

Los objetivos que orientan el estudio son: primero, identificar los métodos y técnicas de razonamiento empleados en la generalización de sucesiones y series de polinomios; Explicar, mediante la cooperación entre alumnos y alumnos-profesores, cómo consiguen surgir técnicas de raciocinio más precisas en la generalización pueden emerger formas de razonamiento más refinadas en la generalización de sucesiones y series de polinomios; y, en tercer lugar, proponer un método para deducir sucesiones y series de polinomios basado en las diagonales del triángulo de Pascal. Las actividades de generalización son un buen modo de aprender los procesos algebraicos de forma significativa y comprensiva (Mason *et al*. 1999). Cuando el alumno verbaliza las reglas que ha identificado y luego utiliza el simbolismo para representarlas, está progresando en los procedimientos de razonamiento, comunicación y aplicación de procedimientos que son intrínsecos al desempeño matemático (Arzaquiel, 1991). En la revisión de información se hallaron publicaciones que se centralizaron en la generalización; esencialmente, por medio de patrones lineales (Stacey *et al*.1989). Aun así, se hallaron algunas publicaciones que lidiaron acciones de generalización con patrones cuadráticos (Akkan *et al.* 2013). En este sentido, el propósito de la investigación descrita en esta publicación fue aportar elementos y métodos que fortalecieran las acciones de generalización de patrones polinomiales no lineales. Específicamente, se examinaron los diversos enfoques que algunos estudiantes del octavo grado utilizan en su indagación de un modelo que encuentre el término *n-ésimo* de un suceso o cadena de sucesos. En consecuencia, se hizo puntual hincapié en la relevancia de motivar un eficiente trabajo en el aula mediante la comunicación y la socialización entre los alumnos y la interacción alumno – profesor, ya que son procesos que permiten ampliar y perfeccionar las ideas, argumentos y métodos de ambos actores. Desde esta postura, el alumno asume un papel proactivo en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Una de las conclusiones más importantes fue, que los alumnos utilizaban algunas fórmulas o relaciones al principio de la fase de investigación sin comprender, el fenómeno que estaban modelizando, y sólo eran capaces de instituir valores numéricos, sin significado. A lo largo de este documento de investigación, se justificó que las escuelas pueden fomentar entornos que motiven a los alumnos a pensar algebraicamente; este proceso de pasar desde la aritmética hacia al álgebra, requiere de una reforma en la aplicación de métodos de enseñanza que faculte a los alumnos implicarse y comprometerse más en su aprendizaje y darle a su entorno un contexto matemático.

Como resultado, también, se descubrió que las estrategias de razonamiento se desarrollaban y perfeccionaban a través de la interacción entre educandos, y educandos e investigadores. En estas interacciones, el protagonismo del alumno en el aula es de suma trascendencia, porque contribuye a reforzar no sólo sus propias estrategias de razonamiento, sino también la de sus compañeros e inclusive las del profesor.

En la investigación sobre las sucesiones polinómicas se descubrieron cinco estrategias de generalización. La primera, nombrada *generalización recurrente*, se especifica por la búsqueda de una diferencia constante a través de relaciones sucesivas y su capacidad para construir la sucesión o definir su término a partir de la precedente. Es significativo señalar que esta estrategia de generalización, fue inicialmente la característica definitoria de los resultados de los alumnos, que sólo llegaron a instituir una regla de repetición para así, identificar los términos relacionados. Sin embargo, se demostró durante este estudio que las discusiones de estos procedimientos iniciales con la creación, del diálogo investigador-investigado, dieron pie a considerar nuevas vías hacia generalizaciones cada vez más precisas. La estrategia dos que se identificó, se nombró *Generalización contextual-explícita aditiva*, y se especifica por el establecimiento de un cotejo por adición o sustracción de los términos de una sucesión previamente conocida con la finalidad de hallar una reciente sucesión más conocida. La estrategia tres, *Generalización contextual-explícita multiplicativa*, se especifica por cotejar por producto o por cociente entre los términos de una sucesión y los términos de otra previamente conocida, con el fin de encontrar una sucesión más conocida. No obstante, estas dos últimas parecen comparar sucesiones de forma muy similar, sus diferencias se deben más al hecho que la primera se adhiere al modelo aditivo y la segunda al modelo multiplicativo. La cuarta estrategia denominada *Generalización gaussiana*, y es especifica de algunos resultados cuadráticos porque instituye un procedimiento similar al emplearse por Gauss para la adición de los primeros números naturales, la misma que radica en restas sucesivas, en precisar una sucesión lineal conectada al problema, después, mediante la adición de los términos de dicha sucesión se forman los términos de la secuencia objeto de estudio, subsiguientemente se adiciona el primer término con el último para instituir una adición permanente, la cual se multiplica por la mitad de la cantidad de términos.

Finalmente se descubrió la quinta estrategia denominada *Generalización pascaliana*, comprende en anotar el término general de la sucesión como un polinomio donde las variables son las diagonales del triángulo de Pascal; de este modo, si la sucesión, por medio de las diferencias consecutivas, conlleva a una diferencia permanente en el segundo nivel (sucesión cuadrática), su término *n-ésimo* será un polinomio donde sus variables son los términos de la diagonal dos (números triangulares), la diagonal uno (números naturales) y la diagonal cero.

Rangel (2012) en su tesis trabajó con progresiones aritméticas y geométricas, pero lo realiza desde una óptica esquemática, formal y algorítmico, sin tener ningún conocimiento previo que subyacen a las nociones de éxito y progresiones aritméticas y geométricas. Además, como el foco de la clase son las acciones del instructor, esto se hace en un entorno que no permite a los alumnos la oportunidad de explorar, descubrir o crear conceptos matemáticos. El objetivo de la investigación es conocer los patrones y regularidades desde la prospectiva de la solución de problemas, haciendo hincapié en el desarrollo del razonamiento inductivo.

Los resultados más pertinentes son: La detección de regularidades (esto es, de semejanzas y diferencias, de cosas que no cambian y cosas que sí lo hacen) nos facilita comprender y dar sentido al mundo. La ciencia no existiría sin ellas. En consecuencia, sostienen que los patrones logran tener varias representaciones: geométricas, aplicando; métricas, empleando áreas; aritméticas, aplicando operaciones y relaciones numéricas; gráficas, aplicando representaciones; algebraica, aplicando la nominación de valores no conocidos, lo que viabiliza el pase de un modelo a otro (por ejemplo, se consigue pasar de formas de dibujos que poseen una regularidad a expresiones numéricas o de números a configuraciones puntuales, o de rayas y puntos a letras, etc).

El trabajo con patrones lleva al proceso de generalización, que implica extrapolar propiedades de las observaciones y las experimentaciones en una colección de ejemplos, combinarlas y simbolizarlas para seguidamente demostrarlas y aplicarlas a otras problemáticas y soluciones.

El trabajo con patrones y regularidades fomenta el desarrollo de varios ángulos para afrontar un problema, demostrando que hallar un enfoque no conlleva que la cuestión se haya resuelto y puede incluso permitir la aparición de nuevos problemas. Fomenta el reconocimiento del valor del lenguaje algebraico, apoyando reglas de conversión escritura, tanto en la expresión de variables como en la validación de conjeturas.

Es interesante ver si los alumnos que completan el primer ciclo pueden identificar el núcleo del patrón y determinar si puede codificarse, por ejemplo, mediante letras. Lo que les permitirá calcular cualquier componente del patrón sin tener que construirlo.

Un cometido relevante es cambiar de patrones concretos o gráficos a tablas numéricas para obtener y conocer que los números igualmente se logran establecer cumpliendo con las leyes que logran ser descubiertas y representadas en diferentes contextos. En este estudio se presentan numerosas actividades sobre patrones que es viable traducir en sucesiones numéricas.

Perez (2005) en su estudio tuvo como objetivo. Desarrollar habilidades de pensamiento lógico - matemático en el alumnado del grado noveno de educación básica del INEM José Félix de Restrepo con actividades que implican condiciones de generalización como enfoque para la enseñanza – aprendizaje del álgebra.

Plantea que el papel esencial para la evolución del pensamiento lógico – matemático de los educandos es la generalización matemática, ciertos investigadores como Mason J. y Socas M. la plantean como instrumento significativo para instruir al educando en el estudio del álgebra elemental o para ratificar concepciones como el de funciones y expresiones algebraicas, instruir al educando en la concepción de variables y sistemas de representaciones más abstractas como es el algebra.

La generalización incluso se halla en los planes de estudio como un componente del razonamiento matemático y se aconseja que se utilice en dar soluciones a problemas, proporcionando a los estudiantes una dirección en la que centrar sus esfuerzos en caso de que quieran hacer más hincapié en los métodos que en el contenido. Luego, se sugiere fortalecer las actividades de generalizaciones para el proceso algebraico, detectar los procesos matemáticos que surgen en el aula a medida que se desarrollan dichas actividades, y poner énfasis en componentes de la matemática como la preparación y confirmación de conjeturas y su representatividad en niveles sin cesar más altos, más aún de aportar a crear espacios que propicien ambientes conversacionales en cuanto a los conceptos matemáticos.

Este estudio establece concepciones constructivistas y de la sicología intelectual de la instrucción matemática e ilustra cómo aprovechar las estrategias de dar solución a problemas como métodos para llevar a cabo la participación pedagógica significativa, conociendo esta última como una manera de conectar al profesor y al alumno garantizando a este último un racionalismo libre para que averigüe por su cuenta las relaciones implicadas en la situación.

Los resultados más relevantes a los que llega el estudio son:

1. Las respuestas de los estudiantes revelan dos clases de acciones diferentes: estática y dinámica. Los que piensan en términos de dinámica visualizan el objeto matemático en su totalidad de sus dimensiones, efectúan variabilidad sobre él, intentan descomponerlo, crean gráficos y dibujos para constituir los escenarios, crean tablas para conectar los datos e intentan dar solución a la cuestión abordándola desde distintos ángulos. Los alumnos que lo ven de forma analítica no ven más allá de lo que sus sentidos les permiten ver, intentan abordar el problema de forma holística, no recurren a estrategias adicionales más allá de las sugeridas por el profesor y, en general, ven los problemas de esta manera.
2. Utilizar las traducciones de la representación tabular al enunciado verbal y a la representación simbólica. Sobre esta base, se observa cómo los alumnos escenifican las distintas representaciones. Cabe destacar que la representatividad tabulada surge como puente entre las representatividades de los distintos lenguajes, como el gráfico, el verbal y el algebraico o simbólico. En cambio, en el tránsito del registro verbal al simbólico el alumno emplea las letras para efectuar incógnitas o variables, pero con significación de un número u objeto generalizado, esto se demuestra en el acto de que se toma la letra inicial o la misma palabra del objeto para representarlas.
3. Se ha producido una notable mejora en el uso de representatividad en tablas, gráficos, y expresiones de acorde con los conjuntos numéricos, se ve además que hubo más claridad en la representación de los patrones de formación y la coherencia entre el componente de secuencias numéricas o gráficas, así como en su posterior simbolización.
4. Los ejercicios de generalización que completaron los alumnos permitieron la evolución de destrezas como la creación de conjeturas como predicciones de resultados potenciales en un problema concreto y la sistematización de datos.

5. Poco a poco fueron consintiendo a un lenguaje matemático más precisado para formular generalizaciones siguiendo las orientaciones del instructor. Empezaron utilizando las letras adecuadas para las variables a fin de relacionarlas adecuadamente, hacer las proposiciones correctas y enunciar reglas generales para los problemas.

Valenzuela y Gutiérrez (2018) en este estudio tuvo el objetivo identificar los tipos de estrategias empleadas en la adquisición de la regla general y potenciar las estrategias visuales para propiciar un patrón de tareas que involucran sucesiones matemáticas figuradas como medio para desarrollar el razonamiento algebraico de 30 educandos en México. El estudio utilizó el enfoque de la experimentación e incluyó una fase de diagnóstico antes de la planificación, ejecución y evaluación iterativas a lo largo de cuatro sesiones de intervención. En los resultados de la tercera sesión, de los que aquí se informa, fue posible demostrar la eficacia de la habilidad visual para inferir y enunciar un patrón de regularidad a partir de un análisis de los términos específicos del éxito basado en la predominancia de las estrategias de naturalidad aritmética que surgieron en la etapa de diagnóstico. El hallazgo propone un tipo de educación que fomenta la capacidad de instituir reglas generales utilizando las estrategias visuales.

CAPÍTULO II
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1. Identificación del problema

El aprendizaje del álgebra en la educación secundaria del sistema peruano presenta limitaciones, el informe de resultados para docentes de la evaluación censal 2019 señala que es necesario seguir mejorando la calidad de los aprendizajes. Específicamente, respecto a la evaluación de la competencia 24: "Soluciona problemáticas de regularidad, equivalencia y cambio" los resultados encontrados son: Primero, respecto a la pregunta 3 que evalúa la capacidad para instituir interrelación entre datos y contextos de situaciones, y expresarlos de forma numérica estableciendo desigualdades, se ha encontrado un éxito del orden de 66,8% en tanto que 33,2% no logra interpretar todas las condiciones del problema o no comprenden la situación utilizando parte de los datos o en el peor de los casos tiene limitaciones para comprender el problema; segundo, respecto a la pregunta 4 de la evaluación censal, solo el 50% de los estudiantes tienen la capacidad de precisar relaciones entre los datos y condiciones y además, transformar estas relaciones en expresiones algebraicas con magnitudes directa e inversamente proporcional. En tanto, que el otro 50% no comprende la relación de proporcionalidad directa, o tiene limitaciones para establecer esta relación, o más aún no interpretan adecuadamente las condiciones del problema (UMC-Minedu, 2019). Estos resultados nacionales evidencian que es necesario investigar el razonamiento algebraico, específicamente la capacidad de generalización como proceso cognitivo central en la actividad algebraica.

El álgebra es esencial para comprender la matemática de la enseñanza secundaria y, por lo tanto, el aprendizaje de los conceptos fundamentales del álgebra es crítico, es así que el Ministerio de Educación plantea la competencia 24 que implica que el alumno caracterice equivalencias, generalice regularidades y cambie una magnitud en relación con otra utilizando reglas genéricas que le admiten descubrir valores ocultos, identificar restricciones y predecir cómo se comportará una problemática. Por ello, desarrolla igualdades, inecuaciones y funciones y emplea métodos, técnicas y recursos para resolver, visualizar o operar expresiones simbólicas. Asimismo, utiliza el razonamiento para decretar leyes generales utilizando diversos ejemplos, propiedades y contraejemplos (Minedu, 2015). En ese sentido la generalización es el núcleo central de la actividad matemática, este estudio se preocupa por comprender cómo se desarrolla el proceso de generalización, qué niveles de desarrollo se puede alcanzar, qué herramientas didácticas se puede utilizar para lograr que los educandos generalicen los términos *n-ésimos* de una sucesión.

El acto de generalizar está en el eje de la actividad matemática, y sirve como medio para construir nuevos conocimientos. Los investigadores han argumentado que el pensamiento matemático no puede ocurrir en ausencia de generalización (Vygotsky, 1986). Como resultado, "desarrollar las generalizaciones de los niños se considera uno de los principales propósitos de la instrucción escolar" (Davydov, 1990, p. 10). Los investigadores han estudiado la importancia de la generalización para promover el razonamiento algebraico (Cooper & Warren, 2008), el modelado matemático (Becker & Rivera, 2005), el pensamiento funcional (Ellis, 2011 y Rivera & Becker, 2007) y la probabilidad (Sriraman, 2003), entre otras áreas. A pesar de la importancia de la generalización para el éxito en el razonamiento matemático, la investigación sobre las habilidades de los estudiantes para generalizar ha identificado dificultades generalizadas de los estudiantes. Por ejemplo, Rivera (2008) informó los resultados de 5 años de evaluaciones de desempeño en generalización dadas a más de 60,000 estudiantes de secundaria y preparatoria; Estos hallazgos revelaron un valor máximo estable de solo una tasa de éxito del 20% en la construcción de una fórmula general. Otros investigadores han documentado de manera similar las dificultades de los estudiantes para crear declaraciones generales correctas, pasar del reconocimiento de patrones a la generalización de patrones y usar un lenguaje generalizado (Mason, 1996).

Aunque las dificultades para generalizar de los estudiantes están bien documentadas, las condiciones de instrucción necesarias para fomentar una generalización más productiva de los estudiantes no se comprenden bien. Para complicar el asunto, la mayor parte de la investigación sobre la generalización se ha producido con tareas de diseño algebraico, situando la generalización como un tipo de razonamiento algebraico y ruta hacia este (Becker *et al.* 2008). Sigue siendo necesario comprender cómo los estudiantes construyen la generalidad en dominios matemáticos más variados y más avanzados. La finalidad es investigar la generalización matemática de los escolares de la educación secundaria. En particular, el objetivo es entender la naturaleza de la generalización de los estudiantes, contribuyendo a la base de conocimiento del campo al extender la investigación de la generalización desde su caracterización hasta la implementación de estrategias didácticas que permitan desarrollar habilidades de generalización.

En conclusión, el problema de investigación queda representado por la siguiente interrogante:

2.2. Enunciados del problema

2.2.1. Problema general

¿Las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos, de la sucesión de los cuadrados de los *n* primeros términos son más efectivos para desarrollar la capacidad de generalización, en comparación con la enseñanza convencional en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria “Perú BIRF” durante el año escolar 2020?

2.2.2. Problemas específicos

a) ¿Cuál es el nivel de desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria antes de la experimentación?

b) ¿Qué tan efectivos son el uso de las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos para el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria?

c) ¿Qué tan efectivo es la enseñanza convencional en el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria?

d) ¿Cuál es el nivel de efectividad del uso de las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos para el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos, frente a la enseñanza convencional en estudiantes del tercer grado de educación secundaria después de la experimentación?

2.3. Justificación

La investigación es pertinente debido a: primero, son escasos los estudios sobre el fenómeno de la generalización en estudiantes de la región Puno, se pretende comprender como se puede apoyar al estudiantado a desenvolver la habilidad de generalizar expresiones algebraicas. Considerando lo fundamentado en el planteamiento del problema, el estudio tuvo el propósito de comprender el proceder del desarrollo de la capacidad de generalización en los adolescentes, además, no sólo se limita a comprender, sino también a proponer actividades didácticas que permitan al docente conducir sesiones de aprendizaje de álgebra que viabilicen desarrollar la capacidad de generalización; en segundo lugar, se pretende desarrollar materiales didácticos que ayuden a aprender y comprender los procesos de generalización, estos materiales de naturaleza gráfica pictórica como material impreso fueron sometidos a prueba para ver su efectividad para promover en el estudiante la capacidad de identificar patrones de formación, regularidades e inferir expresiones algebraicas que permitan deducir fórmulas para resolver series de números cuadrados.

2.4. Objetivos

Los objetivos responden al diseño, implementación y evaluación de una secuencia de situaciones didácticas que permitan demostrar si los estudiantes desarrollan su capacidad de generalización. Se establece como sigue:

2.4.1. Objetivo general

Determinar que el uso de los recursos didácticos como las representaciones gráficas y simbólicas de la sucesión de los cuadrados de los *n* primeros términos son más efectivos para desarrollar la capacidad de generalización en comparación con la enseñanza convencional en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" durante el año escolar 2020.

2.4.2. Objetivos específicos

a) Diagnosticar la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria antes de la experimentación.

b) Evaluar la influencia que ejerce el uso de las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos para el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria.

c) Evaluar la incidencia de la enseñanza convencional en el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria.

d) Determinar la mayor incidencia positiva del uso de las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos para el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos, frente a la enseñanza convencional en estudiantes del tercer grado de educación secundaria después de la experimentación.

2.5. Hipótesis

2.5.1. Hipótesis general

El uso de las representaciones gráficas, simbólicas cómo recurso didáctico, mejoran significativamente la capacidad generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria “Perú BIRF” durante el año escolar 2020.

2.5.2. Hipótesis específicas

a) Los estudiantes del tercer grado de educación secundaria antes de la experimentación apenas logran entender el significado de una sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos y su generalización

b) El uso de las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos permite lograr un mayor desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria.

c) La enseñanza convencional de la generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos sin el uso de las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos permiten un desarrollo incipiente de la capacidad generalización.

d) La incidencia positiva del uso de las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos para el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos es mayor frente a la enseñanza convencional después de la experimentación.

CAPÍTULO III
MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Lugar de estudio

La investigación sobre el aprendizaje de la generalización de la suma de cuadrados y su didáctica se desarrolló en el Distrito de San Miguel, provincia de San Román con los docentes y estudiantes del área de matemática de la IES. “Perú BIRF”, región Puno.

La ubicación georreferencial de la Institución Educativa Secundaria “Perú BIRF” del Distrito de San Miguel tiene las siguientes coordenadas 15°24′35″S 70°05′45″O con una altitud al nivel del mar: 3 825 m.

Figura 1. Ubicación georreferencial del Colegio “Perú BIRF” distrito de San Miguel de San Román

Fuente: Google Earth.

3.2. Población

La población de interés de este proyecto es el estudiantado del tercer grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF", estos estudiantes se caracterizan por provenir de familias que habitan la ciudad de Juliaca quienes se dedican principalmente a la actividad comercial. La población de estudio está conformada por varones y mujeres en igual proporción, además las edades fluctúan entre 14 y 15 años. La tabla 3, presenta la población.

Tabla 1

Población de investigación, número estudiantes del tercer grado de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" en el año 2020.

Nº	Secciones	Varones		Mujeres		Número de Estudiantes	
		f_i	h_i	f_i	h_i	f_i	h_i
1	A	15	15,96	17	17,89	32	16,93
2	B	17	18,09	16	16,84	33	17,46
3	C	16	17,02	15	15,79	31	16,40
4	D	16	17,02	16	16,84	32	16,93
5	E	14	14,89	16	16,84	30	15,87
6	F	16	17,02	15	15,79	31	16,40
	Total	94	100,00	95	100,00	189	100,00

Fuente: Nomina de matrículas del año 2019 I.E.S. Perú BIRF.

3.3. Muestra

La muestra es determinada manera intencional, el criterio de selección es la accesibilidad, es decir el equipo investigador tiene la posibilidad de interactuar con los estudiantes para la realización de la experiencia, además está constituida por 128 estudiantes distribuidos en cuatro grupos intactos, es decir en cuatro secciones, los cuales quedan designados como dos grupos de control y dos de experimental. La tabla 2 presenta la muestra de estudio.

Tabla 2

Muestra de investigación, según sección, grupos y género de estudiantes del tercer grado de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" en el año 2020.

Nº	Secciones	Grupos intactos	Varones		Mujeres		Número de Estudiantes	
			f_i	h_i	f_i	h_i	f_i	h_i
1	A	Control (1)	15	23,44	17	26,56	32	25,00
2	B	Experimental (1)	17	26,56	16	25,00	33	25,78
3	C	Control (2)	16	25,00	15	23,44	31	24,22
4	D	Experimental (2)	16	25,00	16	25,00	32	25,00
	Total		64	100,00	64	100,00	128	100,00

Fuente: Nomina de matrículas del año 2019 I.E.S. Perú BIRF.

3.4. Método de investigación

3.4.1. Enfoque metodológico

La perspectiva epistemológica es positivista porque su procedimiento es deductivo, probabilístico, secuencial y probatorio. Se establece una secuencia de actividades: inicia con una revisión de literatura para cimentar un marco teórico, se fundamenta una teoría general y luego se identifica una idea problemática, un problema concreto, hipótesis, objetivos. El propósito es rechazar o probar hipótesis a través de la recaudación de datos, un análisis e entendimiento de la información y desprender de ella resultados y conclusiones. (Sampieri et al. 2010).

3.4.2. Tipo o alcance de investigación

El proyecto de investigación se centra en el enfoque cuantitativos, tiene un alcance explicativo y se caracteriza por ser una investigación aplicada porque busca soluciones a problemas prácticos. (Sampieri et al. 2010. p. 95). El diseño de la investigación es cuasi-experimental de cuatro grupos de Solomon con validez externa limitada por naturaleza. De acorde a los objetivos propuestos, la investigación es de nivel explicativo ya que establece la asociación causal entre las variables y mide sus resultados resultantes.

3.4.3. Diseño de investigación

El diseño de investigación que consintió hacer realidad la experimentación, es el diseño cuasi experimental de cuatro grupos de Solomon (Sampieri et al. 2010. p. 147), dónde se estudia el efecto del uso de material didáctico de naturaleza concreta cómo recurso didáctico para la intensificación de la capacidad de generalización en los grupos experimentales y compararlos con los resultados de los grupos de control, luego de aplicar los instrumentos teórico/prácticos. El diseño de investigación se ilustra en el siguiente esquema:

Tabla 3

Diseño de investigación.

Grupos intactos	**Pre-Test**	**Tratamiento**	**Pos-Test**
Experimental (1)	O_1	X_{Exp}	O_2
Control (1)	O_3	X_{Con}	O_4
Experimental (2)	-.-	X_{Exp}	O_5
Control (2)	-.-	X_{Con}	O_6

En donde

O: Medición aplicado a los grupos

- : Ausencia de tratamiento.

-.-: Ausencia de Medición

$\boldsymbol{X_{Exp}}$: Enseñanza usando los registros de representación como las representaciones gráficas y simbólicas como recursos didácticos.

$\boldsymbol{X_{Con}}$: Enseñanza convencional en los grupos de control.

3.4.4. Variables de investigación

V_I: Los registros de representación como las representaciones gráficas y simbólicas como recursos didácticos.

V_D: Capacidad de generalización de las sumas de cuadrados de los *n* primeros números naturales.

Tabla 4

Matriz del proceso de operacionalización de variables.

Variable (tipo)	Definición Operacionalización	Dimensiones	Indicador	Índice
Independiente: - Los registros de representación como las representaciones gráficas y simbólicas como recursos didácticos. Representaciones externas. **Según el nivel de medida:** Nominal	Un sistema semiótico es un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas: La formación de una representación, el tratamiento de una representación, y la conversión de una representación.	- Representaciones gráficas - Representaciones simbólicas - Representaciones Tabular.	- Formación - Tratamiento - Conversión	**Destacado** Efectúa la formación, tratamiento y conversión. **Logrado** Efectúa al menos dos actividades cognitivas **En proceso** Efectúa al menos una actividad cognitiva
Dependiente: Capacidad de generalización de las sumas de cuadrados de los *n* primeros números naturales. **Según el nivel de medida:** ordinal.	La generalización es una dualidad entre ir de lo particular a lo general y ver lo particular a través de lo general. En el pensamiento algebraico se entiende la generalización como un proceso mental que deriva de actividades mentales como el análisis, síntesis y	- Generalización empírica - Generalización científica o teórica - Generalización de movimiento bidireccional de lo general a lo particular y de lo particular a lo general.	· Identifica la regularidad. · Expresión descriptiva de la regularidad. · Representación simbólica de la regularidad. · Representación simbólica de la	**Primer nivel:** la capacidad para identificar algo general que ya conoce en casos particulares y aplicar lo general a lo particular. **Segundo nivel:** la

	abstracción que permite la asimilación del conocimiento. La generalización tiene dos niveles:		expresión general.	capacidad para encontrar un concepto general que no conoce de casos aislados y particulares.

3.5. Descripción detallada de métodos por objetivos específicos

3.5.1. Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

La técnica que se utilizará es la evaluación de capacidades, así como la observación. Los instrumentos que se aplicará serán la prueba sobre generalización, información presente en los protocolos de resolución de problemas el mismo que fue analizado en su contenido. Las pruebas o test se adjuntan en el anexo en ella se presenta tanto la pre y la post prueba, estas tienen la finalidad de evaluar la habilidad de generalización de sucesión y adición de cuadrados de los primeros números naturales.

3.5.1.1. Validez concurrente de los instrumentos de recolección de datos

En el estudio se ha logrado conseguir una validez concurrente. Para lograr se procedió a correlacionar un par de resultados de la prueba que se ha validado, y segundo, el criterio externo. La prueba que se validó es "Prueba sobre capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos" (X), en tanto que, el criterio externo es la valoración del investigador como resultado de un curso de aprendizaje en el que se desarrolló una práctica calificada: "Práctica de desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos" (Y).

Para establecer la validez, se efectuó el análisis estadístico correlacional de los resultados. Dicho diagnóstico se realizó empleando la correlación por rangos (rho). Tal procesamiento fue formulado por Spearman y la fórmula es:

$$rho = 1 - \frac{6\sum D_R^2}{N(N^2-1)}$$

$\sum D_R^2$: Suma de cuadrados de las diferencias entre los rangos.

N : Total de par de datos correlacionados.

Escala de medición cualitativa: $0 \leq rho \leq 1$

El resultado de este proceso de validación es el siguiente:

3.5.1.2. Validez de la pre prueba

La estimación del coeficiente de correlación por rangos (*rho*) para comprobar la validez concurrente de la "*Pre Prueba sobre capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos*" (X), es:

$$rho = 1 - \frac{6 \times 146}{18(18^2 - 1)} = 0{,}85$$

El valor *rho*= 0.85 corresponde a una correlación muy aceptable, que posibilita afirmar que "existe una relación directa y significativa", pero no concluyente, entre el desempeño en la *Pre Prueba sobre capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos* y el criterio externo *Práctica de desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos* (Y). En términos definitivos, la prueba en cuestión tiene una validez concurrente aceptable.

3.5.1.3. Validez de la pos prueba

Por otro lado, se ha encontrado de forma similar que el coeficiente de correlación por rangos (*rho*) para comprobar la validez concurrente de la "*Pos Prueba sobre capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos*" (X), es:

$$rho = 1 - \frac{6 \times 176{,}5}{18(18^2 - 1)} = 0{,}82$$

La cifra del *rho*= 0.82 indica a una correlación muy aceptable, que posibilita respaldar que “existe una relación directa y significativa”, pero no determinante, entre el desempeño en la Pos Prueba sobre capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos y el criterio externo Práctica de desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos (Y). En términos definitivos, la prueba en cuestión tiene una validez concurrente aceptable.

3.5.1.4. Confiabilidad de los instrumentos de recolección de datos

Para el proceso de recaudación de datos se valoró la estabilidad de los mismos, examinando la bondad que ostentan los instrumentos, para conseguir y suministrar información idéntica sobre la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos, que posee un determinado estudiante. El procedimiento utilizado para lograr la fiabilidad se aplicó el coeficiente *alfa de Cronbach*. Este coeficiente determina una medida de consistencia o congruencia interna. El coeficiente *alfa de Cronbach*:

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} S_i^2}{S_i^2}\right]$$

Donde:

α : Coeficiente de confiabilidad de la prueba

k : Número de ítems del instrumento

$\sum_{i=1}^{k} S_i^2$: Suma de las varianzas de los ítems

S_i^2 : Varianza total del instrumento

La toma de decisión se adopta de acuerdo al siguiente baremo:

Rango	**Confiabilidad**
0,53 a menos	Confiabilidad nula
0,54 a 0,59	Confiabilidad baja
0,60 a 0,65	Confiable
0,66 a 0,71	Muy confiable
0,72 a 0,99	Excelente confiabilidad
1	Confiabilidad perfecta

3.5.1.5. Confiabilidad de la pre prueba

Para estimar la coherencia interna de la "*Pre Prueba sobre capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos*" se ha aplicado a 18 estudiantes, los datos recogidos fueron utilizados para calcular el coeficiente alfa de Cronbach, los mismo que se adjunta en el Anexo 5, para decretar la consistencia interna de la pre prueba es $\alpha = 0{,}75$ que significa una excelente confiabilidad. En conclusión, el grado de consistencia de la capacidad de generalización mostrados en cada ítem y el resultado total en la prueba es suficiente para afirmar que la prueba goza de una confiabilidad aceptable para los propósitos del estudio.

3.5.1.6. Confiabilidad de pos prueba

En la utilización de la "*Pos Prueba sobre capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos*" se recogió los datos que se utilizaron para calcular el coeficiente alfa de Cronbach, los mismo que se adjunta en el Anexo 5, para establecer la consistencia interna es $\alpha = 0{,}77$ que significa una excelente confiabilidad. En conclusión, el grado de concordancia de la capacidad de generalización mostrados en cada ítem y el resultado total en la prueba es ampliamente suficiente para este tipo de confiabilidad.

3.5.2. Técnicas de Procesamiento Análisis e Interpretación de Datos

a) Técnicas de análisis cuantitativo

Una primera tarea es categorizar las cifras individualmente sin agrupamiento, luego, agrupar las cifras de la variable dependiente, y mostrarlas en tablas de frecuencia, gráficos. La selección involucra que se realice lo siguiente: codificaciones, transferencias y tabulaciones. (Sierra, 1994).

Como este estudio responder a la investigación con pocas muestras y trata cuatro grupos independientes, se utilizaron inferencias de muestras pequeñas para determinar las diferencias entre los dos tamaños de población. Cuando el tamaño de muestras son pequeños, se determinó en primer lugar que los datos no poseen una distribución normal. Se decidió entonces recurrir a las pruebas Wilcoxon para las muestras dependientes y la prueba U de Mann Whitney para las muestras independientes.

3.5.3. Prueba de Bondad de Ajuste de Shapiro-Wilk

La prueba utilizada en este estudio es la Prueba de Shapiro-Wilk siendo sencilla y potente. El único requisito es que el tamaño de la muestra debe ser igual o de abajo a 50.

Las hipótesis estadísticas de la prueba son:

$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{N}(\mu, \boldsymbol{\sigma^2})$

$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{x_i} \neq \boldsymbol{N}(\mu, \boldsymbol{\sigma^2})$

H_0: Los calificativos de la prueba siguen una distribución normal.

H_1: Los calificativos de la prueba no siguen una distribución normal.

El estadístico de prueba es:

$$W_C = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

El término b es: $b = \sum_{i=1}^{k} a_i\left[X_{(n-i+1)} - X_i\right]$

Donde a_i: es el dato de un coeficiente que se halla tabulando para cada tamaño de muestra y la posición i de cada observación.

El término $\left[X_{(n-i+1)} - X_i\right]$: es la diferencia sucesiva que se obtiene al restar el primer valor al último valor.

La zona de aceptación para la H_0 está compuesto por cada uno de los datos del estadístico de prueba W_C inferiores el dato esperado o tabulado $W_{(1-\alpha;n)}$

$$ZA = \left\{W/W_{calculado} \leq W_{(1-\alpha;n)}\right\}$$

3.5.4. Análisis cuantitativo de relación entre variables independiente y dependiente

a) Prueba U de Mann-Whitney

Esta prueba no paramétrica se ejecuta en un par de muestras independientes. Es la versión no paramétrica de la prueba t de Student.

La prueba de Mann-Whitney se emplea demostrando la heterogeneidad del par de muestras ordinales independientes. Se considera los supuestos son:

1. Las observaciones del par de grupos de estudio son independientes.

2. Las observaciones son variables ordinales o continuas.

3. Bajo la hipótesis nula y alterna son

$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{Me_1 = Me_2}$

$\boldsymbol{H_1}: \boldsymbol{Me_1 \neq Me_2}$

Estadístico de prueba es: $\boldsymbol{U = \min(U_1, U_2)}$

$$\boldsymbol{U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1}$$

$$\boldsymbol{U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2}$$

Donde:

$\boldsymbol{n_1}$ = tamaño de las muestras del grupo 1

$\boldsymbol{n_2}$ = tamaño de las muestras del grupo 2

$\boldsymbol{R_1}$ = suma de los rangos del grupo 1

$\boldsymbol{R_2}$ = suma de los rangos del grupo 2

Con el valor del estadístico "U" calcula cuál es la probabilidad de que se obtenga un dato igual o más extremo que el observado. Como es el caso de presente estudio, $\boldsymbol{n_1 > 10}$ y $\boldsymbol{n_2 > 10}$, entonces se sume que U se asigna de forma aproximadamente normal. Se descarta la hipótesis nula si $|\boldsymbol{Z}|$ calculada es superior que el valor de Z para el $\boldsymbol{\alpha}$ elegido.

La formula de estandarización de U que se utilizó es

$$\boldsymbol{Z_c} = \frac{\boldsymbol{U - \frac{n_1 n_2}{2}}}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{n_1 n_2 (n_{1+} n_{2+1})}}{\boldsymbol{12}}}} \sim \boldsymbol{N(0,1)}$$

La regla de decisión es, si $|\boldsymbol{Z_c}| < \boldsymbol{Z}_{1\text{-}\frac{\alpha}{2}}$, así que no se descarta la hipótesis nula. Otra regla de decisión es, si p-valor> $\boldsymbol{\alpha}$=0,05, entonces no se descrata la hipótesis nula

b) Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

La prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, se utilizó para cotejar un par de grupos o muestras relacionados que no dan cumplimiento con los supuestos de normalidad. Es una prueba no paramétrica para muestras relacionadas o pareadas. La Prueba de los rangos de Wilcoxon coteja las diferenciaciones entre el par de datos, pero que mantienen una distribución simétrica en torna un valor. Se utilizó para demostrar que las diferenciaciones entre cada par de observaciones, pre y pos prueba, se distribuyen de forma simétrica entorno al cero.

Para la utilización de esta prueba fue necesario cumplir con los siguientes supuestos: primero, los grupos son dependientes, es decir son relacionados; segundo, los datos son ordinales; tercero, la distribución de datos no es normal, pero la distribución de datos debe ser simétrica; cuarto, esta prueba utiliza medianas y no medias; y quinto, la muestra es pequeña. Las hipótesis que se contrasta son:

$\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{Me_1 = 0}$, es decir, la mediana de las diferenciaciones es igual a cero

$\boldsymbol{H_1}$: $\boldsymbol{Me_1 \neq 0}$, es decir, la mediana de las diferenciaciones es diferente de cero.

Los estadísticos de prueba son:

$W = \min\,(W^+, W^-)$

W^+: suma de los rangos con signo positivo

W^-: suma de los rangos con signo negativos

El valor estadístico W permite calcular la probabilidad de que adquiere un dato igual o más extremo que el observado. Como en nuestro caso $n > 25$, entonces se sume que W se reparte de forma aproximadamente normal, para la normalización se calcula $Z_c = \frac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}}} \sim N(0,1)$, en este caso se descartar H_0 si $|Z|$ calculado es superior que el valor Z para el α elegido.

Regla de decisión es:

Si el dato W es inferior al dato crítico se descarta la hipótesis nula y se acepta la hipótesis del investigador.

Si el valor W es superior al dato crítico se descarta la hipótesis del investigador y se acepta la hipótesis nula.

Si $\boldsymbol{n}$ es mayor a 25, entonces la regla de decisión es:

Si $|\boldsymbol{Z_c}| > \boldsymbol{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}$, entonces se rechaza la hipótesis nula.

Si $\boldsymbol{p - valor < \alpha}$, entonces se descartar la hipótesis nula.

Conclusión, existe demostraciones estadísticas apropiadas para rechazar la hipótesis nula.

CAPÍTULO IV
RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se evidencia los resultados del estudio sobre la generalización de la suma de cuadrados a través de recursos didácticos en alumnados del tercer grado de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" de Juliaca periodo del 2020. Los resultados se organizan de la forma siguiente: Primero, se realiza un estudio sobre la naturaleza del abastecimiento de los datos con el objetivo de determinar los estadígrafos paramétricos o no paramétricos; en segundo lugar, se presentan los resultados que permitan alcanzar los objetivos desde el numeral 5 al 7; finalmente en tercer lugar, en el numeral 8 se realiza la discusión resultados.

4.1. Prueba de normalidad

En este subtítulo se reporta los resultados del estudio de naturaleza de la distribución de los datos, la finalidad es establecer si los datos son distribuidos normalmente o no. Este análisis permite decidir sobre qué estadígrafos paramétricos o no paramétricos se utilizará para instituir la relación causal entre las variables: capacidad de generalización y uso de las representaciones gráficas y simbólicas.

La prueba utilizada en este estudio es la Prueba de Shapiro-Wilk al ser una de la más fáciles y potentes. La única posición es que el tamaño de la muestra debe ser igual o más bajo a 50.

Las hipótesis estadísticas de la prueba son:

$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{N}(\mu, \boldsymbol{\sigma^2})$

$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{x_i} \neq \boldsymbol{N}(\mu, \boldsymbol{\sigma^2})$

H_0: Los calificativos de la prueba siguen una distribución normal.

H_1: Los calificativos de la prueba no siguen una distribución normal.

Los resultados del análisis estadístico se muestran en Tabla 5. Se visibiliza los datos recolectados con la pre prueba del grupo experimental 1 y del grupo de control 1 no siguen una distribución normal, porque se observa que los coeficientes de Shapiro-Wilk calculados son menores a los tabulados $\boldsymbol{SW_c < SW_t}$. Así mismo, los datos recolectados con la pos prueba de los grupos experimentales 1 y 2 y de los grupos de control 1 y 2, igualmente, no siguen una distribución normal, porque se observa que los coeficientes de Shapiro-Wilk calculados son menores a los tabulados en todos los casos $\boldsymbol{SW_c < SW_t}$.

Tabla 5

Los coeficientes de Shapiro-Wilk calculada y tabulada de los grupos experimental y de control según pre y posprueba. de los estudiantes del tercer grado de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" en el año 2020.

Grupos intactos	**n**	**Preprueba**		**Posprueba**	
		SW c	**SW t**	**SW c**	**SW t**
Experimental (1)	33	0,936	0,968	0,955	0,968
Control (1)	32	0,880	0,968	0,937	0,968
Experimental (2)	32	--	--	0,952	0,968
Control (2)	31	--	--	0,907	0,968

Fuente: Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de los calificativos de la pre prueba por Grupo, anexos; B1, B2, B3, B4, B5, B6.

En consecuencia, de los resultados de la prueba de Shapiro-Wilk se decide aprovechar el estadígrafo no paramétrico para la contratación de las hipótesis. Para comparar medias entre muestra dependientes o relacionadas se empleó la Prueba de Wilcoxon y así cotejar las medianas de muestras independientes se recurrió a la Prueba U de Mann Whitney.

4.2. Diagnosis de la capacidad de generalización de la sucesión de cuadrados

En este numeral se da a conocer sobre los resultados que permiten lograr el primer objetivo específico "Diagnosticar la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en el educando del grado tercero de educación secundaria antes de la experimentación". Para este diagnóstico se ha aplicado la pre prueba que se adjunta en el Anexo A1 y los resultados de la misma se exponen en el

Anexo A2. Tabla C. Este instrumento se aplicó a dos grupos: Grupo Experimental 1 (GE1) y Grupo de Control 1 (GC1) y para la evaluación se empleó la Prueba U de Mann-Whitney, que es la más adecuada por cuanto los datos no se distribuyen normalmente y por tanto se requiere una prueba no paramétrica.

Una condición necesaria es que las varianzas de los grupos GE1 y GC1 sean homogéneas, para eso realiza la prueba de homocedasticidad, utilizando la Prueba *F* para varianzas del par de muestras independientes. En la Tabla 6, se evidencia los estadígrafos de esta prueba que evidencian que las variables son homogéneas, en repercusión, se admite la hipótesis nula, las variables de las muestras independientes son iguales, porque el *p*-valor $\mathbf{0,176 > 0,05}$.

Tabla 6

Prueba F para varianzas de dos muestras GE1 y GC1.

	GC1	**GE1**
Media	10,78125	10,72727273
Varianza	2,111895161	2,954545455
Observaciones	32	33
Grados de libertad	31	32
F	0,714795285	
P(F<=f) una cola	0,176242765	
Valor crítico para F (una cola)	0,550579769	

Los resultados del análisis de la Prueba U de Mann-Whitney para un par de muestras independientes de variable aleatoria ordinal son los expuestos en la Tabla 7.

Tabla 7

Estadígrafos para la Prueba U de Mann-Whitney para dos muestras independientes GE1 y GC1.

	GC1	**GE1**
Observaciones n_i	32	33
Suma de rangos R_i	1069,5	1075,5
Estadígrafos U_i	514,5	541,5
$U = \min(U_1, U_2)$	514,5	
α	0,05	
Z_c	-0,17714156	
$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dos colas	1,96	
p-valor	0,4296986	

Fuente: Tabla C. Prueba U de Mann Whitney para las Pre Pruebas de los Grupos de Control 1 y Grupo Experimental 1, del Anexo 2.

La prueba de hipótesis no paramétrica considera las hipótesis nula y la del investigador:

$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{Me_1 = Me_2}$

$\boldsymbol{H_1}: \boldsymbol{Me_1 \neq Me_2}$

$\boldsymbol{H_0}$: Los calificativos de la evaluación de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos del Grupo Experimental 1 y el Grupo de Control 1 son iguales.

$\boldsymbol{H_1}$: Los calificativos de la evaluación de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos del Grupo Experimental 1 y el Grupo de Control 1 no son iguales.

El valor del estadístico de prueba $\boldsymbol{U = 514,5}$ se estandarizó puesto que $\boldsymbol{n_1 > 10}$ y $\boldsymbol{n_2 > 10}$, y porque que se sume que U se suministra de forma aproximadamente normal con la expresión $\boldsymbol{Z_c = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}} \sim N(0,1)}$.

Los estadigrafos preseantados en la tabla 4.3 permiten aceptar la hipótesis nula porque $\boldsymbol{|Z| = 0,17}$ calculada es menor que el valor de $\boldsymbol{Z_c}$ para el $\boldsymbol{\alpha = 0,05}$. La regla de decisión que se utiliza revela que si $\boldsymbol{|Z| < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}$ $(\boldsymbol{|-0,17| < 1,96})$, así que no se descarta la hipótesis nula. Por otro lado tambiém se puede adoptar la regla alternativa de decisión si p-valor$>$ $\boldsymbol{\alpha}$ (0,43$>$ $\boldsymbol{0,05}$), así que no se descartar la hipótesis nula.

En conclusión, se asume que el estudiantado del grado tercero de la Institución Educativa Secundaria “Perú BIRF” de los Grupos Experimetal 1 y Grupo de Control 1 al inicio de la experimentación se encuentran en equidad de situaciones respecto a los conocimiento previos sobre la sucesión de los cuadrados de *n* primeros números naturales. Es decir, los calificativos de la evaluación de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos del GE1 y el GC1 1 son iguales.

4.3. Influencia de las representaciones en el desarrollo de la capacidad de generalización

El desarrollo de la capacidad de generalización en la evaluación de las series de los $\boldsymbol{n}$ primeros números naturales es objeto de reporte en este epígrafe. Se presentan lo resultados empíricos que posibilitan el logro del segundo objetivo específico: Valorar la influencia que ejerce el uso de las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos para la evolución de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en el estudiantado del grado tercero de educación secundaria. En el diagnóstico estadístico se aplicó la prueba no paramétrica de los rangos con signo de Wilcoxon, para cotejar los calificativos de las pre y pos prueba del grupo experimental 1, esta prueba es pertinente para dos grupos o muestras relacionados que no cumplen con el supuesto de normalidad. Se utilizó para demostrar que las diferencias entre cada par de calificaciones, pre y pos prueba, se distribuyen de forma simétrica entorno al cero.

Las hipótesis que se contrastan son:

$\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{Me_1 = 0}$, es decir, la mediana de las diferenciaciones entre la pre y pos prueba es igual a cero.

$\boldsymbol{H_1}$: $\boldsymbol{Me_1 \neq 0}$, es decir, la mediana de las diferenciaciones entre la pre y pos prueba es diferente de cero.

$\boldsymbol{H_0}$: Las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos no influyen en el desarrollo de la capacidad de generalización de la serie de los cuadrados de *n* primeros números naturales en los estudiantes del Grupo Experimental 1.

$\boldsymbol{H_1}$: Las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos si influyen en el desarrollo de la capacidad de generalización de la serie de los cuadrados de *n* primeros números naturales en los estudiantes del Grupo Experimental 1.

La Tabla 8 presenta los estadígrafos necesarios para la ejecución de la prueba de hipótesis, los cálculos auxiliares se presentan en el anexo.

Tabla 8

Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon del Grupo Experimental 1.

Grupo	
Observaciones n_i	33
Suma de rangos positivos W^+	0
Suma de rangos negativos W^-	528
$W = \min(W^+, W^-)$	0
α	0,05
Z_c	-3,54396691
$Z_{1\text{-}\frac{\alpha}{2}}$ dos colas	1,96
p-valor	0,00019708

Fuente: Tabla D, Prueba de los rangos con signos de Wilcoxon del Grupo Experimental 1 del Anexo 2.

La regla de decisión que se aplica es que si $|\boldsymbol{Z_c}| > \boldsymbol{Z}_{1\text{-}\frac{\alpha}{2}}$, entonces se descarta la hipótesis nula, en el caso particular de nuestro análisis se ha encontrado que $|\boldsymbol{-3,544}| > \boldsymbol{1,96}$, en consecuencia, se rechaza la hipótesis nula, es decir, la mediana de las diferenciaciones entre la pre y pos prueba es igual a cero; eso implica la mediana de las diferenciaciones entre la pre y pos prueba es diferente de cero. Además, se confirma este resultado si se considera el criterio del *p*-valor, que dice si $\boldsymbol{p - valor <= \alpha}$, es decir $\boldsymbol{0,000197 < 0,05}$, entonces se concluye que, existe indicativo estadística suficiente para descartar la hipótesis nula.

La repercusión teórica de esta prueba de hipótesis es que las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos si inciden en el desenvolvimiento de las capacidades de generalización de la serie de los cuadrados de *n* primeros números naturales en los estudiantes del Grupo Experimental 1. Se ha encontrado demostraciones empíricas para constatar que el uso de representaciones gráficas en relación con las representaciones simbólicas como recurso didáctico si sirve para desarrollar la capacidad de inducir las expresiones generales en resolver los problemas que involucran suma del cuadrado de los *n* primeros números naturales.

4.4. La enseñanza convencional en el desarrollo de la capacidad de generalización

El desarrollo de la capacidad de generalización de la serie de cuadrados de los *n* primeros números naturales recurriendo a una metodología tradicional o convencional se dio en los Grupos de Control 1 y 2. En ese sentido, los grupos de control son una parte importante del experimento científico controlado, permiten conocer la potencialidad del tratamiento de la variable independiente y de esa manera determinar su efectividad de la relación causal. El grupo de control permitió comparar los resultados de manera confiable con el grupo experimental.

En este sentido, en este subtítulo se da cuenta de los resultados que consigue obtener el tercer objetivo específico: Valorar la incidencia de la enseñanza convencional en el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en el alumnado del grado tercero de educación secundaria.

Para la contrastación de las hipótesis se aplicó la prueba no paramétrica de los rangos con signo de Wilcoxon, para cotejar los calificativos de las pre y pos prueba del Grupo de

Control 1, esta prueba es adecuada para dos grupos o muestras relacionados que no cumplen con el supuesto de normalidad. Se utilizó para demostrar que las diferencias entre cada par de calificaciones, pre y pos prueba, se distribuyen de forma simétrica entorno al cero.

Las hipótesis que se contrastan son:

$\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{Me_1 = 0}$, es decir, la mediana de las diferenciaciones entre la pre y pos prueba es igual a cero.

$\boldsymbol{H_1}$: $\boldsymbol{Me_1 \neq 0}$, es decir, la mediana de las diferenciaciones entre la pre y pos prueba es diferente de cero.

$\boldsymbol{H_0}$: La enseñanza convencional no influyen en el desarrollo de la capacidad de generalización de la serie de los cuadrados de *n* primeros números naturales en los estudiantes del Grupo de Control 1.

$\boldsymbol{H_1}$: La enseñanza convencional influyen en el desarrollo de la capacidad de generalización de la serie de los cuadrados de *n* primeros números naturales en los estudiantes del Grupo de Control 1.

En la Tabla 9 presenta los estadígrafos requeridos para la realización de la prueba de hipótesis, los cálculos auxiliares se presentan en el anexo.

Tabla 9

Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon del Grupo de Control 1.

Grupo	
Observaciones n_i	32
Suma de rangos positivos W^+	24
Suma de rangos negativos W^-	411
$W = \min(W^+, W^-)$	24
α	0,05
Z_c	-3,17331531

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dos colas	1,96
p-valor	0,00075354

Fuente: Tabla E, Prueba de los rangos con signos de Wilcoxon del Grupo de Control del Anexo 2

La regla de decisión adoptada es, si $|Z_c| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, así que se descarta la hipótesis nula, en la prueba de hipótesis que nos ocupa se ha encontrado que $|-3{,}173| > 1{,}96$, en consecuencia, se rechaza la hipótesis nula, es decir, la mediana de las diferenciaciones entre la pre y pos prueba es igual a cero; eso implica que la mediana de las diferenciaciones entre la pre y pos prueba del Grupo de Control 2 es diferente de cero. Por otro lado, para mayor certeza se considera el criterio del p-valor, que dice si $p-valor <= \alpha,$ es decir $0{,}0007 < 0{,}05$, entonces se concluye que, existe demostraciones estadísticas suficiente para descartar la hipótesis nula.

Los resultados del análisis estadístico de la pre y pos prueba aplicada al Grupo de control 1, nos llevan a concluir que la enseñanza convencional de la generalización de la serie de cuadrados de los *n* primeros números naturales, sin el uso de las representaciones gráficas y simbólicas como recursos didácticos, permiten un desarrollo incipiente de la capacidad generalización.

4.5. Diferencias en el desarrollo de la capacidad de generalización

El objetivo es aportar evidencias empíricas para afirmar con un 95% de confianza que la capacidad de generalización se puede desarrollar cuando se resuelven problemas de deducción, inducción y redescubrimiento de las fórmulas, como expresiones algebraicas generales, para sumar, por ejemplo, la serie de números cuadrados utilizando diferentes registros de representaciones. En este epígrafe se presenta los resultados del estudio que posibilitan lograr el objetivo específico cuatro: Establecer la mayor incidencia positiva del uso de las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos para el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos, frente a la enseñanza convencional en el educando del grado tercero de educación secundaria después de la experimentación.

Para determinar esta incidencia de los archivos de representación en el desarrollo de la capacidad de generalización se ha adoptado el diseño de Solomon de cuatro grupos en su adaptación para grupos intactos, de ahí que en adelante lo denominares diseño cuasiexperimental de Solomon de cuatro grupos (Solomon, 1949).

Este diseño permite con cierto rigor la efectividad del tratamiento experimental de los registros de representación sobre la variable dependiente, en este caso el perfeccionamiento de la capacidad de generalización. Además de la efectividad, este diseño también permite examinar la potencial interacción entre la pre y pos prueba. Este diseño permite conocer si la pre prueba, interactúa con el posible efecto de la variable independiente, cautelando de esta manera la validez interior y exterior del estudio.

Tabla 10

Diseño de Investigación de cuatro grupos de Solomon.

Grupos intactos	**Pre-Prueba**	**Tratamiento**	**Pos-Prueba**
Experimental (1)	O_1	X_{exp}	O_2
Control (1)	O_3	X_{con}	O_4
Experimental (2)	-.-	X_{exp}	O_5
Control (2)	-.-	X_{con}	O_6

El diseño de Solomon de cuatro grupos de investigación permite probar la efectividad del tratamiento experimental (X_{exp}) realizando las comparaciones de dos tipos, una de muestras dependientes o relacionadas, esta prueba se realizó en el epígrafe 4.3, donde se compara la Observación 2 con observación 1, es decir, $O_2 \neq O_1$. El segundo tipo de comparaciones son de muestras independientes y se han determinado cuatro. A continuación, se evidencia el análisis de cada caso, para tal efecto se aprovechó de la prueba U de Mann-Whitney para el par de muestras independientes.

Primero: Observación 2 con observación 4, es decir, $O_4 < O_2$. (Muestras independientes)

Tabla 11

Diseño de Investigación, cuasi experimental de dos grupos con pre y pos prueba.

Grupos intactos	**Pre-Prueba**	**Tratamiento**	**Pos-Prueba**
Experimental (1)	O_1	X_{exp}	O_2
Control (1)	O_3	X_{con}	O_4

En este caso se visualiza el diseño cuasi experimental del par de grupos con pre pruebas y un tratamiento experimental. Los resultados del análisis de la Prueba U de Mann-Whitney se evidencian en la Tabla 12.

Tabla 12

Estadígrafos para la Prueba U de Mann-Whitney para comparar la O_4 de GC1 y O_2 de GE1.

	O_4 de GC1	**O_2 de GE1**
Observaciones n_i	32	33
Suma de rangos R_i	695	1450
Estadígrafos U_i	889	167
$U = \min(U_1, U_2)$	167	
α	0,05	
Z_c	-4,73689653	
$Z_{1\text{-}\frac{\alpha}{2}}$ dos colas	1,96	
p-valor	1,0851E-06	

Fuente: Tabla F Prueba U de Mann Whitney para Muestras independientes de las Pos Pruebas: $O_4<O_2$. del Anexo 2

Las hipótesis son:

$\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{Me_1 = Me_2}$

$\boldsymbol{H_1}$: $\boldsymbol{Me_1 \neq Me_2}$

$\boldsymbol{H_0}$: Los calificativos de las pos pruebas de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos del Grupo Experimental 1 y el Grupo de Control 1 son iguales.

$\boldsymbol{H_1}$: Los calificativos de las pos pruebas de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos del Grupo Experimental 1 y el Grupo de Control 1 no son iguales.

Regla de decisión: si $|\boldsymbol{Z_c}| > \boldsymbol{Z}_{1\text{-}\frac{\alpha}{2}}$, así que se descarta la hipótesis nula.

Como $|\boldsymbol{-4,74}| < \boldsymbol{1,96}$, entonces se contradice la hipótesis nula. Por otro lado también se puede adoptar la regla alternativa de decisión: si $\boldsymbol{p-valor} = \mathbf{1,0851E-06} < \mathbf{0,05}$, entonces se contradice la hipótesis nula.

Conclusión, los resultados de la pos prueba de los Grupo Experiental 1 y Grupo de Control 1 revelan que el tratamiento experimental fue efectivo para desarrollar la capacidad de generalización, la prueba de hipótesis confirma la percepción preliminar, pues la media aritmética de la $\boldsymbol{O_2} = \mathbf{14,7}$ es mayor a la media aritmética de la $\boldsymbol{O_4} = \mathbf{12,8}$.

Segundo caso: Observación 5 con observación 6, es decir, $O_6 < O_5$. (Muestras independientes)

Tabla 13

Diseño de Investigación, cuasi experimental de dos grupos solo con pos prueba.

Grupos intactos	**Pre-Prueba**	**Tratamiento**	**Pos-Prueba**
Experimental (2)	-.-	X_{exp}	O_5
Control (2)	-.-	X_{con}	O_6

Este caso corresponde a un diseño cuasi experimental de un par de grupos sin pre pruebas y un tratamiento experimental. Los resultados del análisis de la Prueba U de Mann-Whitney se exponen en la Tabla 14.

Tabla 14

Estadígrafos para la Prueba U de Mann-Whitney para comparar la O_6 de GC2 y O_5 de GE2.

	$\mathbf{O_6}$ **de GC2**	$\mathbf{O_5}$ **de GE2**

Observaciones n_i	31	32
Suma de rangos R_i	651,5	1364,5
Estadígrafos U_i	836,5	155,5
$U = \min(U_1, U_2)$	155,5	
α	0,05	
Z_c	-4,68125087	
$Z_{1\text{-}\frac{\alpha}{2}}$ dos colas	1,96	
p-valor	1,4256E-06	

Fuente: Tabla G Prueba U de Mann Whitney para Muestras independientes de las Pos Pruebas: O_6<O_5. del Anexo 2

Las hipótesis son:

$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{Me_1 = Me_2}$

$\boldsymbol{H_1}: \boldsymbol{Me_1 \neq Me_2}$

$\boldsymbol{H_0}$: Los calificativos de las pos pruebas de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos del Grupo Experimental 2 y el Grupo de Control 2 son iguales.

$\boldsymbol{H_1}$: Los calificativos de las pos pruebas de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos del Grupo Experimental 2 y el Grupo de Control 2 no son iguales.

Regla de decisión: si $|\boldsymbol{Z_c}| > \boldsymbol{Z}_{1\text{-}\frac{\alpha}{2}}$, por tanto se descarta la hipótesis nula.

Como $\boldsymbol{|-4,68| < 1,96}$, entonces se impugna la hipótesis nula. Por otro lado tambiém se puede adoptar la regla alternativa de decisión: si $\boldsymbol{p - valor = 1,4256\text{E} - 06 < 0,05}$, por ende se impugna la hipótesis nula.

Conclusión, los resultados de la pos prueba de los Grupo Experiental 2 y Grupo de Control 2 revelan que el tratamiento experimental fue efectivo para desarrollar la capacidad de generalización, la prueba de hipótesis confirma la percepción preliminar, pues la media aritmética de la $\boldsymbol{O_5 = 15}$ es mayor a la media aritmética de la $\boldsymbol{O_6 = 13,2}$.

Tercero caso: Observación 5 con observación 4, es decir, $O_4 < O_5$. (Muestras independientes)

Tabla 15

Diseño de Investigación, cuasi experimental de dos grupos con pre y pos prueba en el grupo de control y sin pre prueba en el grupo experimental.

Grupos intactos	Pre-Prueba	Tratamiento	Pos-Prueba
Control (1)	O_3	X_{con}	O_4
Experimental (2)	-.-	X_{exp}	O_5

Este caso pertenece a un diseño cuasi experimental de un par de grupos con pre pruebas en el Grupo de Control 1 y sin pre prueba en el Grupo Experimental 2 y un tratamiento experimental. Los resultados del análisis de la Prueba U de Mann-Whitney se exponen en la Tabla 16.

Tabla 16

Estadígrafos para la Prueba U de Mann-Whitney para comparar la O_4 de GC1 y O_5 de GE2.

	O_4 *de GC1*	O_5 *de GE2*
Observaciones n_i	32	32
Suma de rangos R_i	650,5	1429,5
Estadígrafos U_i	901,5	122,5
$U = \min(U_1, U_2)$	122,5	
α	0,05	
Z_c	-5,22987644	
$Z_{1\text{-}\frac{\alpha}{2}}$ dos colas	1,96	
p-valor	8,4812E-08	

Fuente: Tabla H Prueba U de Mann Whitney para Muestras independientes de las Pos Pruebas: $O_4<O_5$. del Anexo 2

Las hipótesis son:

$\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{Me_1 = Me_2}$

$\boldsymbol{H_1}$: $\boldsymbol{Me_1 \neq Me_2}$

$\boldsymbol{H_0}$: Los calificativos de las pos pruebas de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos del Grupo Experimental 2 y el Grupo de Control 1 son iguales.

$\boldsymbol{H_1}$: Los calificativos de las pos pruebas de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos del Grupo Experimental 2 y el Grupo de Control 1 no son iguales.

Regla de decisión: si $|\boldsymbol{Z_c}| > \boldsymbol{Z}_{1\text{-}\frac{\alpha}{2}}$, por ende, s se descarta la hipótesis nula.

Como $|\boldsymbol{-5,23}| < \boldsymbol{1,96}$, entonces se descrata la hipótesis nula. Por otro lado tambiém se puede adoptar la regla alternativa de decisión: si $\boldsymbol{p - valor = 8,4812\mathrm{E} - 08 < 0,05}$, por ende se descarta la hipótesis nula.

Conclusión, los resultados de la pos prueba de los Grupo Experiental 2 y Grupo de Control 1 revelan que el tratamiento experimental fue efectivo para desarrollar la capacidad de generalización, la prueba de hipótesis confirma la percepción preliminar, pues la media aritmética de la $\boldsymbol{O_5 = 15}$ es mayor a la media aritmética de la $\boldsymbol{O_4 = 12,78}$.

Cuarto caso: Observación 2 con observación 6, es decir, $O_6 < O_2$. (Muestras independientes)

Tabla 17

Diseño de Investigación, cuasi experimental de dos grupos con pre y pos prueba en el grupo experimental y solo con pre prueba en el grupo de control.

Grupos intactos	***Pre-Prueba***	***Tratamiento***	***Pos-Prueba***
Experimental (1)	O_1	X_{exp}	O_2
Control (2)	-.-	X_{con}	O_6

Este caso corresponde a un diseño cuasi experimental de dos grupos sin pre pruebas en el Grupo de Control 2 y con pre prueba en el Grupo Experimental 1 y un tratamiento experimental. Los resultados de la evaluación de la Prueba U de Mann-Whitney se exponen en la Tabla 18.

Tabla 18

Estadígrafos para la Prueba U de Mann-Whitney para comparar la O_6 de GC2 y O_2 de GE1.

	O_6 ***de GC2***	O_2 ***de GE1***
Observaciones n_i	31	33
Suma de rangos R_i	698	1382
Estadígrafos U_i	821	202
$U = \min(U_1, U_2)$	202	
α	0,05	
Z_c	-4,15773477	
$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dos colas	1,96	
p-valor	1,6071E-05	

Fuente: Tabla I Prueba U de Mann Whitney para Muestras independientes de las Pos Pruebas: O_6<O_2. del Anexo 2

Las hipótesis son:

$\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{Me_1 = Me_2}$

$\boldsymbol{H_1}$: $\boldsymbol{Me_1 \neq Me_2}$

$\boldsymbol{H_0}$: Los calificativos de las pos pruebas de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos del Grupo Experimental 1 y el Grupo de Control 2 son iguales.

$\boldsymbol{H_1}$: Los calificativos de las pos pruebas de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos del Grupo Experimental 1 y el Grupo de Control 2 no son iguales.

Regla de decisión: si $|\boldsymbol{Z_c}| > \boldsymbol{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}$, por tanto, se descarta la hipótesis nula.

Como $|-\mathbf{4,16}| < \mathbf{1,96}$, entonces se descarta la hipótesis nula. Por otro lado también se puede adoptar la regla alternativa de decisión: si $\boldsymbol{p - valor} = \mathbf{1,6071E - 05} < \mathbf{0,05}$, por ende se descarta la hipótesis nula.

Conclusión, los resultados de la pos prueba de los Grupo Experiental 1 y Grupo de Control 2 revelan que el tratamiento experimental fue efectivo para desarrollar la capacidad de generalización, la prueba de hipótesis confirma la percepción preliminar, pues la media aritmética de la $\boldsymbol{O_2} = \mathbf{14,7}$ es mayor a la media aritmética de la $\boldsymbol{O_6} = \mathbf{13,2}$.

Se puede afirmar categóricamente que, si todas estas comparaciones coinciden entre sí, entonces es altamente probable correcto inferir que la acción del tratamiento, uso de registros de representación, ha sido efectivo para desarrollar la capacidad de generalización. De esta manera el diseño de Solomon permite obtener cuatro pruebas independientes para contrastar la misma hipótesis.

Con la finalidad de aportar evidencias empíricas para demostrar que el uso de las representaciones gráficas y simbólicas en la instrucción de la suma de cuadrados de los *n* primeros números naturales es efectiva para desarrollar la capacidad de generalización, se ha aplicado una pre y pos prueba que se muestran en el Anexo A.1. Los resultados de las pos pruebas aplicado a los cuatro grupos de Solomon es materia de una prueba de hipótesis utilizando la Prueba U de Mann Whitney, que compara los resultados de los calificativos de los dos Grupos Experimentales y dos Grupos de Control y se colige las siguientes proposiciones:

Primero: Como efecto de la experimentación de una enseñanza utilizando las representaciones gráficas y simbólicas como material didáctico, los estudiantes del grupo experimental (GE1) que aplicaron a una pre y pos prueba tienen más desarrollada la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos, que los alumnos del grupo de control (GC1) que también aplicaron la pre y pos prueba.

Segundo: A consecuencia de la experimentación de una enseñanza basada en las representaciones gráficas y simbólicas como material didáctico, los estudiantes del grupo experimental (GE2) a quienes se les administró solo la pos prueba tienen más desarrollada la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos, que los alumnos del grupo de control (GC2) que también aplicaron solo a una pos prueba.

Tercero: Como efecto de la experimentación de una enseñanza fundada en las representaciones gráficas y simbólicas como material didáctico, los alumnos del grupo experimental (GE2) que aplicaron solo la pos prueba tienen más desarrollada la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos, que el alumnado del grupo de control (GC1) a quienes se les administró la pre y pos prueba. En este caso se desestima la interferencia de la pre prueba en la validez interna de investigación pues el grupo experimental (GE2) no conocía con anticipación la naturaleza de la prueba.

Cuarto: A resultas de la experimentación de una enseñanza basada en las representaciones gráficas y simbólicas como material didáctico, los estudiantes del grupo experimental (GE1) a quienes se les administró la pre y pos prueba tienen más desarrollada la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos, que los alumnos del grupo de control (GC2) a quienes se les administró solo la pos prueba.

4.6. Discusión de resultados

En esta investigación se han formulado la pregunta general: ¿Las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos, de la sucesión de los cuadrados de los *n* primeros términos son más efectivos para desarrollar la capacidad de generalización, en comparación con la enseñanza convencional en el alumnado del grado tercero de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" durante el año escolar 2020? A continuación, se discute los resultados obtenidos para responderla.

Respecto a la dependencia de los registros de representaciones y el desarrollo de la cabida de generalización se identificado que, el uso de las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos permite lograr un mayor desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en el estudiantado del grado tercero de educación secundaria. Al igual que otras investigaciones se ha constatado que cuando se utiliza varias representaciones de las sucesiones, mayor es la capacidad para encontrar la expresión general del *n-ésimo* término a partir de los casos particulares. Es así que (García, 1999. p. 17) concluye que el contexto del enunciado del problema determina la variedad de respuestas, así por ejemplo, si el enunciado incluye texto, dibujos y representaciones simbólicas, permite al alumno usar la estrategia más factible para la solución del problema con mayor éxito.

Por otro lado, los resultados cuantitativos obtenidos contribuyen a la comprensión de la utilidad del uso de representaciones gráficas y simbólicas, como fue el objetivo del estudio. Estos resultados concuerdan con los resultados del estudio de Cañadas, (Castro y Castro, 2012, p. 569) quienes afirman que las representaciones gráficas, en especial, contribuyen a lograr encontrar el enunciado general para cualquier término de la sucesión, sin embargo, enfatizan que las representaciones ilustran los rasgos comunes de los términos particulares de una sucesión, mas no proporcionan la expresión general de forma directa, más bien ayuda a encontrarla. Añaden que, los estudiantes suelen usar otras representaciones como la simbólica en combinación con las gráficas, en este sentido, aseveran que las representaciones gráficas son un elemento esencial para el desarrollo del pensamiento algebraico y lograr expresar la generalización verbal o algebraica. Estos resultados encontrados en estudios antecedentes confirman las conclusiones que confirman la hipótesis general del este estudio.

Los resultados empíricos, como la Pruebas U de Mann Whitney que compara los resultados de la pos prueba de los cuatro grupos de Solomon contribuyeron suficientes evidencias empíricas para confirmar que la enseñanza y aprendizaje basada en las representaciones gráficas y simbólicas como material didáctico permite desarrollar la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos, es decir, se confirma la hipótesis: los registros de representación y la elaboración de las tres actividades cognitivas: formación, transformación y conversión permiten lograr la generalización, es decir, encontrar la expresión general de una sucesión de números. Estos resultados son respaldados por el estudio de (Valenzuela y Gutiérrez, 2018), quienes concluyen que desde los inicios de la educación básica es necesario usar estrategias visuales, registros de representación gráfica, para lograr que los estudiantes induzcan, confirmen y expresen relaciones generales. En esta misma visión (Torres *et al*., 2002, p. 243-245) en su estudio de generalización y uso de modelos aseveran que los modelos geométricos movilizan el reconocimiento de expresiones equivalentes, la significación de operaciones como la factorización y la significación de propiedades como la distributiva en la actividad algebraica y la variación de una magnitud. Consideran que los modelos representacionales permiten realizar traducciones entre distintos tipos de lenguajes, es decir transitar de lo concreto a lo abstracto, sin embargo, evidenciaron que los estudiantes tienen la tendencia de permanecer en el nivel concreto.

Como en el estudio de Cortés, Hitt y Saboya sobre el tránsito de la aritmética al álgebra, el presente estudio ha mostrado que los estudiantes tienen mayor éxito en encontrar la expresión general de una sucesión cuando utilizan representaciones gráficas y simbólicas y en el contexto tabular del enunciado del problema, es así que (Cortés *et al*., 2014, p. 247) corroboran con sus resultados que el diseño de actividades matemáticas sobre números triangulares representados gráficamente han promovido en los estudiantes procesos de visualización, donde las representaciones funcionales, jugaron un papel relevante en la construcción de una estructura cognitiva ligada a la generalización.

Finalmente, este trabajo aporta como novedad la confirmación cuantitativa de los resultados de trabajos precedentes que mostraron evidencias abundantes sobre la relación causal que existe entre el uso de registros de representación y el perfeccionamiento de la capacidad de generalización concretado en el enunciado del término general de una sucesión.

CONCLUSIONES

Primera: Los resultados empíricos evidencian que los educandos del grado tercero de educación secundaria antes de la experimentación apenas logran entender el significado de una sucesión de los cuadrados de *n* primeros números naturales y su generalización al inicio de la experiencia, se encontró que, los calificativos de la evaluación de la capacidad de generalización de la serie de los cuadrados de *n* primeros términos del GE1 y el GC1 1 son iguales.

Segunda: Se ha encontrado evidencias empíricas que permiten afirmar categóricamente que, el uso de las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos permite lograr un mayor desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en educandos del grado tercero de educación secundaria.

Tercera: La enseñanza convencional de la generalización de la serie de cuadrados de los *n* primeros números naturales, sin el uso de las representaciones gráficas y simbólicas como recursos didácticos, permiten un desarrollo incipiente de la capacidad generalización.

Cuarta: Las Pruebas U de Mann Whitney que compara los resultados de la pos prueba de los cuatro grupos de Solomon contribuye suficientes evidencias empíricas para confirmar que la enseñanza y aprendizaje basada en las representaciones gráficas y simbólicas como material didáctico permite desarrollar la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos en los educandos del grado tercero del Centro Educativo Secundario “Perú BIRF” de Juliaca.

RECOMENDACIONES

Primera: A los profesores de matemática de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" de Juliaca, que enseñan en el tercer grado, diagnosticar los conocimientos previos sobre sucesión de los cuadrados de *n* primeros números naturales y su generalización, para con base en este diagnóstico puedan desarrollar actividades significativas que permitan desarrollar la capacidad de generalización de la serie de los números cuadrados.

Segunda: A los profesores de matemática en la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" de Juliaca, utilizar las representaciones gráficas y simbólicas en el diseño de actividades didácticas para la enseñanza de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros números naturales, porque la traducción entre dos registros de representación permite una mayor comprensión de los procesos de generalización.

Tercera: A los profesores de matemática de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" de Juliaca, que si se desea lograr un pleno desarrollo de la capacidad de generalización es necesario diseñar actividades didácticas que eviten las metodologías convencionales o tradicionales, donde prima los registros de representación simbólica.

Cuarta: Se recomienda a los especialistas de la UGEL San Román y docentes de matemática de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" de Juliaca, capacitarse y diseñar sesiones de aprendiza que articulen diferentes registros de representación para lograr mayor comprensión de los conceptos matemáticos en los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

Akkan, Y. (2013). Comparison of 6 th -8 th Graders efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns estudo comparativo da eficácia de estratégias e representações usadas por estudantes da escola básica em problemas relativos à generalização d. *Bolema*, *27*(47), 703–732.

Ávila, S., López, C., & Luna, J. (2010). La generalización de patrones cuadráticos: un estudio con alumnos de licenciatura en matemáticas. *culcyt*, *7*(40), 34–40.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. *proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, *4*, 121–128. recuperado de http://www.emis.ams.org/proceedings/PME29/PME29CompleteProc/PME29Vol4Mul_Wu.pdf#page=127

Cooper, Tom; Warren, E. (2008). Years 2 to 6 students' Ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. *mathematics teaching-research journal*, *14*(4), 106–128. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Correa, H. E. (2017). *Estrategias y formas de razonamiento en estudiantes de undécimo grado en tareas de generalización de sucesiones y series polinomiales*. Universidad de Medellín.

Davydov, V. V. (1990). Types of generalization in instructionn: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. *soviet studies in mathematics education Volume 2*, 1–223. Recuperado de: https://www.marxists.org/archive/davydov/generalization/generalization.pdf

Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. (D. Kluwer (ed.); Advanced M).

Engeström, Y. (2001). *Expansive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization*. university of california, san diego, USA.

Feifei, B. (2005). *Diagnostic assessment of student learning pre-algebra patterns*.

García-cruz, J. A., & Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. *Proceeding of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 329–336. Recuperado de http://webpages.ull.es/users/jagcruz/Articulos/pme98.pdf

Hernandez, R., Fernandez, C., & Baptirta, P. (2010). *“Metodologia de la investigacion” Mexico : McGraw - Hill*.

Krutetskii, V. (1976). La Psicología de las habilidades matemáticas en niños escolares. *Prensa de la Universidad de Chicago.*

Mason, J; Graham, A; Pimm, D; Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra*. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Mason, J. (1996). *Expressing generality and roots of algebra*. 65–86.

Minedu. (2015). Rutas de aprendizaje. ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes? *Secretaria MINEDU*, 61. http://www.minedu.gob.pe/rutas-del-aprendizaje/secundaria.php#

Orton, A; Orton, J. (1996). Making sense of children’s patterning. En proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of mathematics education. *Universidad de Valencia*, *4*, 83–90.

Perez, J. J. (2005). La generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del algebra elemental. *Journal of chemical information and modeling*, *53*(9), 1689–1699.

Radford, L. (2013). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14–23.

Rangel, L. M. (2012). *Patrones y regularidades numéricas: Razonamiento inductivo*. 1–104.

Rubinshtein, S. L. (1994). Thinking and ways of investigating it. *thinking and ways of investigating It*, *32*(5), 63–93. https://doi.org/10.2753/rpo1061-0405320563

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational studies in mathematics*, *20*(2), 147–164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

UMC-MINEDU. (2019). *Informe de resultados para docentes. Matemática 2do. Grado de Secundaria.*

Valenzuela, J., & Gutiérrez, V. E. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. *Educacion Matematica*, *30*(2), 49–72. https://doi.org/10.24844/EM3002.03

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. 139.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and language*. 161.

ANEXOS

Anexo 1. Material experimental

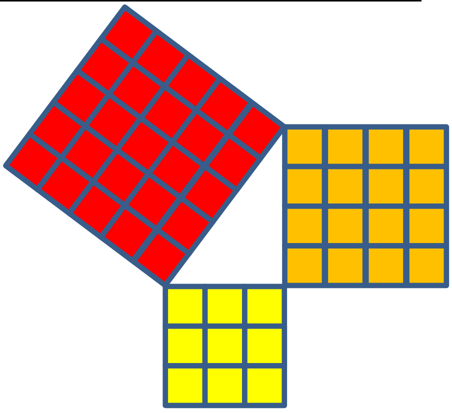
Pre Prueba de Suma de Cuadrados

NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA		GRADO	SECCIÓN
DOCENTE EVALUADO	NOMBRES	APELLIDOS	

Señor estudiante mediante esta prueba se pretende evaluar los conocimientos su capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos matemáticos. Se recomienda que todos los cálculos y procesos de resolución se desarrollen en los espacios designados para ese fin, la evaluación consta de 4 cuestiones que usted debe resolver en 90 minutos. Los animo a resolver las situaciones, con la certeza que tendrá éxito, adelante.

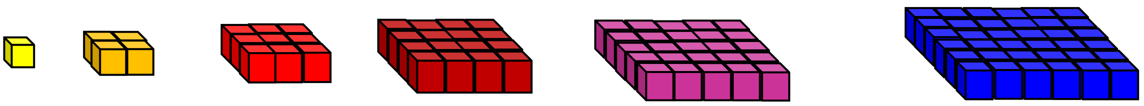
Problema 1. Los números o ternas de Pitágoras. Realizar las operaciones y representaciones gráficas de las sumas de cuadrados:

$3^2 + 4^2 =$

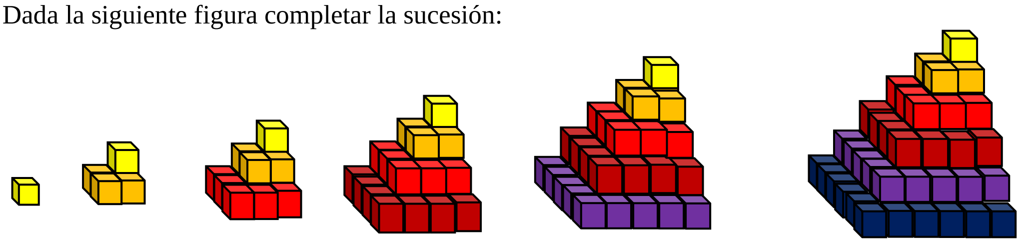


Problema 2. Determinar el valor de *x*:

$$x = 1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2$$



Problema 3. Dada la siguiente figura completar la sucesión:



	Primer Término	Segundo Término	Tercer Término	Cuarto Término	Quinto Término	Sexto Término
Número de cubos	1	5	14			

¿Cuántos cubos tendrá la figura del término *n*-ésimo?

Problema 4. Determinar el valor de *x*:

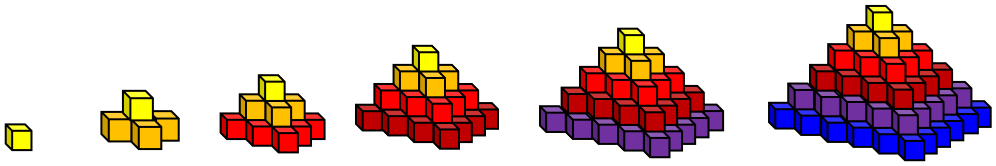
$$x = 5^2 + 6^2 + 7^2 + \cdots + n^2$$

Pos Prueba de Suma de Cuadrados

NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA			GRADO	SECCIÓN
DOCENTE EVALUADO	NOMBRES	APELLIDOS		

Señor estudiante mediante esta prueba se pretende evaluar los conocimientos su capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de *n* primeros términos matemáticos. Se recomienda que todos los cálculos y procesos de resolución se desarrollen en los espacios designados para ese fin, la evaluación consta de 4 cuestiones que usted debe resolver en 90 minutos. Los animo a resolver las situaciones, con la certeza que tendrá éxito, adelante.

Problema 1. Dada la siguiente figura completar la sucesión:



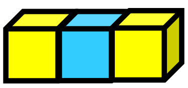
	Primer Término	Segundo Término	Tercer Término	Cuarto Término	Quinto Término	Sexto Término
Número de cubos	1	5	14			

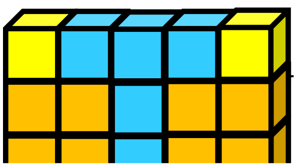
¿Cuántos cubos tendrá la figura del término trigésimo?

¿Cuántos cubos tendrá la figura del término *n*-ésimo?

Problema 2. Con ayuda de la figura adjunta inducir o "redescubrir" la fórmula de la suma de cuadrados para cada caso particular:

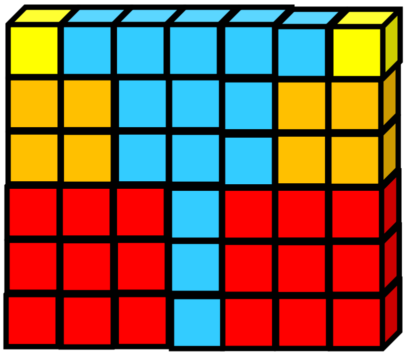
$1^2 =$



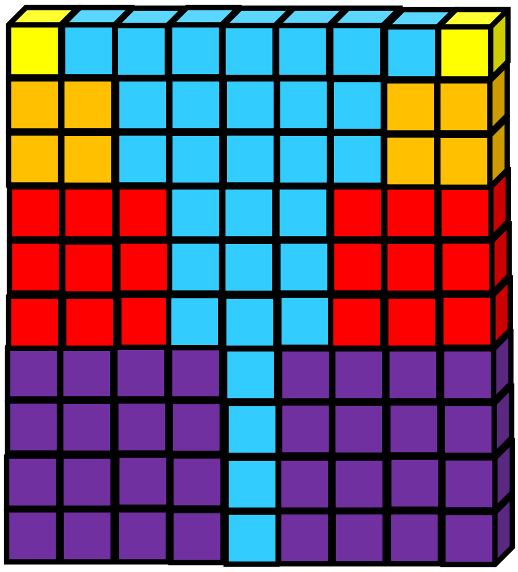


$1^2 + 2^2 =$

$1^2 + 2^2 + 3^2 =$



$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 =$



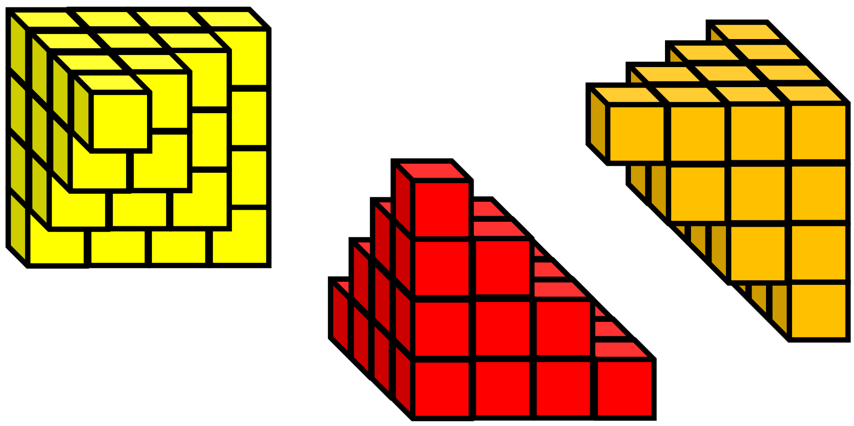
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 17^2 =$

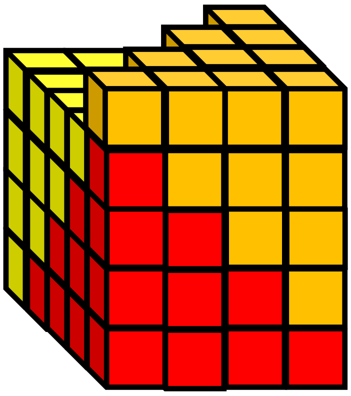
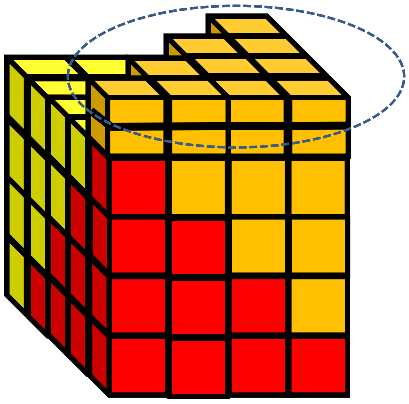
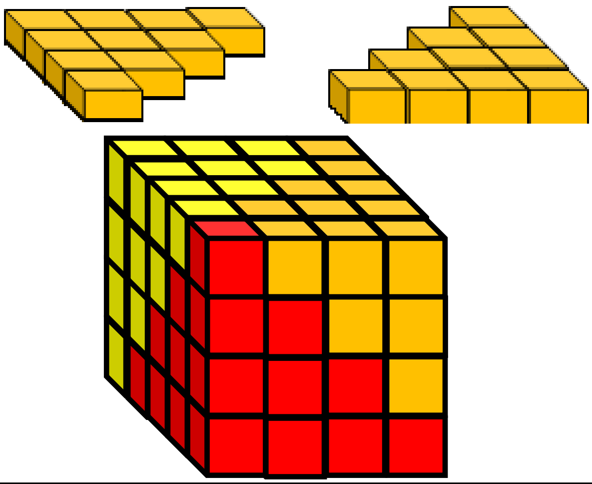
A continuación, inducir o redescubrir la fórmula para sumar los cuadrados de los n primeros números naturales:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 =$

Problema 3. Tenemos el caso particular de la suma de cuadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 =¿?$

Tenemos las representaciones gráficas, tres veces las sumas $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$



La representación del ensamblado de las tres sumas	Corte de la suma $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
	
Nuevo ensamble de los cortes:	
	

A partir del análisis gráfico, calcular la suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

Luego calcular la suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 7^2$

Seguidamente, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 17^2$

Finalmente, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

Problema 4. Determinar el valor de S:

$$S = k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 + \cdots + (k+n)^2$$

Anexo 2. Tablas de cálculos de los estadígrafos de Pruebas de Hipótesis y Regla de Decisión.

Tabla A. Calificativos de la Pre y Pos Prueba sobre Generalización de Suma de Cuadrados.

	Pre Prueba				Post Prueba			
	Grupo de Control 1 GC1	Grupo de Control 2 GC2	Grupo Experimental 1 GE1	Grupo Experimental 2 GE2	Grupo de Control 1 GC1	Grupo de Control 2 GC2	Grupo Experimental 1 GE1	Grupo Experimental 2 GE2
1	11		12		12	13	14	16
2	10		13		12	14	14	16
3	9		13		13	13	15	15
4	10		13		11	14	16	13
5	11		12		11	14	16	18
6	11		11		12	14	14	12
7	8		11		13	13	14	16
8	9		10		14	14	14	17
9	12		10		14	14	15	14
10	12		12		11	13	13	14
11	11		9		15	11	12	14
12	12		10		14	12	16	15
13	12		8		14	12	15	16
14	12		12		12	12	17	15
15	11		12		13	15	16	14
16	12		9		14	15	15	16
17	9		9		13	13	14	16
18	8		13		14	14	15	14
19	11		10		12	13	13	14
20	12		10		13	15	16	15
21	12		8		11	12	15	14
22	11		8		12	15	13	14
23	12		11		13	13	18	14
24	11		9		15	13	17	15
25	11		9		14	13	15	15
26	9		10		12	14	14	17
27	9		12		12	12	16	15
28	11		13		10	12	16	13
29	8		11		13	14	17	16
30	12		11		15	12	15	15
31	13		8		13	12	15	17
32	13		14		12		14	15
33			11				14	

Tabla B.1. Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de los calificativos de la pre prueba del Grupo de Control 1.

i	x_i	Potencia(x_i-MED)2	a_i	x_i INV	Dif(x_i-x_iINV)	(a_i) Dif(x_i-x_iINV)
1	8	7,735351563	0,4188	13	-5	-2,094
2	8	7,735351563	0,2898	13	-5	-1,449
3	8	7,735351563	0,2463	12	-4	-0,9852
4	9	3,172851563	0,2141	12	-3	-0,6423
5	9	3,172851563	0,1878	12	-3	-0,5634
6	9	3,172851563	0,1651	12	-3	-0,4953
7	9	3,172851563	0,1449	12	-3	-0,4347
8	9	3,172851563	0,1265	12	-3	-0,3795
9	10	0,610351563	0,1093	12	-2	-0,2186
10	10	0,610351563	0,0931	12	-2	-0,1862
11	11	0,047851563	0,0777	12	-1	-0,0777
12	11	0,047851563	0,0629	12	-1	-0,0629
13	11	0,047851563	0,0485	11	0	0
14	11	0,047851563	0,0344	11	0	0
15	11	0,047851563	0,0206	11	0	0
16	11	0,047851563	0,0068	11	0	0
17	11	0,047851563		11		
18	11	0,047851563		11		
19	11	0,047851563		11		
20	11	0,047851563		11		
21	12	1,485351563		11		
22	12	1,485351563		11		
23	12	1,485351563		10		
24	12	1,485351563		10		
25	12	1,485351563		9		
26	12	1,485351563		9		
27	12	1,485351563		9		
28	12	1,485351563		9		
29	12	1,485351563		9		
30	12	1,485351563		8		
31	13	4,922851563		8		
32	13	4,922851563		8		
Sumas		65,46875				-7,5888

Regla de decisión de *Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de los calificativos de la pre prueba del Grupo de Control 1.*

Hipótesis estadísticas

$H_0: x_i = N(\mu, s^2)$.

$H_1: x_i \neq N(\mu, s^2)$.

Los calificativos de la pre prueba del Grupo de Control 1 siguen una distribución normal.

Los calificativos de la pre prueba del Grupo de Control 1 **no** siguen una distribución normal.

Estadígrafos

Media	**10,78125**
Suma de Potencia $(\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{MED})^2$	65,46875
Suma ($\boldsymbol{a_i}$)(Dif ($\boldsymbol{x_i}$-$\boldsymbol{x_i}$INV))	-7,5888
SW c	0,87965457
SW t (α=0,05)	0,968
p-valor	

Regla de decisión:

Como $SW_c < SW_t$, entonces se rechazar H_0

Otra alternativa de decisión:

Tabla B.2. Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de los calificativos de la pre prueba del Grupo Experimental 1.

i	x_i	Potencia(x_i-MED)2	a_i	x_i INV	Dif(x_i-x_iINV)	(a_i) Dif(x_i-x_iINV)
1	8	7,438016529	0,4156	14	-6	-2,4936
2	8	7,438016529	0,2876	13	-5	-1,438
3	8	7,438016529	0,2451	13	-5	-1,2255
4	8	7,438016529	0,2137	13	-5	-1,0685
5	9	2,983471074	0,188	13	-4	-0,752
6	9	2,983471074	0,166	13	-4	-0,664
7	9	2,983471074	0,1463	12	-3	-0,4389
8	9	2,983471074	0,1284	12	-3	-0,3852
9	9	2,983471074	0,1118	12	-3	-0,3354
10	10	0,52892562	0,0961	12	-2	-0,1922
11	10	0,52892562	0,0812	12	-2	-0,1624
12	10	0,52892562	0,0669	12	-2	-0,1338
13	10	0,52892562	0,053	11	-1	-0,053
14	10	0,52892562	0,0395	11	-1	-0,0395
15	10	0,52892562	0,0262	11	-1	-0,0262
16	11	0,074380165	0,0187	11	0	0
17	11	0,074380165	0	11	0	0
18	11	0,074380165		11		
19	11	0,074380165		10		
20	11	0,074380165		10		
21	11	0,074380165		10		
22	12	1,619834711		10		
23	12	1,619834711		10		
24	12	1,619834711		10		
25	12	1,619834711		9		
26	12	1,619834711		9		
27	12	1,619834711		9		
28	13	5,165289256		9		
29	13	5,165289256		9		
30	13	5,165289256		8		
31	13	5,165289256		8		
32	13	5,165289256		8		
33	14	10,7107438		8		
Sumas		94,54545455				-9,4082

Regla de decisión de *Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de los calificativos de la pre prueba del Grupo Experimental 1.*

Hipótesis estadísticas

$H_0: x_i = N(\mu, s^2)$.

$H_1: x_i \neq N(\mu, s^2)$.

Los calificativos de la pre prueba del Grupo Experimental 1 siguen una distribución normal.

Los calificativos de la pre prueba del Grupo Experimental 1 no siguen una distribución normal.

Estadígrafos

Media	**10,7272727**
Suma de Potencia $(x_i - MED)^2$	94,5454545
Suma (a_i)**(Dif** (x_i-x_iINV))	-9,4082
SW c	0,93620817
SW t (α=0,05)	0,968
p-valor	

Regla de decisión:

Como $SW_c < SW_t$, entonces se rechazar H_0

Tabla B.3 Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de calificativos de la pos prueba del Grupo de Control 1.

i	x_i	Potencia(x_i-MED)2	a_i	x_i INV	Dif(x_i-x_iINV)	(a_i) Dif(x_i-x_iINV)
1	11	5,0625	0,4188	15	-4	-1,6752
2	12	1,5625	0,2898	15	-3	-0,8694
3	12	1,5625	0,2463	15	-3	-0,7389
4	12	1,5625	0,2141	14	-2	-0,4282
5	12	1,5625	0,1878	14	-2	-0,3756
6	12	1,5625	0,1651	14	-2	-0,3302
7	12	1,5625	0,1449	14	-2	-0,2898
8	12	1,5625	0,1265	14	-2	-0,253
9	12	1,5625	0,1093	14	-2	-0,2186
10	13	0,0625	0,0931	14	-1	-0,0931
11	13	0,0625	0,0777	14	-1	-0,0777
12	13	0,0625	0,0629	14	-1	-0,0629
13	13	0,0625	0,0485	14	-1	-0,0485
14	13	0,0625	0,0344	14	-1	-0,0344
15	13	0,0625	0,0206	14	-1	-0,0206
16	13	0,0625	0,0068	13	0	0
17	13	0,0625		13		
18	14	0,5625		13		
19	14	0,5625		13		
20	14	0,5625		13		
21	14	0,5625		13		
22	14	0,5625		13		
23	14	0,5625		13		
24	14	0,5625		12		
25	14	0,5625		12		
26	14	0,5625		12		
27	14	0,5625		12		
28	14	0,5625		12		
29	14	0,5625		12		
30	15	3,0625		12		
31	15	3,0625		12		
32	15	3,0625		11		
Sumas		34				-5,5161

Regla de decisión de *Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de los calificativos de la pos prueba del Grupo de Control 1.*

Hipótesis estadísticas

$H_0: x_i = N(\mu, s^2)$.

$H_1: x_i \neq N(\mu, s^2)$.

Los calificativos de la pos prueba del Grupo de Control 1 siguen una distribución normal.

Los calificativos de la pos prueba del Grupo de Control 1 no siguen una distribución normal.

Estadígrafos

Media	**13,25**
Suma de Potencia $(x_i - MED)^2$	34
Suma (a_i)**(Dif** $(x_i$-x_iINV))	-5,5161
SW c	0,89492233
SW t (α=0,05)	0,968
p-valor	

Regla de decisión:

Como $SW_c < SW_t$, entonces se rechazar H_0

Tabla B.4 Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de los calificativos de la pos prueba del Grupo de Control 2.

i	x_i	Potencia(x_i-MED)2	a_i	x_i INV	Dif(x_i-x_iINV)	(a_i) Dif(x_i-x_iINV)
1	11	4,95421436	0,422	15	-4	-1,688
2	12	1,502601457	0,2921	15	-3	-0,8763
3	12	1,502601457	0,2475	15	-3	-0,7425
4	12	1,502601457	0,2145	15	-3	-0,6435
5	12	1,502601457	0,1874	14	-2	-0,3748
6	12	1,502601457	0,1641	14	-2	-0,3282
7	12	1,502601457	0,1433	14	-2	-0,2866
8	12	1,502601457	0,1243	14	-2	-0,2486
9	12	1,502601457	0,1066	14	-2	-0,2132
10	13	0,050988554	0,0899	14	-1	-0,0899
11	13	0,050988554	0,0739	14	-1	-0,0739
12	13	0,050988554	0,0585	14	-1	-0,0585
13	13	0,050988554	0,0435	14	-1	-0,0435
14	13	0,050988554	0,0289	13	0	0
15	13	0,050988554	0,0144	13	0	0
16	13	0,050988554	0	13	0	0
17	13	0,050988554		13		
18	13	0,050988554		13		
19	14	0,59937565		13		
20	14	0,59937565		13		
21	14	0,59937565		13		
22	14	0,59937565		13		
23	14	0,59937565		12		
24	14	0,59937565		12		
25	14	0,59937565		12		
26	14	0,59937565		12		
27	14	0,59937565		12		
28	15	3,147762747		12		
29	15	3,147762747		12		
30	15	3,147762747		12		
31	15	3,147762747		11		
Sumas		35,41935484				-5,6675

Regla de decisión de *Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de los calificativos de la pos prueba del Grupo de Control 2.*

Hipótesis estadísticas

$H_0: x_i = N(\mu, s^2)$.

$H_1: x_i \neq N(\mu, s^2)$.

Los calificativos de la pos prueba del Grupo de Control 2 siguen una distribución normal.

Los calificativos de la pos prueba del Grupo de Control 2 no siguen una distribución normal.

Estadígrafos

Media	**13,2258065**
Suma de Potencia $(x_i - MED)^2$	35,4193548
Suma (a_i)**(Dif** $(x_i$-x_iINV))	-5,6675
SW c	0,90686452
SW t (α=0,05)	0,968
p-valor	

Regla de decisión:

Como $SW_c < SW_t$, entonces se rechazar H_0

Tabla B.5 Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de los calificativos de la pos prueba del Grupo Experimental 1.

i	x_i	Potencia(x_i-MED)2	a_i	x_i INV	Dif(x_i-x_iINV)	(a_i) Dif(x_i-x_iINV)
1	12	8,640036731	0,4156	18	-6	-2,4936
2	13	3,761248852	0,2876	17	-4	-1,1504
3	13	3,761248852	0,2451	17	-4	-0,9804
4	13	3,761248852	0,2137	17	-4	-0,8548
5	14	0,882460973	0,188	16	-2	-0,376
6	14	0,882460973	0,166	16	-2	-0,332
7	14	0,882460973	0,1463	16	-2	-0,2926
8	14	0,882460973	0,1284	16	-2	-0,2568
9	14	0,882460973	0,1118	16	-2	-0,2236
10	14	0,882460973	0,0961	16	-2	-0,1922
11	14	0,882460973	0,0812	16	-2	-0,1624
12	14	0,882460973	0,0669	15	-1	-0,0669
13	14	0,882460973	0,053	15	-1	-0,053
14	15	0,003673095	0,0395	15	0	0
15	15	0,003673095	0,0262	15	0	0
16	15	0,003673095	0,0187	15	0	0
17	15	0,003673095	0	15	0	0
18	15	0,003673095		15		
19	15	0,003673095		15		
20	15	0,003673095		15		
21	15	0,003673095		14		
22	15	0,003673095		14		
23	16	1,124885216		14		
24	16	1,124885216		14		
25	16	1,124885216		14		
26	16	1,124885216		14		
27	16	1,124885216		14		
28	16	1,124885216		14		
29	16	1,124885216		14		
30	17	4,246097337		13		
31	17	4,246097337		13		
32	17	4,246097337		13		
33	18	9,367309458		12		
Sumas		57,87878788				-7,4347

Regla de decisión de *Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de los calificativos de la pos prueba del Grupo Experimental 1.*

Hipótesis estadísticas

$H_0: x_i = N(\mu, s^2)$.

$H_1: x_i \neq N(\mu, s^2)$.

Los calificativos de la pos prueba del Grupo Experimental 1 siguen una distribución normal.

Los calificativos de la pos prueba del Grupo Experimental 1 no siguen una distribución normal.

Estadígrafos

Media	**14,9393939**
Suma de Potencia $(\boldsymbol{x_i - MED})^2$	57,8787879
Suma ($\boldsymbol{a_i}$)**(Dif** ($\boldsymbol{x_i}$-$\boldsymbol{x_i}$INV))	-7,4347
SW c	0,95500901
SW t (α=0,05)	0,968
p-valor	

Regla de decisión:

Como $SW_c < SW_t$, entonces se rechazar H_0

Tabla B.6 Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de los calificativos de la pos prueba del Grupo Experimental 2.

i	x_i	Potencia(x_i-MED)2	a_i	x_i INV	Dif(x_i-x_iINV)	(a_i) Dif(x_i-x_iINV)
1	12	9	0,4188	18	-6	-2,5128
2	13	4	0,2898	17	-4	-1,1592
3	13	4	0,2463	17	-4	-0,9852
4	14	1	0,2141	17	-3	-0,6423
5	14	1	0,1878	16	-2	-0,3756
6	14	1	0,1651	16	-2	-0,3302
7	14	1	0,1449	16	-2	-0,2898
8	14	1	0,1265	16	-2	-0,253
9	14	1	0,1093	16	-2	-0,2186
10	14	1	0,0931	16	-2	-0,1862
11	14	1	0,0777	16	-2	-0,1554
12	14	1	0,0629	15	-1	-0,0629
13	15	0	0,0485	15	0	0
14	15	0	0,0344	15	0	0
15	15	0	0,0206	15	0	0
16	15	0	0,0068	15	0	0
17	15	0		15		
18	15	0		15		
19	15	0		15		
20	15	0		15		
21	15	0		14		
22	16	1		14		
23	16	1		14		
24	16	1		14		
25	16	1		14		
26	16	1		14		
27	16	1		14		
28	16	1		14		
29	17	4		14		
30	17	4		13		
31	17	4		13		
32	18	9		12		
Sumas		54				-7,1712

Regla de decisión de *Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk de los calificativos de la pos prueba del Grupo Experimental 2.*

Hipótesis estadísticas

$H_0: x_i = N(\mu, s^2)$.

$H_1: x_i \neq N(\mu, s^2)$.

Los calificativos de la pos prueba del Grupo Experimental 2 siguen una distribución normal.

Los calificativos de la pos prueba del Grupo Experimental 2 no siguen una distribución normal.

Estadígrafos

Media	**15**
Suma de Potencia $(\boldsymbol{x_i - MED})^2$	54
Suma $(\boldsymbol{a_i})$**(Dif** $(\boldsymbol{x_i}$-$\boldsymbol{x_i}$INV))	-7,1712
SW c	0,95233536
SW t (α=0,05)	0,968
p-valor	

Regla de decisión:

Como $SW_c < SW_t$, entonces se rechazar H_0

Tabla C. Prueba U de Mann Whitney para las Pre Pruebas de los Grupos de Control 1 y Grupo Experimental 1.

	Grupo	Calificativo	Rango		Grupo	Calificativo	Rango
1	Grupo de Control 1	8	4	1	Grupo Experimental 1	8	4
2	Grupo de Control 1	8	4	2	Grupo Experimental 1	8	4
3	Grupo de Control 1	8	4	3	Grupo Experimental 1	8	4
4	Grupo de Control 1	9	12,5	4	Grupo Experimental 1	8	4
5	Grupo de Control 1	9	12,5	5	Grupo Experimental 1	9	12,5
6	Grupo de Control 1	9	12,5	6	Grupo Experimental 1	9	12,5
7	Grupo de Control 1	9	12,5	7	Grupo Experimental 1	9	12,5
8	Grupo de Control 1	9	12,5	8	Grupo Experimental 1	9	12,5
9	Grupo de Control 1	10	21,5	9	Grupo Experimental 1	9	12,5
10	Grupo de Control 1	10	21,5	10	Grupo Experimental 1	10	21,5
11	Grupo de Control 1	11	33,5	11	Grupo Experimental 1	10	21,5
12	Grupo de Control 1	11	33,5	12	Grupo Experimental 1	10	21,5
13	Grupo de Control 1	11	33,5	13	Grupo Experimental 1	10	21,5
14	Grupo de Control 1	11	33,5	14	Grupo Experimental 1	10	21,5
15	Grupo de Control 1	11	33,5	15	Grupo Experimental 1	10	21,5
16	Grupo de Control 1	11	33,5	16	Grupo Experimental 1	11	33,5
17	Grupo de Control 1	11	33,5	17	Grupo Experimental 1	11	33,5
18	Grupo de Control 1	11	33,5	18	Grupo Experimental 1	11	33,5
19	Grupo de Control 1	11	33,5	19	Grupo Experimental 1	11	33,5
20	Grupo de Control 1	11	33,5	20	Grupo Experimental 1	11	33,5
21	Grupo de Control 1	12	49,5	21	Grupo Experimental 1	11	33,5
22	Grupo de Control 1	12	49,5	22	Grupo Experimental 1	12	49,5
23	Grupo de Control 1	12	49,5	23	Grupo Experimental 1	12	49,5
24	Grupo de Control 1	12	49,5	24	Grupo Experimental 1	12	49,5
25	Grupo de Control 1	12	49,5	25	Grupo Experimental 1	12	49,5
26	Grupo de Control 1	12	49,5	26	Grupo Experimental 1	12	49,5
27	Grupo de Control 1	12	49,5	27	Grupo Experimental 1	12	49,5
28	Grupo de Control 1	12	49,5	28	Grupo Experimental 1	13	61
29	Grupo de Control 1	12	49,5	29	Grupo Experimental 1	13	61
30	Grupo de Control 1	12	49,5	30	Grupo Experimental 1	13	61
31	Grupo de Control 1	13	61	31	Grupo Experimental 1	13	61
32	Grupo de Control 1	13	61	32	Grupo Experimental 1	13	61
				33	Grupo Experimental 1	14	65

Tabla D. Prueba de los rangos con signos de Wilcoxon del Grupo Experimental 1

	Pre pruebe	Pos prueba	Diferencia	Abs (Diferencia)	Ranking
1	14	14	0	0	
2	13	14	-1	1	1,5
3	12	13	-1	1	1,5
4	12	14	-2	2	4
5	13	15	-2	2	4
6	13	15	-2	2	4
7	13	16	-3	3	9
8	11	14	-3	3	9
9	11	14	-3	3	9
10	9	12	-3	3	9
11	10	13	-3	3	9
12	13	16	-3	3	9
13	11	14	-3	3	9
14	12	16	-4	4	15,5
15	10	14	-4	4	15,5
16	12	16	-4	4	15,5
17	10	14	-4	4	15,5
18	12	16	-4	4	15,5
19	11	15	-4	4	15,5
20	10	15	-5	5	20,5
21	12	17	-5	5	20,5
22	9	14	-5	5	20,5
23	8	13	-5	5	20,5
24	10	16	-6	6	25
25	9	15	-6	6	25
26	10	16	-6	6	25
27	9	15	-6	6	25
28	11	17	-6	6	25
29	8	15	-7	7	29,5
30	8	15	-7	7	29,5
31	11	18	-7	7	29,5
32	8	15	-7	7	29,5
33	9	17	-8	8	32

Tabla E. Prueba de los rangos con signos de Wilcoxon del Grupo de Control 1

	Pre pruebe	Pos prueba	Diferencia	Abs (Diferencia)	Ranking
1	8	14	-6	6	29
2	8	13	-5	5	26
3	9	14	-5	5	27
4	8	13	-5	5	28
5	9	13	-4	4	23,5
6	11	15	-4	4	23,5
7	9	13	-4	4	23,5
8	11	15	-4	4	23,5
9	11	14	-3	3	19,5
10	9	12	-3	3	19,5
11	9	12	-3	3	19,5
12	12	15	-3	3	19,5
13	10	12	-2	2	14,5
14	12	14	-2	2	14,5
15	12	14	-2	2	14,5
16	12	14	-2	2	14,5
17	11	13	-2	2	14,5
18	12	14	-2	2	14,5
19	11	12	-1	1	6
20	10	11	-1	1	6
21	11	12	-1	1	6
22	11	12	-1	1	6
23	12	13	-1	1	6
24	11	12	-1	1	6
25	12	13	-1	1	6
26	11	11	0	0	
27	12	12	0	0	
28	13	13	0	0	
29	12	11	1	1	6
30	12	11	1	1	6
31	11	10	1	1	6
32	13	12	1	1	6

Tabla F. Prueba U de Mann Whitney para Muestras independientes de las Pos Pruebas: $O_4 < O_2$.

	Grupo	Calificativo	Rango		Grupo	Calificativo	Rango
1	O_4	10	2	1	O_2	6	1
2	O_4	11	4,5	2	O_2	12	11,5
3	O_4	11	4,5	3	O_2	13	22
4	O_4	11	4,5	4	O_2	13	22
5	O_4	11	4,5	5	O_2	13	22
6	O_4	12	11,5	6	O_2	14	35,5
7	O_4	12	11,5	7	O_2	14	35,5
8	O_4	12	11,5	8	O_2	14	35,5
9	O_4	12	11,5	9	O_2	14	35,5
10	O_4	12	11,5	10	O_2	14	35,5
11	O_4	12	11,5	11	O_2	14	35,5
12	O_4	12	11,5	12	O_2	14	35,5
13	O_4	12	11,5	13	O_2	14	35,5
14	O_4	12	11,5	14	O_2	14	35,5
15	O_4	13	22	15	O_2	15	49
16	O_4	13	22	16	O_2	15	49
17	O_4	13	22	17	O_2	15	49
18	O_4	13	22	18	O_2	15	49
19	O_4	13	22	19	O_2	15	49
20	O_4	13	22	20	O_2	15	49
21	O_4	13	22	21	O_2	15	49
22	O_4	13	22	22	O_2	15	49
23	O_4	14	35,5	23	O_2	16	58
24	O_4	14	35,5	24	O_2	16	58
25	O_4	14	35,5	25	O_2	16	58
26	O_4	14	35,5	26	O_2	16	58
27	O_4	14	35,5	27	O_2	16	58
28	O_4	14	35,5	28	O_2	16	58
29	O_4	14	35,5	29	O_2	16	58
30	O_4	15	49	30	O_2	17	63
31	O_4	15	49	31	O_2	17	63
32	O_4	15	49	32	O_2	17	63
33				33	O_2	18	65

Tabla G. Prueba U de Mann Whitney para Muestras independientes de las Pos Pruebas: $\boldsymbol{O_6 < O_5}$.

	Grupo	Calificativo	Rango		Grupo	Calificativo	Rango
1	O_6	11	1	1	O_5	12	6
2	O_6	12	6	2	O_5	13	16
3	O_6	12	6	3	O_5	13	16
4	O_6	12	6	4	O_5	14	30,5
5	O_6	12	6	5	O_5	14	30,5
6	O_6	12	6	6	O_5	14	30,5
7	O_6	12	6	7	O_5	14	30,5
8	O_6	12	6	8	O_5	14	30,5
9	O_6	12	6	9	O_5	14	30,5
10	O_6	13	16	10	O_5	14	30,5
11	O_6	13	16	11	O_5	14	30,5
12	O_6	13	16	12	O_5	14	30,5
13	O_6	13	16	13	O_5	15	46
14	O_6	13	16	14	O_5	15	46
15	O_6	13	16	15	O_5	15	46
16	O_6	13	16	16	O_5	15	46
17	O_6	13	16	17	O_5	15	46
18	O_6	13	16	18	O_5	15	46
19	O_6	14	30,5	19	O_5	15	46
20	O_6	14	30,5	20	O_5	15	46
21	O_6	14	30,5	21	O_5	15	46
22	O_6	14	30,5	22	O_5	16	56
23	O_6	14	30,5	23	O_5	16	56
24	O_6	14	30,5	24	O_5	16	56
25	O_6	14	30,5	25	O_5	16	56
26	O_6	14	30,5	26	O_5	16	56
27	O_6	14	30,5	27	O_5	16	56
28	O_6	15	46	28	O_5	16	56
29	O_6	15	46	29	O_5	17	61
30	O_6	15	46	30	O_5	17	61
31	O_6	15	46	31	O_5	17	61
32				32	O_5	18	63
33				33			

Tabla H. Prueba U de Mann Whitney para Muestras independientes de las Pos Pruebas: $\boldsymbol{O_4 < O_5}$.

	Grupo	Calificativo	Rango		Grupo	Calificativo	Rango
1	O_4	10	1	1	O_5	12	10,5
2	O_4	11	3,5	2	O_5	13	20,5
3	O_4	11	3,5	3	O_5	13	20,5
4	O_4	11	3,5	4	O_5	14	33,5
5	O_4	11	3,5	5	O_5	14	33,5
6	O_4	12	10,5	6	O_5	14	33,5
7	O_4	12	10,5	7	O_5	14	33,5
8	O_4	12	10,5	8	O_5	14	33,5
9	O_4	12	10,5	9	O_5	14	33,5
10	O_4	12	10,5	10	O_5	14	33,5
11	O_4	12	10,5	11	O_5	14	33,5
12	O_4	12	10,5	12	O_5	14	33,5
13	O_4	12	10,5	13	O_5	15	47,5
14	O_4	12	10,5	14	O_5	15	47,5
15	O_4	13	20,5	15	O_5	15	47,5
16	O_4	13	20,5	16	O_5	15	47,5
17	O_4	13	20,5	17	O_5	15	47,5
18	O_4	13	20,5	18	O_5	15	47,5
19	O_4	13	20,5	19	O_5	15	47,5
20	O_4	13	20,5	20	O_5	15	47,5
21	O_4	13	20,5	21	O_5	15	47,5
22	O_4	13	20,5	22	O_5	16	57
23	O_4	14	33,5	23	O_5	16	57
24	O_4	14	33,5	24	O_5	16	57
25	O_4	14	33,5	25	O_5	16	57
26	O_4	14	33,5	26	O_5	16	57
27	O_4	14	33,5	27	O_5	16	57
28	O_4	14	33,5	28	O_5	16	57
29	O_4	14	33,5	29	O_5	17	62
30	O_4	15	47,5	30	O_5	17	62
31	O_4	15	47,5	31	O_5	17	62
32	O_4	15	47,5	32	O_5	18	64
33				33			

Tabla I. Prueba U de Mann Whitney para Muestras independientes de las Pos Pruebas: $O_6 < O_2$.

	Grupo	Calificativo	Rango		Grupo	Calificativo	Rango
1	O_6	11	2	1	O_2	6	1
2	O_6	12	7	2	O_2	12	7
3	O_6	12	7	3	O_2	13	17,5
4	O_6	12	7	4	O_2	13	17,5
5	O_6	12	7	5	O_2	13	17,5
6	O_6	12	7	6	O_2	14	32,5
7	O_6	12	7	7	O_2	14	32,5
8	O_6	12	7	8	O_2	14	32,5
9	O_6	12	7	9	O_2	14	32,5
10	O_6	13	17,5	10	O_2	14	32,5
11	O_6	13	17,5	11	O_2	14	32,5
12	O_6	13	17,5	12	O_2	14	32,5
13	O_6	13	17,5	13	O_2	14	32,5
14	O_6	13	17,5	14	O_2	14	32,5
15	O_6	13	17,5	15	O_2	15	47,5
16	O_6	13	17,5	16	O_2	15	47,5
17	O_6	13	17,5	17	O_2	15	47,5
18	O_6	13	17,5	18	O_2	15	47,5
19	O_6	14	32,5	19	O_2	15	47,5
20	O_6	14	32,5	20	O_2	15	47,5
21	O_6	14	32,5	21	O_2	15	47,5
22	O_6	14	32,5	22	O_2	15	47,5
23	O_6	14	32,5	23	O_2	16	57
24	O_6	14	32,5	24	O_2	16	57
25	O_6	14	32,5	25	O_2	16	57
26	O_6	14	32,5	26	O_2	16	57
27	O_6	14	32,5	27	O_2	16	57
28	O_6	15	47,5	28	O_2	16	57
29	O_6	15	47,5	29	O_2	16	57
30	O_6	15	47,5	30	O_2	17	62
31	O_6	15	47,5	31	O_2	17	62
32				32	O_2	17	62
33				33	O_2	18	64

Anexo 3. Matriz de consistencia

Anexo 3. TITULO: LA GENERALIZACIÓN DE LA SUMA DE CUADRADOS A TRAVÉS DE RECURSOS DIDÁCTICOS EN LOS ESTUDIANTES DEL TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

PROBLEMA	OBJETIVOS	Justificación	HIPÓTESIS	VARIABLES	DIMENSIONES	Método
Problema General: ¿Las representaciones gráficas y simbólicas, como recursos didácticos, de la sucesión de los cuadrados de los n primeros términos son más efectivos para desarrollar la capacidad de generalización, en comparación con la enseñanza convencional en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" durante el año escolar 2020?	**Objetivo General:** Determinar que el uso de los recursos didácticos como las representaciones gráficas y simbólicas de la sucesión de los cuadrados de los n primeros términos son más efectivos para desarrollar la capacidad de generalización en comparación con la enseñanza convencional en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" durante el año escolar 2020.	La investigación es pertinente debido a: primero, son escasos los estudios sobre el fenómeno de la generalización en estudiantes de la región de Puno, se pretende comprender como de puede ayudar a los estudiantes a desarrollar la habilidad de generalizar expresiones algebraicas. Considerando lo fundamentado en el planteamiento del problema, la investigación tiene la finalidad de comprender el proceso de desarrollo de la capacidad de generalización de los adolescentes, además, no sólo se limita a comprender, sino también a proponer actividades didácticas que permitan al docente orientar y desempeño en la conducción de las sesiones de aprendizaje; en segundo lugar, se pretende desarrollar materiales didácticos que ayuden a aprender y comprender los procesos de generalización, estos materiales de naturaleza concreta, modelos físicos y material impreso serán puesto en prueba para ver su efectividad para promover en el estudiante la capacidad de identificar patrones de formación, regularidades e inferir expresiones algebraicas que permitan deducir fórmulas para resolver series de números cuadrados.	**Hipótesis General:** El uso de las representaciones gráficas, simbólicas y físicas cómo recurso didáctico, mejoran significativamente la capacidad generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la Institución Educativa Secundaria "Perú BIRF" durante el año escolar 2020.	**Independiente s:** Las sistemas de representacion es cómo recursos didácticos.	- Representaciones gráficas - Representaciones simbólicas - Representaciones concretas o físicas.	**Población:** Educandos del 3ro grado de Educación Secundaria "Perú BIRF" de Juliaca que estudian en 2020 **Muestra:** La muestra es intencional, y tiene un tamaño de 128 estudiantes, distribuidos en cuatro secciones. **Enfoque de Investigación** es cuantitativo, se recolecta y analizan datos para probar la hipótesis y establecer con un grado de probabilidad los patrones de comportamiento de la población. **Alcance** es explicativa. El propósito del estudio es evaluar la relación causal que existe entre las dos variables. **Diseño:** El diseño es cuasi experimental de cuatro grupos de Solomon. **Técnicas:** Aplicación de dos pruebas sobre la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos. **Instrumentos**: El instrumento es concebido como el medio material empleado para recoger y almacenar la información. En esta investigación se utilizará el cuestionario o prueba de tipo cerrado y abierto, diseñado en forma sencilla y clara, de manera que sea comprendida con facilidad. - "Prueba sobre capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos".
Problemas Específicos: - ¿Cuál es el nivel de desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria antes de la experimentación? - ¿Qué tan efectivos son el uso de las representaciones gráficas, simbólicas y los modelos físicos, como recursos didácticos para el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria? - ¿Qué tan efectivo es la enseñanza convencional en el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria? - ¿Cuál es el nivel de efectividad del uso de las representaciones gráficas, simbólicas y los modelos físicos, como recursos didácticos para el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos, frente a la enseñanza convencional en estudiantes del tercer grado de educación secundaria después de la experimentación?	**Objetivos Específicos:** - Diagnosticar la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria antes de la experimentación. - Evaluar la influencia que ejerce el uso de las representaciones gráficas, simbólicas y los modelos físicos, como recursos didácticos para el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria. - Evaluar la incidencia de la enseñanza convencional en el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria. - Determinar la mayor incidencia positiva del uso de las representaciones gráficas, simbólicas y los modelos físicos, como recursos didácticos para el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos, frente a la enseñanza convencional en estudiantes del tercer grado de educación secundaria después de la experimentación.		**Hipótesis Subsidiarias:** - Los estudiantes del tercer grado de educación secundaria antes de la experimentación apenas logran entender el significado de una sucesión de los cuadrados de n primeros términos y su generalización - El uso de las representaciones gráficas, simbólicas y los modelos físicos, como recursos didácticos permite lograr un mayor desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria. - La enseñanza convencional de la generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos sin el uso de las representaciones gráficas, simbólicas y los modelos físicos, como recursos didácticos permiten un desarrollo incipiente de la capacidad generalización. - La incidencia positiva del uso de las representaciones gráficas, simbólicas y los modelos físicos, como recursos didácticos para el desarrollo de la capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos es mayor frente a la enseñanza convencional después de la experimentación.	**Dependiente:** Capacidad generalización de la suma de cuadrados.	- Generalización empírica - Generalización científica o teórica - Generalización de movimiento bidireccional de lo general a lo particular y de lo particular a lo general.	
				Variables exógenas: Edad: Sexo:	14 y 15 años. Masculino y femenino	

Anexo 4. Cálculo del Coeficiente α de Cronbach de las pre y pos pruebas de generalización:

Rango de puntuaciones obtenidas para la validación de la Pre Prueba sobre capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos.

Sujetos	Prueba X	Criterio Y	Lugar o rango de R_X	Lugar o rango de R_Y	Diferencia de rangos D_R	D_R^2
1	15	13	4,5	13	-8,5	72,25
2	16	15	2,5	5,5	-3	9
3	14	15	6	5,5	0,5	0,25
4	13	14	10	10	0	0
5	11	14	13	10	3	9
6	10	10	15,5	18	-2,5	6,25
7	15	17	4,5	1,5	3	9
8	9	11	17	16,5	0,5	0,25
9	10	12	15,5	14,5	1	1
10	14	15	6	5,5	0,5	0,25
11	13	14	10	10	0	0
12	11	11	13	16,5	-3,5	12,25
13	11	14	13	10	3	9
14	16	17	2,5	1,5	1	1
15	17	16	1	3	-2	4
16	14	15	6	5,5	0,5	0,25
17	13	14	10	10	0	0
18	8	12	18	14,5	3,5	12,25
					$\sum D_R^2=$	146

Fuente: Instrumentos de recolección de datos.
Elaborado por el investigador.

Rango de puntuaciones obtenidas para la validación de la Pos Prueba sobre capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos.

Sujetos	**Prueba X**	**Criterio Y**	**Lugar o rango de R_X**	**Lugar o rango de R_Y**	**Diferencia de rangos D_R**	D_R^2
1	12	17	16	1	4	-3
2	14	16	15	2,5	9,5	-7
3	17	16	17	2,5	1	1,5
4	15	15	16	4,5	4	0,5
5	18	15	16	4,5	4	0,5
6	2	14	16	7,5	4	3,5
7	5	14	16	7,5	4	3,5
8	6	14	15	7,5	9,5	-2
9	11	14	15	7,5	9,5	-2
10	3	13	14	12	14	-2
11	4	13	15	12	9,5	2,5
12	10	13	13	12	17	-5
13	13	13	14	12	14	-2
14	16	13	15	12	9,5	2,5
15	7	12	15	15	9,5	5,5
16	1	11	13	16,5	17	-0,5
17	9	11	14	16,5	14	2,5
18	8	10	13	18	17	1
					$\sum D_R^2=$	176,5

Fuente: Instrumentos de recolección de datos.
Elaborado por el investigador.

Anexo 5. Cálculo del Coeficiente α de Cronbach de las pre y pos pruebas de generalización:

Cálculo de varianzas para estimar el coeficiente alfa de Cronbach para la fiabilización de la Pre Prueba sobre capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos.

Sujetos	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Suma
1	2	2	2	2	8
2	4	3	4	3	14
3	3	4	4	4	15
4	4	4	3	3	14
5	2	4	4	3	13
6	4	4	4	5	17
7	4	3	3	4	14
8	3	4	2	2	11
9	2	2	4	3	11
10	1	2	1	2	6
11	3	2	2	3	10
12	1	2	3	3	9
13	3	3	2	3	11
14	3	4	5	2	14
Varianza por Ítem	1,03	0,78	1,21	0,71	
			Suma de varianzas por Ítem	3,73	
			Varianza de la suma de Ítem	8,49	

Fuente: Instrumentos de recolección de datos.

Varianza por Ítems para el cálculo de coeficiente alfa de Cronbach para la fiabilización de la Pos Prueba sobre capacidad de generalización de la sucesión de los cuadrados de n primeros términos.

Sujetos	**Ítem 1**	**Ítem 2**	**Ítem 3**	**Ítem 4**	**Suma**
1	3	4	2	2	11
2	3	4	4	4	15
3	4	4	3	3	14
4	2	4	4	3	13
5	2	2	4	3	11
6	1	2	1	2	6
7	3	2	2	3	10
8	1	2	3	3	9
9	5	5	4	4	18
10	3	4	5	2	14
11	2	4	3	3	12
12	4	4	4	5	17
13	4	3	3	4	14
14	3	4	2	2	11
15	2	2	2	2	8
16	4	3	4	3	14
Varianza por Ítem	1,23	0,96	1,11	0,75	
		Suma de varianzas por Ítem		4,06	
		Varianza de la suma de Ítem		9,59	

Fuente: Instrumentos de recolección de datos.

Anexo 6. Material experimental. Actividades Didácticas

MATEMÁTICA (3° Grado)

ACTIVIDAD N° 01

Generalización de la Suma de cuadrados

"Concluimos en generalización de suma de cuadrados con apoyo de material"

Docente del area: Humberto Salazar Mamani.

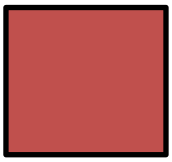
Competencia	Resuelve problemas de Regularidad, equivalencia, y cambio.
Propósito	Nuestro propósito no es memorizar una fórmula, sino, a través de la inducción reconstruir la fórmula de suma de cuadrados.

INICIAMOS:

Nuestro aprendizaje de la matematica, muchas veces se nos indico que debemos aprenderlo de memoria, sin embargo, este tipo de aprendizaje, en realidad su permanencia es de corto plazo y lo que requierimos es un aprendizaje que este con nostros mucho mas tiempo y ese es nuestro propósito.

RECORDEMOS:

Respodamos a las siguientes preguntas, a fin de recordar o afianzar el aprendizaje:
¿Cuál de las expresiones representa un cuadrado perfecto?



3^2

¿Encuentras alguna relación entre las dos expresiones?

"Podemos concluir una expresión gráfica representa una situación general en cambio la expresión simbólica representa una situación específica".

En base a esta conclusión procederemos, en base a las representaciones gráficas arribaremos a la fórmula general de la suma de cuadrados debemos conocer la fórmula de la suma de cuadrados:

CONOCEMOS:

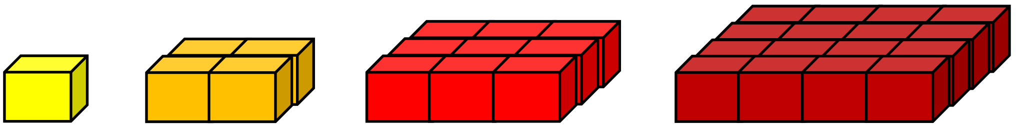
Se presentará la fórmula de la suma de cuadrados, la misma que presenta la generalización de dicha suma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

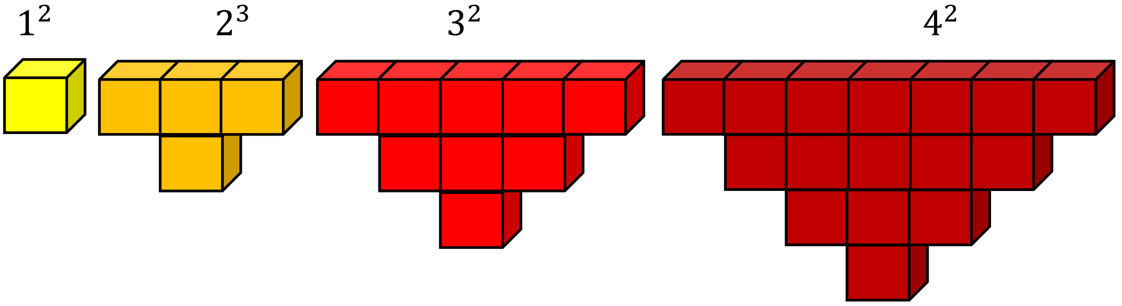
ANALIZAMOS:

Caso particular:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 =$$

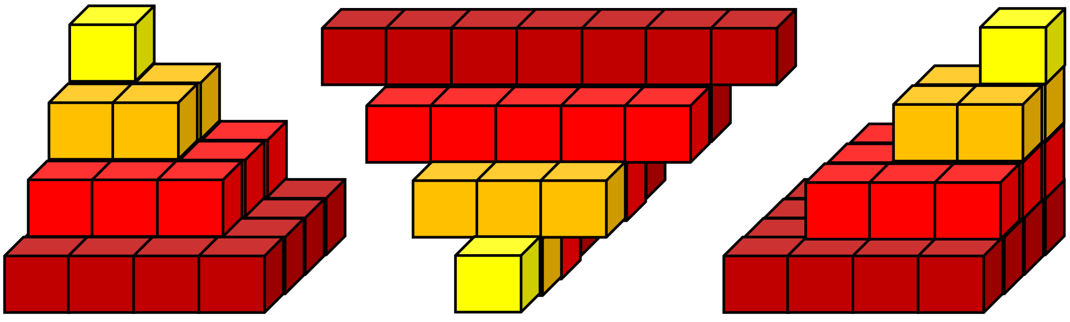


En seguida se presentará la misma cantidad de cubos en otra distribución



Buscamos equivalencias, con 3 distribuciones diferentes:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ $\qquad$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ $\qquad$ $1^2 + 2^2 +$
$3^2 + 4^2$



Analizadas las representaciones gráficas, arribamos a la generalización en forma simbólica:

Caso particular:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{4(4+1)[2(4)+1]}{6}$$

Caso particular grande:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = \frac{7(7+1)[2(7)+1]}{6}$$

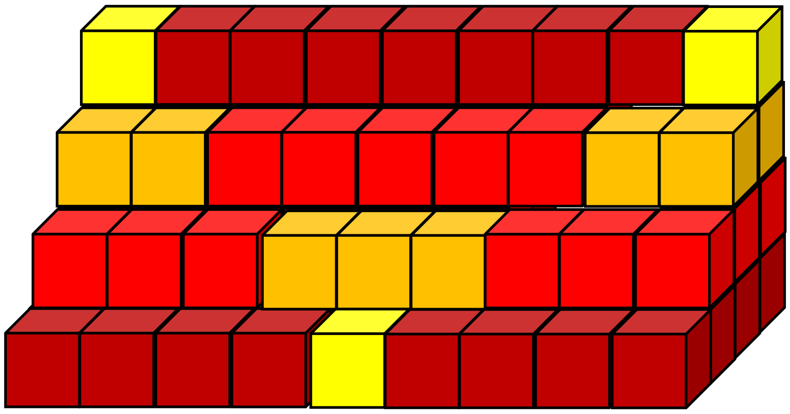
Caso particular distante:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 19^2 = \frac{19(19+1)[2(19)+1]}{6}$$

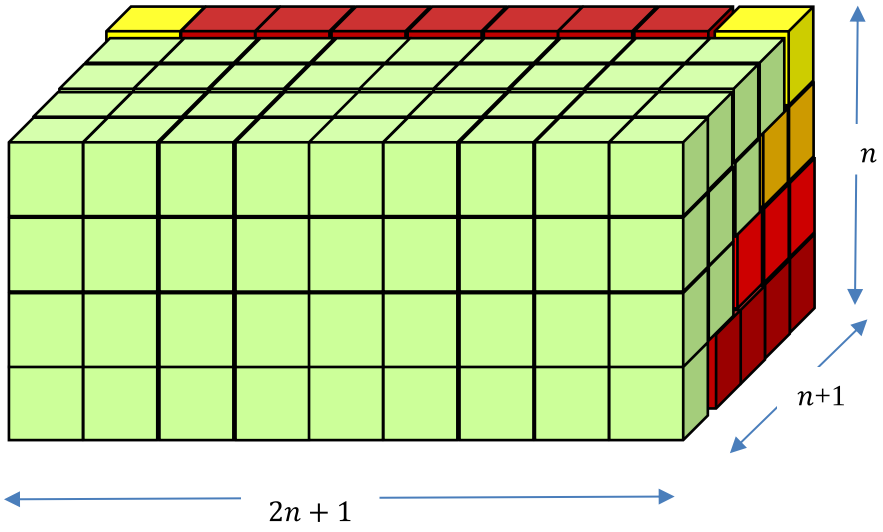
Si unimos las 3 distribuciones (Representaciones gráficas), se obtendría:

Caso general

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)[2(n)+1]}{6}$$



Unimos un sólido, adicionando otra distribucion equivalente a las 3 anteriores:



CONCLUIMOS:

Analizando el comportamiento de las representaciones graficas: Observamos que la 3 distribuciones de colores (Granate, rojo, naranja y amarillo), se unen a su complemento con otras 3 distribuciones (color verde), teniendose en total 6 distribuciones,de lo que concluimos:

$$6\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Reflexiona a cerca de la construcción realizada, con las distribuciones, y resuelve el reto de hoy.

RETO:

Responde a la siguiente pregunta:

¿El aprendizaje de la suma de cuadrados es mejor a través de la representación gráfica o simbólica?
Justifica tu respuesta.

MATEMÁTICA (3° Grado)

ACTIVIDAD N° 02

Generalización de la Suma de cuadrados

"Concluimos en generalización de suma de cuadrados con apoyo de material"

Docente del área: Humberto Salazar Mamani.

Competencia	Resuelve problemas de Regularidad, equivalencia, y cambio.
Propósito	Nuestro propósito no es memorizar una fórmula, sino, a través de la inducción reconstruir la fórmula de suma de cuadrados.

INICIAMOS:

Con lo aprendido en la anterior actividad, continuaremos utilizando le inducción con la finalidad de reconstruir la fórmula de la suma de cuadrados.

RECORDAMOS:

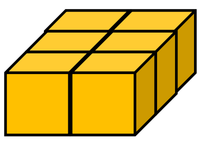
Se recordará la fórmula de la suma de cuadrados, la misma que es la generalización de dicha suma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

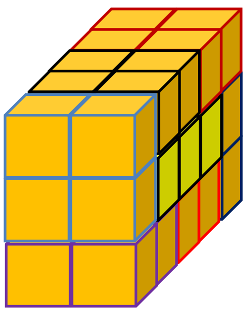
ANALIZAMOS:

Con ayuda de la figura adjunta inducir o "redescubrir" la fórmula de la suma de cuadrados:

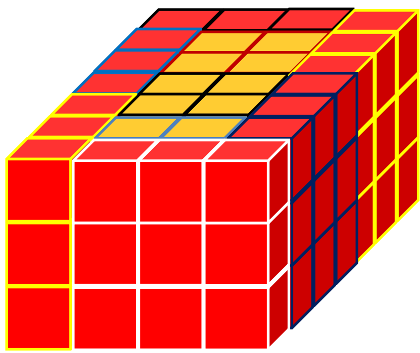
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 =$$



$6(1^2) = (1)(2)(3)$



$6(1^2 + 2^2) = (2)(3)(5)$



$6(1^2 + 2^2 + 3^2) = (3)(4)(7)$

Primer caso particular:
Cuando $k = 1$

$6(1^2) = (1)(1+1)[2(1)+1]$

Segundo caso particular:
Cuando $k = 2$

$6(1^2+2^2) = (2)(2+1)[2(2)+1]$

Tercero caso particular:
Cuando $k = 3$

$6(1^2+2^2+3^2) = (3)(3+1)[2(3)+1]$

n-ésimo caso particular:
Cuando $k = n$

$$6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) = (n)(n+1)[2(n)+1]$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

$(n+1)$-ésimo caso particular:
Cuando $k = n+1$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

Demostración por inducción matemática:

$$\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

$$\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} - (n+1)^2$$

$$\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)-6(n+1)^2}{6}$$

$$\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)[(n+2)(2n+3)-6(n+1)]}{6}$$

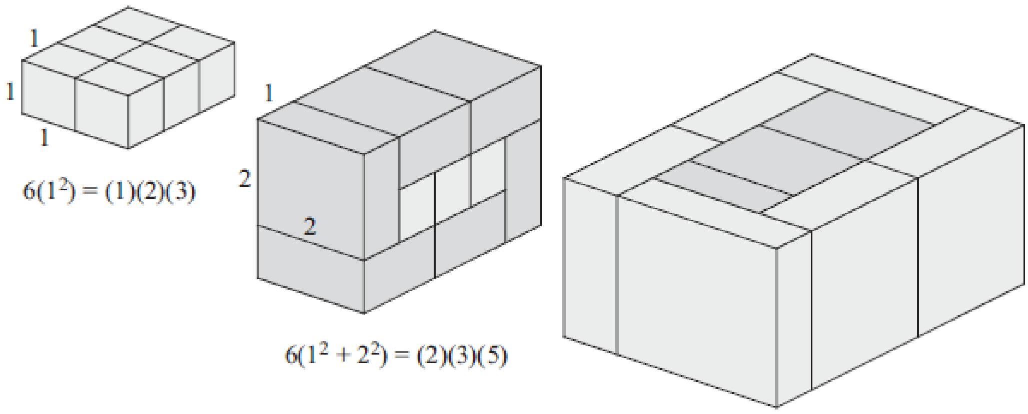
$$\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+3n+4n+6-6n-6]}{6}$$

$$\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+n]}{6}$$

$$\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)[2n+1]}{6}$$

Gráficamente observamos:

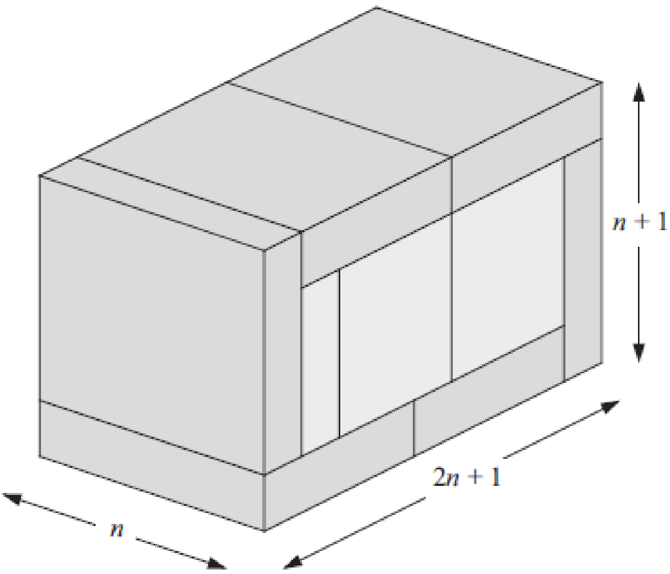
Para mayor exlicaciòn:



$6(1^2) = (1)(2)(3)$

$6(1^2 + 2^2) = (2)(3)(5)$

$6(1^2 + 2^2 + 3^2) = (3)(4)(7)$



$6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = (n)(n+1)(2n+1)$

CONCLUIMOS:

Analizando el comportamiento de las representaciones graficas: Observamos que se va recubriendo los solidos generados en cada caso particular hasta llegar a una situacion general, que es la formula de la suma de cuadrados.

MATEMÁTICA (3° Grado)

ACTIVIDAD N° 03

Generalización de la Suma de cuadrados Impares

"Concluimos en generalización de suma de cuadrados impares con apoyo de material concreto"

Docente del área: Humberto Salazar Mamani.

Competencia	Resuelve problemas de Regularidad, equivalencia, y cambio.
Propósito	Nuestro propósito no es memorizar una fórmula, sino, a través de la inducción reconstruir la fórmula de suma de cuadrados impares.

INICIAMOS:

Con lo aprendido en las anteriores actividades, continuaremos utilizando le inducción con la finalidad de reconstruir la fórmula de la suma de cuadrados impares.

Para ello presentamos la serie de números impares, la misma que la igualamos a la fórmula, que nos permitirá calcular la suma, a partir de las representaciones gráficas, se procederá a deducir dicha fórmula.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

ANALIZAMOS:

Con ayuda de la figura adjunta inducir o "redescubrir" la fórmula de la suma de cuadrados impares, dándole un valor específico:

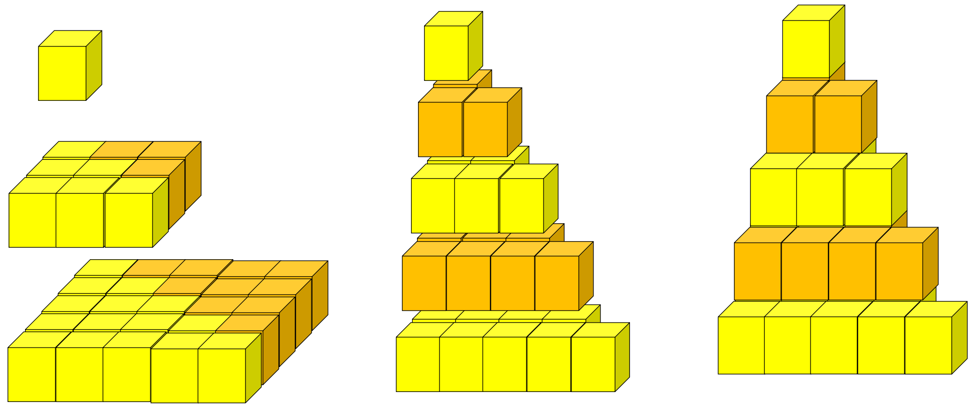
El caso de cuando $n = 3$

$$1^2 + 3^2 + [2(3)-1]^2 = \frac{3[2(3)-1][2(3)+1]}{3}$$

1^2

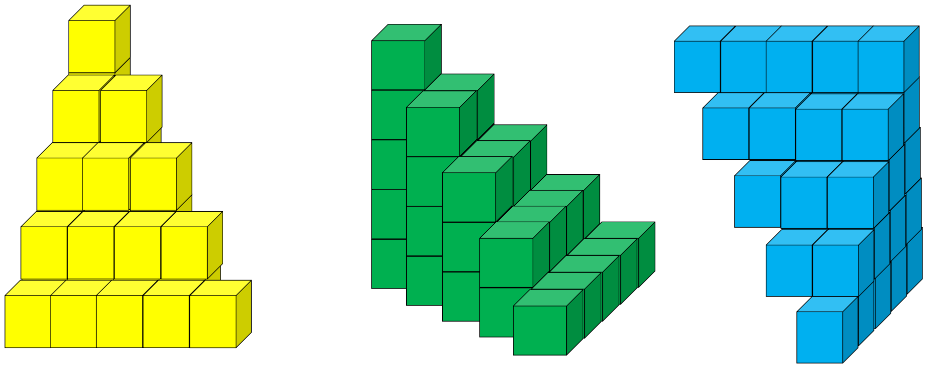
3^2

5^2

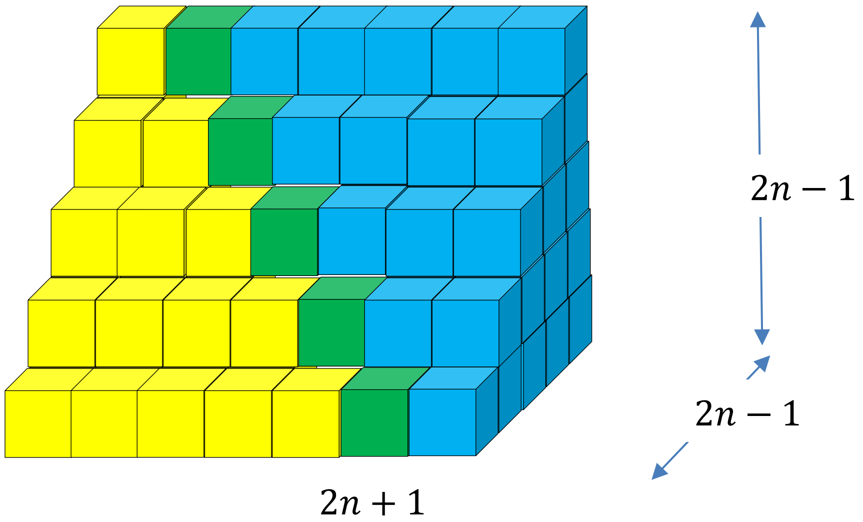


$2(3) - 1$

En seguida triplicamos la serie: $1^2 + 3^2 + 5^2$



Ahora unimos las distribuciones gráficas, en un solo sólido:



Simbolicamente deducimos lo siguiente:

$$3 \times \left[1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2\right] = [1 + 2 + \cdots + (2n-1)] \times (2n+1)$$
$$3 \times \left[1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2\right] = \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{2}$$
$$3 \times \left[1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2\right] = n(2n-1)(2n+1)$$
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

CONCLUIMOS:

Analizando el comportamiento de las representaciones gráficas: Observamos que se redescubre a través los sólidos generados el comportamiento de la suma de cuadrados de números impares; finalmente a partir de la serie expresada en forma simbolica se deduce la formula que nos permite calcular la suma de los primeros cuadrados impares.

DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo HUMBERTO SALAZAR MAMANI,
identificado con DNI 01296572 en mi condición de egresado de:

☐ **Escuela Profesional,** ☐ **Programa de Segunda Especialidad,** ☒ **Programa de Maestría o Doctorado**

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN,

informo que he elaborado el/la ☐ **Tesis** o ☐ **Trabajo de Investigación** denominada:

"**LA GENERALIZACIÓN DE LA SUMA DE CUADRADOS A TRAVÉS DE RECURSOS DIDÁCTICOS EN LOS ESTUDIANTES DEL TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA**"

Es un tema original.

Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y **no existe plagio/copia** de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como suyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno 22 de DICIEMBRE del 2023

FIRMA (obligatoria)

Huella

Universidad Nacional del Altiplano Puno | Vicerrectorado de Investigación | Repositorio Institucional

AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo HUMBERTO SALAZAR MAMANI, identificado con DNI 01296572 en mi condición de egresado de:

☐ **Escuela Profesional,** ☐ **Programa de Segunda Especialidad,** ☒ **Programa de Maestría o Doctorado**

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN,

informo que he elaborado el/la ☐ **Tesis** o ☐ **Trabajo de Investigación** denominada:

"**LA GENERALIZACIÓN DE LA SUMA DE CUADRADOS A TRAVÉS DE RECURSOS DIDÁCTICOS EN LOS ESTUDIANTES DEL TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA**"

para la obtención de ☒**Grado,** ☐ **Título Profesional** o ☐ **Segunda Especialidad.**

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los "Contenidos") que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia:

Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno 22 de DICIEMBRE del 2023

FIRMA (obligatoria)

Huella