UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICA

INTEGRALES DE BOCHNER Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH PARA LA DEMOSTRACIÓN DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN ESPACIO DE BANACH

TESIS

PRESENTADA POR:

Bach. PEDRO COLLANQUI YANA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

PUNO - PERÚ

2024

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

NOMBRE DEL TRABAJO

INTEGRALES DE BOCHNER Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH PARA LA DEMOSTRACIÓN DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN ESPACIO DE BANACH.pdf

AUTOR

PEDRO COLLANQUI YANA

RECUENTO DE PALABRAS

11025 Words

RECUENTO DE CARACTERES

48466 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

67 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

6.3MB

FECHA DE ENTREGA

May 31, 2024 8:38 AM GMT-5

FECHA DEL INFORME

May 31, 2024 8:39 AM GMT-5

18% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 18% Base de datos de Internet
- 3% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de Crossref
- Base de datos de contenido publicado de Crossref
- 9% Base de datos de trabajos entregados

Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 12 palabras)
- Bloques de texto excluidos manualmente

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
Coordinador de Investigación de la E.P.C.M.
COORDINADOR
PUNO

Faustino Murillo Mamani
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
DNI. 29365471
CM. N° 555

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

DEDICATORIA

Dedicado especialmente a mi linda madre Juana Yana Flores, mi padre Pedro Collanqui Roque (✞), y a mis hermanos; quienes han estado conmigo incluso en los momentos más turbulentos.

Pedro Collanqui Yana

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

AGRADECIMIENTOS

A Dios por sobre todas las cosas, ya que sin él nada tendría sentido en este mundo terrenal mucho menos el complejo mundo de la matemática.

A la Universidad Nacional del Altiplano con su Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas por haber forjado mi vida como profesional conjuntamente con quienes fueron mis docentes, campañeros y amigos.

A mi Asesor de Tesis M. Faustino Murillo Mamani y a los miembros del jurado calificador: M. Sc. Blanca Jacqueline Quispe Aucca, Mg. Fabiola Loayza Torreblanca y al Dr. Tito Luciano Mamani Luna por sus constantes alcances, observaciones y correcciones para concluir el presente trabajo.

A mi gran amigo y orientador Dr. Santiago Miler Quispe Mamani por su enorme contribución en esta investigación y por supuesto a la Dra. Juana Idelza Zavaleta Gómez por su valioso aporte que permitieron la finalización de la tesis .

A mis padres, mis hermanos y a toda mi familia por su constante e invaluable apoyo en todos los sentidos, los cuales permitieron la conclusión de este trabajo de investigación.

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

ÍNDICE GENERAL

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

TEMA: Ecuaciones diferenciales Ordinarias

ÁREA: Matemática

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Pura

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 18 de junio de 2024

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

ÍNDICE DE FIGURAS

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

ÍNDICE DE ANEXOS

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

EDO:	Ecuación Diferencial Ordinaria
PVI:	Problema de Valor Inicial
TPFB:	Teorema del Punto Fijo de Banach

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

RESUMEN

Esta investigación abordó el tema de la existencia y unicidad de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en espacios de Banach; el motivo por el cual se hizo este estudio fue el no encontrar justificación alguna en la literatura revisada acerca del problema de Cauchy abstracto, es por ello que se optó realizar la generalización del teorema de la existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano como el teorema de Picard; hacia el espacio Banach, utilizando como herramienta principal la integral de Bochner. El objetivo general fue utilizar la integral de Bochner y el teorema del punto fijo de Banach para generalizar la demostración de la existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach; debido a que las integrales de Riemann y las integrales de Lebesgue no abarcan espacios de Banach. El tipo de investigación fue inductivo, analítico con un enfoque cualitativo, puesto que se utilizó el teorema de Punto Fijo de Banach para garantizar la existencia y unicidad de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en espacios de Banach, y una herramienta principal fue estimar la norma de una integral de Bochner por una integral de Lebesgue. El resultado que se encontró en la investigación fue que la integral de Bochner permite demostrar la generalización de la existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias para un Problema de Valor Inicial abstracto(PVI) homogéneo.

Palabras clave: Existencia, Unicidad de soluciones, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Espacios de Banach, Integrales de Bochner.

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

ABSTRACT

This research addressed the issue of the existence and uniqueness of the solutions of Ordinary Differential Equations in Banach spaces; the reason why this was done study was not finding any justification in the reviewed literature about the abstract Cauchy problem, which is why it was decided to generalize the theorem of the existence and uniqueness of solutions of ordinary differential equations in the flat as Picard's theorem; into Banach space, using as a tool main the Bochner integral. The main objective was to use the Bochner integral and the Banach fixed point theorem to prove Picard's theorem on Banach spaces; because Riemann integrals and Lebesgue integrals do not span Banach spaces. The method used was the Banach Fixed Point Theorem to guarantee the existence and uniqueness of the solutions of Ordinary Differential Equations in Banach spaces, and a main tool was to estimate the norm of an integral of Bochner by a Lebesgue integral. The result that was found in the investigation was that the Bochner integral allows to demonstrate the generalization of the existence and uniqueness of the solutions of ordinary differential equations for a problem of Homogeneous abstract cauchy.

Keywords: Existence, Uniqueness of solutions, Ordinary Differential Equations, Banach spaces, Bochner Integrals.

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

En matemáticas, una ecuación diferencial abstracta es una ecuación diferencial en la que se desconoce la función y cuyas derivadas toman valores en un espacio abstracto general (Banach, Hilbert, etc). La presente investigación tiene por principal propósito probar la generalización de la existencia y unicidad de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias definidas en espacios de Banach(Problema de Cauchy abstracto) utilizando las integrales de Bochner y el teorema del punto fijo de Banach. Dado que las ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales pueden representar una amplia variedad de fenómenos naturales en campos como la Física, Química y Biología, su aplicabilidad es extensa. Además, las ecuaciones diferenciales tienen un amplio alcance en áreas como Ingeniería, Economía, Ciencias Sociales, Astronomía e incluso dentro del propio ámbito matemático. La causa es simple, si un fenómeno se puede expresar mediante una o varias razones de cambio entre las variables implicadas entonces correspondientemente tenemos una o varias ecuaciones diferenciales. (Becerril y Elizarraraz, 2004)

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La relevancia que ha obtenido el teorema del punto fijo de Banach en diversas áreas de las matemáticas, como en topología, cálculo numérico, ecuaciones diferenciales, la teoría de optimización y la teoría de aproximación para resolver ecuaciones; es debido a que se pueden crear diferentes pruebas y cálculos de manera que al final se reduzca a determinar la existencia de un punto fijo de una aplicación contractiva. (Aldama, 1988). La dificultad que se encontró al estudiar métodos variacionales fue justificar la existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach, puesto que esto permite entender el Lema de Deformación, el cual es herramienta principal para

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

comprender el célebre teorema de Paso de la Montaña. En este trabajo de investigación se pretende extender el teorema de la existencia y unicidad de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias definidos en el plano, como el teorema de Picard; hacia el espacio Banach utilizando como herramienta principal las integrales de Bochner, en esencia se seguirá la misma idea de la demostración del teorema de Picard. El problema objeto de estudio es probar la versión del teorema de Picard para funciones definidas en un espacio de Banach no necesariamente de dimensión finita, teniendo como objetivo principal utilizar la integral de Bochner para probar el teorema de Picard abstracto; debido a que las integrales de Riemann y las integrales de Lebesgue no abarcan elementos de Banach. (no contemplan el uso de la norma como principal medida a los elementos de Banach) El método que se usó fue el teorema de Punto Fijo de Banach para garantizar la existencia y unicidad de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria en espacios de Banach, y una herramienta principal fue estimar la norma de una integral de Bochner por una integral de Lebesgue. Se espera poder probar el teorema de Picard en espacios de Banach con ayuda de las integrales de Bochner.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El presente estudio ayuda a entender el teorema de existencia y unicidad de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en espacios de Banach, por lo cual, se resume a responder la siguiente pregunta:

¿Cómo el uso de las integrales de Bochner, permite generalizar la demostración de la existencia y unicidad de las soluciones de Ecuaciones diferenciales Ordinarias en espacios de Banach?

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Las integrales de Bochner junto con el teorema de punto fijo de Banach permite generalizar el teorema de Picard hacia espacios abstractos (espacios de Banach de dimensión finita o infinita).

1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

La importancia de la investigación es generalizar el teorema de Picard para funciones definidas en espacios de Banach, esto permitió entender con suma facilidad la demostración del Lema de Deformación el cual es fundamental para demostrar el teorema del Paso de la Montaña (Ambrosetti y Rabinowitz,1973) utilizado en las investigaciones actuales.

El aporte que se realizó es la extensión del teorema clásico de Picard para espacios de Banach utilizando las integrales de Bochner, puesto que, el espacio de los números reales en particular es un espacio de Banach, también es importante decir que los espacios de Banach que se trabajó pueden ser de dimensión finita o infinita.

La investigación en matemáticas teóricas en nuestro país es inferior a otros países desarrollados, por lo cual, el propósito de la investigación de la tesis fue implementar el acervo de investigación acerca del teorema de Picard en espacios de Banach.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1. Objetivo General

Utilizar las integrales de Bochner y el teorema del punto fijo de Banach para generalizar la demostración de la existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach.

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

1.5.2. Objetivos específicos

- Realizar la adaptación de las propiedades de norma de integrales de Riemann para integrales de Bochner mediante el teorema función Bochner-integrables.
- Utilizar el teorema de punto fijo de Banach para generalizar la demostración del teorema de Picard.
- Probar la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy abstracto homogéneo,

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} & = A(t)u(t) \qquad 0 \leq s < t \leq T \\ u(s) & = x, \quad x \in X \end{cases}$$

donde $t \to A(t)$ es continua, y X es un espacio de Banach.

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ANTECEDENTES

La dificultad que se encontró al estudiar métodos variacionales fue probar la existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach, porque permite entender el Lema de Deformación, que a su vez es una herramienta principal para comprender el teorema de Paso de la Montaña. Las siguientes investigaciones publicadas tienen relación con el trabajo propuesto:

Las ecuaciones diferenciales por el hecho de representar un modelo matemático para ciertos fenómenos, fue necesario realizar un estudio cualitativo y cuantitativo acerca de sus soluciones. Así también se hizo un estudio teórico y practico acerca de problemas de valor inicial, existencia y unicidad de soluciones y funciones de Lipschitz (Azagra, 2018). La teoría de ecuaciones diferenciales se distingue tanto por su riqueza de ideas y métodos como por sus aplicaciones. El teorema de Picard y de Peano son analizados junto a las propiedades generales de las funciones que son las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, a partir de hipótesis sobre funciones que las definen, usando recursos de análisis matemático clásico y del álgebra lineal (Sotomayor, 1979).

La integral de Bochner se enfoca en definir una integral para funciones que operan en un espacio de medida y tienen valores en un espacio normado. Esta teoría se ha demostrado ser invaluable en el campo del Análisis Funcional, Ecuaciones Diferenciales, Probabilidad, Teoría de Semigrupos, entre otros. La integral de Bochner es una generalización de la integral de Lebesgue en el contexto de los espacios normados (Hille y Phillips, 1957). Algunas propiedades de la integral de Lebesgue, tales como, la linealidad de la integral, el Teorema de la Convergencia Dominada, el Teorema de

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Diferenciación de Lebesgue, se siguen conservando para la integral de Bochner; sin embargo hay otras propiedades de la integral de Lebesgue, como la monotonía de la integral, no tienen sentido en el contexto de los espacios normados, a menos que se introduzca un orden en el espacio normado (Sánchez, 2017). La integral de Bochner es una abstracción directa de la integral de Lebesgue. Se podría decir que la integral de Bochner es solamente la integral de Lebesgue donde el valor absoluto ha sido reemplazado por la norma en el espacio de Banach con algunas restricciones (Leal, 2017).

El teorema del punto fijo de Banach destaca como una herramienta esencial porque proporciona una técnica para demostrar numerosos teoremas de existencia y unicidad en diversos campos del análisis, así como en otras ramas de las matemáticas. El teorema también proporciona una forma clara de generar una solución aproximada a través de un proceso iterativo que converge a la solución exacta. (Loayza, 2006). El teorema de Punto fijo de contracción de Banach aplicado a la demostración de un teorema de existencia y unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias con condición en un intervalo dado, el cual, aparte de garantizar la existencia y unicidad de solución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias proporciona el método de aproximaciones sucesivas mediante el cual a veces se puede encontrar la solución al problema de condición inicial (Aldama 1988).

Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado y completo con la métrica inducida por su norma. Existen relaciones entre ecuaciones diferenciales y análisis funcional, con énfasis principal en sistemas contables de ecuaciones diferenciales ordinarias(Deimling, 1977).

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

2.2. MARCO TEÓRICO

En esta sección se desarrolla los conceptos matemáticos importantes que son necesarias para el desarrollo y obtención de los resultados de la presente investigación; tal es el caso de del teorema del punto fijo de Banach, espacios normados, problemas de Cauchy, entre otros.

2.2.1. Existencia y Unicidad en Espacios Euclideanos

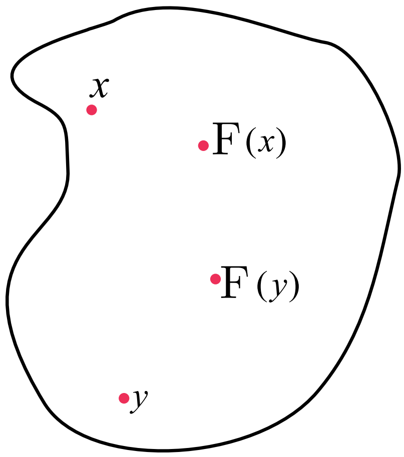
Definición 2.1. Una función $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es Lipschitziana en U con respecto a la segunda variable, si existe una constante $L > 0$ tal que:

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq L|x-y|, \quad \forall (t,x),(t,y) \in U$$

en este caso L es llamada constante de Lipschitz (Sotomayor, 1979, pag. 17).

Definición 2.2. Sea (X,d) un espacio métrico, se dice que $F : X \longrightarrow X$ es una contracción, si $d(F(x),F(y)) \leq kd(x,y)$, $0 < k < 1$, $\forall x,y \in X$ (Sotomayor, 1979, pág. 18).

Figura 1. Contracción



Fuente: creación propia

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Definición 2.3. Sea X un conjunto no vacío, $x \in X$ y $f : X \longrightarrow X$ una función, decimos que f es un *punto fijo* de f si y sólo si, $f(x) = x$. (Vázquez, 2018, pág. 11).

Observación 2.1. Para cada $x \in X$ y $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ definimos inductivamente $f^n(x)$ como $f^0(x) = x$ y $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$. A la sucesión $\{f^n(x)\}$ se le llama sucesión de iteradas de Picard, sucesión de iteradas o sucesión de aproximaciones sucesivas. (Vázquez, 2018, pág. 12)

Definición 2.4. Una Ecuación Diferencial Ordinaria es una relación del tipo

$$x^{(k)} = F(t, x, x' \cdots, x^{(k-1)})$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $x^{(i)} \in \mathbb{R}^d$ para $i \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ es una función continua en un abierto $U \subset \mathbb{R}^{1+kd}$

- k es el orden de la ecuación diferencial ordinaria.
- d es la dimensión de la ecuación diferencial ordinaria.
- Si F no depende de t diremos que la Ecuación diferencial ordinaria es autónoma, caso contrario no es autónoma. (Macias et. al, 2018, pág. 18).

Definición 2.5. Una solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria $x^{(k)} = F\left(t, x, x', \cdots, x^{(k-1)}\right)$ es una curva $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$, k- veces diferenciable en un intervalo abierto I satisfaciendo:

(i) $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(k-1)}) \subset U$

(ii) $\varphi^{(k)}(t) = F\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(k-1)}\right)$, donde $\varphi^{(i)}(t)$ es la i-ésima derivada de φ.

(Macias et. al, 2018, pág. 19)

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

2.2.2. Problema de Cauchy (PVI)

En este apartado se estudia la existencia y unicidad del Problema de Valor Inicial (PVI) utilizando la estrategia de Picard, con la finalidad de adaptar estos conceptos en espacios de Banach, el cual se estudiara en los resultados principales. Para este propósito iniciaremos enunciando el problema de Cauchy clásico:

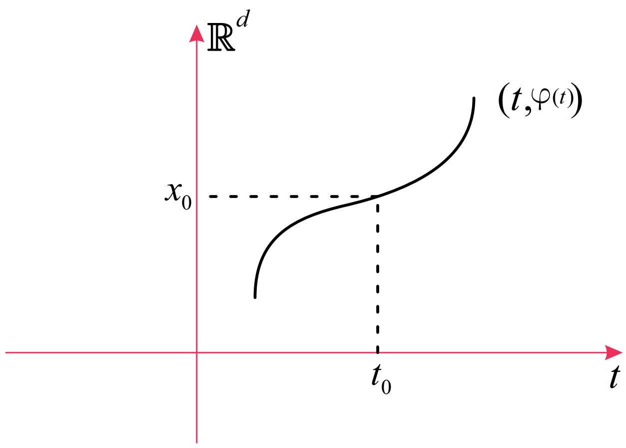
Sea U abierto de $\mathbb{R}^{d+1}$ y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ una función continua. Para $(t_0, x_0) \in U$, considere:

$$\begin{cases} x'(t) &= F(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Una solución del problema de Cauchy (PVI) viene dada por $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) (Macias et. al, 2018, pág. 22)

$$x' = F(t,x) \text{ tal que } t_0 \in I \text{ y } \varphi(t_0) = x_0, \quad \phi(t) = F(t, \phi(t))$$

Figura 2. Problema de Cauchy



Fuente: creación propia

Proposición 2.1. El problema de Cauchy es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds, \qquad \text{para cada } t \in I \tag{2.2}$$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

esto es, una curva diferenciable $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $(t, \varphi(t)) \subset U$ es solución del problema de Cauchy, si y solo si, satisface la ecuación integral de (2.2) (Gallardo, 2013, pag. 134)

Demostración. Demostremos en ambos sentidos, es decir,

$(\Rightarrow)$ $\varphi(t)$ es solución del problema de Cauchy, entonces,

$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$ y $\varphi(t_0) = x_0$

$$\int_{t_0}^{t} \varphi'(s)ds = \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi(s))ds$$
$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi(s))ds$$
$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi(s))ds$$

$(\Leftarrow)$ Sea $\varphi(t)$ tal que $(t, \varphi(t)) \subset U$ y satisface que:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi(s))ds$$
$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$$

por otra parte, es obvio que $\varphi(t_0) = x_0$.

De esta forma $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ es solución de la ecuación (2.1). ■

Teorema 2.1 (Principio de aproximaciones sucesivas)**.** Sean X un espacio métrico, $f : X \to X$ una función continua, $x_0 \in X$ y $x \in X$. Si $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x$, entonces $f(x) = x$, es decir x es un punto fijo de f. (Vázquez, 2018, pág. 12).

Demostración. Como f es una función continua podemos intercambiar el limite con la

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

función f.

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0))\\
f(x) =& \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0)\\
f(x) =& x
\end{aligned}
\qquad \blacksquare
$$

Teorema 2.2. Sean X un espacio métrico completo, $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ y $f : X \to X$ una función $\alpha-$contractiva. Entonces f tiene a lo más un punto fijo $x \in X$. (Vázquez, 2018, pág. 12).

Demostración. Supongamos que x y y son dos puntos fijos de f, esto implica que:

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= d(f(x); f(y))\\
d(x,y) &\leq \alpha d(x;y)\\
d(x,y)(1-\alpha) &\leq 0\\
d(x,y) &\leq 0\\
d(x,y) &= 0\\
x &= y
\end{aligned}
$$

con lo cual queda demostrado que f posee un único punto fijo. $\blacksquare$

Teorema 2.3 (Teorema del punto fijo de Banach)**.** Sean X un espacio métrico completo, $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ y $f : X \to X$ una función $\alpha-$ contractiva. Entonces, f tiene un único punto fijo $x \in X$. Además, dado $x_0 \in X$, se tiene

Estimación del error: $d\left(f^n(x_0), x\right) \leq \left(\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) d(x_0, f(x_0))$

(Vázquez, 2018, pág. 13)

Demostración. Por el Teorema 2.2. f tiene a lo más un punto fijo. A continuación

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

demostraremos que la sucesión $\{f^n(x_0)\}$ es de Cauchy. Notemos que para cada $n \in \{0, 1, 2 \cdots\}$ tenemos:

$$\begin{aligned} d\left(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)\right) &\leq \alpha d\left(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)\right) \\ &\leq \alpha^2 d\left(f^{n-2}(x_0), f^{n-1}(x_0)\right) \leq \cdots \leq \alpha^n d\left(x_0, f(x_0)\right) \end{aligned}$$

Entonces, para $m > n$ se tiene

$$\begin{aligned} d\left(f^n(x_0), f^m(x_0)\right) &\leq d\left(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)\right) + d\left(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)\right) + \\ &+ \cdots + d\left(f^{m-1}(x_0), f^m(x_0)\right) \\ &\leq \alpha^n d\left(x_0, f(x_0)\right) + \cdots + \alpha^{m-1} d\left(x_0, f(x_0)\right) \\ &\leq \alpha^n d\left(x_0, f(x_0)\right)\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots\right) \\ d\left(f^n(x_0), f^m(x_0)\right) &\leq \left(\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) d\left(x_0, f(x_0)\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $m > n$ se tiene

$$d\left(f^n(x_0), f^m(x_0)\right) \leq \left(\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) d\left(x_0, f(x_0)\right) \tag{2.3}$$

De $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ y la ecuación (2.3) se concluye que $\{f^n(x_0)\}$ es una sucesión de Cauchy y como X es completo, existe $x \in X$ tal que la sucesión $\{f^n(x_0)\}$ converge a x. Por Teorema 2.1. x es un punto fijo de f, ya que f es continua. En (2.3), tomamos el límite cuando $m \to \infty$ y obtenemos:

$$d\left(f^n(x_0), x_0\right) \leq \left(\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) d\left(x_0, f(x_0)\right) \qquad \blacksquare$$

(Vázquez, 2018, pág. 13).

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Lema 2.1 (Lema Técnico)**.** Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $\mathscr{F} : X \longrightarrow X$ es continua, y para algún natural $m \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}^m : X \longrightarrow X$ es contracción, entonces, existe un único punto fijo $p \in X$ de $\mathscr{F}^m$, más aún

$$\lim_{m\to\infty} \mathscr{F}^m(x) = p, \qquad \forall x \in X$$

(Sotomayor, 2019, pág. 13).

Demostración. Sea p el punto fijo atractor de $\mathscr{F}^m$ dado por el teorema de contracción. Sea $n = mk + l$ con $0 \leq l < m$. Dado $x \in X$, $\mathscr{F}^l(x)$ es un punto de X. Como p es atractor de $\mathscr{F}^m$, tenemos (ya que $\{\mathscr{F}^l(j)\}$, $0 \leq l < m$ es finito) $[\mathscr{F}^m]^k \left(\mathscr{F}^l(x)\right) \to p$, cuando $k \to \infty$. De la relación: $\mathscr{F}^n(x) = [\mathscr{F}^m]^k \left(\mathscr{F}^l(x)\right)$ y del hecho que cuando $n \to \infty$ se tiene $k \to \infty$, se sigue que $\mathscr{F}^n(x) \to p$, cuando $n \to \infty$, esto es p es un atractor de $\mathscr{F}$, Probaremos ahora que $\mathscr{F}(p) = p$. En efecto,

$$\begin{aligned} p &= \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}^n(\mathscr{F}(p)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}^{n+1}(p) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(\mathscr{F}^n(p)) \\ &= \mathscr{F}(\lim_{n\to\infty} \mathscr{F}^n(p)) \\ p &= \mathscr{F}(p) \end{aligned}$$

■

Teorema 2.4 (Teorema de Picard). Sea $U = I_a \times B_b$, $\quad I_a = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a\}$ y $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq b\}$ asumir que $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y Lipschitz en U con respecto a la segunda variable. Entonces existe una única solución del

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

problema de Picard (Sotomayor, 2019, pág. 13).

$$\begin{cases} x' & = F(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

definida en el intervalo I_α, donde

$$\alpha = \text{mín}\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad \text{con} \quad M = \sup_U |F(t,x)|$$

Demostración.

Afirmación 2.1. $\mathscr{F}(X) \subset X$, de hecho,para $t \in I_\alpha$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\mathscr{F}(\varphi)(t) - x_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} F(s,\varphi(s))ds\right| \\
|\mathscr{F}(\varphi)(t) - x_0| &\leq \int_{t_0}^{t} |F(s,\varphi(s))|\, ds \\
|\mathscr{F}(\varphi)(t) - x_0| &\leq \int_{t_0}^{\alpha} M ds \\
|\mathscr{F}(\varphi)(t) - x_0| &\leq M\alpha \\
|\mathscr{F}(\varphi)(t) - x_0| &= \text{mín}\,\{Ma, b\} \leq b
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathscr{F}(\varphi)(t) \in B_b$, $\forall t \in I_\alpha$

Afirmación 2.2. $\varphi \in X$, $\mathscr{F}(\varphi) = (\varphi)$ si y solo si, φ es solución de Problema de Cauchy. (Ecuación (2.1)). Basta aplicar la proposición (2.1).

Afirmación 2.3. $\mathscr{F}$ es continua, $\mathscr{F}^m$ es contracción para algún $m \in \mathbb{N}$.

Vamos a probar que $|\mathscr{F}^n(\varphi_1)(t) - \mathscr{F}^n(\varphi_2)(t)| \leq \dfrac{L^n\,|t-t_0|^n}{n!} d(\varphi_1,\varphi_2)$, para todo φ_1 y $\varphi_2 \in X$, $n \geq 0$ y $t \in I_\alpha$. Aquí L es una constante de Lipschitz.

- $n = 0$, entonces, $|\varphi_1 - \varphi_2| \leq d(\varphi_1,\varphi_2)$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

- Suponga valida la desigualdad para $n = l$
- $n = l + 1$

$$\begin{aligned}
\left|\mathscr{F}^{l+1}(\varphi_1)(t) - \mathscr{F}^{l+1}(\varphi_2)(t)\right| &= \left|\mathscr{F}\left(\mathscr{F}^{l}(\varphi_1)\right)(t) - \mathscr{F}\left(\mathscr{F}^{l}\varphi_2\right)(t)\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \left|F\left(s, \mathscr{F}^{l}(\varphi_1)(s)\right) - F\left(s, \mathscr{F}^{l}(\varphi_2)(s)\right)\right| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L\left|\mathscr{F}^{l}(\varphi_1)(s) - \mathscr{F}^{l}(\varphi_2)(s)\right| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L \cdot L^{l} \cdot \frac{|s - t_0|^{l}}{l!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds
\end{aligned}$$

Por consiguiente se tiene

$$\left|\mathscr{F}^{l+1}(\varphi_1)(t) - \mathscr{F}^{l+1}(\varphi_2)(t)\right| \leq L^{l+1} \cdot \frac{|t - t_0|^{l+1}}{(l+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2)$$

Tomando el $\sup_{t \in I_\alpha}$ en ambos lados se sigue que:

$$d\left(\mathscr{F}^{n}(\varphi_1), \mathscr{F}^{n}(\varphi_2)\right) \leq \frac{L^{n} \cdot \alpha^{n}}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$$

Para $n = 1$

$$d\left(\mathscr{F}(\varphi_1), \mathscr{F}(\varphi_2)\right) \leq L \cdot \alpha \, d(\varphi_1, \varphi_2), \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in X$$

entonces, $\mathscr{F}$ es continua.

Por otro lado, claramente se observa que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(L\alpha)^{n}}{n!} = 0$$

luego podemos escoger n suficientemente grande de modo que $\dfrac{(L\alpha)^{n}}{n!} < 1$, entonces, $\mathscr{F}^{n}$ es contracción. Se sigue por tanto del lema 2.1. (Teorema del Punto Fijo de Banach),

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

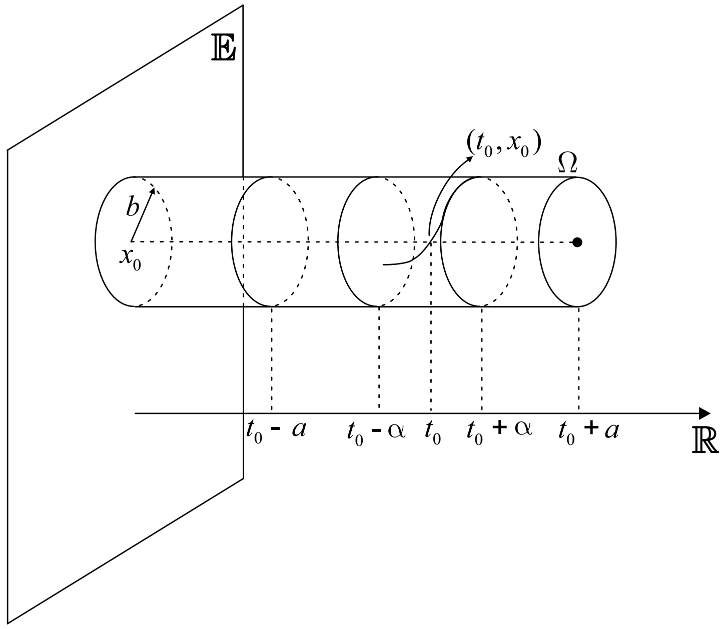
UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

que $\mathscr{F}$ admite un único punto fijo ψ y que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{F}^n(\varphi) = \psi, \;\; \forall \varphi \in X$$

por tanto, queda demostrado el teorema de Picard. ■

Figura 3. Teorema de Picard



Tomado de Equações diferenciais ordinárias (pág. 19), por J.Sotomayor , 2019

2.3. ESPACIOS NORMADOS

Definición 2.6. Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, una norma sobre E es una aplicación $\|\cdot\| : E \longrightarrow [0, +\infty)$ que cumple las siguiente propiedades:

(N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ para todo escalar a y todo $x \in E$.

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cualesquiera $x, y \in E$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Un espacio normado es un par $(E, \|\cdot\|)$ donde E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\|\cdot\|$ es una norma sobre E, se dice que $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado real (ver anexo A) (Vera, 2011, pág. 11).

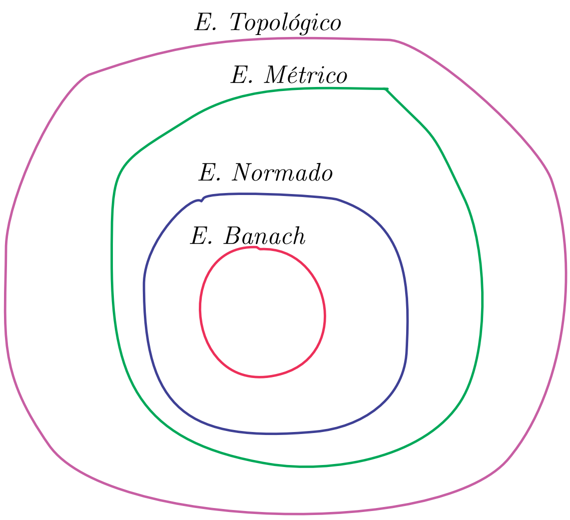
Definición 2.7. Una sucesión $(\mathbf{x}_n)$ en un espacio métrico (E, d) se dice que es de **Cauchy** cuando cumple la condición: Para cada $\epsilon > 0$ existe un $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $p > q \geq n(\epsilon)$ $\Rightarrow d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) < \epsilon$ que se suele expresar en la forma abreviada como:

$$\lim_{p,q} d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) = 0$$

(Vera, 2011, pág. 21).

Definición 2.8. Un espacio métrico $(\mathbb{E}, d)$ (ver anexo) Se caracteriza como completo cuando toda sucesión de Cauchy es convergente. Un espacio normado, real o complejo, $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$, se dice que es completo cuando el espacio métrico asociado es completo. A los espacios normados completos se les llama también espacios de Banach (Vera, 2011, pág. 21).

Figura 4. Relación entre diferentes espacios



Fuente: creación propia

Ejemplo 2.1 (Espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$)**.** Dado un número natural $n \in \{1, 2, \ldots\}$ Denotaremos por $\mathbb{R}^n$ al conjunto de todas las n-adas ordenadas de números reales

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Es decir,

$$\mathbb{R}^n := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)/x_i \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R}^n$ es un espacio normado con la norma,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

(Kreyszig, 1978, pág. 6).

Ejemplo 2.2 (Espacio l_p). Sea $p \in [1, \infty\rangle$, l_p es el conjunto de sucesiones de (ξ_j) números reales tales que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_j|^p$$

es convergente. Es decir,

$$l_p = \left\{ (\xi_j)_{j=1}^{\infty} : \xi_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \right\}$$

Además, en este caso las operaciones usuales de funciones se convierten en las operaciones usuales de sucesiones y la norma $\|\cdot\|_p$ se transforma en

$$\left\|(\xi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p}$$

(Botelho, 2011, pág. 11)

Ejemplo 2.3 (Espacio l_∞). Es el conjunto de sucesiones de números reales (x_k) acotadas, tal que,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

existe. es decir,

$$l_\infty = \left\{ (\xi_j)_{j=1}^{\infty} : \xi_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ y } \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j| < \infty \right\}$$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Podemos concluir que es un espacio de Banach con las operaciones habituales de funciones y con la norma

$$\left\|(\xi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} = \sup\{|\xi_j| : j \in \mathbb{N}\}$$

(Botelho, 2011, pág. 12)

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

La investigación se desarrolló de manera teórica en la Escuela Profesional de Cs. Físico Matemáticas de la Universidad Nacional del Altiplano-Puno.

3.1. MATERIALES

- Laptop,
- Libros.
- Artículos científicos,
- Dispositivo de impresión,
- Artículos de escritorio (lápiz, bolígrafos y goma de borrar),
- Papel bond,
- Plumones para pizarra.

Añadiendo a los materiales que se contempló, se tiene el estudio de las integrales de Bochner y el teorema del punto fijo de Banach, los cuales se utilizaron para alcanzar los objetivos.

3.1.1. La integral de Bochner

Este concepto es una herramienta necesaria que se utilizará para poder generalizar el Teorema de Picard Clásico en un ambiente de Banach abstracto. Para toda esta sección, consideraremos que X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida.

Definición 3.1. Sea $f : \Omega \longrightarrow X$, entonces f es simple si, para algún $n \in \mathbb{N}$, existen vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y conjuntos Σ-medibles $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$, dos a dos

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

disjuntos, tales que, para todo $t \in \Omega$,

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(t) x_k$$

Definición 3.2. Una función fuertemente medible $f : \Omega \longrightarrow X$ es Bochner integrable si existe una sucesión (f_n) de funciones X-integrables tal que la función real medible $\|f - f_n\|$ es Lebesgue integrable para todo n y además

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \|f - f_n\| \, d\mu = 0$$

En este caso, para todo $E \in \Sigma$, **la integral de Bochner** de f sobre E está definida por

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \chi_A f_n d\mu$$

(Sánchez, 2017, pág. 60).

La colección de todas las funciones Bochner integrables es un subespacio vectorial de $M(\Omega, X)$ y la integral de Bochner actúa como un operador lineal desde este espacio hacia X. (Sánchez, 2017, pág. 60).

Teorema 3.1. Si f y g son dos funciones Bochner integrables y α, $\beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ también es Bochner integrable y

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$$

para todo $E \in \Sigma$. (Sánchez, 2017, pág. 60).

Demostración. Como f y g son Bochner integrables, existen dos sucesiones de funciones X-integrables (f_n) y (g_n) tales que las funciones reales $\|f - f_n\|$ y $\|g - g_n\|$ son Lebesgue integrables para todo n y además

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|f-f_n\|\,d\mu=0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|f-f_n\|\,d\mu=0$$

Notemos que la sucesión (f_n+g_n) es una sucesión de funciones X-integrable y además, para todo n se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\|(\alpha f+\beta g)-(\alpha f_n+\beta g_n)\|\,d\mu &= \int_{\Omega}\|\alpha(f-f_n)+\beta(g-g_n)\|\,d\mu\\ &\leq \int_{\Omega}\big(|\alpha|\,\|f-f_n\|+|\beta|\,\|g-g_n\|\,\big)d\mu\\ &\leq \int_{\Omega}|\alpha|\,\|f-f_n\|\,d\mu+\int_{\Omega}|\beta|\,\|g-g_n\|\,d\mu\\ \int_{\Omega}\|(\alpha f+\beta g)-(\alpha f_n+\beta g_n)\|\,d\mu<\infty\end{aligned}$$

Así,

$$\|(\alpha f+\beta g)-(\alpha f_n+\beta g_n)\|$$

es Lebesgue integrable para todo n. Más aún,

$$\lim_{n\to\infty}\int\|(\alpha f+\beta g)-(\alpha f_n+\beta g_n)\|\,d\mu\leq|\alpha|\lim_{n\to\infty}\int\|f-f_n\|\,d\mu+|\beta|\lim_{n\to\infty}\int\|g-g_n\|\,d\mu$$

Como los límites que aparecen en el lado derecho de la desigualdad previa convergen a cero, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\int\|(\alpha f+\beta g)-(\alpha f_n+\beta g_n)\|\,d\mu\to 0$$

Así, $(f+g)$ es Bochner integrable como se recuerda. Por lo tanto, al aprovechar el hecho de que la integral de Bochner constituye un operador lineal que se extiende de L_X a X, y

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

de la continuidad de la suma y de la multiplicación escalar de X, tenemos

$$\begin{aligned}
\int(\alpha f+\beta g)d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int(\alpha f_n+\beta g_n)d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\alpha\int f_n d\mu+\beta\int g_n d\mu\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\alpha\int f_n d\mu+\lim_{n\to\infty}\beta\int g_n d\mu \\
&= \alpha\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu+\beta\lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu \\
&= \alpha\int f d\mu+\beta\int g d\mu \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(Sánchez, 2017, pág. 60).

Teorema 3.2. Sean (X,Σ,μ) un espacio de medida, E un espacio de Banach y $f : X \longrightarrow E$ una función Bochner- integrable y A un conjunto medible (ver anexo B). Entonces,

$$\left\|\int_A f d\mu\right\| \leq \int_A \|f\|\, d\mu$$

(Botelho, 2011, pág. 210).

Para visualizar la relación que existe entre la integral de Lebesgue y la integral de Bochner. (ver el anexo C)

Demostración. Consideremos que f tiene soporte en A, ya que $\int_A f d\mu = \int_X f\chi_A d\mu$. Supongamos, primeramente, que f es una función simple. Por la definición (3.1), f es de la forma

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\chi_{A_k}(t)x_k$$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

para algún $n \in \mathbb{N}$ y como $A_k \subset \Omega$, $x_k \in X$ para todo k. así mismo,

$$\left\| \int_\Omega f d\mu \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) x_k \right\|$$
$$\left\| \int_\Omega f d\mu \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \left\| x_k \right\|$$
$$\left\| \int_\Omega f d\mu \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \left\| x_k \right\| d\mu$$

Como los conjuntos A_k son disjuntos dos por dos y $f(t) = x_k$ siempre que $t \in A_k$, se deduce que,

$$\left\| \int_\Omega f d\mu \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \left\| x_k \right\| d\mu$$
$$\left\| \int_\Omega f d\mu \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \left\| f(t) \right\| d\mu(t)$$
$$\left\| \int_\Omega f d\mu \right\| \leq \int_\Omega \left\| f \right\| d\mu$$

Supongamos, ahora, que la función f es Bochner integrable. Sea $(f_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ una sucesión de funciones simples tales que $\lim_n \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f_n d\mu$ de acuerdo con la definición (3.2) y $\sup_n \|f_n(t)\| \leq \|f(t)\|$, para todo $t \in \Omega$. En este caso, se tiene,

$$\left\| \int_\Omega f_n d\mu \right\| \leq \int_\Omega \left\| f_n \right\| d\mu$$

$$\left\| \int_\Omega f_n d\mu \right\| \leq \int_\Omega \left\| f \right\| d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\left\| \int_A f d\mu \right\| \leq \int_A \left\| f \right\| d\mu$$

■

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Teorema 3.3. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función -medible. Entonces f es Bochner integrable si y sólo si su función norma $\|f\|$ es Lebesgue integrable, es decir, $\int \|f\| \, d\mu < \infty$ (Sánchez, 2017, pág. 63).

Demostración. Supongamos que f es Bochner integrable, entonces existe una sucesión (fn) de funciones X-integrables tales que $\lim_{n\to\infty} \int_{f_n} d\mu$. Entonces

$$\int_\Omega \|f\| \, d\mu \leq \int_\Omega \|f - f_n\| \, d\mu + \int_\Omega \|f_n\| \, d\mu < \infty$$

para n lo suficientemente grande.

De manera reciproca, supongamos que f (y en consecuencia $\|f\|$) es fuertemente medible y $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$. Y como una función $f : \Omega \to X$ es μ-medible si y sólo si existe una sucesión (f_n) de funciones μ-medibles y numerables tal que $f_n \to f$; elijamos una sucesión de funciones medibles (f_n) tal que $\|f - f_n\| \leq \dfrac{1}{n}$ para todo entero positivo n. Como $\|f_n\| \leq \|f_n\| + \dfrac{1}{n}$ y μ es finita, entonces $\int_\Omega \|f_n\| \, d\mu < \infty$. Para todo entero positivo n, escribimos

$$f_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m} \chi_{E_{m,n}}$$

donde $E_{n,i} \cap E_{n,j} = \emptyset$ para $i \neq j$, $E_{n,m} \in \Sigma$, $x_{n,m} \in X$. Luego, para todo n, escojamos p_n tan grande que

$$\int_{\bigcup_{m=p_n+1}^{\infty} E_{n,m}}^{p_n} \|f_n\| \, d\mu < \mu(\Omega)/n$$

y sea $g_n = \sum_{m=1}^{p_n} x_{n,m} \chi_{E_{m,n}}$. Entonces g_n es una función X-integrable y

$$\begin{aligned} \int_\Omega \|f - g_n\| \, d\mu &\leq \int_\Omega \|f - f_n\| \, d\mu + \int_\Omega \|f_n - g_n\| \, d\mu \\ &\leq \mu(\Omega)/n + \leq \mu(\Omega)/n \\ &\leq 2\mu(\Omega)/n \end{aligned}$$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Por lo tanto, f es Bochner integrable, como se quería demostrar. ■

A continuación presentamos algunas propiedades sobre la integral de Bochner

Teorema 3.4. Si f es una función -Bochner integrable, entonces:

(i) $\lim_{\mu(E)\to 0}\int_E f d\mu = 0$.

(ii) $\left\|\int_E f d\mu\right\| \neq \int_E \|f\|\, d\mu$, para todo $E\in\Sigma$

(iii) Si (E_n) es una sucesión de conjuntos disjuntos por pares de Σ y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu$$

(iv) Si $F(E)=\int_E f d\mu$, entonces, F es de variación acotada y $\|F\|(E) = \int_E \|f\|\, d\mu$, para todo $E\in\Sigma$. (Sánchez, 2017, pág. 66).

Demostración. **(i)** Observemos que $\lim\limits_{\mu(E)\to 0}\int_E \|f\|\, d\mu = 0$ para $f\in L_1(\mu)$. En efecto, dado que$f\in L_1(\mu)$, entonces $\|f\| : \Omega\to\mathbb{R}$ es Lebesgue integrable, es decir, $\int_\Omega \|f\|\, d\mu < \infty$, entonces si $\mu(E)=0$ para algún $E\in\Sigma$, entonces $\|f\|\,\chi_E d\mu = 0$ μ-casi donde quiera y de aquí tenemos que $\int_\Omega \|f\|\,\chi_E d\mu = 0$, y así, por el Teorema de Pettis, se tiene $\lim\limits_{\mu(E)\to 0}\int_E \|f\|\, d\mu = 0$ y por (ii) obtenemos

$$0 \le \left\|\lim_{\mu(E)\to 0}\int_E f d\mu\right\| \le \lim_{\mu(E)\to 0}\int_E \|f\|\, d\mu = 0$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{\mu(E)\to 0}\int_E \|f\|\, d\mu = 0$

(ii) Existe una sucesión de funciones X-integrables (f_n) tal que, $\int_E f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int f_n d\mu$ por ser f μ-Bochner integrable y notemos que $\left\|\int f_n d\mu\right\| \le \int \|f_n\|\, d\mu$ para todo n

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

dado por el Teorema 3.1. y así tenemos que:

$$\left\|\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu\right\| = \left\|\int f d\mu\right\| \leq \int \|f\|\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int \|f_n\|\, d\mu$$

(iii) Notemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu$ está dominada término por término por la serie convergente de números no negativos $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}\|f\|\, d\mu \left(\leq \int_{\Omega}\|f\|\, d\mu < \infty\right)$, Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu$ es absolutamente convergente. Para revisar su límite notemos que

$$\left\|\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu - \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu\right\| = \left\|\int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f d\mu\right\|$$

por la aditividad finita de la integral de Bochner. Más aún, $\lim_{m\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n\right) = 0$. Por (i) tenemos que $\lim_{m\to\infty}\left\|\int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f d\mu\right\| = 0$ y, en consecuencia,

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu$$

(iv) Si π es una partición de un conjunto $E \in \Sigma$, entonces

$$\sum_{A\in\pi}\|F(A)\| = \sum_{A\in\pi}\left\|\int_A f d\mu\right\| \leq \sum_{A\in\pi}\int_A \|f\|\, d\mu = \int_E \|f\|\, d\mu$$

De aquí $|F|(E) \leq \int_E \|f\|\, d\mu$ y F es de variación acotada por el Teorema 3.3.

Recíprocamente, sea $\epsilon > 0$ y seleccionemos una sucesión (f_n) de funciones X-integrable tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int \|f - f_n\|\, d\mu = 0$$

Sea n_0 fijo tal que $\int \|f - f_n\|\, d\mu < \epsilon$ y elijamos una partición π' de E tal que

$$\sum_{A\in\pi'}\left\|\int_A f_{n_0} d\mu\right\| = \int_E \|f_{n_0}\|\, d\mu$$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Ahora bien, elijamos una partición π de E que sea una refinación de π' tal que

$$|F|(E) - \sum_{B\in\pi}\left\|\int_B f d\mu\right\| < \epsilon$$

Se sigue teniendo que

$$\int_E \|f_{n_0}\|\, d\mu = \sum_{B\in\pi}\left\|\int_B f d\mu\right\|$$

Además,

$$\sum_{B\in\pi}\left|\left\|\int_B f d\mu\right\| - \left\|\int_B f_{n_0} d\mu\right\|\right| \leq \int_E \|f - f_{n_0}\|\, d\mu < \epsilon$$

De aquí se tiene que

$$\left| |F|(E) - \int_E \|f_{n_0}\|\, d\mu \right| = \left| |F|(E) - \sum_{B\in\pi}\int_E \|f_{n_0}\|\, d\mu \right| < 2\epsilon$$

Como esto es válido para todo n_0 suficientemente grande, de lo anterior se implica que

$$|F|(E) = \lim_{n\to\infty}\int_E \|f_n\|\, d\mu = \int_E \|f\|\, d\mu$$

Por tanto, queda demostrado el teorema. ■

Teorema 3.5. Si f y g son Bochner integrables y $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ para todo $E \in \Sigma$, entonces, $f = g$ para μ-casi donde quiera (Sánchez, 2017, pág. 68).

Demostración. Sea $F(E) = \int_E (f-g) d\mu$. Entonces $F(E) = 0$ para todo $E \in \Sigma$. Por lo tanto, $F(E) = 0$ para todo $E \in \Sigma$. Pero entonces,

$$0 = F(\Omega) = \int \|f - g\|\, d\mu$$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

y así $\|f - g\| = 0$ μ-casi donde quiera. Esto solamente puede suceder si $f = g$ μ-casi donde quiera. ■

3.1.2. El teorema del punto fijo de Banach

Este apartado ya fue estudiado y demostrado dentro del marco teórico; sin embargo, hacemos incapié de que dicho estudio fue realizado en el espacio Euclidiano.

3.2. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.2.1. Tipo de investigación

El tipo de investigación es inductivo y analítico con un enfoque cualitativo, ya que esta basada en la revisión bibliografía y es fundamentalmente teórica, también se caracteriza en profundizar los resultados y aumentar el conocimiento del tema de investigación.

3.2.2. Método

En primer lugar, $\int_s^t \left\|A(\tau)\left[u(\tau) - v(\tau)\right]\right\|_X d\tau$ es una integral de Boshner, puesto que $f(\tau) = A(\tau)\left[u(\tau) - v(\tau)\right]$ es una función Boshner - integrable y $[s, t]$ es un conjunto medible, entonces por el teorema 3.2. la norma de la integral de Boshner de $f(\tau)$ es menor o igual que la integral de Lebesgue de la norma de $f(\tau)$.

$$\left\|\int_s^t A(\tau)\left[u(\tau) - v(\tau)\right] d\tau\right\|_X \leq \int_s^t \left\|A(\tau)\left[u(\tau) - v(\tau)\right]\right\|_X d\tau$$

Seguidamente, como todo espacio de Banach es un espacio métrico completo, la función auxiliar $\mathscr{F}$ es continua y además $\mathscr{F}^m$ es una contracción entonces, por el teorema 2.3. (Teorema del punto fijo de Banach) se concluye que existe un único punto fijo u en $C([s, T] : X)$, el cual permite encontrar la función $u(t) = x + \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau$. Finalmente con los resultados anteriores se logra la generalización de la existencia y unicidad de las

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en espacios de Banach.

3.3. VARIABLES

3.3.1. Variable independiente

Integrales de Boshner y el teorema del punto fijo.

3.3.2. Variable dependiente

Existencia y Unicidad de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en espacios de Banach.

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capitulo nos concentraremos en generalizar el teorema clásico de Picard. Mas exactamente, se probara la existencia y unicidad de un problema de Cauchy abstracto en el ambiente Banach.

Para nuestra investigación primero necesitamos enfocarnos en la generalización del Lema Técnico para espacios de Banach, en seguida adaptar las estimativas utilizando integración de Bochner.

4.1. PROBLEMA DE CAUCHY ABSTRACTO

Definición 4.1 (El problema del valor inicial homogéneo)**.** Sea X un espacio de Banach y A un operador lineal de $D(A) \subset X$ en X. Dado $x \in X$ el problema de Cauchy abstracto para A con datos iniciales x consiste en encontrar una solución $u(t)$ para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} & = Au(t), \qquad t > 0 \\ u(0) & = x \end{cases} \tag{4.1}$$

donde por solución entendemos una función $u(t)$ con valor en X tal que $u(t)$ es continua para $t \geq 0$ continuamente diferenciable y $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$ y (4.1) se satisface. Tenga en cuenta que como $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$ y u es continua en $t = 0$, (4.1) no puede tener una solución para $x \notin \overline{D(A)}$. (Pazy, 1983, pág 100).

4.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD EN ESPACIOS DE BANACH

En este apartado se desarrollara la generalización del teorema del Teorema clásico de Picard utilizando como herramientas la adaptación del lema técnico para espacios de Banach y la estimativas del integración de en el sentido de Bochner, pues nuestros espacios

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

son abstractos y no necesariamente euclidianos.

Teorema 4.1 (Existencia y unicidad de la solución del PVI (P))**.** Sea X un espacio de Banach y para todo t, $0 \leq t \leq T$ y sea $A(t) : D \subset X \to X$ un operador lineal acotado. Si la función que va de $t \to A(t)$ es continua, entonces para cada $x \in X$ el problema de valor inicial

$$(P) \quad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} & = A(t)u(t) \qquad 0 \leq s < t \leq T \\ u(s) & = x \end{cases} \tag{4.2}$$

tiene una única solución clásica u.

Demostración. Sea:

$$\alpha = \max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)\|_{\mathscr{L}(X)}$$

se define una aplicación S de $C([s,T] : X)$ en si mismo por

$$(Su)(t) := x + \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau \tag{4.3}$$

Denotando $\|u\|_\infty = \max_{s \leq t \leq T} \|u(t)\|_X$

$$\begin{aligned} \|(Su)(t) - (Sv)(t)\|_X &= \left\| x + \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau - \left(x + \int_s^t A(\tau)v(\tau)d\tau \right) \right\|_X \\ &= \left\| \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau - \int_s^t A(\tau)v(\tau)d\tau \right\|_X \\ &= \left\| \int_s^t A(\tau)\left[u(\tau) - v(\tau)\right] d\tau \right\|_X , \end{aligned}$$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

luego, por las nociones de Bochner, específicamente el Teorema 3.2, tenemos:

$$\begin{aligned}
\|(Su)(t)-(Sv)(t)\|_X &\leq \int_s^t \left\|A(\tau)\left[u(\tau)-v(\tau)\right]\right\|_X d\tau \\
&\leq \alpha \int_s^t \sup \left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|_X d\tau \\
&\leq \alpha \int_s^t \left\|u-v\right\|_\infty d\tau \\
&\leq \alpha \left\|u-v\right\|_\infty \int_s^t d\tau \\
\|(Su)(t)-(Sv)(t)\|_X &\leq \alpha(t-s)\left\|u-v\right\|_\infty , \qquad s\leq t\leq T
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Vamos a probar que:

$$\|(S^n u)(t)-(S^n v)(t)\|_X \leq \alpha^n \frac{(t-s)^n}{n!}\left\|u-v\right\|_\infty , \quad s\leq t\leq T \tag{4.5}$$

(i) $n=1$ Ya fue demostrado (ecuación (4.4.))

(ii) $n=2$

$$\begin{aligned}
\left\|(S^2u)(t)-(S^2v)(t)\right\|_X &= \|(S(Su))(t)-(S(Sv))(t)\|_X \\
\left\|(S^2u)(t)-(S^2v)(t)\right\|_X &= \left\| x+\int_s^t A(\tau)[S(u)](\tau)d(\tau) - \left(x+\int_s^t A(\tau)[S(v)](\tau)d(\tau)\right)\right\|_X \\
&= \left\|\int_s^t A(\tau)[S(u)-S(v)](\tau)d(\tau)\right\|_X \\
&\leq \int_s^t \|A(\tau)\| \left\|[S(u)-S(v)](\tau)\right\|_X d(\tau) \\
&\leq \int_s^t \max_{\alpha<t\leq T}\|A(\tau)\|\,\alpha(\tau-s)\left\|u-v\right\|_\infty d(\tau) \quad \text{de la hipótesis } n=1 \\
&\leq \alpha^2 \left\|u-v\right\|_\infty \int_s^t (\tau-s)d(\tau) \\
&\leq \alpha^2 \frac{1}{2!}(t-s)^2 \left\|u-v\right\|_\infty
\end{aligned}$$

(iii) $n=l \;\rightarrow\; n=l+1$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

$$
\begin{aligned}
\left\|(S^{l+1}u)(t)-(S^{l+1}v)(t)\right\|_X &= \left\|(S(S^l u))(t)-(S(S^l v))(t)\right\|_X\\
\left\|(S^{l+1}u)(t)-(S^{l+1}v)(t)\right\|_X &= \left\|x+\int_s^t A(\tau)[S^l(u)](\tau)d(\tau)-\left(x+\int_s^t A(\tau)[S^l(v)](\tau)d(\tau)\right)\right\|\\
&= \left\|\int_s^t A(\tau)[S^l(u)-S^l(v)](\tau)d(\tau)\right\|_X\\
&\leq \int_s^t \|A(\tau)\|\left\|[S^l(u)-S^l(v)](\tau)\right\|_X d(\tau)\\
&\leq \int_s^t \max_{\alpha<t\leq T}\|A(\tau)\|\,\alpha^l(\tau-s)^l\|u-v\|_\infty d(\tau) \quad \text{del resultado } n=l\\
&\leq \alpha^{l+1}\|u-v\|_\infty \int_s^t (\tau-s)^l d(\tau)\\
\left\|(S^{l+1}u)(t)-(S^{l+1}v)(t)\right\|_X &\leq \alpha^{l+1}\frac{1}{(l+1)!}(t-s)^{l+1}\|u-v\|_\infty
\end{aligned}
$$

Aplicando supremo a ambos lados de la ecuación (4.5.) obtenemos:

$$\|(S^n u)-(S^n v)\|_\infty \leq \alpha^n\frac{(T-s)^n}{n!}\|u-v\|_\infty$$

Observe que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\alpha^n\frac{(t-s)^n}{n!}\right]=0$$

Luego podemos escoger n suficientemente grande de modo que

$$\alpha^n\frac{(T-s)^n}{n!}<1$$

entonces S^n es contracción. Se sigue del lema 2.1. (Lema Técnico-TPFB), que S admite un único punto fijo u en $C([s,T]:X)$, es decir,

$$\exists!\ u\in C([s,T]:X)\ \text{ tal que }\ S(u)=u.$$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

evaluando en t, tenemos

$$\begin{aligned}(S(u))(t) &= u(t)\\ x + \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau &= u(t)\end{aligned}$$

y es así que se encuentra la función $u(t)$

$$u(t) = x + \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau \tag{4.6}$$

como u es continuo, la parte derecha de (4.6) es diferenciable. De este modo u es diferenciable y su derivada, obtenida diferenciando (4.6), el cual satisface $u'(t) = A(t)u(t)$. También u es solución del problema de valor inicial (4.2). Como cada solución de (4.2) es también una solución de (4.6), la solución de (4.2) es única. ■

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

V. CONCLUSIONES

Al terminar esta investigación, se llegó a las siguientes conclusiones:

- Se aclaró elementos de nuestra demostración generalizada, con rigor, el paso donde

$$\left\| \int_A f d\mu \right\| \leq \int_A \|f\| \, d\mu$$

se observa que el lado izquierdo de la desigualdad es la integral de Bochner y el lado derecho es la integral de Lebesgue y gracias a esta relación de integral Bochner- Lebesgue se pudo demostrar la generalización de la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach.

- La integral que puede lidiar con elementos de Banach, es la integral de Bochner, el cual es el aporte de la presente investigación al poder utilizarlo en la demostración de la generalización del problema de Picard en espacios de Banach.

- Se logró generalizar el problema de Picard clásico por un problema de Cauchy abstracto, utilizando las integrales de Bochner.

- Se utilizó el teorema del punto fijo de Banach para la generalización del teorema de Picard clásico, adaptando propiedades de la integral de Riemann hacia las integrales de Bochner.

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

VI. RECOMENDACIONES

- La demostración de la generalización del problema de Picard abstracto se realizó haciendo uso de operadores lineales acotadas, quedando la posibilidad de realizar la generalización cuando el operador lineal

$$A(t) : D(A(t)) \subset X \longrightarrow X$$

no sea limitado.

- Un buen trabajo futuro sería, estudiar el problema de Cauchy Abstracto no homogéneo

$$\frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t)$$

- La generalización del problema de Cauchy abstracto se realizó utilizando la integral de Bochner, seria recomendable demostrar este problema

$$\frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t)$$

utilizando el teorema de Lax-Milgram.

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ambrosetti, A., & Rabinowitz, P. (1973). Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications. *Journal of analisis funtional*, *14*, 349-381.

Azagra, D. (2018a). *Introducción a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Universidad Complutense de Madrid, España.

Azagra, D. (2018b). *Introducción a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Universidad Complutense de Madrid, España.

Bernstein, L., J. y Wang. (2003). *A Mountain-Pass Theorem for Asymptotically Conical Self-Expanders*. Cornell University, Estados Unidos.

Botelho, D., G. y Pellegrino. (2011). *Fundamentos de Análise Funcional*. Springer Brasil.

Brezis, H. (2011). *Funtional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universidad Complutense de Madrid, España.

Deimling, K. (1977). *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*. Berling Heidelberg, Estados Unidos.

Driver, B. (2018). *Analysis Tools With Aplications*. University of California San Diego, Estados Unidos.

García, D. (2020). *Teoremas del Punto Fijo y Aplicaciones*. Universidad de Barcelona, España.

Hille, R., E. y Phillips. (2018). *Functional Analysis and Semi- Groups*. American Mathematical Society, Estados Unidos.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis whit Applications*. University of Windsor, Canada.

Leal, J. (2017). *La integral de Bochner*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Loayza, J. (2006). *Aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú.

Macias, J., D. y Melo. (2018). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y sus Aplicaciones*. Centro de Investigación en Petroquímica, México.

Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York, Estados Unidos.

Rabinowitz, P. (1981). *The Mountain Pass Theorem: Theme and Variations, Wisconsin*. Estados Unidos.

Sánchez, J. (2017). *Integral de Bochner*. Universidad Autónoma de Puebla, México.

Sotomayor, J. (1979). *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

Vázquez, A. (2018). *Teoremas del Punto Fijo en Espacios de Banach Ordenados y Aplicaciones*. Universidad autónoma de Puebla, México.

Ventura, D., J. y Elizarraraz. (2004). *Ecuaciones Diferenciales técnicas de solución y aplicaciones*. Universidad Autónoma Metropolitana, México.

Vera, G. (2011). *Lecciones de Análisis Matemático II*. Universidad de Murcia, España.

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

ANEXOS

ANEXO 1: Espacios vectoriales y espacios métricos

Estas definiciones permitieron entender de una mejor manera los conjuntos de partida y de llegada de las diferentes funciones con las que se trabajó. Algunos ejemplos de espacio vectorial son los espacios $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, etc.

Espacios vectoriales

Definición A1.1. Sea $\mathbb{K}$ un conjunto, y sean $(+)$ y $(\cdot)$ operaciones de $\mathbb{K}$. Se dice que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y todo elemento no nulo de $\mathbb{K}$ tiene inverso multiplicativo. Es decir:

- $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano.
- $(\mathbb{K} - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.
- vale la propiedad distributiva de $(\cdot)$ con respecto a $(+)$.

(Roque, 2020, Álgebra Lineal, pág. 11).

Sea $\mathbb{K}$ el sistema de los números reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$ y sea $\mathbb{V}$ un conjunto no vacío en el que existen dos operaciones (Roque, 2020, Álgebra Lineal, pág. 11).

(A) Adición:

$$v, w \in \mathbb{V} \to v + w \in \mathbb{V} \qquad \text{(Clausura para la suma)} \tag{A1.1}$$

(M) Multiplicación por un escalar:

$$\alpha \in \mathbb{K}, v \in \mathbb{V} \to \alpha \cdot v \in \mathbb{V} \qquad \text{(Clausura para el producto por un escalar)} \tag{A1.2}$$

Definición A1.2. Un conjunto $\mathbb{V}$ con un sistema de números $\mathbb{K}$ (reales o complejos) se denomina Espacio Vectorial sobre $\mathbb{K}$ si además de satisfacer (A1.1) y (A1.2) también

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

cumple los siguientes axiomas:

(A1) Asociativa: Dados $u, v, w \in \mathbb{V}$ entonces:

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

(A2) Conmutativa: Dados u, $v \in \mathbb{V}$ entonces:

$$u + v = v + u$$

(A3) Existencia del Elemento Neutro Aditivo: Existe un elemento $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$, llamado vector nulo, tal que para todo $v \in \mathbb{V}$:

$$\mathbf{0} + v = v + \mathbf{0} = v$$

(A4) Existencia del Inverso Aditivo: Dado cualquier $v \in \mathbb{V}$, existe un elemento en $\mathbb{V}$, denotado por $-v$, tal que,

$$v + (-v) = \mathbf{0}$$

(M1) Asociativa para la multiplicación: Para todo α y $\beta \in \mathbb{K}$ y $u \in \mathbb{V}$, se tiene que:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$$

(M2) Neutro Multiplicativo: Si 1 es el elemento unidad en $\mathbb{K}$, entonces para todo $v \in \mathbb{V}$ se tiene que

$$1 \cdot v = v$$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

(M3) Distributiva por la izquierda: Dados el escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ y los vectores u y $v \in \mathbb{V}$, entonces:

$$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$$

(M4) Distributiva por la izquierda: Dados los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y el vector $u \in \mathbb{V}$, entonces:

$$(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$$

Espacios métricos

Definición A1.3. Un espacio métrico es un par (X, d), donde X es un conjunto y d es una métrica sobre X (o función distancia sobre X), es decir, una función definida en $X \times X$ tal que para todo x, y y $z \in X$ se cumple: (Kreyszig, 1978, pág. 3)

(M1) $d(x, y) \geq 0$ d es un valor real finito y no negativo.

(M2) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetría)

(M4) $d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y)$ (Desigualdad triangular)

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

ANEXO 2: Nociones de medida

Para poder entender los conceptos de medida es necesario primero describir las familias de subconjuntos de un espacio base “álgebras y σ-álgebras”, conjuntos de Borel, etc.

Definición A2.4. Un σ-álgebra en el conjunto X es una familia Σ de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:

(a) $\emptyset, X \in \Sigma$

(b) Sea $A \in \Sigma$, entonces $A^C := X - A \in \Sigma$

(c) Sea $A_n \in \Sigma$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

En este caso, el par (X, Σ) es llamado espacio mensurable. Cada elemento del σ-álgebra es llamado conjunto mensurable (Botelho, 2011, pág. 265).

Dada una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, la intersección de todas las σ-álgebras que contiene $\mathcal{A}$, también es un σ-álgebra. Llamado σ-álgebra generado por $\mathcal{A}$ y denotada por $\Sigma(\mathcal{A})$. Note que $\Sigma(\mathcal{A})$ es el menor σ-álgebra en X que contiene $\mathcal{A}$.

$$\Sigma(\mathcal{A}) := \bigcap_{\mathscr{F} \supseteq \mathcal{A}} \mathscr{F}, \quad \text{donde} \quad \mathscr{F} \quad \text{son} \quad \sigma - \text{álgebra que contiene a } \mathcal{A}$$

Observación A2.1. Cuando (X, τ) es un espacio topológico, la σ-álgebra $\Sigma(\tau)$ es llamada σ-álgebra de Borel de X y es denotada por $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$. Los elementos de $\mathcal{B}$ son llamados conjuntos de Borel o simplemente Borelianos (Botelho, 2011, pág. 265).

Definición A2.5. La topología habitual de $\mathbb{R}$ induce una topología en $\overline{\mathbb{R}}$ al considerar como subconjuntos abiertos $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ de la forma:

(a) $A \subseteq \mathbb{R}$ es abierto en $\mathbb{R}$, o

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

(b) $A = [-\infty, a)$, para algún $A \in \mathbb{R}$, o

(c) $A = [a, \infty)$, para algún $A \in \mathbb{R}$, o

(d) A es una unión de conjuntos como los de (a), (b) o (c).

Consideraremos $\mathbb{R}$ como un espacio mensurable con el σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ relativa a esta topología (Botelho, 2011, pág. 266).

Funciones medibles

Definición A2.6. Sea (X, Σ) un espacio mensurable. Una función $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es mensurable, si $f^{-1}(A) \in \Sigma$ para todo boreliano $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. El conjunto formado por tales funciones sera denotado por $M(X, \Sigma)$. Consideremos también el subconjunto:

$$M^{+}(X, \Sigma) := \{f \in M(X, \Sigma) : f(x) \geq 0 \ \text{ para todo } \ x \in X\}$$

En el caso en que $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in X$, f es mensurable si $f^{-1}(A) \in \Sigma$ para todo Boreliano A de $\mathbb{R}$. Si f asume (al menos) uno de los valores ∞ y $-\infty$. (Botelho, 2011, pág. 266).

Proposición A2.1. Una función $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es mensurable, si y solamente si, los conjuntos $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ pertenecen a Σ y es mensurable la función

$$f_0 : (X, \Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si : } \ f(x) \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{si : } \ f(x) = -\infty \ \text{ o } \ f(x) = \infty \end{cases}$$

(Botelho, 2011, pág. 266).

Proposición A2.2. Si $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ son funciones mensurables y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces también son mensurables las siguientes funciones (siempre que estén bien definidos): λf,

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

$f+g$, $f \cdot g$, $|f|$, $\text{máx}\{f, g\}$ y $\text{mín}\{f, g\}$. (Botelho, 2011, pág. 266).

Medidas

Definición A2.7. Una *medida* en el espacio mensurable (X, Σ) es una función $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(A) \geq 0, \;\; \forall A \in \Sigma$

(iii) μ es aditivamente contable en el sentido que si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión disjunto $(A_n \cup A_m = \emptyset \;$ si $\; n \neq m)$ de conjunto en Σ, entonces,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

La terna (X, Σ, μ) es llamado el *espacio de medida* (Botelho, 2011, pág. 267).

Definición A2.8. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, decimos que la medida μ es finita si, $\mu(X) < \infty, \;\; \forall x \in \Sigma$. (Botelho, 2011, pág. 267).

Definición A2.9. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, decimos que la medida es σ-finita, si existe $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ en Σ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{y} \quad \mu(A_n) < \infty, \;\; \forall\, n = 1, 2, \ldots$$

se dice que la medida λ es finita si $\mu(X) < \infty$ y se dice que es σ-finita si existen conjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ en Σ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu(A_n) < \infty$ para todo n. (Botelho, 2011, pág. 267).

Proposición A2.3. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida si $A, B \in \Sigma$. Entonces,

(a) Si $A, B \in \Sigma$ y $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(b) Si $A, B \in \Sigma$, $A \subseteq B$, y $\mu(A) \leq \infty$, entonces, $\mu(B - A) = \mu(A) - \mu(B)$.

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

(c) Si $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n} \mu(A_n)$$

(d) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n} \mu(A_n)$$

(e) Si $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(Botelho, 2011, pág. 267).

Definición A2.10. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida $f, g, f_n :\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$. Se dice que:

(a) f es igual a g μ-casi siempre, si existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A^c$, en este caso se escribe $f = g$ μ-casi siempre.

(b) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para μ-casi siempre, si existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ y $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in A^c$, en este caso se escribe $f_n \longrightarrow f$ μ-casi siempre o $\lim_n f_n$ μ-casi siempre. (Botelho, 2011, pág. 268).

Proposición A2.4. Si la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones medibles en el espacio de medición (X, Σ, μ) converge en medida a la función medible $f \in M(X, \Sigma)$, entonces existe una subsucesión $(f_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ que converge μ-casi siempre para f. (Botelho, 2011, pág. 268).

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

ANEXO 3: Integral abstracta en un espacio de medida (X, Σ, μ)

Para el propósito del presente trabajo de investigación es importante conocer conceptos de integral de Lebesgue, como: definiciones, teoremas y propiedades; las cuales guardan cierta relación con las integrales de Bochner. A continuación se presentan algunas definiciones y teoremas de integración.

Definición A3.11. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Se cumple lo siguiente:

(a) La integral de la función simple $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$ cuya representación canónica es $\varphi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$, en relación a la medida μ es definida por

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j)$$

(b) La integral de la función $f \in M^+(X, \Sigma)$ en relación a la medida μ esta definida por

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \in M^+(X, \Sigma) \ \text{ es simple y } \ 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

(c) Para $f \in M^+(X, \Sigma)$ y $A \in \Sigma$, se define,

$$\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu$$

(Botelho, 2011, pág. 268).

Proposición A3.5. Sean $f, g \in M^+(X, \Sigma)$ y $A, B \in \Sigma$.

(a) Si $f \leq g$, entonces

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

(b) Si $A \subseteq B$, entonces,

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$$

(c) $\int_A f d\mu = 0$ si, y solamente si,

$$f = 0$$

μ-casi siempre.

(Botelho, 2011, pág. 268).

Proposición A3.6. Se cumple:

(a) Una función mensurable $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e integrable si, y solamente si, $|f|$ es integrable.

En este caso se tiene

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$$

(b) Sean $f; g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables y $a \in \mathbb{R}$. Entonces, af y $f + g$ son integrables y

$$\int_X af d\mu = a \int_X f d\mu \quad \text{y} \quad \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

(Botelho, 2011, pág. 269).

Definición A3.12. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Una función $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es Lebesgue- integrable (o integrable) si las funciones $f_1, f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f_1(x) = \text{Re}(f(x)) \;\; \text{y} \;\; f_2(x) = \text{Im}(f(x)),$$

son integrables. En este caso definimos

$$\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu + i \int_X f_2 d\mu$$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

El conjunto de todas las funciones integrables $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es denotado por $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$.

(Botelho, 2011, pág. 269).

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

ANEXO 4: Integración vectorial

X es un conjunto no vació, Σ es un σ-álgebra de subconjuntos de X y μ es una medida σ-finita en Σ. Recuerde que los elementos de Σ son llamados de conjuntos medibles y que, para cada conjunto medible $A \in \Sigma$, la función característica de A esta denotada por χ_A.

Definición A4.13. Una función $f : X \longrightarrow E$ es mensurable simple si existen conjuntos medibles $A_1, A_2, \dots, A_k \in \sum$ con $\mu(A_j) < \infty$, para $j = 1, 2, \dots, k$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$, y vectores $b_1, b_2, \dots, b_k \in E$ tales que

$$f = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i} b_i$$

Una función $g : X \longrightarrow E$ es mensurable si existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples mensurable, tales que $f_n \longrightarrow g$ μ-casi siempre.

(Botelho, 2011, pág 206).

Proposición A4.7. Sea $(f_n : X \longrightarrow E)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones mensurables y $f : X \longrightarrow E$. Si $f_n \longrightarrow f$ μ -casi siempre, entonces, f es mensurable.

(Botelho, 2011, pág 207).

Teorema A4.1 (Teorema de la mensurabilidad de Pettis)**.** Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una función $f : X \longrightarrow E$.

a) f es mensurable.

b) f es débilmente mensurable, esto es $\varphi \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es mensurable para todo $\varphi \in E'$.

c) $\|f\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es mensurable.

(Botelho, 2011, pág 206)

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Demostración. (a)$\Longrightarrow$ (b) Se sigue inmediatamente de la definición 4.1.

(b)$\Longrightarrow$ (c) Como E es separable, existe una sucesión $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ de funcionales lineales en E' tales que $\|\varphi_n\| = 1$ para todo i e $\|y\| = \sup \varphi_i(y)$ para todo $y \in E$. Fijando un $\lambda \in \mathbb{R}$, por hipótesis, los conjuntos $A_i := \{x \in X : \varphi_i \circ f(x) \leq \lambda\}$, $i \in \mathbb{N}$, son medibles. Por tanto también es medible el conjunto

$$\begin{aligned}\{x \in X : \|f(x)\| \leq \lambda\} &= \left\{x \in X : \sup_i \varphi_i(f(x)) \leq \lambda\right\}\\ &= \{x \in X : \varphi_i(f(x)) \leq \lambda \ \ \forall i \in \mathbb{N}\}\\ &= \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\end{aligned}$$

esto prueba que la función $\|f\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible.

(c)$\Longrightarrow$ (a) Sea $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión densa en E. Por hipótesis, para cada $i \in \mathbb{N}$, la función

$$\tau_i : X \longrightarrow \mathbb{R}, \tau_i(x) = \|f(x) - y_i\|,$$

es medible. Por tanto para cualquier $n \in \mathbb{N}$ fijo, el conjunto

$$X_i^n := \left\{x \in X : \tau_i(x) \leq \frac{1}{n}\right\} = \left\{x \in X : f(x) \in B\left[y_i, \frac{1}{n}\right]\right\},$$

es medible. Además de eso, la densidad de la sucesión, $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ garantiza que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ Seguidamente definimos la sucesión, $(A_j^n)_{j=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles disjuntos, dos a dos dados por

$$A_1^n = X_1^n, A_j^n = X_j^n - \bigcup_{i=1}^{j-1} X_i^n, j = 2, 3, \ldots,$$

y una función medible

$$f_n : X \longrightarrow E, f_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}^n y_i$$

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Es claro que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i^n = X$. Asimismo, dado $x \in X$, podemos tomar $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_j^n$. En este caso $x \in X_j^n$ y $f_n(x) = y_j$. Se sigue que $f_n(x) = y_j$ y $f(x) \in B\left[y_j, \dfrac{1}{n}\right]$, y por tanto

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \|f(x) - y_j\| \leq \frac{1}{n}$$

concluimos entonces que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in X$, y así f es medible por la proposición 4.1. ■

Definición A4.14. Se dice que una función mensurable $f : X \longrightarrow E$ es Bochner-integrable, si existe una sucesión de funciones simples mensurables $f_n : X \longrightarrow E$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $f_n \longrightarrow f$ μ-casi siempre y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \|f(x) - f_n(x)\|_E \, d\mu = 0$$

en este caso, para cada conjunto mensurable $A \in \Sigma$, definimos la integral de Bochner de la función f sobre A por:

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \chi_A(x) f_n(x) d\mu$$

(Botelho, 2011, pág 208)

Teorema A4.2. Una función medible $f : X \to E$ es integrable por Bochner si, y sólo si, la función real $\|f\| : X \to \mathbb{R}$ es Lebesgue-integrable (Botelho, 2011, pág 209).

Demostración. Supongamos que $\|f\| \in L_1(X)$. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles simples que convergen μ-casi siempre a f. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere el

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

conjunto medible:

$$A_n := \left\{x \in X : \|f_n(X)\| \leq \|f(x)\| (1 + 2^{-n})\right\}$$

y una función medible simple

$$g_n : X \to E, g_n(x) = f_n(x)\chi_{A_n}(x).$$

Como $f_n \to f$ μ-casi siempre, es fácil observar que $gf_n \to f$ μ-casi siempre y

$$\|g_n(x)\| \leq \|f(x)\| (1 + 2^{-n}),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. Concluimos la demostración aplicando el teorema de Convergencia dominada para la sucesión de funciones. $(\|g_n - f\|)_{n=1}^{\infty}$. ■

Proposición A4.8. Sea $f : X \longrightarrow E$ una función Bochner- integrable y $T : E \longrightarrow F$ un operador lineal continuo entre espacios Banach. Entonces, la función $T \circ f : X \longrightarrow F$ es Bochner-integrable si

$$\int_X (T \circ f)(x) d\mu = T\left(\int_A f(x) d\mu\right)$$

(Botelho, 2011, pág 210)

Demostración. La integrabilidad de Bochner $T \circ f$ es consecuencia de la estimativa

$$\|Tf(x)\| \leq \|T\| \|f(x)\|,$$

Para todo $\in X$, en combinación con el teorema 4.2. Sea ahora $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles simples en valores de E, talque $f_n \longrightarrow f$ μ-casi siempre y

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

$\|f_n - f\| \longrightarrow 0$ en $L_1(x)$. Entonces $(T \circ f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles simples en valores de F que convergen μ- casi siempre para $T \circ f$ y

$$\int_X \|T \circ f_n - T \circ f\| \, d\mu \leq \|T\| \cdot \int_X \|f_n - f\| \, d\mu \longrightarrow 0,$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. Finalmente, de la definición de integración de Bochner se sigue que

$$\int_X T \circ f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X T \circ f_n d\mu$$
$$\int_X T \circ f d\mu = T\left(\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu\right)$$
$$\int_X T \circ f d\mu = T\left(\int_X f d\mu\right)$$

■

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Universidad Nacional del Altiplano Puno | Vicerrectorado de Investigación | Repositorio Institucional

DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo Pedro Collanqui Yana,
identificado con DNI 44511595 en mi condición de egresado de:

☒ **Escuela Profesional,** ☐ **Programa de Segunda Especialidad,** ☐ **Programa de Maestría o Doctorado**

Ciencias Físico Matemáticas,

informo que he elaborado el/la ☒ **Tesis** o ☐ **Trabajo de Investigación** denominada:
"Integrales de Bochner y el teorema del punto fijo de Banach para la demostración de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en espacio de Banach."

Es un tema original.

Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y **no existe plagio/copia** de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como suyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno 31 de mayo del 2024

FIRMA (obligatoria)

Huella

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL ALTIPLANO
Repositorio Institucional

Universidad Nacional del Altiplano Puno | Vicerrectorado de Investigación | Repositorio Institucional

AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo Pedro Collanqui Yana ,identificado con DNI 44511595 en mi condición de egresado de:

☒Escuela Profesional, ☐Programa de Segunda Especialidad, ☐Programa de Maestría o Doctorado
Ciencias Físico Matemáticas

informo que he elaborado el/la ☒ **Tesis** o ☐ **Trabajo de Investigación** denominada:
"Integrales de Bochner y el Teorema del punto fijo de Banach para la demostración de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en espacio de Banach.

para la obtención de ☐**Grado,** ☒**Título Profesional o** ☐**Segunda Especialidad.**

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los "Contenidos") que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia: Creative

Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno 31 de mayo del 2024

FIRMA (obligatoria)

Huella

repositorio.unap.edu.pe
No olvide citar adecuadamente esta tesis