UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

EQUIVALENCIA DE LA INTEGRAL RIEMANN Y LA INTEGRAL DE DARBOUX Y SU APLICACIÓN EN CÁLCULO INTEGRAL

TESIS

PRESENTADA POR:

Bach. ANJHELA YELIBETH MAMANI MAMANI

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

PUNO – PERÚ

2024

Reporte de similitud

NOMBRE DEL TRABAJO

EQUIVALENCIA DE LA INTEGRAL RIEMA NN Y LA INTEGRAL DE DARBOUX Y SU A PLICACIÓN EN CÁLCULO INTEGRAL.pdf

AUTOR

ANJHELA YELIBETH MAMANI MAMANI

RECUENTO DE PALABRAS

13854 Words

RECUENTO DE CARACTERES

65068 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

72 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

1.5MB

FECHA DE ENTREGA

Jul 8, 2024 10:30 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Jul 8, 2024 10:31 PM GMT-5

19% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 19% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 4% Base de datos de trabajos entregados
- 1% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Bloques de texto excluidos manualmente
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 12 palabras)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO Coordinador de Investigación de la E.P.C.F.M. COORDINADOR - PUNO

Dra. Adelaida Otazu Conza
Coordinación de Investigación
E.P Cs. Físico Matemáticos

Dr. Martín Condori Concha
COMP Nº 120
UNA - PUNO

Resumen

DEDICATORIA

A Dios, por estar siempre presente en mi existencia, por ser el guía de mis caminos y por dedicarle a las personas que más me deseo.

A mi madre Ana M. Mamani, por su cariño, su apoyo moral, compresión, entusiasmo que me brindo para seguir adelante en mis propósitos y principalmente sin ella no hubiese logrado alcanzar esta meta.

A mi Padre Pablo y A mi amada e inolvidable hija Milagros, que son mis ángeles, A pesar de su ausencia física, tengo la certeza de que desde el cielo siempre me brindan atención y me guían para que todo sea óptimo.

A mi querido hijo Aldair Thiago, por sus sonrisas tiernas, sus profundas miradas de aliento, quien siempre estuvo a mi lado en este largo camino y alentó para seguir adelante.

A mi familia y mis amigas, por el cariño que siempre me han mostrado en compartir momentos felices, por el apoyo incondicional y por brindarme el tiempo necesario para el cual no habría llegado a este punto de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

Ante todo, quiero expresar mi gratitud a Dios por brindarme siempre capacidad para proseguir en lo adverso y por guiarme en cada proyecto de mi vida.

Estoy muy agradecido con la Universidad Nacional del Altiplano, así como con la Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura. En particular, mi gratitud hacia la Escuela Profesional de Ciencias Físico – Matemáticas, gracias a cada docente por haber compartido sus saberes a lo largo de mi preparación, enseñanzas que constituyeron la base de mi existencia y mi formación profesional.

Agradezco a mi director de tesis, Dr. Martin Condori Concha, por su orientación, paciencia, supervisión continua y apoyo constante durante todo el proceso de la investigación. A los Jurados de la tesis por sus sugerencias que aportaron en hacer realidad este trabajo de investigación.

Por último, a mis amigas (os) del pasado y presente, quienes, sin esperar nada a cambio, compartieron sus conocimientos, alegrías y tristezas, apoyándome en lograr que este sueño se haga realidad.

ÍNDICE GENERAL

ÁREA : Matemática

TEMA : Equivalencia entre la integral de Riemann, la integral de Darboux y aplicaciones

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Aplicada

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 24 de Julio del 2024

ÍNDICE DE FIGURAS

Pág.

ACRÓNIMOS

$P=\{t_i\}_{i=0}^{n}$	: Partición n de un intervalo cerrado
$\wp[x,y]$	: Conjunto de todas las particiones de $[x,y]$
$\rho\colon[a,b]\to\mathbb{R}$	: Función continua sobre el intervalo $[a,b]$
$(Ri)\int_a^b f(x)dx$	: Integral de Riemann de f sobre el intervalo $[a,b]$
$(Da)\int_a^b f(x)dx$	: Integral de Darboux de f sobre el intervalo $[a,b]$
$o(h)$	: Conjunto de las funciones $f\colon D_f\to\mathbb{R}$

RESUMEN

Teniendo base teórica este artículo "A lost theorem: definite integrals in an asymptotic setting" junto con R. Cavalcante y T. Todorov (2008) y la integral de Riemann y la integral de Darboux según W. Rudín (1997): Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función real. Se dice que f es integrable Riemann en $[a,b]$ sí existe $A \in \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente: Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $P=\{t_0,t_1,t_2,\cdots,t_n\}$ es una partición de $[a,b]$, $\{c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n\} \in [a,b]$ tales que $c_i \in [t_{i-1},t_i]$ y $\|P\|<\delta$, entonces $\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i-t_{i-1})-A\right|<\varepsilon$; la integral de Darboux indica: Una función f en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es integrable Darboux sobre $[a,b]$, sí f es acotado y $sup\{L(f,P)\}: P$ es partición de $[a,b] = inf\{U(f,P)\}: P$ es partición de $[a,b]$. Con estas consideraciones se hace la siguiente pregunta. ¿Es factible demostrar la equivalencia entre la integral de Riemann y la integral de Darboux, y utilizar el método de la integral de Darboux en las definiciones y teoremas de aplicaciones de cálculo integral que nos permiten de manera clara y precisa? El objetivo es mostrar la equivalencia teórica entre el integral de Riemann y Darboux y utilizar método de la integral de Darboux en las aplicaciones del cálculo integral. El resultado es la equivalencia teórica entre la integral de Riemann y Darboux; utilización de integral de Darboux en aplicaciones del cálculo integral.

Palabras clave: Aplicaciones, Cálculo integral, Equivalencia entre Integral de Darboux, Integral de Riemann.

ABSTRACT

Having a theoretical basis, this article "A lost theorem: definite integrals in an asymptotic setting" together with R. Cavalcante and T. Todorov (20089 and the Riemann integral and the Darboux integral according to W. Rudín (1997): Let $[a, b] \subset \mathbb{R}$ is a closed and bounded interval and let $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a real function. It f is said to be Riemann integrable on $[a, b]$ if $A \in \mathbb{R}$ exists that satisfies the following: For each $\varepsilon > 0$ exists $\delta > 0$ such that, if $P = \{t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ it is a partition of $[a, b]$, $\{c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n\} \in [a, b]$ such that $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ and $\|P\| < \delta$, then $\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$; the Darboux integral indicates: A function f on $[a, b] \subset \mathbb{R}$ is Darboux integrable over $[a, b]$, if f it is bounded and $sup\{L(f, P)\}: P$ is a partition of $[a, b] = inf\{U(f, P)\}: P$ is partition of $[a, b]$. With these considerations, the following question is asked. Is it feasible to demonstrate the equivalence between the Riemann integral and the Darboux integral, and use the Darboux integral method in the definitions and theorems of integral calculus applications that allow us to clearly and precisely? The objective is to show the theoretical equivalence between the Riemann and Darboux integral and to use the Darboux integral method in integral calculus applications. The result is the theoretical equivalence between the Riemann and Darboux integral; use of Darboux integral in applications of integral calculus.

Keywords: Applications, Integral calculus, Equivalence between Darboux integral, Riemann integral.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Determinar el área de una figura plana o el volumen de un sólido ha sido un desafío histórico estrechamente ligado al desarrollo del Cálculo Integral desde tiempos antiguos. El antiguo manuscrito de Moscú, descubierto en Egipto y finalizado alrededor del año 1800 A.C., revela una estrategia previa para determinar el volumen de un tronco piramidal.

La primera técnica conocida para establecer integrales es el método de exhaución, concebido por Eudoxo entre los años 390 y 337 A.C. Este método implicaba dividir la figura en un número infinito de formas para determinar su área o volumen. Arquímedes, durante el desarrollo de este método, lo aplicó para determinar áreas de parábolas y proporcionar una aproximación al área de la circunferencia.

En el siglo XVI, se registraron avances significativos en el procedimiento de exhaución. En esa época, con el trabajo de Cavalieri y su enfoque en los "indivisibles", junto con los trabajos de Fermat, se establecieron los fundamentos del cálculo moderno.

Los primeros progresos en el ámbito de la integración surgieron en el siglo XVII mediante la exploración del teorema fundamental del cálculo, elaborado de forma independiente por Newton y Leibniz. Este teorema plantea una conexión esencial entre la integración y la derivación. Esta conexión, junto con la escasa capacidad de cálculo de derivadas, junto con la relativa facilidad de calcular derivadas, permite calcular integrales. Aunque las primeras demostraciones del Teorema Fundamental del Cálculo en sus inicios fueron poco rigurosas, proporcionaron una base para el cálculo de integrales. Con las primeras demostraciones, poco rigurosas, que se llevaron a cabo en el principio, se fundamentaron en la siguiente premisa intuitiva: sí $f(x)$ representa el área bajo en el gráfico de la función f, por tanto, $f(x+h)- f(x)= f(x)h$, para h tan pequeño como se quiera ver, según lo estableció B. Riemann con su formalización del concepto de integral. Esta formalización de la integral y las demostraciones rigurosas de Riemann han sido fundamentales en el desarrollo del análisis matemático moderno.

En su artículo "A lost theorem: definite integrals in an asymptotic setting", R. Cavalcante y T. Todorov presentan una teoría de la integración que restaura y consolida las ideas originales que llevaron al teorema fundamental de análisis. Este articulo presenta una teoría de integración simplificada basada en un par de axiomas, que proporciona aplicaciones que ilustran cómo la integral en el análisis puede surgir sin depender de las sumas de Riemann. Según los autores, este enfoque axiomático es más elegante y didáctico que el método tradicional**.**

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La investigación actual demuestra la equivalencia entre las integrales de Riemann y Darboux. Además, utilizaremos el enfoque de la integral de Darboux a través de las aplicaciones de la integral, lo que nos permite realizar cálculos claros y precisos con estas consideraciones. Las siguientes preguntas surgen:

1.2.1. Pregunta General

¿Es factible demostrar la equivalencia entre la integral de Riemann y la integral de Darboux, y utilizar el método de la integral de Darboux en las definiciones y teoremas de aplicaciones de cálculo integral que nos permiten de manera clara y precisa?

1.2.2. Preguntas Específicas

- ¿De qué manera es posible examinar las características, definiciones, lemas y teoremas de la integral de Riemann y la integral de Darboux?
- ¿De qué manera se puede demostrar que la integral Riemann y la integral de Darboux son equivalentes?
- ¿De qué manera se puede utilizar la integral de Darboux para encontrar el área bajo una curva, la longitud de arco y el volumen de un sólido de revolución en cálculo integral?

1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1. Hipótesis General

Es factible demostrar que la integral de Riemann y la integral de Darboux son equivalentes y la integral de Darboux se puede utilizar de manera efectiva para las definiciones y teoremas en las aplicaciones de área bajo una curva, longitud de arco, y volumen de un sólido de revolución en calculo integral.

1.3.2. Hipótesis Específicos

- Es posible examinar las características, definiciones, lemas y teoremas de la integral de Riemann y la integral de Darboux comparando sus formulaciones y demostraciones.
- Se puede demostrar que la integral de Riemann y la integral de Darboux son equivalentes mostrando que para cualquier función que sea integrable en el sentido de Riemann, las sumas superior e inferior de Darboux convergen al mismo valor que la suma de Riemann cuando la partición se refina indefinidamente.

- La integral de Darboux puede ser utilizada de manera efectiva para definiciones y teoremas de área bajo una curva, longitud de arco y volumen de un sólido de revolución mediante el uso de sumas inferiores y superiores.

1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

Estudiar la construcción de la integral de Riemann sin recurrir a sumas de Riemann abrirá camino para determinar problemas aplicados en cálculo integral, como el determinar el área bajo una curva, la longitud de un arco y el volumen de un sólido de revolución. Este enfoque beneficiará a aquellos interesados en el cálculo integral y sus aplicaciones en diversos campos de ingeniería y otros campos, y al mismo tiempo que será de gran ayuda en el proceso de aprendizaje de estudiantes en diversas áreas.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1. Objetivo General

Mostrar la equivalencia teórica entre la integral de Riemann y la integral de Darboux, y evaluar cómo la integral de Darboux puede ser utilizada eficazmente en aplicaciones del cálculo integral para las definiciones y teoremas de área bajo una curva, longitud de arco, y volumen de un sólido de revolución.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Realizar un análisis comparativo detallado de las características, definiciones, lemas y teoremas fundamentales de la integral de Riemann y la integral de Darboux.

- Demostrar que la integral de Riemann y la integral de Darboux son equivalentes para funciones continuas en intervalos cerrados, mostrando que las sumas superiores e inferiores de Darboux convergen al mismo valor que las sumas de Riemann a medida que la partición se refina.

- Aplicar la integral de Darboux en las definiciones y teoremas de área bajo una curva, longitud de arco y volumen de un sólido de revolución, son claros y precisos para estas aplicaciones en cálculo integral.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

En la presente investigación se ha tenido en cuenta como base teórica del artículo mencionado por Cavalcante y Todorov (2008), así como otros trabajos de investigación relacionados al objeto de estudio.

Al respecto, Tapia y Quezada (2020) en *"Investigación de la Integral Riemann-Stieltjes"* se centra en los fundamentos teóricos que sustentan la integral de Riemann Stieltjes. Se inicia con el desarrollo de conceptos básicos que permiten comprender el concepto de integral de Riemann, para luego continuar con el desarrollo de una teoría que da forma a la integral de Stieltjes, presentando teoremas y sus demostraciones, y finaliza con una aplicación de la misma integral a la teoría de la probabilidad.

Entre tanto, Bolaños (2013) en *"Generalización de la teoría de integrabilidad de Darboux para campos de vectores polinomiales"* presenta una introducción general sobre esta teoría de integrabilidad de campos vectoriales polinomiales en $\mathbb{R}^{n+1}$, posteriormente trata campos vectoriales de polinomiales en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Por otra parte, Valé (1983) en *"Una construcción de la integral de Riemann-Stieltjes y sus aplicaciones"* analiza las teorías clásicas de integración, integración de Stieltjes, y la integral de Darboux-Stieltjes, para generalizar la integral de Darboux-Stieltjes, luego comparar con la integral de la teoría clásica y finalmente aplicarlos en probabilidades en el tema de esperanza matemática, flujo de fluidos viscos, y en análisis del Teorema de Herglotz.

Así mismo en Valencia (1974) en *"Una teoría de las teorías de integración"*. El propósito del trabajo en la primera parte se da la teoría general y en la segunda parte se aplica dicha teoría a las integrales más conocidas, con el propósito de unificar los diferentes enfoques de las teorías de integración, en el cual se examina 138 punto de vista uno de los conceptos fundamentales del Cálculo Integral.

2.2. MARCO TEÓRICO

En la presente sección se expondrán los conceptos matemáticos fundamentales que serán esenciales para el desarrollo de la investigación de tesis. Para lo cual presentamos las definiciones de los Conjuntos: finitos, infinitos y numerables; cuerpo, conjunto acotado, partición de un intervalo, integral original de Riemann, construcción de Darboux de la integral Riemann y la integral de Darboux, lemas y teoremas, que serán útiles y necesarios para el marco conceptual del trabajo de investigación.

2.2.1. Conjuntos finitos e infinitos

Definición 1. Un conjunto X, diferente del vacío, se dice finito si existe una biyección $f: I_n \to X$, donde $I_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$; $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2), \cdots, x_n = f(n)$; tal que $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

Ejemplo 1. Se tiene los siguientes ejemplos de biyección:

1. Sea $X = \{a, b, c\}$. Podemos definir una biyección f en X a $\{1, 2, 3\}$ de la siguiente manera: $f(a) = 1$, $f(b) = 2$ y $f(c) = 3$

   Aquí $n = 3$, y f es una biyección porque cada elemento de X se mapea de manera única a $\{1, 2, 3\}$.

2. Sea $B = \{x, y\}$. Podemos definir una biyección g en B a $\{1, 2\}$ de la siguiente

manera: $g(x)=1$ y $g(y)=2$

Aquí $n=2$, y g es una biyección porque cada elemento de B se mapea de manera única a $\{1,2\}$.

Comentario 1. Un conjunto X es finito si se puede establecer una correspondencia uno a uno entre sus elementos y los primeros n números naturales mediante una biyección. Esto garantiza que X tiene un número limitado de elementos y proporciona una base sólida para muchos conceptos y aplicaciones en matemáticas.

Definición 2. Un conjunto X, si dice infinito si no es vacío y no existe para ningún $n \in \mathbb{N}$ una biyección $f: I_n \to X$.

Comentario 2. Un conjunto X se define como infinito si no se puede establecer una biyección con ningún conjunto finito $\{1,2,\cdots,n\}$, lo que significa que su cardinalidad es mayor que cualquier número natural n. Esta definición proporciona un marco riguroso para entender la infinidad en la teoría de conjuntos y en el análisis matemático, y es esencial para la clasificación y el estudio de conjuntos con una cantidad ilimitada de elementos.

2.2.2. Conjunto numerable

Definición 3. Un conjunto X se dice numerable cuando es finito o existe una biyección $f:\mathbb{N}\to X$. En este caso f se llama enumeración de los elementos de X. Si escribimos $f(1)=x_1,\ f(2)=x_2,\cdots,f(n)=x_n,\cdots,$ se tiene entonces $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$.

Ejemplo 2. Se tiene los siguientes ejemplos de conjunto numerable:

1. Conjunto de números naturales $X = \mathbb{N}$

   Como la función identidad $f(n) = n$ es una biyección $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, lo que muestra que $\mathbb{N}$ es numerable.

2. Conjunto de pares ordenados de números naturales $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

   Una biyección puede definirse mediante el emparejamiento de números naturales usando una técnica como el emparejamiento de Cantor, donde $f(m,n) = \frac{(m,n)(m+n+1)}{2} + n.$ Esto asigna un número natural a cada par ordenado.

Comentario 3. Un conjunto X se considera numerable si es finito o si se puede establecer una biyección entre los números naturales $\mathbb{N}$ y los elementos de X. Esto permite enumerar los elementos de X de una manera secuencial, mostrando que, aunque X puede ser infinito, sigue siendo posible contarlo de una manera ordenada.

2.2.3. Cuerpo

En álgebra, un cuerpo (o campo) es una estructura algebraica con un conjunto de elementos en el que se definen dos operaciones: adición y multiplicación. Estas operaciones deben satisfacer ciertas propiedades que generalizan las propiedades de los números racionales, reales o complejos.

Definición 4. Un cuerpo K es un conjunto no vacío con dos operaciones

$$+: K \times K \to K \qquad \cdot : K \times K \to K$$

$$(a, b) \mapsto a + b \qquad (a, b) \mapsto a \cdot b$$

denominadas adición y multiplicación que cumplen los siguientes axiomas:

a) Axiomas de adición

A_1: Cerradura bajo Adición: $a+b \in K, \quad \forall\ a,b \in K.$

A_2: Conmutativa de la Adición: $a+b=b+a, \quad \forall\ a,b \in K$

A_3: Asociativa de la Adición: $(a+b)+c=a+(b+c), \quad \forall\ a,b,c \in K$

A_4: Elemento Neutro Aditivo: $\exists! 0 \in K \,/\, a+0=0+a, \quad \forall\ a,b \in K$

A_5: Elemento Inverso Aditivo: $\forall\ a \in K, \exists!(-a) \,/\, a+(-a)=(-a)+a=0$

b) Axiomas de la multiplicación

M_1: Cerradura bajo la Multiplicación: $a \cdot b \in K, \quad \forall\ a,b \in K.$

M_2: Conmutativa de la Multiplicación: $a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall\ a,b \in K$

M_3: Asociativa de la Multiplicación: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall\ a,b,c \in K.$

M_4: Elemento Neutro Multiplicativo: $\exists!\ 1 \in \frac{K}{a} \cdot 1 = 1 \cdot a = a \ \ \forall\ a,b \in K.$

M_5: Elemento Inverso Multiplicativo: $\forall\ a \in K - \{0\}, \exists!\ (\frac{1}{a}) \in K/a \cdot (\frac{1}{a}) = 1$

c) Axiomas de ley Distributiva respecto a la adición

D_1: Distributiva por la izquierda: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall\ a,b,c \in \mathbb{R}$

D_2: Distributiva por la derecha: $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \forall\ a,b,c \in \mathbb{R}$

Ejemplo 3. Se tiene los siguientes ejemplos de cuerpos:

1. Números racionales $\mathbb{Q}$

   Conjunto: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,/\, p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$

2. Números complejos $\mathbb{C}$

   Conjunto: $\mathbb{C} = \left\{a+bi/\ a,b \in \mathbb{R}, i=\sqrt{-1}\right\}$

Comentario 4. Un cuerpo K es un conjunto con dos operaciones que cumplen propiedades específicas de cerradura, conmutatividad, asociatividad, existencia de elementos neutros e inversos, y distributividad. Estas propiedades hacen de los cuerpos una estructura fundamental en álgebra y en muchas aplicaciones matemáticas y científicas.

Observación 1. Si el cuerpo cumple con estos axiomas, entonces (K,+,·) se trata de un cuerpo conmutativo.

d) Axiomas de orden

Un cuerpo $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo ordenado si hay una relación $\leq$ definida en K que cumple los axiomas siguientes: reflexiva, antisimétrica, transitiva, orden total, compatibilidad del orden con la suma, compatibilidad del orden con el producto por elementos no negativos.

Observación 2. Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo conmutativo completamente ordenado, si cumple con las axiomas de a), b), c) y d).

2.2.4. Conjunto acotado

En matemáticas, un **conjunto acotado** se refiere a un conjunto cuyos elementos están confinados dentro de un cierto rango. La definición de acotación puede aplicarse tanto a conjuntos de números como a conjuntos en espacios métricos, dependiendo del contexto. A continuación, se presentan las definiciones formales de conjuntos acotados en los contextos de números reales y espacios métricos.

2.2.4.1. Definición de Conjunto Acotado en el Contexto de los Números Reales

Definición 5. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice **acotado superiormente** si existe un número real M tal que todos los elementos de A son menores o iguales a M. Este número M se llama **cota superior** de A.

A está acotado superiormente $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, x \leq M$

Definición 6. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice **acotado inferiormente** si existe un número real m tal que todos los elementos de A son menores o iguales a m. Este número m se llama **cota inferior** de A.

A está acotado superiormente $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}$tal que $\forall x \in A, x \geq m$

Definición 7. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice simplemente acotado si está acotado tanto superiormente como inferiormente. En otras palabras, si existen números reales M y m tales que todos los elementos de A están en el intervalo $[n, M]$.

A está acotado $\Leftrightarrow \exists M, m \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, m \leq x \leq M.$

Ejemplo 4. Se tiene los siguientes ejemplos de conjuntos acotados:

1. **Conjunto Acotado:** $A = [0,1]$ está acotado superiormente por 1 y acotado inferiormente por 0.
2. **Conjunto no Acotado Superiormente:** $B = [0, \infty]$ está acotado inferiormente por 0 pero no está acotado superiormente.
3. **Conjunto no Acotado Inferiormente:** $C = [-\infty, 4]$ está acotado superiormente por 4 pero no está acotado inferiormente.

4. **Conjunto Acotado:** $D = [-1, 0, 4]$ está acotado porque todos sus elementos están entre -1 y 4.

2.2.4.2. Definición de Conjunto Acotado en Espacios Métricos

En un espacio métrico, la acotación se refiere a la distancia entre los elementos del conjunto y un punto de referencia.

Definición 8. Un **espacio métrico** (X, d) es un conjunto X junto con una función de distancia $d: X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. No Negatividad**:** $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. Simetría**:** $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall\, x, y \in X$.
3. Desigualdad Triangular**:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall\, x, y, z \in X$.

Definición 9. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ en un espacio métrico (X, d) se dice **acotado** si existe un punto $p \in X$ y un número real $r \geq 0$ tal que la distancia de cualquier punto de A a p es menor o igual a r. En otras palabras, todos los elementos de A están dentro de una "bola" de radio r. centrada en p.

$$A \text{ está acotado en } (X, d) \iff \exists\, p \in X \text{ y } r \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall x \in A, d(x, p) \leq r$$

2.2.5. Partición de un intervalo

En matemáticas, la partición de un intervalo se refiere a la división de un intervalo $[a, b]$ en una serie de subintervalos. Esta herramienta es fundamental en el cálculo integral, especialmente en la definición de la integral de Riemann.

Definición 10. La particion n de un intervalo cerrado $[a, b]$ de los números reales es una colección finita de puntos de $[a, b]$. Una partición se denota por P y esta dado de la siguiente forma:

$$P = \{t_i\}_{i=0}^{n} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}.$$

2.2.6. La integral original según Riemann

Antes de definir formalmente la integral de Riemann, es útil entender el contexto histórico y matemático en el que surgió, La integral de Riemann es una respuesta a la necesidad de formalizar el concepto intuitivo de "área bajo una curva" y ha desempeñado un papel crucial en la evolución del cálculo integral y el análisis matemático.

Definición 11. Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función real y sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado. Se dice que f es integrable de Riemann en $[a,b]$, si existe $A \in \mathbb{R}$ que satisface:

Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, $\{c_0, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}, c_n\} \in [a, b]$ tales que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) - A \right| < \varepsilon.$$

Se denomina integral de Riemann de f sobre $[a, b]$, al número A que aparece en esta definición, se le denomina sumas de Riemann.

A la integral de Riemann de f sobre el intervalo $[a, b]$ denotaremos por $(Ri) \int_a^b f(x)dx$.

Comentario 5. La integral de Riemann es un método formal de integración introducido por Bernhard Riemann en 1854. Este método define la integral como el límite de una suma de áreas de rectángulos formados al dividir el intervalo de integración en subintervalos y evaluar la función en puntos específicos dentro de esos subintervalos.

2.2.7. La construcción de Darboux de la integral de Riemann

La integral de Darboux se define utilizando las sumas inferior y superior que aproximan el área bajo una curva desde abajo y desde arriba, respectivamente. La idea clave es dividir el intervalo en subintervalos y usar los valores ínfimos y supremos de la función en esos subintervalos para construir las sumas.

Definición 12. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada **y s**ea $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Si $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ es una partición de $[a,b]$, para $1 < i < n$, se definen

$$m_i = inf\{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

$$M_i = sup\{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

La suma inferior de f correspondiente a la partición P, denotaremos por $L(f,P)$ y está definido por

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

La suma superior de f correspondiente a la partición P, se denotará por $U(f,P)$ y se define por

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(\,t_i - t_{i-1})$$

Comentario 6. La construcción de Darboux de la integral de Riemann ofrece una perspectiva fundamentalmente intuitiva y elegante para entender la integración.

A través del uso de sumas inferiores y superiores, la integral de Darboux proporciona una manera más directa y conceptualmente accesible de definir la integral que complementa la definición original de Riemann.

2.2.8. La integral según Darboux

La integral de Darboux se basa en las sumas inferior y superior de Darboux. A continuación, se describen estos conceptos y cómo se utilizan para definir la integral de Darboux

Definición 13. La función f definida en $[a,b]$ es integrable Darboux sobre $[a,b]$ si f es acotada y

$$sup\{\,L(f,P)\colon P \text{ es partición de } [a,b] = ínf\{U(f,P)\colon\ P \text{ es partición de } [a,b]\}$$

A este valor común se le llama integral de Darboux de f sobre $[a,b]$.

La integral de Darboux de f sobre el intervalo $[a,b]$ denotaremos por

$$(Da)\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 5. Determinar la integral de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$

Vamos a determinar la integral de Darboux de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$

1. Partición del Intervalo: Consideremos una partición equiespaciada con n subintervalos:

$$P=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\cdots,1\right\}$$

2. Ínfimos y Supremos:

- En cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$, tenemos:

$$m_i=\inf\left\{f(x)/x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\right\}=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$$

$$M_i=\sup\left\{f(x)/x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\right\}=\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

3. Sumas de Darboux:

- Suma Inferior:

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

- Suma Superior:

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i)^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

4. Límite:

- Integral:

$$\lim_{n\to\infty}L(f,P)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}U(f,P)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

Ambos límites son iguales, por lo tanto, la integral de Darboux de es:

$f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$ es: $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

Comentario 7. La integral según Darboux es una manera de definir la integral que, aunque equivalente a la integral de Riemann, se basa en un enfoque ligeramente diferente. La definición de Darboux utiliza sumas superiores e inferiores para aproximar el área bajo una curva, proporcionando una herramienta poderosa y conceptualmente clara para analizar la integrabilidad de funciones.

A continuación, se da un lema y dos teoremas, cuyas demostraciones se encuentran en el texto de (Rudin, 1997) , que van a servir como herramienta en el marco conceptual;

Lema 1. Sea f una función acotada definida sobre en el intervalo cerrado $[a,b]$. Si P y Q son dos particiones sobre el intervalo $[a,b]$ tales que $P \subset Q$, entonces $L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P)$. (Rudin, 1997).

Teorema 1. Sea f una función acotada definida sobre el intervalo $[a,b]$. Si P y Q son particiones en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces $L(f,P) \leq U(f,Q)$. (Rudin, 1997).

Teorema 2. Sea f una función acotada definida sobre el intervalo $[a,b]$, entonces f es integrable de Darboux sobre $[a,b]$, si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P del intervalo cerrado $[a,b]$ tales que

$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. (Rudin, 1997).

2.3. MARCO CONCEPTUAL

Para confirmar la equivalencia entre la integral de Riemann y la integral de Darboux, es esencial adquirir conocimientos previos acerca de ciertos resultados, los cuales se presentarán en los teoremas siguientes con sus respectivas demostraciones.

Teorema 3. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$. Supóngase que existe $M>0$ tal que $|f(x)|\le M$, para todo $x\in[a,b]$ y sea P una partición del intervalo cerrado $[a,b]$.

a) Si $c\in[a,b]$, entonces

$$U(f,P)-U(f,P\cup\{c\})\le 2M\|P\|$$

$$y$$

$$L(f,P\cup\{c\})-L(f,P)\le 2M\|P\|.$$

b) Si Q es una partición del intervalo cerrado $[a,b]$ que contiene a lo sumo n puntos más que P entonces

$$U(f,P)-U(f,Q)\le 2nM\|P\|$$

y

$$L(f,Q)-L(f,P)\le 2nM\|P\|.$$ (Rudin, 1997)

Demostración.

a) Supóngase una partición P, donde $P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots x_n\}$, además $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. Si c es un elemento de la partición el resultado es inmediato.

En otro caso, existe k tal que cumple $x_{k-1}<c<x_k$ y por consiguiente cumple

$$P\cup\{c\}=\{x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},c,x_k,\cdots x_n\}$$

Utilizando la notación usual se tiene que:

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{k-1}M_i(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=k+1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})+M_k(x_k-x_{k-1})$$

y

$$U(f,P\cup\{c\})=\sum_{i=1}^{k-1}M_i(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=k+1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})+M'_k(c-x_{k-1})+M''_k(x_k-c)$$

Se tiene que:

$$M'_k=\sup_{x_k\le x\le c}\{f(x)\}\quad \text{y}\quad M''_k=\sup_{c\le x\le x_k}\{f(x)\}$$

Además, debemos tener en cuenta:

$$|M'_k|\le M\ ,\ \ |M''_k|\le M\ \ \text{y}\ \ |M_k|\le M$$

Por consiguiente se tiene:

$$\begin{aligned}U(f,P)-U(f,P\cup\{c\})&=M_k(x_k-x_{k-1})-M'_k(c-x_{k-1})-M''_k(x_k-c)\\&=M_k(x_k-x_{k-1})-\left[M'_k(c-x_{k-1})+M''_k(x_k-c)\right]\\&\le|M_k|(x_k-x_{k-1})+|M'_k|(c-x_{k-1})+|M''_k|(x_k-c)\\&\le M(x_k-x_{k-1})+M(c-x_{k-1})+M(x_k-c)\\&\le M(x_k-x_{k-1})+M(c)-M(x_{k-1})+M(x_k)-M(c)\\&\le M(x_k-x_{k-1})+M(x_k-x_{k-1})\\&=2M(x_k-x_{k-1})\\&\le 2M\|P\|.\end{aligned}$$

Con las sumas inferiores se procede de forma similar a las sumas superiores.

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{k-1}m_i(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=k+1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})+m_k(x_k-x_{k-1})$$

y

$$L(f,P\cup\{c\})=\sum_{i=1}^{k-1}m_i(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=k+1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})+m'_k(c-x_{k-1})+m''_k(x_k-c)$$

Se tiene que:

$$m'_k=\inf_{x_{k-1}\le x\le c}\{f(x)\}\quad \text{y}\quad m''_k=\inf_{c\le x\le x_k}\{f(x)\}$$

Además, debemos tener en cuenta que:

$$|m'_k|\le M\ ,\ \ |m''_k|\le M\ \ \text{y}\ \ |m_k|\le M$$

Por consiguiente se tiene que:

$$
\begin{aligned}
L(f,P\cup\{c\})-L(f,P) &= m_k'(c-x_{k-1})+m_k''(x_k-c)-m_k(x_k-x_{k-1})\\
&\leq |m_k'|(c-x_{k-1})+|m_k''|(x_k-c)+|m_k|(x_k-x_{k-1})\\
&\leq M(c-x_{k-1})+M(x_k-c)+M(x_k-x_{k-1})\\
&\leq M(c)-M(x_{k-1})+M(x_k)-M(c)+M(x_k-x_{k-1})\\
&\leq -M(x_{k-1})+M(x_k)+M(x_k-x_{k-1})\\
&\leq M(x_k-x_{k-1})+M(x_k-x_{k-1})\\
&= 2M(x_k-x_{k-1})\\
&\leq 2M\|P\|.
\end{aligned}
$$

b) Si Q una partición del intervalo cerrado $[a,b]$ que contiene a lo sumo n puntos más que P entonces se tiene que:

$$
\begin{aligned}
U(f,P)-U(f,Q) &= U(f,P)-U(f,P\cup\{c_1,c_2,\cdots,c_n\})\\
&= U(f,P)-U(f,P\cup\{c_1\})+U(f,P\cup\{c_1\})-U(f,P\cup\{c_1\}\cup\{c_2\})\\
&\quad +U(f,P\cup\{c_1\}\cup\{c_2\})-U(f,P\cup\{c_1,c_2,c_3\})+\cdots+\\
&\quad U(f,P\cup\{c_1,c_2,\cdots,c_n\})-U(f,P\cup\{c_1,c_2,\cdots,c_n\})\\
&\leq 2M\|P\|+2M\|P\|+\cdots+2M\|P\|\\
&= 2nM\|P\|.
\end{aligned}
$$

La desigualdad correspondiente a las sumas inferiores se demuestra de manera similar.

Comentario 8. Este teorema nos dice que al refinar particiones o al añadir puntos, la suma inferior nunca disminuye y la suma superior nunca aumenta, lo cual es una propiedad fundamental en el proceso de aproximación de la integral de Riemann. Este teorema también se encuentra en el texto "Análisis Matemático", Volumen I de T. M. Apostol.

Lema 2. Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable Darboux, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si P es una partición de $[a, b]$ y $\|P\| < \delta$, entonces $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. (Rudin, 1997)

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$, por el Teorema 2 existe una partición P_o de $[a, b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea n el número de elementos de P_o y sea $\delta = \dfrac{\varepsilon}{8nM}$.

Por el Teorema 2, si P es una partición de $[a, b]$ tal que $\|P\| < \delta$ entonces

$$U(f,P) - U(f, P \cup P_o) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

y

$$L(f, P \cup P_o) - L(f,P) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por lo tanto

$$U(f,P) - U(f, P \cup P_o) + L(f, P \cup P_o) - L(f,P) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por el Lema 1 se tiene

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &\leq \frac{\varepsilon}{2} + U(f, P \cup P_o) - L(f, P \cup P_o) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + U(f, P_o) - L(f, P_o) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Comentario 9. Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si la norma de la partición $\|P\|$ es menor que δ, entonces la diferencia entre la suma superior de Darboux y la suma inferior de Darboux para la función f es menor que ε. Esto garantiza que las sumas superior e inferior de Darboux se pueden aproximar arbitrariamente mediante particiones finas, lo que es una característica fundamental de las funciones integrables en el sentido de Darboux. Este lema se puede encontrar en el texto "Análisis Matemático", Volumen I de T. M. Apostol.

Teorema 4. Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función definida sobre intervalo cerrado $[a, b]$ y sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) f es integrable Riemann,

ii) f es integrable Darboux.

Asimismo, si se cumplen una de las condiciones anteriores, se cumple que:

$$(R)\int_a^x \rho(t)dt = (D)\int_a^x \rho(t)dt$$

2.3.1. La determinación de la integral de Riemann sin sumas de Riemann

Supónganos que $\rho: [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua sobre el intervalo $[a, b]$. Por el primer Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left((R)\int_a^x \rho(t)dt\right) = \rho(x)$$

para todo $x \in [a, b]$ (en los extremos a y b del intervalo, la derivada debe realizarse tanto por derecha y izquierda).

Comentario 10. El primer teorema fundamental del cálculo establece una conexión crucial entre la derivación y la integración, mostrando que son operaciones inversas.

Observación 1. Como se indica en el Teorema 4

$$(R)\int_a^x \rho(t)dt = (D)\int_a^x \rho(t)dt$$

Sea $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = (R)\int_a^x \rho(t)dt$, entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)-\rho(x)h}{h} = 0$$

Debido a la propiedad aditiva de la integral de Riemann se tiene que, si $h > 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left((R)\int_x^{x+h}\rho(t)dt\right)$$

Y si $h < 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = -\frac{1}{h}\left((R)\int_{x+h}^{x}\rho(t)dt\right) = \frac{1}{h}\left((R)\int_x^{x+h}\rho(t)dt\right)$$

Por consiguiente, si se define

$$G:[a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$$

Por tanto, se tiene

$$G(x,z) = (R)\int_x^z \rho(t)dt$$

Además, se tiene que

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(x,x+h)-\rho(x)h}{h} = 0$$

Como es habitual, este último puede abreviarse mediante la siguiente notación.

$$G(x,x+h)-\rho(x)h=o(h), \text{ cuando } h\to 0$$

Se explicará con mayor detalle a continuación y se seguirá aplicando a lo largo del trabajo de Tesis.

Observación 2. Sobre la notación de $o(h)$

Se caracteriza por denotar por $o(h)$ al conjunto de las funciones $f: D_f \to \mathbb{R}$ de modo que:

$$D_f \subset \mathbb{R},\ 0 \in \overline{D_f} \text{ y } \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$$

En lugar de escribir $f \in o(h)$ es habitual escribir $f(h)=o(h)$, cuando $h\to 0$, o simplemente denotaremos por $o(h)$, $h\to 0$ cualquier función que dividida entre h tiende a 0.

Según la última convención, se encuentran las siguientes propiedades, las cuales, aunque son un abuso de notación, simplifican de manera significativa las demostraciones.

1) $o(h)+o(h)=o(h)$.

2) $o(h)^2=o(h)$

3) $co(h)=o(h),$ donde $c\in\mathbb{R}$

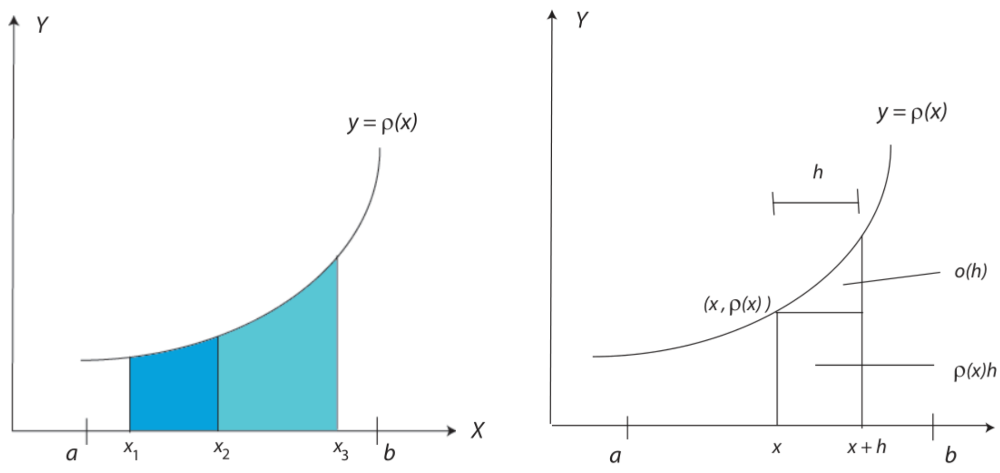
Además, por la propiedad aditiva de la integral se tiene que, para $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$

$$G(x_1,x_2)+G(x_2,x_3)=G(x_1,x_3).$$

Los gráficos siguientes resaltan las propiedades anteriores en cuanto a la interpretación de la integral como el área en el gráfico de la función $y=\rho(x)$.

Figura 1

Interpretación de la integral como área bajo la curva $y = \rho(x)$



Fuente: Sahid D. Leal Pacheco

Las dos propiedades mencionadas señalan la integralidad de la función $\rho(x)$, y más precisamente se alcanza el resultado siguiente.

Lema 4. Sea $\rho: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y además $a, b \in \mathbb{R}$, talque $a < b$ Entonces existe una única función $G: [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:

a) $G(x, x + h) - \rho(x)h = o(h), h \to 0$ para todo $x \in [a, b]$

b) $G(x_1, x_2) + G(x_2, x_3) = G(x_1, x_3)$ para todo $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$

Así mismo G es la única solución del siguiente problema a valor inicial

$$\frac{d}{dx} G(a, x) = \rho(x), \quad G(a, a) = 0$$

en el intervalo (a, b). (Rudin, 1997)

Demostración.

Existencia:

Definamos G por:

$$G(x,y)=(R)\int_x^y \rho(t)dt, \text{ para todo } (x,y)\in[a,b]\times[a,b].$$

Unicidad:

En primer lugar, analizaremos si G cumple con a) y b) entonces será la solución del problema a valor inicial. $\frac{d}{dx}G(a,x)=\rho(x)$, $I(a,a)=0$ en el intervalo (a,b).

$$\frac{d}{dx}G(a,x)=\lim_{h\to 0}\frac{G(a,x+h)-G(a,x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{G(x,x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{G(x,x+h)-\rho(x)h+\rho(x)h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{G(x,x+h)-\rho(x)h}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\rho(x)h}{h}=0+\rho(x)$$

$$=\rho(x)$$

Además, $G(a,a)+G(a,a)=G(a,a)$, por consiguiente $G(a,a)=0$.

La condición a) implica la continuación a derecha de la función $x\mapsto G(a,x)$, ya que $G(a,a+h)=\rho(a)h+o(h)$, $h\to 0$, y $G(a,a)=0$.

Así mismo, se puede hacer la prueba de la función $x\mapsto G(b,x)$ es continua a izquierda en b y que $G(b,b)=0$.

Sea $G_1\colon[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ otra función que cumple a) y b).

Considere $H\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ definida como $H(x)=G(a,x)-G_1(a,x)$, entonces H es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), además $H(x)=0$ y $H'(x)=0$ para todo $x\in(a,b)$. Por consiguiente $H\equiv 0$, de donde se concluye que $G(a,x)=G_1(a,x)$, para todo $x\in[a,b]$.

Debido a la propiedad b) se tiene que:

$$G(x,y) = G(a,y) - G(a,x)$$

y

$$G_1(x,y) = G_1(a,y) - G_1(a,x)$$

por consiguiente

$$G = G_1.$$

Comentario 11. Es importante destacar que para la prueba de la unicidad en el lema anterior no se requiere dividir el intervalo cerrado $[a,b]$ ni considerar suma inferior y superior de Riemann. La demostración del lema 4 se encuentra también en el texto de "Análisis Matemático", Volumen I de T. M. Apostol.

2.3.2. Integral definida sin sumas de Riemann

A continuación, se encuentra la información proporcionada por R. Cavalcante y T. Todorov en su investigación del año 2008. Para esto, es importante señalar que no se ha establecido ningún concepto integral, solo se utilizarán conceptos fundamentales del cálculo diferencial.

Definición 14. Sea $\rho: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $a, b \in \mathbb{R}$, tales $a < b$. Y una función $I: [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ que satisface:

a) La propiedad aditiva

$$I(x,y) + I(y,z) = I(x,z), \forall\, x,y,z \in [a,b]$$

b) la propiedad asintótica con respecto a ρ

$I(x, x+h) = \rho(x)h + o(h)$, cuando $h \to 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Es decir: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{I(x,x+h) - \rho(x)h}{h} = 0$ o $\lim\limits_{h\to 0} \frac{I(x,x+h)}{h} = \rho(x)$

(En los extremos del intervalo se deben considerar los limites laterales).

Lema 5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tales $a < b$, sea $\rho: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si existe una única función $I: [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisface las propiedades a) y b) entonces:

i) La función $I(a, x)$ es la solución del problema a valor inicial

$$\frac{d}{dx} I(a,x) = \rho(x), \qquad I(a,a) = 0$$

en el intervalo $[a, b]$.

ii) La función $I(a, x)$ es única.

Comentario 12. En la parte i) del Lema 5, los extremos del intervalo se deben considerar derivadas laterales. La demostración del lema 5, podemos encontrar en los textos de "Análisis Matemático", Volumen I de T. M. Apostol y W. Rudín (1997) "Principios de Análisis Matemático".

La propiedad de unicidad establecida en el lema 5 permite *la definición de la Integral de Calvacante -Todorov.*

2.3.3. Definición de la Integral de Calvacante -Todorov.

Definición 14. Sea $\rho: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, si existe una función $I: [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisface las propiedades (a) y (b), decimos que ρ es integrable Calvacante -Todorov sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y definamos la integral de Calvacante -Todorov de ρ sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ por:

$$(CT) = \int_a^b \rho(t)dt = I(a,b)\,.$$

Observación 7. Si $\rho:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y existe una función $I:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ que satisface las propiedades (a) y (b), tales que $a\le\alpha\le\beta\le b$, entonces la restricción $I|_{[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]}$ satisface las propiedades (a) y (b) con respecto a $\rho|_{[\alpha,\beta]}$.

Por consiguiente, si ρ es integrable Calvacante -Todorov sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ tales que $a\le\alpha\le\beta\le b$, entonces se tiene que ρ es integrable Calvacante-Todorov sobre el intervalo cerrado $[\alpha,\beta]$ y está definido por:

$$(CT)=\int_{\alpha}^{\beta}\rho(t)dt=I(\alpha,\beta).$$

Comentario 13. La integral de Calvacante-Todorov proporciona una forma de definir la integral mediante propiedades aditivas y asintóticas, y está estrechamente relacionada con la integral de Riemann. Permite una descripción más detallada y flexible de la integración en términos de comportamientos locales y la adición de intervalos.

2.3.4. Teorema fundamental de la integrable Calvacante-Todorov

El Teorema Fundamental de la Integral de Calvacante-Todorov extiende el concepto clásico del teorema fundamental del cálculo a una integral definida mediante propiedades aditivas y asintóticas, que a continuación se presenta.

Teorema 5. Sea $\rho:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Si ρ es integrable Calvacante-Todorov. En el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces p es integrable Calvacante-Todorov en intervalo cerrado $[a,x]$, para todo $x\in[a,b]$, la función

$$F(x)=(CT)=\int_{a}^{x}\rho(t)dt$$

es diferenciable en el intervalo abierto (a,b) y

$$\frac{d}{dx}\left((CT)\int_a^x \rho(t)dt\right)=\rho(x), \ \forall\, x\in[a,b].$$

Demostración.

De la Observación 7 se prosigue la integralidad en el intervalo cerrado $[a,x]$, para $x\in[a,b]$.

Sea $I:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ una función definida por $I(x,y)=(CT)=\int_x^y \rho(t)dt$.

Entonces la función I satisface las propiedades (a) y (b).

Por la propiedad (a) se tiene que $I(a,x+h)-I(a,x)=I(x,x+h)$, aplicando esto último resultado con la propiedad (b) se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left((CT)\int_a^x \rho(t)dt\right)&=\lim_{h\to 0}\frac{I(a,x+h)-I(a,x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{I(x,x+h)}{h}\\&=\rho(x).\end{aligned}$$

Comentario 14. El teorema fundamental de la integral de Calvacante-Todorov establece que la función I que satisface las propiedades aditiva y asintótica con respecto a ρ define una función F, cuya derivada es ρ. Además, la integral de ρ en $[a,b]$ se obtiene evaluando I en los extremos del intervalo.

2.3.5. Teorema débil de existencia de la integrable Calvacante-Todorov

El **teorema débil de existencia** para la integral de Calvacante-Todorov establece que, dada una función continua en un intervalo cerrado, existe una función que satisface las propiedades requeridas para definir la integral en el sentido de Calvacante-Todorov. A continuación, se menciona el teorema.

Teorema 6. Sea $\rho:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Si ρ posee una antiderivada

G en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces ρ es integrable Calvacante -Todorov en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $(CT) = \int_a^b \rho(t)dt = G(b) - G(a)$.

Demostración.

Como $I: [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ está definida por $I(x, y) = G(y) - G(x)$. Entonces I satisface las propiedades (a) y (b), por consiguiente, resulta

$$(CT)\int_a^b \rho(t)dt = I(a,b) = G(b) - G(a)$$

Comentario 15. El teorema débil de existencia para la integral de Calvacante-Todorov garantiza la existencia de una función que satisface las propiedades aditiva y asintótica con respecto a una función continua ρ. Esta función se puede representar a través de la integral de ρ y proporciona una base sólida para definir y trabajar con la integral de Calvacante-Todorov.

De acuerdo con el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann, se adjunta inmediatamente el resultado siguiente.

Corolario 1. Si $\rho: [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ que posee antiderivada, entonces $(CT)\int_a^b \rho(t)dt = (G)\int_a^b \rho(t)dt.$

2.3.6. Resultado general de existencia de la integrable Calvacante-Todorov

El resultado general de existencia para la integral de Calvacante-Todorov establece que, dada una función continua en un intervalo cerrado, no solo existe, sino que se puede construir explícitamente una función que satisface las propiedades necesarias para definir la integral en el sentido de Calvacante-Todorov

No obstante, para lograr la ejecución de integrales de funciones que no pueden ser expresadas en términos elementales, por ejemplo $\int_a^b \cos(x^2)dx$ es necesario contar con un resultado más general de existencia.

Teorema 7. Sea $\rho: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces ρ posee una antiderivada en (a, b) y por consiguiente es integrable Calvacante - Tódorov sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.

Para demostrar este resultado de existencia, es necesario tener en cuenta particiones del intervalo $[a, b]$. y sumas de Darboux. Asimismo, se requieren ciertos resultados previos que se enumeran a continuación

Los términos de suma superior, suma inferior, partición, etc. que se presentan a continuación son los que se usan.

- Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sean $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x \leq y \leq b$.

  De acuerdo a la definición ya dada, una partición del intervalo $[x, y]$ es un conjunto de la forma $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $x = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = y$. Al conjunto de todas las particiones de $[x, y]$ denotaremos por $\wp[x, y]$.

- Sea $\rho: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ una partición de $[x, y]$. Entonces, de acuerdo con la definición 12 dada en el marco teórico, si tiene:

$$m_k = min\{\rho(t): x_{k-1} \leq t \leq x_k\} \text{ y } M_k = \text{máx}\{\rho(t): x_{k-1} \leq t \leq x_k\},$$

$$L(\rho, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \text{ y } U(\rho, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

son las sumas inferiores y superiores de $\rho(t)$ con respecto a la partición P.

- Sean $x, y. z \in \mathbb{R}$, $a \le x < y < z \le b.$. Si $P \in \wp[x,y]$ y $Q \in \wp[y,z]$, entonces $P \cup Q \in \wp[x,z]$ y se tiene que

$$L(\rho,P)+L(\rho,Q)=L(\rho,P\bigcup Q)$$

y

$$U(\rho,P)+U(\rho,Q)=U(\rho,P\bigcup Q)$$

Proposición 1. Sea $\rho: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua sobre el intervalo cerrado $[a,b]$, sean P y Q dos particiones de $[a,b]$. Si $m = min\{\rho(t): a \le t \le b\}$ y $M = \text{máx}\{\rho(t): a \le t \le b\}$, entonces

$$m(b-a) \le L(\rho,P) \le U(\rho,P) \le M(b-a)$$

Comentario 16. El enunciado plantea una desigualdad fundamental relacionada con las sumas de Darboux inferior y superior para una función continua ρ en el intervalo $[a,b]$. La demostración de la proposición 1 se puede encontrar en el texto de W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis.

Teorema 8. Sea $\rho: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que $U(\rho,P)-L(\rho,P)<\varepsilon$

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$, como ρ es continua y es uniformemente continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ por consiguiente, existe $\delta > 0$ tal que $t, t' \in [a,b]$ y $|t-t'| < \delta$, entonces $|\rho(t)-\rho(t')| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$, tal que $x_k - x_{k-1} < \delta$, para $k = 1,2,3, \cdots, n$. Entonces de acuerdo a la notación establecida se tiene $M_k - m_k \leq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ y por consiguiente

$$
\begin{aligned}
U(\rho,P) - L(\rho,P) &= \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} M_k - \sum_{k=1}^{n} m_k \right] (x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right)(b-a) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Comentario 18. El enunciado describe una propiedad fundamental de las funciones integrables en el sentido de Riemann: dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar una partición tal que la diferencia entre las sumas de Darboux superior e inferior sea menor que ε. Este resultado es una manifestación del hecho de que una función continua en un intervalo cerrado es integrable en el sentido de Riemann.

Con las definiciones proporcionadas, la proposición 1 y el teorema 8, podemos demostrar el teorema 7.

Demostración del teorema 7

Se debe probar que existe una función $I: [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisfaces las propiedades (a) y (b) enunciada en la integral definida sin sumas de Riemann.

Primer paso: Definamos la función $I(x,y)$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x \leq y \leq b$.

Por la Proposición 1 el conjunto $\{L(\rho,P): P \in \wp[x,y]\}$ está acotado superiormente por $(\max\{\rho(t): x \leq t \leq y\})(y-x)$. Para x, y tales que

$a \leq x \leq y \leq b$, sea $I(x,y) = \sup\left\{L(\rho,P): P \in \wp\left[x,y\right]\right\}$.

En otro caso la definición de función $I(x,y)$, se define $I(x,x)=0$ y $I(x,y) = -I(y,x)$ si $a \leq x \leq y \leq b$.

Segundo paso: Probaremos que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{I(x,x+h)-\rho(x)h}{h} = 0$.

Prueba

Por la Proposición 1 tenemos que

$(\min\{\rho(t): x \leq t \leq x+h\}) \leq I(x,x+h) \leq (\max\{\rho(t): x \leq t \leq x+h\})h,$

para $h > 0$.

Por la continuidad de ρ se tiene que $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{I(x,x+h)}{h} = \rho(x)$.

Por otro lado, se tiene que

$(\min\{\rho(t): x-h \leq t \leq x\})h \leq I(x-h,x) \leq (\max\{\rho(t): x-h \leq t \leq x\})h,$

para $h > 0$.

Luego se tiene

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{I(x,x+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-I(x+h,x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{I(x-h,x)}{h} = \rho(x).$$

Tercer paso: Probaremos que $I(x,z) = I(x,y) + I(y,z)$, si $a \leq x < y < z \leq b$.

Prueba

Si c y d son números reales tal que $a \leq c < d \leq b$ entonces, por la definición de $I(c,d)$ se tiene que $L(\rho,P) \leq I(c,d)$ y por la Proposición 1 se tiene que

$$I(c,d) \leq U(\rho,P), \text{ para toda } P \in \wp[c,d].$$

Sean x, y, z tal que $a \leq x < y < z \leq b$, sean $P \in \wp[x,y]$ y $Q \in \wp[y,z]$, entonces se cumple que

$$L(\rho,P) \leq I(x,y) \leq U(\rho,P), \quad L(\rho,Q) \leq I(y,z) \leq U(\rho,Q),$$

$$L(\rho,P \cup Q) \leq I(x,z) \leq U(\rho,P \cup Q), \text{ ya que } P \cup Q \in \wp[x,z].$$

Por consiguiente, se tiene

$$\begin{aligned} L(\rho,P) + L(\rho,Q) - U(\rho,P \cup Q) &\leq I(x,y) + I(y,z) - I(x,z) \\ &\leq U(\rho,P) + U(\rho,Q) - L(\rho,P \cup Q) \end{aligned} \tag{1}$$

De acuerdo con el Teorema 8, dado $\varepsilon > 0$, es posible elegir las particiones $P \in \wp[x,y]$ y $Q \in \wp[y,z]$ de manera que: $U(\rho,P) - L(\rho,P) < \frac{\varepsilon}{2}$

y

$$U(\rho,Q) - L(\rho,Q) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $L(\rho,P) + L(\rho,Q) = L(\rho,P \cup Q)$ y $U(\rho,P) + U(\rho,Q) = U(\rho,P \cup Q)$, de la desigualdad (1) se deduce que

$$-\varepsilon < I(x,y) + I(y,z) - I(x,z) < \varepsilon$$

y por lo tanto $I(x,z) = I(x,y) + I(y,z)$.

Cuarto paso: Probaremos que $I(x,z) = I(x,y) + I(y,z)$ para $x, y, z \in [a,b]$.

prueba

Sean $x, y, z \in [a,b]$ tales que $a \leq x < z < y \leq b$.

Entonces $I(x,y) = I(x,z) + I(z,y)$.

Como $I(y,z) = -I(z,y)$ se obtiene $I(x,z) = I(x,y) + I(y,z)$.

Los otros casos posibles se abordan de forma análoga.

Comentario 19. El resultado general de existencia para la integral de Calvacante-Todorov establece que, dada una función continua ρ, existe una única función I que cumple con las propiedades aditiva y asintótica. Esta función se puede construir explícitamente usando la integral de ρ.

Al combinar el Teorema 7 con el Corolario 1, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 9. Toda función continua sobre el $[a,b]$ $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable Calvacante-Todorov sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ y

$$(CT)\int_a^b \rho(t)dt = (R)\int_a^b \rho(t)dt.$$

Comentario 20. (*Linealidad de la integral Calvacante-Todorov*).

Como sea demostrado que toda función continua tiene antiderivada, por lo tanto, una consecuencia del Teorema 9 es que, si f y g son funciones continuas y

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$(CT)\int_a^{b \int \, d\,t = \alpha\left[(CT)\int_a^b f(t)dt\right] + \beta\left[(CT)\int_a^b g(t)dt\right]} [\alpha\, f(\,t) + \beta\, g(\,t)].$$

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. UBICACIÓN GEOGRÁFICA DEL ESTUDIO

Esta investigación se llevó a cabo en la Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura, específicamente en la Escuela Profesional de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

3.2. PERÍODO DE DURACIÓN DE ESTUDIO

La investigación se llevó a cabo durante tres semestres académicos hasta su finalización.

3.3. PROCEDENCIA DEL MATERIAL UTILIZADO

La investigación se basa en fuentes de información como textos de análisis matemático, con énfasis en artículos publicados en revistas científicas de matemáticas y repositorios de tesis de universidades con programas de matemáticas, donde se desarrollan y analizan las teorías de la integral de Riemann y la integral de Darboux.

3.4. POBLACIÓN Y MUESTRA DEL ESTUDIO

La investigación por ser de naturaleza teórica, descriptiva y no experimental no cuenta con una población determinada, menos con un tipo de muestra.

3.5. DISEÑO ESTADÍSTICO

Debido a la naturaleza de investigación, por ser teórica, descriptiva y no experimental, no cuenta con un diseño estadístico.

3.6. PROCEDIMIENTO

Para determinar si la integral de Riemann y la integral de Darboux son equivalentes, primero se analizaron los conceptos de partición de un intervalo cerrado y las sumas inferiores y superiores de la integral de Calvacante-Tódorov en dicho intervalo $[a,b]$. Luego se construyó la integral de Riemann sin utilizar las sumas superiores. Finalmente, se generalizó la existencia de la integral de Calvacante-Tódorov. Posteriormente, se empleó la integral de Darboux para deducir las fórmulas de área, longitud de arco y volumen de sólidos de revolución.

3.7. VARIABLES

Las variables dependientes son la integral de Riemann y la integral de Darboux. mientras que la variable independiente es la equivalencia entre la integral de Riemann y la integral de Darboux, así como sus aplicaciones en el cálculo integral a través de la integral de Darboux.

3.8. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

La investigación obtuvo como resultados lo siguiente:

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. RESULTADOS

En este capítulo se expone el resultado principal de la tesis, que tiene como objetivo demostrar la equivalencia entre la integral de Riemann y la integral de Darboux, así como sus aplicaciones en los conceptos de área bajo una curva, longitud de arco y volumen de un sólido de revolución, utilizando la construcción de la integral de Darboux.

A continuación, se exponen los principales hallazgos:

4.1.1. El Teorema de la Equivalencia entre las definiciones formuladas por Riemann y Darboux.

A continuación, se enuncia el teorema y se demuestra parte por parte en forma detallada

Teorema 4.1. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado. En ese entender, las condiciones sucesivas adquieren el carácter de equivalentes:

i) La función f es integrable Riemann,

ii) La función f es integrable Darboux.

Asimismo, en el caso de cumplir con una condición anterior, entonces se cumple:

$$(Da)\int_a^b f(x)dx = (Ri)\int_a^b f(x)dx$$

Demostración

Primeramente, demostraremos de (i) $\Rightarrow$ (ii).

Para lo cual. Supóngase que la función f es integrable Riemann. Esta parte de la demostración se llevará a cabo en dos etapas.

Primera Etapa: Demostración de que la función f es acotada

Considerando $\varepsilon = 1$ en la definición 11 se obtiene que existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ es una partición del intervalo cerrado $[a, b]$, y además $\{c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n\} \in [a, b]$ tal que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\|P\| < \delta$, entonces se tiene que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) - A\right| < 1$$

Consideremos una partición $P_0 = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ en el intervalo cerrado $[a, b]$, cuya norma sea menor que δ.

Sea $x \in [a, x_1]$, entonces se tiene que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < 1$$

y

$$\left|f(x)(x_1 - a) + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < 1$$

Por consiguiente, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|(f(x) - f(x_1))(x_1 - a)\right| &= \left|f(x)(x_1 - a) + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - A - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + A\right| \\
&= \left|f(x)(x_1 - a) + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - A - \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right)\right| \\
&\leq \left|f(x)(x_1 - a) + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| \\
&\leq 1 + 1 \\
&\leq 2
\end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$|f(x)| \leq |f(x_1)| + |f(x) - f(x_1)| \leq f(x_1) + \frac{2}{x_1 - a}$$

Si $x \in [a, x_1]$.

Asimismo, se puede proceder en el resto de los intervalos de la partición, lo cual asegura que la función f es acotada.

Segunda Etapa: la función f satisface la condición del Teorema 3. Para lo cual consideremos.

Sea $\varepsilon > 0$, por la definición 11, existe una partición $P = \{t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ en el intervalo cerrado $[a, b]$, tales que si $\{c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n\} \in [a, b]$ satisfacen $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Como

$M_i = sup\{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ y $c_1 \in [t_0, t_1], c_2 \in [t_1, t_2], \cdots, c_n \in [t_{n-1}, t_n]$ son arbitrarios se tiene que

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) : c_1 \in [t_0, t_1], c_2 \in [t_1, t_2], \cdots, c_n \in [t_{n-1}, t_n] \right\}$$

por lo tanto

$$|U(f, P) - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

En forma análoga se obtiene

$$|L(f, P) - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por consiguiente

$$U(f,P)-L(f,P)\le |U(f,P)-A|+|A-L(f,P)|\le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$$

Finalmente demostraremos que (ii) ⇒ (i), para la demostración consideremos lo siguiente.

Supóngase que la función f es integrable Darboux.

Teniendo en cuenta el Lema 2 existe $\delta>0$ tal que si P es una partición del intervalo cerrado $[a,b]$ y $\|P\|<\delta$, entonces

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

Sea $P=\{t_0,t_1,t_2,\cdots,t_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal qué $\|P\|<\delta$ y sean si $\{c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n\}\in[a,b]$ tales que $c_i\in[t_{i-1},t_i]$ entonces

$$0\le U(f,P)-(D)\int_a^b f(x)dx<\varepsilon, \qquad 0\le (D)\int_a^b f(x)dx-L(f,P)<\varepsilon$$

y

$$L(f,P)\le\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i-t_{i-1})\le U(f,P)$$

Por consiguiente, se tiene

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i-t_{i-1})-(D)\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon$$

de donde se concluye que la función f es integrable Riemann y que

$$(D)\int_a^b f(x)dx=(R)\int_a^b f(x)dx\,.$$

Comentario 20. Las integrales de Riemann y Darboux representan dos enfoques fundamentales para la integración en análisis matemático, ofreciendo maneras alternativas de calcular el área bajo una curva. A pesar de sus diferencias en la formulación y en el procedimiento de aproximación, ambos métodos han demostrado ser equivalentes en términos de su capacidad para calcular la misma integral para funciones continuas en un intervalo cerrado. Este teorema de equivalencia no solo fortalece nuestra comprensión teórica de la integración, sino que también unifica dos perspectivas históricamente importantes en el análisis integral

4.1.2. Aplicaciones de la integral de Darboux en las definiciones teoremas de área bajo una curva, la longitud de arco y el volumen de un sólido de revolución en cálculo integral.

En este trabajo investigación, se emplea la investigación de Calvacante y Todorov titulada "A lost theorem: definite integrals in an asymptotic setting". La integral de Darboux se utiliza en el cálculo de áreas, longitudes de arco y volúmenes de sólidos de revolución mediante el uso de sumas inferiores y superiores. A continuación, se detallan cómo las definiciones, propiedades y teoremas relacionados con la integral de Darboux se aplican en cada uno de estos contextos, para estos consideramos que la función f es continua en $[a,b]$ la integral de la función f sobre $[a,b]$ se denotará por $\int_a^b f(x)dx$ y además se utiliza la Definición 14. con el propósito para presentar la integral de una manera más intuitiva, sencilla y comprensible.

4.1.2.1. Área bajo una curva en la integral de Darboux

A continuación, se detalla cómo la integral de Darboux en la definición del área bajo una curva.

Definición 4.1. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ tal que $f(x) > 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. Si $A:[a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función de dos variables que satisface las propiedades

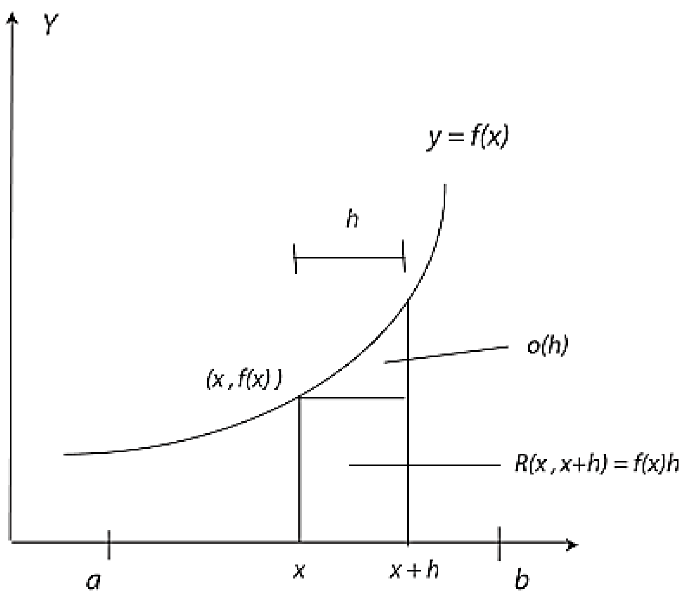
a) $A(x_1,x_2) + A(x_2,x_3) = A(x_1,x_3)$, $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$

b) $A(x,x+h) = \pm R(x,x+h) + o(h)$ cuando $h \to 0^{\pm}$, $\forall\, x \in [a,b]$, donde $R(x,x+h)$ representa el área del rectángulo con vértices $(x,0)$; $(x+h,0)$; $(x+h,f(x))$ y $(x,f(x))$ entonces $A(a,b)$ es denominado el área bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$.

La definición 4.1. esta ilustrada y justificada intuitivamente en la figura 2.

Figura 2

Área bajo una curva en la integral de Darboux



Comentario 21. La integral de Darboux ofrece un enfoque estructurado para definir y calcular el área bajo una curva en el cálculo integral. A continuación, se detalla el teorema correspondiente

Teorema 4.2. Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ tal que $f(x) > 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. Entonces existe $A(a,b)$, el área bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo en el intervalo cerrado $[a,b]$. Además $A(a,b)$ es única y $A(a,b) = \int_a^b f(t)dt$

Demostración

Para la demostración se considera lo siguiente

Como $R(x,x+h) = f(h)|h|$, la función A debe satisfacer

$A(x,x+h) = \pm R(x,x+h) + o(h) = \pm f(x)|h| + o(h) = f(x)h + o(h)$, $h \to 0$.

Por otro lado, tenemos que $A(a,b) = \int_a^b f(t)dt$ entonces

$$A(x,x+h) = f(x)h + o(h) \text{ para } h \to 0$$

Cuando $h \to 0^+$ se tiene

$$A(x,x+h) = f(x)h + o(h) = f(x)|h| + o(h) = R(x,x+h) + o(h).$$

Como $A(x,x+h) = -A(x,x+h)$, para $h \to 0^-$ se tiene

$$A(x,x+h) = -A(x,x+h) = -f(x)h + o(h) = f(x)|h| + o(h)$$
$$= -R(x,x+h) + o(h).$$

por la definición de integral de Calvacante-Todorov (Definición 14) y el resultado de unicidad obtenido en el Lema 5. Se obtiene

$$A(a,b) = \int_a^b f(t)dt$$

por consiguiente $A(a,b)$ es única y

$$A(a,b) = \int_a^b f(t)dt$$

Comentario 22. La integral de Darboux ofrece un enfoque estructurado para definir y calcular el área bajo una curva en el cálculo integral. Este método se basa en sumas inferiores y superiores que proporcionan aproximaciones claras y precisas del área.

4.1.2.2. La Longitud de arco en la integral de Darboux

A continuación, se detalla cómo la integral de Darboux en la definición de la longitud de arco de una curva.

Definición 4.2. Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y con una derivada continua. Si $L: [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función en dos variables que satisface las propiedades

a) $L(x_1,x_2)+L(x_2,x_3)=L(x_1,x_3),\ \forall\, x_1,x_2,x_3 \in [a,b]$

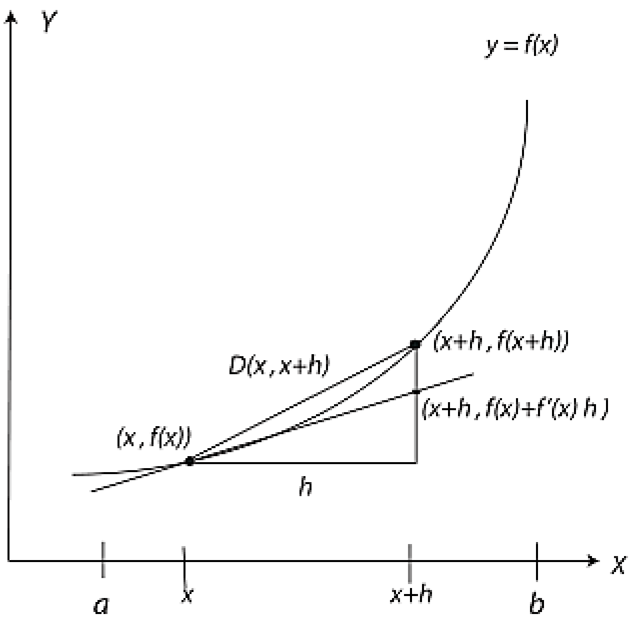
b) $L(x,x+h) = \pm D(x,x+h) + o(h)$ cuando $h \to 0^{\pm}$, $\forall\, x \in [a,b]$, donde $D(x,x+h)$ representa la distancia euclidiana entre los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$, entonces el número $L(a,b)$ se denomina Longitud de Arco de la curva $y = f(x)$ entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

La definición anterior puede ser desglosada en pasos más simples para facilitar su comprensión:

Se supondrá que h es positivo y que $f\,'(t)$ es positivo y $t \in [x, x+h]$.

Figura 3

Longitud de arco en la integral de Darboux



La figura 3 sugiere bajo ciertas condiciones de regularidad, que $L(x, x+h)$ esté acotado inferiormente por $D(x, x+h)$ y superiormente, debido a la longitud del segmento que une los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x)+f'(x)h)$ más la longitud del segmento que junta los puntos $(x+h, f(x)+f'(x)h)$ y $(x+h, f(x+h))$.

Por consiguiente, se tiene

$$D(x, x+h) \leq L(x, x+h) \leq \sqrt{h^2 + [f'(x)h]^2} + f(x+h) - f(x) - f'(x)h$$

cómo $f(x+h) - f(x) - f'(x)h = o(h)$ se obtiene

$$0 \leq L(x, x+h) - D(x, x+h) \leq \sqrt{h^2 + [f'(x)h]^2} + o(h) - D(x, x+h).$$

Por otro lado

$$D(x,x+h)=\sqrt{h^2+[f(x+h)-f(x)]^2}$$
$$=\sqrt{h^2+[f'(x)h+o(h)]^2}$$
$$=\sqrt{h^2\left(1+[f'(x)]^2+\frac{2f'(x)o(h)h}{h^2}+\left[\frac{o(h)}{h}\right]^2\right)}$$
$$=h\sqrt{1+[f'(x)]^2+\frac{2f'(x)o(h)h}{h^2}+\left[\frac{o(h)}{h}\right]^2}$$

de donde se concluye que $L(x,x+h)-D(x,x+h)$ está acotado superiormente por:

$$h\sqrt{1+[f'(x)]^2}-o(h)-h\sqrt{1+[f'(x)]^2+\frac{2f'(x)o(h)h}{h^2}+\left[\frac{o(h)}{h}\right]^2}$$

y por consiguiente $\dfrac{L(x,x+h)-D(x,x+h)}{h}$ tiende a 0, sí $h\to 0^+$.

A partir de la definición de la longitud del arco, se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 4.3. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f\not(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces existe $L(a,b)$, la longitud de arco de la curva $y=f(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Además $L(a,b)$ es única y está dado por $L(a,b)=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

Demostración.

Para la demostración consideremos la diferencial de la curva $y=f(x)$.

Sea $\Delta y=f(x,x+h)-f(x)$, entonces $\Delta y=f'(x)h-o(h)$, cuando $h\to 0$.

Se debe tener en cuenta la función L debe cumplir

$$L(x,x+h)=\pm D(x,x+h)+o(x)=\pm\sqrt{h^2+[\Delta y]^2}+o(h)$$

$$=\pm|h|\sqrt{1+\left[\frac{f'(x)h-o(h)}{h}\right]^2}+o(h)$$

$$=h\sqrt{1+[f'(x)]^2+\frac{2f'(x)o(h)h}{h^2}+\left[\frac{o(h)}{h}\right]^2}+o(h)$$

$$=h\sqrt{1+[f'(x)]^2+\frac{o(h)}{h}}+o(h)$$

$$=h\left[\sqrt{1+[f'(x)]^2}+\sqrt{1+[f'(x)]^2+\frac{o(h)}{h}}-\sqrt{1+[f'(x)]^2}\right]+o(h)$$

$$=h\left[\sqrt{1+[f'(x)]^2}+\frac{\frac{o(h)}{h}}{\left[\sqrt{1+[f'(x)]^2+\frac{o(h)}{h}}+\sqrt{1+[f'(x)]^2}\right]}\right]+o(h)$$

$$=h\left[\sqrt{1+[f'(x)]^2}+\frac{o(h)}{h}\right]+o(h)$$

$$=h\sqrt{1+[f'(x)]^2}+o(h)+o(h)$$

$$=h\sqrt{1+[f'(x)]^2}+o(h)$$

Por otro lado, si $L(a,b)=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

Por lo tanto

$$L(x,x+h)=h\sqrt{1+[f'(x)]^2}+o(h),\text{ cuando } h\to 0$$

Debido a la definición integral de Calvacante-Todorov (Definición 14) y el resultado de la unicidad obtenido en el Lema 5 se tiene que

$$L(x,y)=\int_a^b\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt$$

entonces $L(a,b)$ es única y

$$L(a,b)=\int_a^b\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt$$

Comentario 23. La longitud de arco de una curva, utilizando la integral de Darboux, adaptando la metodología de sumas inferiores y superiores para aproximar la longitud de la curva mediante particiones finas.

4.1.2.3. El volumen de un sólido de revolución en la integral de Darboux

A continuación, se detalla una justificación de la fórmula para el volumen de un sólido de revolución. La explicación se basa en el método de las conchas cilíndricas, un concepto fundamental del cálculo elemental.

Definición 4.3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 \leq a < b$ y sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$, $\forall\, x \in [a,b]$.

Si $V: [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de dos variables que cumpla las siguientes dos propiedades

a) $V(x_1, x_2) + V(x_2, x_3) = V(x_1, x_3), \forall\, x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$.

b) $V(x, x + h) = \pm U(x, x + h) + \sigma(h)$ cuando $h \to 0^{\pm}$, $\forall\, x \in [a,b]$,

donde $U(x, x+h)$ es el volumen del solido de revolución obtenida al rotar el rectángulo con vértices $(x,0)$; $(x+h,0)$; $(x+h, f(x))$ y $(x, f(x))$, alrededor del eje Y (ver la figura 4), entonces el número $V(a,b)$ se denomina volumen del solido de revolución alrededor del eje Y en la región $0 \leq y \leq f(x)$, con $0 \leq a \leq b$.

La definición 4.3. se puede justificarse intuitivamente de la siguiente manera:

Para simplificar los argumentos se supondrá que h es positivo y que f es creciente en el intervalo $[x, x+h]$.

La diferencia entre el volumen $V(x, x+h)$ del solido obtenido al rotar alrededor del eje Y la región definida por

$$\{(t, y): 0 \leq y \leq f(t),\ \ x \leq t \leq x+h\}$$

y el volumen $U(x, x+h)$ de la concha cilíndrica que corresponde a rotar alrededor del eje Y la región

$$\{(t, y): 0 \leq y \leq f(x),\ \ x \leq t \leq x+h\}$$

se puede acotar por el volumen obtenido al rotar alrededor del eje Y la región definida por

$$\{(t, y): 0 \leq y \leq f(x+h),\ \ x \leq t \leq x+h\}.$$

Por tanto, el volumen de este último solido estará dado por

$$\pi[(x+h)^2 - x^2][f(x+h) - f(x)].$$

realizando las operaciones y usando

$f(x+h) - f(x) = f^{'}(x)h + \sigma(h)$, cuando $h \to 0$

se obtiene

$$\begin{aligned} V(x, x+h) - U(x, x+h) &= \pi(2xh + h^2)\left[f'(x)h + \sigma(h)\right] \\ &= h\pi(2x+h)\left[f'(x)h + \sigma(h)\right] \end{aligned}$$

de donde se deduce que

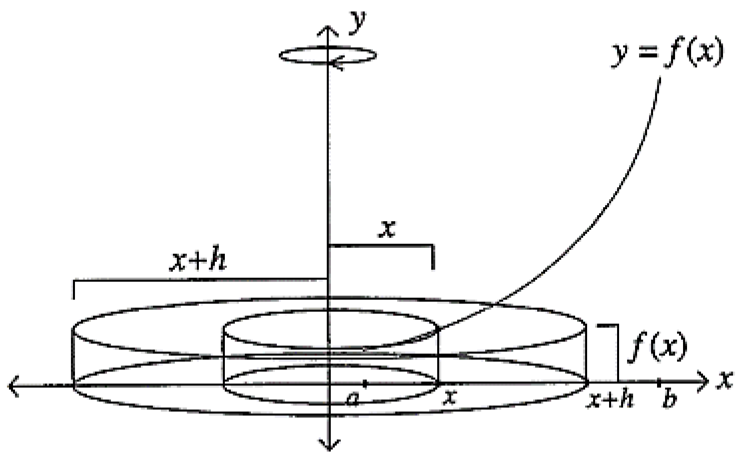
$$\frac{V(x, x+h) - U(x, x+h)}{h}$$

tiende a 0 si $h \to 0^+$.

A continuación, se tiene el grafico del volumen de un sólido de revolución en la integral de Darboux.

Figura 4

Volumen de un sólido de revolución en la integral de Darboux



Como consecuencia de la definición de volumen de un sólido de revolución, obtenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 4.4. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua de modo que $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$ y $0\leq a<b$. Entonces existe $V(a,b)$, el volumen del solido de revolución alrededor del eje Y de la región $0\leq y\leq f(x),\ 0\leq a<b$. Además $V(a,b)$, es único y está dado por

$$V(a,b)=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

Demostración.

Para la demostración del teorema 4.4. se tiene la siguiente consideración.

El volumen de la concha cilíndrica es

$$U(x,x+h)=|\pi(x+h)^2-\pi x^2|f(x)$$

Por consiguiente, debe cumplirse

$$
\begin{aligned}
V(x,x+h) &= \pm U(x,x+h) + o(h) \\
&= \pm\left|\pi(x+h)^2 - \pi x^2\right| f(x) + o(h) \\
&= \pm\left|\pi(2xh + h^2\right| f(x) + o(h) \\
&= \pm 2\pi x f(x)\left|h\right| + \pi f(x) h^2 + o(h) \\
&= \pm 2\pi x f(x)\left|h\right| + o(h) \\
&= 2\pi x f(x) h + o(h), \quad h \to 0.
\end{aligned}
$$

De nuevo, debido a la definición de la integral de Calvacante-Todorov (Definición 14) y el resultado de la unicidad en el Lema 5 se tiene que

$$V(x,y) = 2\pi \int_x^y t\, f(t)dt.$$

entonces $V(a,b)$ es único y el volumen es

$$V(a,b) = 2\pi \int_a^b x\, f(x)dx.$$

Comentario 24. La integral de Darboux se adapta para calcular el volumen de un sólido de revolución de una curva. Este método utiliza las sumas inferiores y superiores para aproximar el volumen de sólidos generados por la rotación de una función continua alrededor de un eje.

4.2. DISCUSIONES

Según el artículo de Bernhard Riemann de 1854, la integral Riemann fue la primera definición precisa de la integral de una función en un intervalo de un subconjunto de $\mathbb{R}$. La integración numérica se utilizó para evaluar la integral de Riemann. Sin embargo, la integral de Darboux fue creada por Jean Gastón Darboux en 1875, pero no es adecuada para propósitos teóricos. Se encuentra en varios textos el enfoque integral de Darboux, pero no se explica como tal; solo se indica la denominación integral o integral de Riemann utilizando el procedimiento de Darboux. La siguiente es la idea fundamental:

Se trata de establecer el área bajo una función acotada en un intervalo cerrado, dividir el intervalo en subintervalos y establecer dos rectángulos para cada subintervalo, uno con la altura del supremo de la función y otro con la altura del ínfimo de la función en cada subintervalo, si conseguimos establecer una coincidencia entre la suma de los rectángulos con altura y otro con la altura del ínfimo de la función en cada subintervalo. En resumen, la integral de Riemann y la integral de Darboux son equivalentes en su construcción y definición.

V. CONCLUSIONES

En los siguientes párrafos se presentan las conclusiones del estudio.

PRIMERA: La integral de Darboux en cada subintervalo encuentra el ínfimo y el supremo que desempeña la función en el subintervalo correspondiente. A continuación, analiza las áreas del rectángulo inferior y del rectángulo superior; mientras la integral de Riemann toma un nodo con el fin de que la función evaluada en dicho nodo sea una aproximación de la altura promedia del rectángulo, cuya área aproxima la altura de la función en dicho subintervalo.

SEGUNDA: Al demostrar el teorema 5 que ambas integrales son equivalentes, se constata que una función es Riemann-integrable y una función es Darboux-integrable. Asimismo, Ambas comienzan haciendo una partición del intervalo de integración, teniendo en cuenta la suma de las áreas de los rectángulos que aproximan la integral.

TERCERA: En las aplicaciones utilizando la integral de Darboux para la demostración de los teoremas de área bajo una curva, la longitud de arco y el volumen de un sólido de revolución son más intuitivos y comprensibles sin utilizar las sumas de Riemann.

VI. RECOMENDACIONES

El trabajo de investigación considera pertinente realizar las siguientes recomendaciones:

PRIMERA: En este estudio se aplicó en el estudio de la equivalencia de la integral de Riemann y la integral de Darboux y su aplicación en cálculo integral. Se recomienda estudiar La integral de Riemann, y la integral Lebesgue y la integral de Henstock-Kurzweil y sus aplicaciones.

SEGUNDA: Se sugiere, a la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas de la UNA-Puno y a las escuelas profesionales de ingenierías de las otras universidades, adoptar también la enseñanza en la parte de aplicaciones con el método de la integral de Darboux.

TERCERA: Se recomienda estudiar aplicaciones. Así por ejemplo para trabajo, presión y centro de masa con la integral de Darboux.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

M. Spivack (2012). Calculus Vol 1 y Cal.2. Editorial Reverte. Citado en la(s) página(s): 8, 14, 22

R. Bruzual y M. Domínguez, *Calculo integral y series de funciones.* Disponible en http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/an1/ci1van1.pdf. Citado en la(s) página(s): 8, 14, 22

R. Cavalcante and T. Todorov (2008), *A lost theorem: definite integrals in an asymptotic setting.* American Mathematical Monthly 115, No. 1, 45-56. Citado en la(s) página(s): 2, 3, 18, 26.

W. Brito. Las integrales de Riemann, Lebesgue y Henstock-Kuerzweil en. http://www.ciens.ula.ve › integral2222cambio

W. Rudin (1997). Principles of Mathematical Analysis. Editorial McGraw-Hill. 1997.

W. Rudin (1980). Principios de Análisis Matemático. Editorial McGraw-Hill. 3ra Edición Citado en la(s) página(s): 8,14, 22

Wikipedia en español, disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada. Citado en la(s) página(s): 3, 4, 5

T. M. Apóstol (1984). Calculus Vol 1. Editorial Reverte. disponible en https://drive.google.com/file/d/1wOxFub_r-T7LkW7NaUNpgVTRQs7-vCwb/view

Tapia y Quezada (2020). *Investigación de la Integral Riemann Stieltjes.*

Bolaños (2013). *Generalización de la teoría de integrabilidad de Darboux para campos de vectores polinomiales.*

Valé (1983). *Una construcción de la integral de Riemann- Stieltjes y sus aplicaciones.*

Valencia (1974). *Una teoría de las teorías de integración*.

Universidad Nacional del Altiplano Puno | Vicerrectorado de Investigación | Repositorio Institucional

DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo ANJHELA YELIBETH MAMANI MAMANI
identificado con DNI 70102594 en mi condición de egresado de:

☒ **Escuela Profesional,** ☐ **Programa de Segunda Especialidad,** ☐ **Programa de Maestría o Doctorado**

CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS,

informo que he elaborado el/la ☒ **Tesis** o ☐ **Trabajo de Investigación** denominada:
"EQUIVALENCIA DE LA INTEGRAL RIEMANN Y LA INTEGRAL DE DARBOUX Y SU APLICACIÓN EN CÁLCULO INTEGRAL"

Es un tema original.

Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y **no existe plagio/copia** de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como suyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno 08 de JULIO del 2024

FIRMA (obligatoria)

Huella

Universidad Nacional del Altiplano Puno | Vicerrectorado de Investigación | Repositorio Institucional

AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo ANJHELA YELIBETH MAMANI MAMANI
identificado con DNI 70102594 en mi condición de egresado de:

☒ **Escuela Profesional,** ☐ **Programa de Segunda Especialidad,** ☐ **Programa de Maestría o Doctorado**

CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS,

informo que he elaborado el/la ☒ **Tesis** o ☐ **Trabajo de Investigación** denominada:

"EQUIVALENCIA DE LA INTEGRAL RIEMANN Y LA INTEGRAL DE DARBOUX Y SU APLICACIÓN EN CALCULO INTEGRAL"

para la obtención de ☐**Grado,** ☒ **Título Profesional** o ☐ **Segunda Especialidad.**

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los "Contenidos") que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia:

Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno 08 de JULIO del 2024

FIRMA (obligatoria)

Huella