UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES NO HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES: MEDIANTE EL MÉTODO DE RESPUESTA IMPULSIVA USANDO FACTORIZACIÓN

TESIS

PRESENTADA POR:

Bach. WILMER ISAAC APAZA MEDINA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

PUNO - PERÚ

2024

NOMBRE DEL TRABAJO

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFEREN CIALES ORDINARIAS LINEALES NO HOM OGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTA NTES: MEDIANTE EL MÉTODO DE RESPU ESTA IMPULSIVA USANDO FACTORIZAC IÓN

AUTOR

WILMER ISAAC APAZA MEDINA

RECUENTO DE PALABRAS

22522 Words

RECUENTO DE CARACTERES

87670 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

107 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

2.8MB

FECHA DE ENTREGA

Sep 5, 2024 10:57 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Sep 5, 2024 10:58 PM GMT-5

15% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 13% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 7% Base de datos de trabajos entregados
- 2% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Bloques de texto excluidos manualmente
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 12 palabras)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO Coordinador de Investigación de la E.P.C.F.M. COORDINADOR PUNO

Adelaida Otazu Conza
LIC. CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS
Dra. MATEMÁTICA APLICADA

Mg. Ruperto Zapana Yerba
UNA - PUNO

DEDICATORIA

A mis Padres: Santos Eleuterio Apaza Walquer y Bernardina Faustina Medina Aedo, por su apoyo, comprensión, amor, en mi vida y en mi formación profesional.

A mis hermanos por apoyarme siempre.

Wilmer Isaac Apaza Medina

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional del Altiplano por brindarme la oportunidad de formarme académicamente.

A la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas por proporcionarme una sólida base de conocimientos durante estos cinco años de estudio.

Agradezco a mi familia, en especial a mi madre, por creer en mí y apoyarme incondicionalmente durante todo este tiempo.

Un agradecimiento especial va dirigido a mi asesor, Ruperto Zapana Yerba, por su orientación y apoyo continuo en todas las etapas de este trabajo de investigación.

A mis jurados por su tiempo y esfuerzo en la revisión y evaluación de esta tesis, las observaciones y comentarios constructivos han contribuido significativamente a mejorar la calidad de este trabajo académico.

Wilmer Isaac Apaza Medina

ÍNDICE GENERAL

Pág.

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

ÁREA: Ecuaciones diferenciales ordinarias

TEMA: Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 17 de septiembre del 2024.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Pág.

ÍNDICE DE ANEXOS

ACRÓNIMOS

EDO's:	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
EDLH:	Ecuación Diferencial Lineal Homogénea
EDLNH:	Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea
PVI:	Problema de Valor Inicial
y_h:	Solución homogénea
y_p:	Solución particular
L:	Operador diferencial lineal

RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo principal exponer el método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes mediante la respuesta impulsiva a los estudiantes de Ciencias e Ingenierías de la Universidad Nacional del Altiplano, especialmente a los estudiantes de la escuela de Ciencias Físico Matemáticas. La investigación se enmarca en un enfoque metodológico analítico−deductivo, a un nivel de estudio documental y descriptivo. Primeramente, se mencionan conceptos básicos de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes, ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes y el operador diferencial lineal. Posteriormente definimos la fórmula de respuesta impulsiva $(g(x))$ de la ecuación diferencial lineal homogénea. Después, se encontró la solución particular de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes, calculando la integral de la multiplicación de la respuesta impulsiva y la función $f(x)$ (función no homogénea). Por último, se realizó la comparación del procedimiento entre el método de respuesta impulsiva con los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros para ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes de segundo y tercer orden.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, respuesta impulsiva, operador diferencial.

ABSTRACT

The main objective of this research is to expose the method of solving non-homogeneous linear differential equations with constant coefficients through impulsive response to the students of Science and Engineering of the Universidad Nacional del Altiplano, especially to the students of the School of Physical and Mathematical Sciences. The research is framed in an analytical−deductive methodological approach, at a documentary and descriptive study level. First, basic concepts of homogeneous linear differential equations with constant coefficients, non-homogeneous linear differential equations with constant coefficients and the linear differential operator are mentioned. Subsequently, we defined the impulsive response formula $(g(x))$ of the homogeneous linear differential equation. Then, the particular solution of non-homogeneous linear differential equations with constant coefficients was found by calculating the integral of the multiplication of the impulsive response and the function $f(x)$ (non-homogeneous function). Finally, a comparison was made between the impulsive response method and the methods of indeterminate coefficients and variation of parameters for non-homogeneous linear differential equations with constant coefficients of second and third order.

Keywords: Differential equations, impulse response, differential operator.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las ecuaciones diferenciales ordinarias están consideradas como uno de los tópicos básicos en la formación de profesionales de especialidades relacionadas con la ciencia y la tecnología, tal y como se refleja en diversos currículos del nivel universitario, por ejemplo las licenciaturas o los grados en Matemáticas, Física e Ingeniería [9]. Las ecuaciones diferenciales ordinarias son fundamentales en la ciencia y la ingeniería debido a su capacidad para describir, modelar, predecir y controlar sistemas dinámicos. Su aplicación es amplia y abarca diversas disciplinas, lo que las convierte en una herramienta indispensable para comprender y resolver problemas del mundo real. El problema radica en encontrar una función desconocida que satisface la ecuación bajo a ciertas condiciones iniciales o de contorno. En algunos casos, puede ser difícil demostrar que una ecuación diferencial tiene soluciones y que estas son únicas, para ciertos tipos de ecuaciones diferenciales, como las lineales de primer orden, existen teoremas que garantizan la existencia y unicidad de soluciones bajo ciertas condiciones. Sin embargo, en otros casos más complejos puede ser necesario recurrir a técnicas adicionales, como métodos de análisis cualitativo o numérico, para determinar si existen soluciones y si son únicas.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Existen varias técnicas para hallar la solución de ecuaciones diferenciales; una de ellas es la respuesta impulsiva. En esta investigación se plantea responder: ¿Cómo se determina la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes mediante la respuesta impulsiva usando factorización?

1.3 HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes mediante la respuesta impulsiva usando factorización.

1.4 JUSTIFICACIÓN

El método de respuesta impulsiva es otro método más de resolución ecuación diferencial lineal no homogéneas con coeficientes constantes. Sin embargo, la cualidad de este método y que resulta interesante es que la solución particular se reduce a una sola integral, en la cual se encuentra la respuesta impulsiva y $f(x)$ ($f(x)$ función no homogénea), donde la respuesta impulsiva está relacionada con la solución del polinomio característico asociado a la ecuación homogénea.

1.5 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo general

Determinar la solución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes mediante la respuesta impulsiva usando factorización.

Objetivos específicos

- Determinar la solución particular de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes de segundo y tercer orden mediante la respuesta impulsiva.

- Comparar el procedimiento entre el método de respuesta impulsiva con los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros para ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes de segundo y tercer orden.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

En este capítulo presentaremos un resumen de los resultados básicos necesarios para poder desarrollar y comprender los capítulos siguientes, abordaremos algunos conceptos de ecuaciones diferenciales lineales, polinomio característico, solución de ecuaciones diferenciales lineales y el operador diferencial. Estos conceptos son necesarios para determinar la solución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes mediante la respuesta impulsiva.

Definición 2.1.1 ([4])**.** Una función f de un conjunto D a un conjunto R es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de D exactamente uno y sólo un elemento de R.

Si $y = f(x)$ es una función derivable, entonces su derivada $f'(x)$ también es una función. Si f' también es derivable, entonces podemos derivar a f' para obtener una nueva función de x denotada mediante f''. Siguiendo esa analogía se puede expresar lo siguiente

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}\right) = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right) = y^{(n)} = D^n y,$$

donde $f^{(n)}(x)$ es la n-ésima derivada de y con respecto a x, para cualquier entero positivo n.[14]

Definición 2.1.2 ([7])**.** Una ecuación diferencial es toda ecuación que involucre una función desconocida y algunas de sus derivadas. De manera más precisa, una ecuación diferencial es una expresión de la forma

$$F\left(x_1, \ldots, x_t, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^{n_1} f}{\partial x_1^{n_1}}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^{n_2} f}{\partial x_2^{n_2}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_t}, \ldots, \frac{\partial^{n_t} f}{\partial x_t^{n_t}}\right) = 0$$

que involucra una función desconocida f en las variables $x_1, \ldots, x_t$ y algunas de sus derivadas, donde F denota una función de $n = n_1 + \cdots + n_t$ variables.

Definición 2.1.3 ([16]). Si una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO).

Definición 2.1.4 ([5]). El orden de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{2.1}$$

donde $y(x)$ es una función dependiente de la variable independiente x y que posee n derivadas, además x está definido en un abierto (a, b) con $a < b$.

Definición 2.1.5 ([5]). Se dice que la ecuación diferencial ordinaria (2.1) es lineal si F es una función lineal en las variables $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$.

Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n tiene la forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

y si la ecuación no tiene esa forma, se dice que no es lineal.

Solución de una ecuación diferencial

Dada una ecuación diferencial ordinaria, y al igual que en ecuaciones, la idea es tener la solución a las ecuaciones diferenciales ordinarias, esta solución es una función que debe satisfacer a la ecuación, la función debe estar definida en algún dominio.

Definición 2.1.6 ([5]). Una solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

en un intervalo (a, b) con $a < b$ es una función continua $y(x)$ tal que $y.y', y'', \ldots, y^{(n)}$

existen y satisfacen la ecuación para todos los valores de la variable independiente en el intervalo, $x \in (a, b)$.

Existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Dada una ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

y dadas x_0 e y_0 fijos, nos interesa saber si existe alguna solución de la ecuación diferencial, que en el punto x_0 toma el valor de y_0 y si esa solución es única.

Definición 2.1.7 ([16])**.** Sea I un intervalo que contiene a x_0, el problema

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales arbitrarias dadas, se llama problema con valores iniciales (PVI). Los valores de $y(x)$ y de sus primeras $n - 1$ derivadas en un solo punto $x_0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ se llaman condiciones iniciales.

El problema dado en la definición anterior también se llama problema con valores iniciales de n-ésimo orden. Ahora, si $n = 1$ tenemos

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

que es un problema de valor inicial de primer orden. El siguiente teorema de Picard es denominado teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema 2.1.1 ([8])**.** Sea el problema con valor inicial

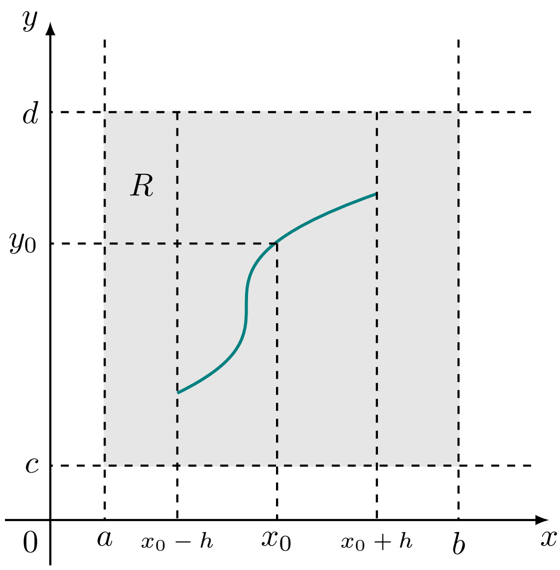
$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0,$$

supongamos que f y $\partial f/\partial y$ son funciones continuas en un rectángulo $R = \{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\}$ que contiene al punto (x_0, y_0). Entonces el problema con valor inicial tiene una única solución $y(x)$ en algún intervalo $x - h < x < x_0 + h$, donde h es un número positivo.

Figura 1

Región rectangular R



Este teorema es un resultado muy importante y su demostración es muy extensa, por ello puede ver esa demostración en: Arnol'd [2]; Sotomayor [12].

2.2 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Comenzamos nuestro análisis con la ecuación diferencial lineal de primer orden

Definición 2.2.1 ([4])**.** Una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la siguiente forma

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{2.2}$$

donde a, b son funciones definidas en un intervalo I.

Si $b(x) = 0$ para toda x en I, la ecuación diferencial lineal

$$y' + a(x)y = 0$$

se llama *ecuación homogénea*, mientras que si $b(x) \neq 0$ en I, entonces (2.2) se llama *ecuación no homogénea*.

La ecuación $y' + ay = 0$

Si a es una constante y ϕ es una solución de la siguiente ecuación diferencial

$$y' + ay = 0, \tag{2.3}$$

y sea e^{ax} una función definida en I, donde $e^{ax} \neq 0$ para todo valor x en I, entonces se tiene

$$\begin{aligned} e^{ax}(\phi' + a\phi) =& 0 \\ e^{ax}\phi' + ae^{ax}\phi =& 0 \\ (e^{ax}\phi)' =& 0. \end{aligned}$$

La solución a esta última ecuación es $e^{ax}\phi(x) = c$, donde c es la constante de integración, despejando $\phi(x)$ se tiene

$$\phi(x) = ce^{-ax}. \tag{2.4}$$

Hemos demostrado que toda solución ϕ de (2.3) debe tener la forma (2.4), donde c es una constante. Recíprocamente, si c es una constante cualquiera, entonces la función ϕ definida por (2.4) es una solución de (2.3), ya que

$$\phi'(x) + a\phi(x) = -ace^{-ax} + ace^{-ax} = 0.$$

Este resultado se formaliza en el siguiente teorema

Teorema 2.2.1 ([4]). Sea la ecuación

$$y' + ay = 0, \tag{2.5}$$

donde a es una constante. Si c es una constante cualquiera, la función ϕ definida por

$$\phi(x) = ce^{-ax} \tag{2.6}$$

es solución de (2.5), y además toda solución tiene esta misma forma.

Obsérvese que todas las soluciones existen para toda x real, esto es, para $-\infty < x < \infty$, dicho de otra forma ϕ es una función de clase $C^{\infty}(I)$. Obsérvese también que la constante c es el valor de ϕ en 0, esto es, $c = \phi(0)$.

La ecuación $y' + ay = b(x)$

Sea a una constante y b una función continua en el intervalo I. Consideremos la ecuación

$$y' + ay = b(x), \tag{2.7}$$

y resolviéndola con el mismo método que se utilizó en la ecuación lineal homogénea. Si ϕ es una solución de (2.7), entonces

$$\begin{aligned} e^{ax}(\phi' + a\phi) =& e^{ax}b \\ (e^{ax}\phi)' =& e^{ax}b. \end{aligned}$$

Sea B una función tal que $B'(x) = e^{ax}b(x)$, por el teorema fundamental del cálculo se tiene

$$B(x) = \int_{x_0}^{x} e^{at}b(t)dt,$$

donde $x_0 \in I$. Si aplicamos la integral a ambos lados de la igualdad $(e^{ax}\phi(x))' = B'(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{ax}\phi(x) &= B(x) + c \\ &= \int_{x_0}^{x} e^{at}b(t)dt + c \end{aligned}$$

donde c es la constante de integración. Por consiguiente, se tiene que

$$\phi(x) = e^{-ax}\int_{x_0}^{x} e^{at}b(t)dt + ce^{-ax} \tag{2.8}$$

De acuerdo con la ecuación (2.8), la función ψ definida por $\psi(x) = e^{-ax}\int_{x_0}^{x} e^{at}b(t)dt$ es una solución particular de (2.7), ya que es la solución cuando $c = 0$.

Este resultado se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2 ([4])**.** Sea la ecuación

$$y' + ay = b(x) \tag{2.9}$$

donde a es una constante y b una función continua en un intervalo I. Si x_0 es un punto en I, y c es una constante cualquiera, entonces la función ϕ definida por

$$\phi(x) = e^{-ax} \int_{x_0}^{x} e^{at} b(t) dt + ce^{-ax} \tag{2.10}$$

es una solución de (2.9), y toda solución tiene esta forma.

2.3 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE n-ÉSIMO ORDEN

Definición 2.3.1 ([11])**.** Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n con la variable dependiente y y la variable independiente x, es una ecuación de la forma

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{2.11}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y f son funciones reales continuas sobre el intervalo real I, además que $a_0 \neq 0$ para cualquier x sobre I.

La ecuación (2.11) se denomina *ecuación diferencial lineal no homogénea*. Si f es idénticamente cero, la ecuación (2.11) se reduce a

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2.12}$$

y entonces se denomina *ecuación diferencial lineal homogénea*. Además, si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes, entonces (2.11) se denomina ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes y (2.12) se denomina ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes.

Teorema 2.3.1 ([15])**.** Consideremos la ecuación diferencial de n-ésimo orden (2.11) donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y f son funciones reales continuas en un intervalo real I y $a_0 \neq 0$

para cualquier x en I. Si x_0 es cualquier punto del intervalo I y $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ son n constantes arbitrarias, entonces existe una única solución y de (2.11) tal que

$$y(x_0) = c_0,\ y'(x_0) = c_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1},$$

y esta solución está definida en todo el intervalo I.

Definición 2.3.2 ([15])**.** Si $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son m funciones dadas y $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son m constantes, entonces

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m$$

se denomina combinación lineal de $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Definición 2.3.3 ([16])**.** Las n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son linealmente dependientes en I si existen las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas nulas, tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

para toda x en I. Si las n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ no son linealmente dependientes en I, se dice que son funciones linealmente independientes.

2.3.1. Ecuación homogénea

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2.13}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes.

Teorema 2.3.2 ([16])**.** Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación homogénea de n-ésimo orden (2.13) en un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x),$$

donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.

Una ecuación diferencial lineal homogénea tiene siempre la solución trivial $y = 0$.

Definición 2.3.4 ([16])**.** Cualquier conjunto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (2.13) en un intervalo I es un *conjunto fundamental* de soluciones en el intervalo.

Teorema 2.3.3 ([16])**.** Sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (2.13) en el intervalo I. Entonces la solución general de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Ahora consideraremos cómo encontrar soluciones linealmente independientes para la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0, \tag{2.14}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes. Ahora, para que una solución $y(x)$ satisfaga la ecuación (2.14), es necesario que tanto la solución $y(x)$ como sus derivadas tengan la misma forma. La función que satisface este requisito es la función exponencial $e^{\lambda x}$, con λ constante, sustituyendo y por $e^{\lambda x}$ en (2.14), resulta

$$a_0 \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0,$$

que puede reescribirse como

$$\left(a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n\right) e^{\lambda x} = 0$$

de donde $e^{\lambda x} \neq 0$ para toda x, por lo que las soluciones se obtienen resolviendo la ecuación polinómica en λ:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

La ecuación anterior se llama ecuación característica y sus soluciones son conocidas como valores propios o valores característicos.

Caso 1: Raíces reales distintas

Teorema 2.3.4 ([15])**.** Para la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes (2.14), si la ecuación característica tiene n raíces reales distintas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ son soluciones linealmente independiente de (2.14). La solución homogénea está dada por

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} \tag{2.15}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Caso 2: Raíces reales repetidas

Teorema 2.3.5 ([15])**.** Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes (2.14).

1. Si la ecuación característica tiene la raíz real λ que se repite k veces, entonces la parte de la solución correspondiente a esta raíz repetida k veces es

$$\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}\right) e^{\lambda x}. \tag{2.16}$$

2. Si, además, las raíces restantes de la ecuación característica son los números reales distintos $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n$, entonces la solución homogénea es

$$y_h = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}\right) e^{\lambda x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}. \tag{2.17}$$

Caso 3: Raíces complejas

Teorema 2.3.6 ([15])**.** Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes (2.14).

1. Si la ecuación característica tiene raíces complejas conjugadas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$, sin repetirse, entonces $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ y $e^{\alpha x} \cos \beta x$ son soluciones linealmente independiente. La parte correspondiente de la solución homogénea puede escribirse como

$$e^{\alpha x}\left(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x\right). \tag{2.18}$$

2. Sin embargo, si $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ son cada una raíces de multiplicidad k de la ecuación característica, entonces la parte correspondiente de la solución homogénea puede escribirse

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x}\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}\right) \cos \beta x \\ &\qquad + e^{\alpha x}\left(c_{k+1} + c_{k+2} x + c_{k+3} x^2 + \cdots + c_{2k} x^{k-1}\right) \operatorname{sen} \beta x. \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.3.2. Ecuación no homogénea

Hasta ahora nos hemos centrado en la solución de la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{2.20}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes. Ahora veremos la ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \tag{2.21}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes.

Teorema 2.3.7 ([16])**.** Sea y_p cualquier solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden (2.21) en un intervalo I, y sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada (2.20) en I. Entonces la *solución general* de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes.

La ecuación homogénea asociada se llama así cuando se sustituye $f(x)$ por 0 en la ecuación no homogénea (2.21). La solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea, está compuesta por la suma de dos funciones:

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

Teorema 2.3.8 ([16]). Sean $y_{P_1}, y_{P_2}, \ldots, y_{P_k}$ k soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I que corresponde, a su vez, a k funciones diferentes $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Es decir, se supone que y_{P_i} denota una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente a

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f_i(x), \tag{2.22}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces

$$y_p = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x) + \cdots + y_{P_k}(x) \tag{2.23}$$

es una solución particular de

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x). \tag{2.24}$$

2.3.3. Coeficientes indeterminados

Ahora veremos cómo determinar la solución particular de una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes. Consideremos de nuevo la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \tag{2.25}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes y $f(x)$ es el término no homogéneo. Recordemos que la solución general puede escribirse

$$y = y_h + y_p$$

siendo y_h la solución homogénea y y_p es una solución particular.

Definición 2.3.5 ([15]). Una función $f(x)$ es una *función coeficientes indeterminados* (función UC) si es

1. Función definida por una de las siguientes expresiones:

- **i)** x^m, donde m es un número entero no negativo
- **ii)** $e^{\alpha x}$, donde α es una constante distinto de cero
- **iii)** $\cos \beta x$ y/o $\operatorname{sen} \beta x$, donde β es constante, $\beta \neq 0$

2. Función definida como producto finito de dos o más funciones de **i)**, **ii)** y **iii)**.

De acuerdo con la definición anterior, la forma general está dada por

$$f(x) = e^{\alpha x} \left[P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \operatorname{sen} \beta x \right]$$

donde $\lambda = \alpha \pm i\beta$ es raíz compleja de la ecuación característica y $P_m(x)$ y $Q_n(x)$ son polinomios de grado m y n, respectivamente. Se busca una solución particular y_p de la forma:

$$x^z e^{\alpha x} \left[\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x \right]$$

Donde $k = \text{máx}(m, n)$, $\widetilde{P}_k(x)$ y $\widetilde{Q}_k(x)$ son polinomios en x de grado k, cuyos coeficientes están indeterminados, y z es la multiplicidad de la raíz $\lambda = \alpha \pm i\beta$ de la ecuación característica. La forma de y_p, se puede resumir en la siguiente tabla

Tabla 1

Función coeficientes indeterminados y el conjunto de coeficientes indeterminados[6].

Forma de $f(x)$	Raíces de la ecuación característica	Forma de y_p para $k = \text{máx}(m, n)$
I. $P_m(x)$	**a)** $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, z$	$\widetilde{P}_m(x)$
	b) Alguna $\lambda_i = 0$	$x^z \widetilde{P}_m(x)$
II. $P_m(x)e^{\alpha x}$	**a)** α no es raíz	$\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
	b) α es raíz repetida z veces	$x^z \widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
III. $P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \operatorname{sen} \beta x$	**a)** $\pm\beta i$ no son raíces	$\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x$
	b) $\pm\beta i$ son raíces de orden z	$x^z \left[\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x \right]$
IV. $e^{\alpha x} \left[P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \operatorname{sen} \beta x \right]$	**a)** $\alpha \pm \beta i$ no son raíces	$e^{\alpha x} \left[\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x \right]$
	b) $\alpha \pm \beta i$ son raíces de orden z	$x^z e^{\alpha x} \left[\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x \right]$

2.3.4. Variación de parámetros

Considere una ecuación diferencial lineal no homogénea de n-esimo orden con coeficientes constantes como

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \tag{2.26}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes y $f(x)$ es una función continua en el intervalo I. Sea $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ el conjunto fundamental de soluciones linealmente independiente de la ecuación homogénea asociada

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{2.27}$$

de modo que la solución homogénea de la ecuación (2.27) es

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_{n-1}y_{n-1}(x) + c_ny_n(x), \tag{2.28}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes. La idea para determinar la solución particular de (2.26), consiste en sustituir las constantes por funciones de x en (2.28). Donde la solución particular de (2.26) tiene la forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + \cdots + u_n(x)y_n,$$

ahora se obtiene la primera derivada de y_p

$$y_p'(x) = u_1y_1' + u_1'y_1 + u_2y_2' + u_2'y_2 + \cdots u_ny_n' + u_n'y_n, \tag{2.29}$$

para simplificar la expresión (2.29) impongamos la siguiente condición

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 + \cdots + u_n'y_n = 0 \tag{2.30}$$

en cuyo caso la expresión (2.29) se reduce a

$$y_p'(x) = u_1y_1' + u_2y_2' + \cdots + u_ny_n'. \tag{2.31}$$

De manera análoga se obtiene las derivadas $y_p'', y_p''' \ldots, y_p^{(n)}$ y reduciéndolas con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} u_1'y_1' + u_2'y_2' + \cdots + u_n'y_n' &= 0 \\ u_1'y_1'' + u_2'y_2'' + \cdots + u_n'y_n'' &= 0 \\ &\vdots \\ u_1'y_1^{(n-2)} + u_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-2)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

siguiendo así, se llega a las siguientes expresiones para y_p y sus derivadas

$$\begin{aligned} y_p(x) &= u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_ny_n \\ y_p'(x) &= u_1y_1' + u_2y_2' + \cdots + u_ny_n' \\ y_p''(x) &= u_1y_1'' + u_2y_2'' + \cdots + u_ny_n'' \\ &\vdots \\ y_p^{(n)}(x) &= u_1y_1^{(n)} + u_2y_2^{(n)} + \cdots + u_ny_n^{(n)} \\ &\quad + u_1y_1^{(n-1)} + u_2y_2^{(n-1)} + \cdots + u_ny_n^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Reemplazando (2.33) en (2.26) y agrupando de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u_1&\left[y_1^{(n)} + a_1y_1^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y_1' + a_ny_1\right] \\ &+ u_2\left[y_2^{(n)} + a_1y_2^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y_2' + a_ny_2\right] \\ &+ \cdots + u_n\left[y_n^{(n)} + a_1y_n^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y_n' + a_ny_n\right] \\ &+ \left[u_1'y_1^{(n-1)} + u_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + u_{n-1}'y_{n-1}^{(n-1)} + u_n'y_n^{(n-1)}\right] = f(x) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Como $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación (2.27), entonces se cumple que

$$\begin{aligned} y_1^{(n)} + a_1y_1^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y_1' + a_ny_1 &= 0 \\ y_2^{(n)} + a_1y_2^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y_2' + a_ny_2 &= 0 \\ &\vdots \\ y_n^{(n)} + a_1y_n^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y_n' + a_ny_n &= 0 \end{aligned}$$

de lo cual se reduce a

$$u_1'y_1^{(n-1)} + u_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + u_{n-1}'y_{n-1}^{(n-1)} + u_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \tag{2.35}$$

Ordenando (2.30),(2.32) y (2.35) se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones para determinar $u_1', u_2', \ldots, u_n'$

$$\begin{array}{ccccccc} y_1u_1' & + & y_2u_2' & +\cdots+ & y_nu_n' & = & 0 \\ y_1'u_1' & + & y_2'u_2' & +\cdots+ & y_n'u_n' & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}u_1' & + & y_2^{(n-1)}u_2' & +\cdots+ & y_n^{(n-1)}u_n' & = & f(x) \end{array} \tag{2.36}$$

De la ecuación (2.36) se tiene

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

donde el Wronskiano es

$$W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

Por la regla de Cramer se tiene

$$u_i' = \frac{W_i}{W},\ 1 \leq i \leq n,$$

donde W_i es la determinante de la matriz obtenida sustituyendo la i-ésima columna de A por el vector columna $(0, \ldots, f)$ y W es la determinante de A. Por lo tanto la solución particular de (2.26) es

$$y_p = y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx + \cdots + y_n(x)\int \frac{W_n(x)}{W(x)}dx.$$

2.4 OPERADOR DIFERENCIAL

Definición 2.4.1 ([15]). La n-ésima derivada de una función $y(x)$ para cualquier entero positivo n, viene dada por

$$\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y,$$

donde $D = \dfrac{d}{dx}$ es denominado operador diferencial.

Definición 2.4.2 ([15]). La siguiente expresión

$$L = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right) + a_n. \tag{2.37}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes, es denominado operador diferencial lineal polinómico (operador polinomial) de n-ésimo orden.

Sea $f(x)$, $g(x)$ son funciones diferenciables en el intervalo I y c una constante, entonces el operador diferencial lineal L es lineal. Es decir

$$L(f + cg) = L(f) + cL(g).$$

Verifiquemos:

$$\begin{aligned}
L(f+cg) &= \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right) + a_n\right)(f+cg) \\
&= \frac{d^n}{dx^n}(f+cg) + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(f+cg) + a_2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(f+cg) \\
&\qquad + \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dx}(f+cg) + a_n(f+cg) \\
&= \frac{d^n}{dx^n}(f) + c\frac{d^n}{dx^n}(g) + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(f) + ca_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(g) \\
&\qquad + \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dx}(f) + ca_{n-1}\frac{d}{dx}(g) + a_n f + ca_n g \\
&= \left(\frac{d^n}{dx^n}(f) + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(f) + \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dx}(f) + a_n f\right) \\
&\qquad + c\left(\frac{d^n}{dx^n}(g) + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(g) + \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dx}(g) + a_n g\right)
\end{aligned}$$

$L(f + cg) = L(g) + cL(g).$

Esto nos indica que el operador diferencial es lineal debido a la linealidad de la derivada.

Operador diferencial y ecuaciones diferenciales

Sea la ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x). \tag{2.38}$$

Escribiendo la ecuación (2.38) en términos del operador diferencial

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^n y + a_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} y + a_2\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} y + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right) y + a_ny =& f(x) \\ \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right) + a_n\right) y =& f(x) \\ Ly =& f(x). \end{aligned}$$

Si $f(x) = 0$, se tiene

$$Ly = 0, \tag{2.39}$$

donde $L = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right) + a_n$, y (2.39) es la ecuación diferencial lineal homogénea.

Operador diferencial y polinomio característico

Asumiremos la función exponencial $e^{\lambda x}$ como una posible solución de (2.39), es decir $\phi(x) = e^{\lambda x}$, además $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{\lambda x}) = \lambda^n e^{\lambda x}$, luego sustituyendo ϕ en (2.39), se obtiene

$$\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) e^{\lambda x} = 0,$$

como $e^{\lambda x} \neq 0$, entonces

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2.40}$$

donde (2.40) es llamado la ecuación característica de (2.39). Además, sea

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n, \tag{2.41}$$

donde $p(\lambda)$ es denominado el polinomio característico asociado a la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes (2.39). Por el teorema fundamental del

Álgebra, el polinomio característico (2.41), puede ser reescrito de la siguiente manera

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n),$$

donde λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son raíces del polinomio característico asociado a la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes (2.39). Sea ahora $p\left(\frac{d}{dx}\right)$ el polinomio característico evaluado en el operador diferencial

$$p\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right) + a_n,$$

entonces el operador diferencial lineal L puede ser expresado como

$$L = p\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)\cdots\left(\frac{d}{dx} - \lambda_{n-1}\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_n\right).$$

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 UBICACIÓN

El presente trabajo de investigación, se realizó en el área de ecuaciones diferenciales ordinarias.

3.2 MATERIALES

- Bibliografía básica y artículos relacionados con el tema de estudio.
- Computadora.
- Papel Bond.
- Impresiones

3.3 TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

Tipo de investigación

El trabajo de investigación es básico−teórico (pura o fundamental), porque la investigación se basa en profundizar los resultados, así también incrementar los conocimientos del tema de investigación.

Diseño de investigación

La investigación de este trabajo es de diseño no experimental, ya que se lleva a cabo sin intervención deliberada de las variables involucradas. Se basa principalmente en observar los fenómenos en su contexto natural y luego analizarlos.

3.4 MÉTODO Y TÉCNICA

Método

Dado que el trabajo de investigación consistió en la comprensión, interpretación y análisis, por lo que, los métodos que se utilizó son deductivo, analítico.

Técnica

Lectura y análisis de conceptos, definiciones de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales, luego se prosiguió con el análisis y estudio de la respuesta impulsiva en libros especializados y papers electrónicos.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo mostraremos la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes de segundo, tercer y n-ésimo orden mediante la respuesta impulsiva usando factorización. Además, se comparará el procedimiento entre el método de respuesta impulsiva con los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros para ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes de segundo y tercer orden.

4.1 RESPUESTA IMPULSIVA Y EDLNH CON COEFICIENTES CONSTANTES DE PRIMER ORDEN

Sea la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + ay = f(x), \tag{4.1}$$

donde $a \in \mathbb{R}$, y f es una función continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. De acuerdo a (2.10), la solución general a la ecuación (4.1) es

$$y(x) = e^{-ax} \int_{x_0}^{x} e^{at} f(t)dt + ce^{-ax}$$

Si $x_0 = 0 \in I$, entonces la solución está dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-ax} \int_{0}^{x} e^{at} f(t)dt + ce^{-ax} \\ &= \int_{0}^{x} e^{-a(x-t)} f(t)dt + ce^{-ax} \\ y(x) &= \int_{0}^{x} g(x-t)f(t)dt + cg(x) \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $g(x) = e^{-ax}$ es llamada la ***respuesta impulsiva*** de la ecuación diferencial lineal homogénea $y' + ay = 0$.

La solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden es la suma de la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada $y' + ay = 0$ y la solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden.

De (4.2) la función

$$y_p(x) = \int_0^x g(x-t)f(t)dt$$

es la solución particular de la ecuación de primer orden (4.1), que se anula en $x = 0$.

Para cualquier $x_0 \in I$ se tiene

$$y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} g(x_0 - t)f(t)dt + ce^{-ax_0} = ce^{-ax_0}$$

de donde $c = y(x_0)e^{ax_0}$. Entonces

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{x_0}^{x} g(x-t)f(t)dt + y(x_0)e^{ax_0}e^{-ax} \\ &= \int_{x_0}^{x} g(x-t)f(t)dt + y_0 g(x-x_0), \quad x \in I \end{aligned} \tag{4.3}$$

es la única solución de la ecuación de primer orden (4.1) en el intervalo I que satisface $y(x_0) = y_0$, ($y_0 \in \mathbb{R}$).[3]

4.2 RESPUESTA IMPULSIVA Y EDLNH CON COEFICIENTES CONSTANTES DE SEGUNDO ORDEN

Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{4.4}$$

donde $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, para $f = 0$ la ecuación homogénea asociada es

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{4.5}$$

Escribiendo (4.4) y (4.5) en términos del operador diferencial

$$\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + a_1\left(\frac{d}{dx}\right) + a_2\right)y = f(x) \quad \text{y} \quad \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + a_1\left(\frac{d}{dx}\right) + a_2\right)y = 0,$$

para cualquier función y dos veces diferenciable. Por la definición 2.4.2, L es el operador diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes y está dada por

$$L = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + a_1\left(\frac{d}{dx}\right) + a_2, \tag{4.6}$$

y sea la exponencial compleja $e^{\lambda x}$ una solución de (4.5) si y sólo si, λ es una raíz del polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$. Además, sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ las raíces de $p(\lambda)$, entonces el polinomio característico está dada de la siguiente manera

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Ahora, (4.6) puede ser expresado como

$$L = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right), \tag{4.7}$$

entonces se tiene

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)y = f(x), \tag{4.8}$$

sea $h = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)y$, entonces la ecuación (4.8) queda dada por

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)h = f(x).$$

La idea es utilizar el operador diferencial para reducir los problemas (4.4) y (4.5) a ecuaciones diferenciales de primer orden.

Sea la ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden

$$y' - \lambda y = \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)y = f(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

donde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $0 \in I$, y por (2.10), tiene solución general

$$y(x) = e^{\lambda x}\int_0^x e^{-\lambda t}f(t) + ce^{\lambda x}$$

$$y(x) = \int_0^x g_\lambda(x-t)f(t) + cg_\lambda(x), \quad x \in I, c = y(0) \in \mathbb{R} \tag{4.9}$$

donde $g_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ es la respuesta impulsiva del operador diferencial $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)$ y además g_λ es solución única de $y' - \lambda y = 0,\ y(0) = 1$. En particular, la solución de la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$y' - \lambda y = f(x)$$
$$y(0) = 0$$

es única y está dada por

$$y(x) = \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)dt, \tag{4.10}$$

el cual es una solución particular, esto se da cuando $c = 0$ en (4.9). El siguiente resultado da una solución particular para (4.4).

Teorema 4.2.1 ([3])**.** Sea f una función continua en I, y supongamos que $0 \in I$. Entonces el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \\ &y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

tiene solución única, definida en todo I, y dada por la fórmula

$$y(x) = \int_0^x g(x-t)f(t)dt, \quad x \in I \tag{4.12}$$

donde g es la función definida por

$$g(x) = \int_0^x e^{\lambda_2(x-t)} e^{\lambda_1 t} dt = \int_0^x e^{\lambda_1(x-t)} e^{\lambda_2 t} dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.13}$$

En particular, si tenemos que $f = 0$ entonces la única solución del problema homogéneo

$$\begin{aligned} &y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \\ &y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

es la función cero, $y = 0$.

Demostración. La ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{4.15}$$

se puede reescribir como $Ly = f(x)$, y por (4.8), se tiene

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right) y = f(x) \tag{4.16}$$

Sea

$$h = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right) y = y' - \lambda_2 y$$

reemplazando en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right) h =& f(x) \\
\frac{dh}{dx} - \lambda_1 h =& f(x) \\
h' - \lambda_1 h =& f(x),
\end{aligned}$$

vemos que y resuelve (4.11) si y sólo si,

$$h \text{ resuelve } \begin{cases} h' - \lambda_1 h &= f(x) \\ h(0) &= 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad y \text{ resuelve } \begin{cases} y' - \lambda_2 y &= h(x) \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

La solución a estas dos ecuaciones de primer orden, según (4.10), es la siguiente:

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_0^x e^{\lambda_1(x-t)} f(t)dt, \\
y(x) &= \int_0^x e^{\lambda_2(x-t)} h(t)dt,
\end{aligned}$$

reemplazando el valor de $h(x)$ en la última ecuación, obtenemos el valor de $y(x)$ como una integral

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int_0^x e^{\lambda_2(x-t)} \left(\int_0^t e^{\lambda_1(t-s)} f(s)ds\right) dt \\
&= e^{\lambda_2 x} \int_0^x e^{-\lambda_2 t} \left(\int_0^t e^{\lambda_1(t-s)} f(s)ds\right) dt,
\end{aligned}$$

donde $e^{\lambda_2 x}$ no depende t. Además, como $e^{-\lambda_2 t}$ es constante para la integral interior, $y(x)$ puede ser expresado como

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{\lambda_2 x} \int_0^x \left(\int_0^t e^{-\lambda_2 t} e^{\lambda_1(t-s)} f(s)ds\right) dt \\
&= e^{\lambda_2 x} \int_0^x \left(\int_0^t e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} e^{-\lambda_1 s} f(s)ds\right) dt
\end{aligned}$$

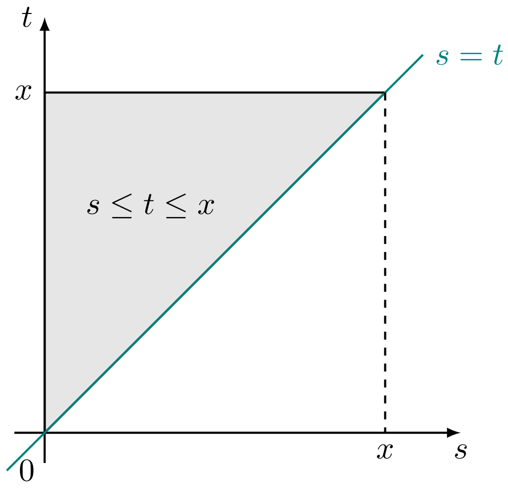
Sea $x > 0$, entonces en la integral respecto a t tenemos que $0 \leq t \leq x$, y en la integral respecto a s, tenemos que $0 \leq s \leq t$. La región de integración en el plano (s, t)

$$D_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq x, \;\; 0 \leq s \leq t\},$$

es un triángulo de vértices (0,0), $(0, x)$ y (x,x)

Figura 2

Región de integración D_1



como la función

$$F(s,t) = e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}e^{-\lambda_1 s}f(s)$$

es una función continua en el triángulo D_1, entonces podemos intercambiar el orden de integración con nuevos límites de integración dados en

$$D_1 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq x, \quad s \leq t \leq x\},$$

obteniendo así

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda_2 x}\int_0^x \left(\int_s^x e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}e^{-\lambda_1 s}f(s)dt\right)ds \\ &= \int_0^x \left(\int_s^x e^{\lambda_2(x-t)}e^{\lambda_1(t-s)}dt\right)f(s)ds. \end{aligned}$$

Si al sustituir t por $t+s$ en la integral con respecto a t en donde $s \leq t \leq x$, los límites de integración cambian como sigue

$$s \leq t+s \leq x, \quad 0 \leq t \leq x-s$$

además, de (4.13), se tiene que

$$g(x-s) = \int_0^{x-s} e^{\lambda_2(x-s-t)}e^{\lambda_1 t}dt.$$

Entonces, la integral doble se escribe como

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \left(\int_0^{x-s} e^{\lambda_2(x-t-s)} e^{\lambda_1(t+s-s)} dt \right) f(s) ds \\ &= \int_0^x \left(\int_0^{x-s} e^{\lambda_2(x-s-t)} e^{\lambda_1 t} dt \right) f(s) ds \\ &= \int_0^x g(x-s) f(s) ds. \end{aligned}$$

□

Es interesante comprobar directamente que la función y dada por (4.12) soluciona (4.4). Entonces derivemos y bajo el signo integral

$$y'(x) = g(0)f(x)\frac{d}{dx}(x) - g(x)f(0)\frac{d}{dx}(0) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left[g(x-t)f(t)\right] dt,$$

ahora vamos a evaluar $x = 0$ en la fórmula (4.13), se tiene que $g(0) = \int_0^0 e^{\lambda_2(0-t)} e^{\lambda_1 t} dt = 0$, de modo que

$$y'(x) = \int_0^x g'(x-t) f(t) dt.$$

De igual manera, determinamos la segunda derivada

$$y''(x) = g'(0)f(x)\frac{d}{dx}(x) - g'(x)f(0)\frac{d}{dx}(0) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left[g'(x-t)f(t)\right] dt,$$

consideraremos la fórmula (4.13), cuya derivada es

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{\lambda_2(x-x)} e^{\lambda_1 x}\frac{d}{dx}(x) - e^{\lambda_2(x-0)} e^{\lambda_1 0}\frac{d}{dx}(0) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda_2(x-t)} e^{\lambda_1 t}\right) dt \\ &= e^{\lambda_1 x}(1) - e^{\lambda_2 x}(0) + \int_0^x \lambda_2 e^{\lambda_2(x-t)} e^{\lambda_1 t} dt \\ g'(x) &= e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 g(x), \end{aligned} \tag{4.17}$$

al evaluar $x = 0$ en $g'(x)$, se tiene que $g'(0) = e^{\lambda_1 0} + \lambda_2 \int_0^0 e^{\lambda_2(0-t)} e^{\lambda_1 t} dt = 1$, de modo que

$$y''(x) = f(x) + \int_0^x g''(x-t) f(t) dt.$$

Entonces la expresión $y'' + a_1 y' + a_2 y$ viene dada por

$$\begin{aligned} y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x) + \int_0^x g''(x-t) f(t) dt + a_1 \int_0^x g'(x-t) f(t) dt \\ + a_2 \int_0^x g(x-t) f(t) dt \end{aligned}$$

$$y''(x)+a_1y'(x)+a_2y(x) = f(x)+\int_0^x (g''+a_1g'+a_2g)(x-t)f(t)dt, \tag{4.18}$$

ahora consideraremos la fórmula (4.17), cuya derivada es

$$g''(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 g'(x)dt,$$

como $e^{\lambda_1 x} = g'(x) - \lambda_2 g(x)$ (este resultado proviene de (4.17)), entonces

$$\begin{aligned} g''(x) &= \lambda_1 \left(g'(x) - \lambda_2 g(x)\right) + \lambda_2 g'(x) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)g'(x) - \lambda_1\lambda_2 g(x) \\ &= -a_1 g'(x) - a_2 g(x), \end{aligned}$$

ordenando la expresión anterior

$$\begin{aligned} g''(x) + a_1 g'(x) + a_2 g(x) &= 0 \\ (g'' + a_1 g' + a_2 g)\,(x) &= 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Finalmente, utilizando el resultado (4.19) en (4.18), se tiene

$$\begin{aligned} y''(x) + ay'(x) + by(x) &= f(x) + \int_0^x 0 \cdot f(t)dt \\ y''(x) + ay'(x) + by(x) &= f(x), \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función y dada por (4.12) resuelve (4.4) en el intervalo I. Las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ son inmediatamente verificadas.

De la demostración anterior, g resuelve la ecuación homogénea de valor inicial

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_2 y &= 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Teorema 4.2.2 ([3]). La respuesta impulsiva g del operador diferencial

$$L = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + a_1\left(\frac{d}{dx}\right) + a_2 \tag{4.20}$$

está dada como sigue. Sean λ_1, λ_2 raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

1. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$

   1.a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$g(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}\right). \tag{4.21}$$

   1.b) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$) con $\beta \neq 0$, entonces

$$g(x) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x). \tag{4.22}$$

2. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$g(x) = x e^{\lambda_1 x}. \tag{4.23}$$

Demostración. La fórmula (4.13) está dada por

$$g(x) = \int_0^x e^{\lambda_2 (x-t)} e^{\lambda_1 t} dt \tag{4.24}$$

1. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$

   1.a) Para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, entonces de (4.24) se tiene

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x e^{\lambda_2 (x-t)} e^{\lambda_1 t} dt = e^{\lambda_2 x} \int_0^x e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t} dt \\ &= \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t}\Big|_0^x = \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{(\lambda_1 - \lambda_2) x} - 1\right) \\ g(x) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}\right). \end{aligned} \tag{4.25}$$

   1.b) Para $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ con $\beta \neq 0$, entonces de (4.25) se tiene

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2i\beta}(e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x}) = \frac{e^{\alpha}}{\beta}\left(\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x). \end{aligned}$$

2. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, entonces de (4.24) calculamos la integral

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x e^{\lambda_1 (x-t)} e^{\lambda_1 t} dt = \int_0^x e^{\lambda_1 x} dt \\ &= x e^{\lambda_1 x}. \end{aligned}$$

$\square$

Estos resultados se pueden reducir de la siguiente manera

$$g(x) = \begin{cases} xe^{\alpha x} & \text{si } \triangle = 0 \\ \dfrac{1}{2i\beta}(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}) = \dfrac{1}{\beta}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \text{si } \triangle < 0 \\ \dfrac{1}{2\beta}(e^{(\alpha+\beta)x} - e^{(\alpha-\beta)x}) = \dfrac{1}{\beta}e^{\alpha x}\operatorname{senh}(\beta x) & \text{si } \triangle > 0. \end{cases} \tag{4.26}$$

Ahora veremos la solución del problema de valor inicial con un valor inicial arbitrario.

Teorema 4.2.3 ([3]). Sea f una función continua en I, $x_0 \in I$, $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$. La solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'' + a_1y' + a_2y &= f(x) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) &= y_0' \end{aligned} \tag{4.27}$$

es única, definida en I, y está dada por

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} g(x-t)f(t)dt + (y_0' + a_1y_0)g(x-x_0) + y_0g'(x-x_0), \quad x \in I \tag{4.28}$$

donde g es la función definida por

$$g(x) = \int_0^x e^{\lambda_2(x-t)}e^{\lambda_1 t}dt = \int_0^x e^{\lambda_1(x-t)}e^{\lambda_2 t}dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.29}$$

En particular, si $f = 0$, la solución del problema homogéneo

$$\begin{aligned} y'' + a_1y' + a_2y &= 0 \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) &= y_0' \end{aligned} \tag{4.30}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, es única, de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$, y está dada por

$$y_h(x) = (y_0' + a_1y_0)g(x-x_0) + y_0g'(x-x_0), \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.31}$$

Demostración. Sea la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x) \tag{4.32}$$

con valores iniciales $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$, y sea f una función continua en I. Ahora la ecuación diferencial de segundo orden (4.32) se puede reescribir como $Ly = f(x)$, y usando (4.8), se tiene

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)y=f(x)$$

Sea

$$h=\left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)y=y'-\lambda_2 y \tag{4.33}$$

reemplazando en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)h=&f(x)\\ \frac{dh}{dx}-\lambda_1 h=&f(x)\\ h'-\lambda_1 h=&f(x),\end{aligned}$$

vemos que y resuelve (4.32) si y sólo si,

$$h \text{ resuelve } \begin{cases} h'-\lambda_1 h=f(x) \\ h(x_0)=y_0'-\lambda_2 y_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad y \text{ resuelve } \begin{cases} y'-\lambda_2 y=h(x) \\ y(x_0)=y_0. \end{cases}$$

Según (4.3) la solución a estas dos ecuaciones diferenciales de primer orden, está dada por

$$\begin{aligned}h(x)&=\int_{x_0}^{x}e^{\lambda_1(x-t)}f(t)dt+h_0e^{\lambda_1(x-x_0)},\ h(x_0)=h_0\\ y(x)&=\int_{x_0}^{x}e^{\lambda_2(x-t)}h(t)dt+y_0e^{\lambda_2(x-x_0)},\ y(x_0)=y_0,\end{aligned}$$

reemplazando el valor de $h(x)$ en la última ecuación, obtenemos el valor de $y(x)$ como una integral (para cualquier $x\in I$)

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}e^{\lambda_2(x-t)}\left(\int_{x_0}^{t}e^{\lambda_1(t-s)}f(s)ds+h(x_0)e^{\lambda_1(t-x_0)}\right)dt+y_0e^{\lambda_2(x-x_0)}$$

$$\begin{aligned}y(x)=&\underbrace{\int_{x_0}^{x}e^{\lambda_2(x-t)}\left(\int_{x_0}^{t}e^{\lambda_1(t-s)}f(s)ds\right)dt}_{\mathbf{I}}\\ &+\int_{x_0}^{x}e^{\lambda_2(x-t)}h(x_0)e^{\lambda_1(t-x_0)}dt+y_0e^{\lambda_2(x-x_0)}\end{aligned} \tag{4.34}$$

Para **I**

$$\mathbf{I}=\int_{x_0}^{x}e^{\lambda_2(x-t)}\left(\int_{x_0}^{t}e^{\lambda_1(t-s)}f(s)ds\right)dt, \tag{4.35}$$

el término $e^{\lambda_2 x}$ no depende t y $e^{-\lambda_2 t}$ no depende s, entonces

$$\mathbf{I} = e^{\lambda_2 x} \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{t} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} e^{-\lambda_1 s} f(s) ds \right) dt$$

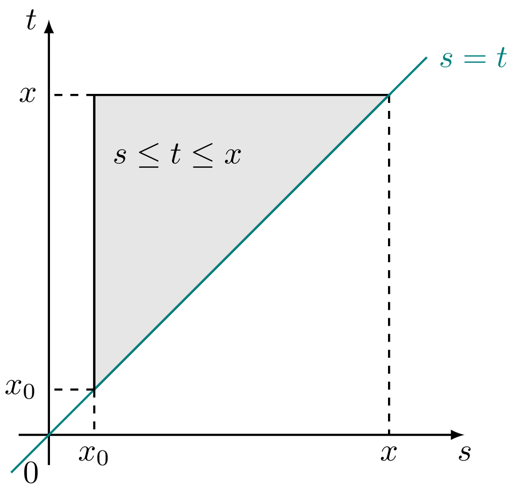
los límites de integración respecto a t son $x_0 \leq t \leq x$ y respecto a s son $x_0 \leq s \leq t$. La región de integración en el plano (s, t)

$$D_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \leq t \leq x, \quad x_0 \leq s \leq t\},$$

es un triángulo de vértices (x_0, x_0), (x_0, x) y (x, x)

Figura 3

Región de integración D_2



como la función

$$F(s, t) = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} e^{-\lambda_1 s} f(s)$$

es una función continua en el triángulo D_2, entonces podemos intercambiar el orden de integración con nuevos límites de integración dados en

$$D_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \leq s \leq x, \quad s \leq t \leq x\},$$

obteniendo así

$$\mathbf{I} = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{s}^{x} e^{\lambda_2 (x-t)} e^{\lambda_1 (t-s)} dt \right) f(s) ds.$$

Si al sustituir t por $t + s$ en la integral con respecto a t en donde $s \leq t \leq x$, los límites de integración cambian como sigue; $0 \leq t \leq x-s$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \int_{x_0}^{x}\left(\int_{0}^{x-s} e^{\lambda_2(x-t-s)}e^{\lambda_1(t+s-s)}dt\right)f(s)ds \\
\mathbf{I} &= \int_{x_0}^{x}\left(\int_{0}^{x-s} e^{\lambda_2(x-s-t)}e^{\lambda_1 t}dt\right)f(s)ds \qquad (4.36)\\
\mathbf{I} &= \int_{x_0}^{x} g(s-x)f(s)ds.
\end{aligned}$$

Continuando en la ecuación (4.34)

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int_{x_0}^{x} g(x-t)f(t)dt + h(x_0)\int_{0}^{x-x_0} e^{\lambda_2(x-(t+x_0))}e^{\lambda_1(t+x_0-x_0)}dt + y_0e^{\lambda_2(x-x_0)}\\
y(x) &= \int_{x_0}^{x} g(x-t)f(t)dt + (y_0'-\lambda_2y_0)g(x-x_0) + y_0e^{\lambda_2(x-x_0)}, \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

ahora derivando la función g de (4.13)

$$\begin{aligned}
g'(x) &= e^{\lambda_1x}e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\frac{d}{dx}(x) - e^{\lambda_1x}e^{(\lambda_2-\lambda_1)0}\frac{d}{dx}(0) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda_1x}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\right)dt\\
g'(x) &= e^{\lambda_2x} + \lambda_1\int_0^x e^{\lambda_1x}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}dt\\
g'(x) &= e^{\lambda_2x} + \lambda_1 g(x). \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

De (4.38) se tiene

$$e^{\lambda_2(x-x_0)} = g'(x-x_0) - \lambda_1 g(x-x_0). \qquad (4.39)$$

Reemplazando (4.39) en (4.37) se tiene

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int_{x_0}^{x} g(x-t)f(t)dt + (y_0'-\lambda_2y_0)g(x-x_0) + y_0(g'(x-x_0)-\lambda_1g(x-x_0))\\
&= \int_{x_0}^{x} g(x-t)f(t)dt + y_0'g(x-x_0) - (\lambda_1+\lambda_2)y_0g(x-x_0) + y_0g'(x-x_0)\\
&= \int_{x_0}^{x} g(x-t)f(t)dt + y_0'g(x-x_0) + a_1y_0g(x-x_0) + y_0g'(x-x_0)\\
y(x) &= \int_{x_0}^{x} g(x-t)f(t)dt + (y_0'+a_1y_0)g(x-x_0) + y_0g'(x-x_0).
\end{aligned}$$

□

Podemos probar directamente que la función y dada por (4.28) soluciona (4.27).

Entonces derivemos y bajo el signo integral

$$\begin{aligned}
y'(x) = g(0)f(x) + \int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x-t)f(t)\right]dt\\
+ (y_0'+a_1y_0)g'(x-x_0) + y_0g''(x-x_0)
\end{aligned}$$

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} g'(x-t)f(t)dt + (y_0' + a_1 y_0)g'(x-x_0) + y_0 g''(x-x_0)$$

Derivando otra vez bajo el signo integral

$$\begin{aligned} y''(x) = g'(0)f(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x}\left[g'(x-x_0)f(t)\right]dt \\ + (y_0' + a_1 y_0)g''(x-x_0) + y_0 g'''(x-x_0) \end{aligned}$$

$$y''(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} g''(x-t)f(t)dt + (y_0' + a_1 y_0)g''(x-x_0) + y_0 g'''(x-x_0)$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) + \int_{x_0}^{x} g''(x-t)f(t)dt + (y_0' + a_1 y_0)g''(x-x_0) + y_0 g'''(x-x_0) \\ + a_1 \left(\int_{x_0}^{x} g'(x-t)f(t)dt + (y_0' + a_1 y_0)g'(x-x_0) + y_0 g''(x-x_0)\right) \\ + a_2 \left(\int_{x_0}^{x} g(x-t)f(t)dt + (y_0' + a_1 y_0)g(x-x_0) + y_0 g'(x-x_0)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) + \int_{x_0}^{x} (g'' + a_1 g' + a_2 g)\,(x-t)f(t)dt \\ + (y_0' + a_1 y_0)\,(g'' + a_1 g' + a_2 g)\,(x-t) + y_0 \frac{d}{dx}\left[(g'' + a_1 g' + a_2 g)(x-t)\right] \end{aligned}$$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Por lo tanto, la función $y(x)$ resuelve (4.27) en el intervalo I, es decir $y(x)$ es solución de (4.27).

Corolario 4.2.1 ([3])**.** Sea f una función continua en I además $0 \in I$, y sean y_0, y_0' dos números reales arbitrarios. Entonces el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0' \end{aligned} \tag{4.40}$$

tiene solución única, definida en I, y está dada por

$$y(x) = \int_{0}^{x} g(x-t)f(t)dt + (y_0' + a_1 y_0)g(x) + y_0 g'(x), \quad x \in I \tag{4.41}$$

En particular, si $f = 0$, la solución del problema homogéneo

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0' \end{aligned}$$

es única, y está dada por

$$y_h(x) = (y_0' + a_1 y_0)g(x) + y_0 g'(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.42}$$

Demostración. Para probar este resultado sola basta evaluar $x_0 = 0 \in I$ en el teorema 4.2.3. $\square$

Sustituyendo (4.26) en (4.31) se obtiene la siguiente fórmula para la solución de la ecuación homogénea (4.30)

$$g(x) = \begin{cases} xe^{\alpha x} & \text{si } \triangle = 0 \\ \dfrac{1}{2i\beta}(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}) = \dfrac{1}{\beta}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \text{si } \triangle < 0 \\ \dfrac{1}{2\beta}(e^{(\alpha+\beta)x} - e^{(\alpha-\beta)x}) = \dfrac{1}{\beta}e^{\alpha x}\operatorname{senh}(\beta x) & \text{si } \triangle > 0 \end{cases} \tag{4.43}$$

$$y_h(x) = \begin{cases} e^{\alpha(x-x_0)}\left[y_0 + (y_0' - \alpha y_0)(x - x_0)\right] & \text{si } \triangle = 0 \\ y_0 e^{\alpha(x-x_0)}\cos\beta(x - x_0) + \frac{1}{\beta}(y_0' - \alpha y_0)e^{\alpha(x-x_0)}\operatorname{sen}\beta(x - x_0) & \text{si } \triangle < 0 \\ y_0 e^{\alpha(x-x_0)}\cosh\beta(x - x_0) + \frac{1}{\beta}(y_0' - \alpha y_0)e^{\alpha(x-x_0)}\operatorname{senh}\beta(x - x_0) & \text{si } \triangle > 0 \end{cases} \tag{4.44}$$

Corolario 4.2.2 ([3])**.** Sea f una función continua en I y que $x_0 \in I$ sea fijo. Cada solución y de $Ly = f(x)$ en el intervalo I puede escribirse como $y = y_p + y_h$, donde

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} g(x - t)f(t)dt \tag{4.45}$$

resuelve (4.4) con las condiciones iniciales $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0$, y y_h es la solución de la ecuación homogénea (4.5) tal que $y_h(x_0) = y(x_0)$, $y_h'(x_0) = y'(x_0)$.

Demostración. Sea y cualquier solución de (4.4) en I, y sea $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$. Entonces y resuelve el problema (4.27), y por unicidad y viene dada por (4.28). Así $y = y_p + y_h$, donde y_p, dada por (4.45), resuelve (4.4) con las condiciones iniciales triviales en x_0, y y_h, dada por (4.31)–(4.44), resuelve (4.5) con las mismas condiciones iniciales de y en x_0. $\square$

4.3 RESPUESTA IMPULSIVA Y EDLNH CON COEFICIENTES CONSTANTES DE TERCER ORDEN

Sea la ecuación diferencial lineal de tercer orden con coeficientes constantes

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x), \tag{4.46}$$

donde $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, para $f = 0$ la ecuación homogénea asociada es

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0. \tag{4.47}$$

Teorema 4.3.1. Sea f una función continua en I, $x_0 \in I$, $y_0, y_0', y_0'' \in \mathbb{R}$. La solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x) \\ &y(x_0) = b_0,\ y'(x_0) = b_1,\ y''(x_0) = b_2 \end{aligned} \tag{4.48}$$

es única, definida en I, y está dada por

$$\begin{aligned} y(x) = &\int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-t) f(t)dt \\ &+ (b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) \\ &+ (b_1 + a_1 b_0) g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) + b_0 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0),\ x \in I, \end{aligned} \tag{4.49}$$

donde $g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ es la función definida por

$$g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = \int_0^x e^{\lambda_3(x-t_2)} \left(\int_0^{t_2} e^{\lambda_2(t_2-t_1)} e^{\lambda_1 t_1} dt_1 \right) dt_2. \tag{4.50}$$

En particular, si $f = 0$, la solución del problema homogéneo

$$\begin{aligned} &y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0 \\ &y(x_0) = b_0,\ y'(x_0) = b_1,\ y''(x_0) = b_2, \end{aligned} \tag{4.51}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, es única, de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$, y está dada por

$$\begin{aligned} y_h(x) = &(b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) \\ &+ (b_1 + a_1 b_0) g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) + b_0 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Demostración. Escribiendo (4.48) en términos del operador diferencial

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_3\right)y=f(x) \tag{4.53}$$

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)\underbrace{\left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)\underbrace{\left(\frac{d}{dx}-\lambda_3\right)y}_{h_1}}_{h_2}=f(x) \tag{4.54}$$

de donde tenemos tres ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{array}{ccc} \left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)h_2=f(x) & \left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)h_1=h_2 & \left(\frac{d}{dx}-\lambda_3\right)y=h_1 \\ h_2'-\lambda_1 h_2=f(x) & h_1'-\lambda_2 h_1=h_2 & y'-\lambda_3 y=h_1, \end{array} \tag{4.55}$$

es decir, y resuelve (4.48) si y sólo si,

$$h_2 \text{ resuelve } \begin{cases} h_2'-\lambda_1 h_2=f(x) \\ h_2(x_0)=h_{2_0} \end{cases}, \quad h_1 \text{ resuelve } \begin{cases} h_1'-\lambda_2 h_1=h_2 \\ h_1(x_0)=h_{1_0} \end{cases} \quad \text{y}$$

$$y \text{ resuelve } \begin{cases} y'-\lambda_3 y=h_1(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

Según (4.3), la solución a estas tres ecuaciones diferenciales se expresa como sigue:

para h_2

$$h_2(x)=\int_{x_0}^{x} e^{\lambda_1(x-t)}f(t)dt+h_2(x_0)e^{\lambda_1(x-x_0)},$$

para h_1

$$h_1(x)=\int_{x_0}^{x} e^{\lambda_2(x-t)}h_2(t)dt+h_1(x_0)e^{\lambda_2(x-x_0)},$$

para y

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} e^{\lambda_3(x-t)}h_1(t)dt+y(x_0)e^{\lambda_3(x-x_0)}.$$

Reemplazando h_2 en h_1 y h_1 en y, se obtiene

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} e^{\lambda_3(x-t_3)}\left(\int_{x_0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3-t_2)}\left(\int_{x_0}^{t_2} e^{\lambda_1(t_2-t_1)}f(t_1)dt_1+h_2(x_0)e^{\lambda_1(t_2-x_0)}\right)dt_2 + h_1(x_0)e^{\lambda_2(t_3-x_0)}\right)dt_3+y(x_0)e^{\lambda_3(x-x_0)}. \tag{4.56}$$

$$
\begin{aligned}
y(x) = & \underbrace{\int_{x_0}^{x} e^{\lambda_3(x-t_3)} \left(\int_{x_0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3-t_2)} \left(\int_{x_0}^{t_2} e^{\lambda_1(t_2-t_1)} f(t_1)dt_1 \right) dt_2 \right) dt_3}_{\mathbf{I}} \\
& + h_2(x_0) \underbrace{\int_{x_0}^{x} e^{\lambda_3(x-t_3)} \left(\int_{x_0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3-t_2)} e^{\lambda_1(t_2-x_0)} dt_2 \right) dt_3}_{\mathbf{II}} \\
& + h_1(x_0) \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_3(x-t_3)} e^{\lambda_2(t_3-x_0)} dt_3 + y(x_0) e^{\lambda_3(x-x_0)}
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

Para **I**:

$$
\mathbf{I} = \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_3(x-t_3)} \underbrace{\left(\int_{x_0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3-t_2)} \left(\int_{x_0}^{t_2} e^{\lambda_1(t_2-t_1)} f(t_1)dt_1 \right) dt_2 \right)}_{\mathbf{A}} dt_3
$$

A es idéntico a (4.35), el cual es igual a (4.36), por lo que **A** puede expresarse como

$$
\mathbf{A} = \int_{x_0}^{t_3} \left(\int_{0}^{t_3-t_1} e^{\lambda_2(t_3-t_1-t_2)} e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) f(t_1)dt_1,
$$

entonces

$$
\mathbf{I} = \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_3(x-t_3)} \left(\int_{x_0}^{t_3} \left(\int_{0}^{t_3-t_1} e^{\lambda_2(t_3-t_1-t_2)} e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) f(t_1)dt_1 \right) dt_3
$$

el término $e^{\lambda_3 x}$ no depende t_3 y $e^{-\lambda_3 t_3}$ no depende t_1, entonces **I** puede escribirse de la siguiente manera

$$
\mathbf{I} = e^{\lambda_3 x} \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{t_3} e^{-\lambda_3 t_3} \left(\int_{0}^{t_3-t_1} e^{\lambda_2(t_3-t_1-t_2)} e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) f(t_1)dt_1 \right) dt_3,
$$

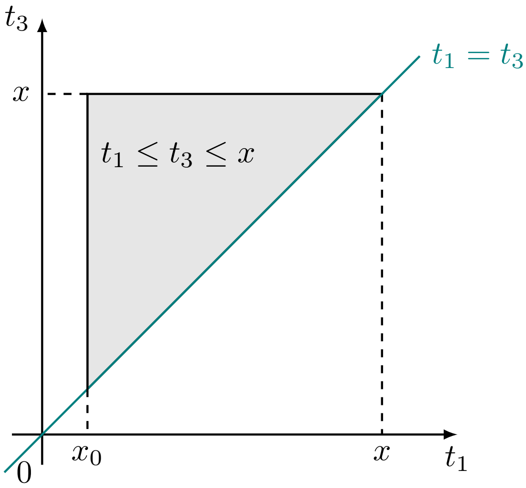
los límites de integración respecto a t_3 son $x_0 \leq t_3 \leq x$ y respecto a t_1 son $x_0 \leq t_1 \leq t_3$. La región de integración en el plano (t_1, t_3)

$$
D_3 = \{(t_1, t_3) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \leq t_3 \leq x, \quad x_0 \leq t_1 \leq t_3\},
$$

es un triángulo de vértices (x_0, x_0), (x_0, x) y (x, x)

Figura 4

Región de integración D_3



como la función

$$F(t_1, t_3) = e^{-\lambda_3 t_3} \left(\int_0^{t_3 - t_1} e^{\lambda_2 (t_3 - t_1 - t_2)} e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) f(t_1)$$

es una función continua en el triángulo D_3, entonces podemos intercambiar el orden de integración con nuevos límites de integración dados en

$$D_3 = \{(t_1, t_3) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \leq t_1 \leq x, \;\; t_1 \leq t_3 \leq x\},$$

obteniendo así

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= e^{\lambda_3 x} \int_{x_0}^{x} \left(\int_{t_1}^{x} e^{-\lambda_3 t_3} \left(\int_0^{t_3 - t_1} e^{\lambda_2 (t_3 - t_1 - t_2)} e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) f(t_1) dt_3 \right) dt_1 \\ &= \int_{x_0}^{x} \left(\int_{t_1}^{x} e^{\lambda_3 (x - t_3)} \left(\int_0^{t_3 - t_1} e^{\lambda_2 (t_3 - t_1 - t_2)} e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) dt_3 \right) f(t_1) dt_1. \end{aligned}$$

Si al sustituir t_3 por $t_3 + t_1$ en la integral con respecto a t_3, los límites de integración cambian como sigue; $0 \leq t_3 \leq x - t_1$, entonces

$$\mathbf{I} = \int_{x_0}^{x} \left(\int_0^{x - t_1} e^{\lambda_3 (x - t_3 - t_1)} \left(\int_0^{t_3 + t_1 - t_1} e^{\lambda_2 (t_3 + t_1 - t_1 - t_2)} e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) dt_3 \right) f(t_1) dt_1$$

$$\mathbf{I} = \int_{x_0}^{x} \underbrace{\left(\int_0^{x - t_1} e^{\lambda_3 (x - t_1 - t_3)} \underbrace{\left(\int_0^{t_3} e^{\lambda_2 (t_3 - t_2)} e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right)}_{g_{\lambda_1 \lambda_2}(t_3)} dt_3 \right)}_{g_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 g}(x - t_1)} f(t_1) dt_1$$

$$\mathbf{I} = \int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} g(x-t_1) f(t_1) dt_1,$$

de esto último, $g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} g(x)$ es llamada ***respuesta impulsiva*** de la ecuación diferencial $y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$.

Para **II**:

$$\mathbf{II} = \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_3(x-t_3)} \left(\int_{x_0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3-t_2)} e^{\lambda_1(t_2-x_0)} dt_2 \right) dt_3,$$

al sustituir t_3 por $t_3 + x_0$ en la integral con respecto a t_3, obtenemos los nuevos límites de integración; $t_3 = x - x_0$, $t_3 = 0$, entonces

$$\mathbf{II} = \int_{0}^{x-x_0} e^{\lambda_3(x-t_3-x_0)} \left(\int_{x_0}^{t_3+x_0} e^{\lambda_2(t_3+x_0-t_2)} e^{\lambda_1(t_2-x_0)} dt_2 \right) dt_3,$$

luego, al sustituir t_2 por $t_2 + x_0$ en la integral con respecto a t_2, se tiene los nuevos límites de integración; $t_2 = t_3$, $t_2 = 0$, con esto último tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{II} &= \int_{0}^{x-x_0} e^{\lambda_3(x-x_0-t_3)} \left(\int_{0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3+x_0-t_2-x_0)} e^{\lambda_1(t_2+x_0-x_0)} dt_2 \right) dt_3 \\
&= \int_{0}^{x-x_0} e^{\lambda_3(x-x_0-t_3)} \left(\int_{0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3-t_2)} e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) dt_3 \\
&= g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0).
\end{aligned}$$

Debemos destacar que

$$\begin{aligned}
g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) &= \int_{0}^{x-x_0} e^{\lambda_3(x-x_0-t_3)} \left(\int_{0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3-t_2)} e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) dt_3 \\
&= \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_3(x-t_3)} \left(\int_{x_0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3-t_2)} e^{\lambda_1(t_2-x_0)} dt_2 \right) dt_3,
\end{aligned}$$

además, como estamos analizando una ecuación de tercer grado, la ecuación característica tiene 3 raíces, por lo tanto, $g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ puede expresarse de 6 formas.

Con los resultados obtenidos en **I** y **II**, la solución y de (4.57) se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
y(x) = \int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} g(x-t_1) f(t_1) dt_1 + g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) \\
+ h_1(x_0) \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_3(x-t_3)} e^{\lambda_2(t_3-x_0)} dt_3 + y(x_0) e^{\lambda_3(x-x_0)}.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

a partir de los resultados obtenidos para ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, tenemos

$$\int_{x_0}^{x} e^{\lambda_3(x-t_3)}e^{\lambda_2(t_3-x_0)}dt_3 = g_{\lambda_3\lambda_2}(x-x_0) \quad \text{y} \quad e^{\lambda_3(x-x_0)} = g_{\lambda_3}(x-x_0),$$

entonces (4.58) queda expresado como

$$\begin{aligned} y(x) = \int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} g(x-t_1)f(t_1)dt_1 + h_2(x_0)g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) \\ + h_1(x_0)g_{\lambda_3\lambda_2}(x-x_0) + y(x_0)g_{\lambda_3}(x-x_0). \end{aligned} \tag{4.59}$$

Ahora, para calcular g_{λ_3} y $g_{\lambda_3\lambda_2}$, primero vamos a determinar las derivadas de la fórmula

$$g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = \int_0^x e^{\lambda_1(x-t_2)}\left(\int_0^{t_2} e^{\lambda_2(t_2-t_1)}e^{\lambda_3 t_1}dt_1\right)dt_2.$$

$$\begin{aligned} g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) &= e^{\lambda_1(x-x)}\left(\int_0^x e^{\lambda_2(x-t_1)}e^{\lambda_3 t_1}dt_1\right) \\ &\quad + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{\lambda_1(x-t_2)}\left(\int_0^{t_2} e^{\lambda_2(t_2-t_1)}e^{\lambda_3 t_1}dt_1\right)\right]dt_2 \\ g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) &= \int_0^x e^{\lambda_2(x-t_1)}e^{\lambda_3 t_1}dt_1 + \lambda_1\int_0^x e^{\lambda_1(x-t_2)}\left(\int_0^{t_2} e^{\lambda_2(t_2-t_1)}e^{\lambda_3 t_1}dt_1\right)dt_2 \end{aligned}$$

$$g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = g_{\lambda_2\lambda_3}(x) + \lambda_1 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x), \tag{4.60}$$

de donde

$$g_{\lambda_2\lambda_3}(x) = g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) - \lambda_1 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x). \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned} g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) &= e^{\lambda_2(x-x)}e^{\lambda_3 x} + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{\lambda_2(x-t_1)}e^{\lambda_3 t_1}\right]dt_1 \\ &\quad + \left(\lambda_1\int_0^x e^{\lambda_1(x-t_2)}\left(\int_0^{t_2} e^{\lambda_2(t_2-t_1)}e^{\lambda_3 t_1}dt_1\right)dt_2\right)' \\ g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) &= e^{\lambda_3 x} + \lambda_2 g_{\lambda_2\lambda_3}(x) + \lambda_1 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) \\ g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) &= g_{\lambda_3}(x) + \lambda_2\left(g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) - \lambda_1 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x)\right) + \lambda_1 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) \end{aligned}$$

$$g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = g_{\lambda_3}(x) + (\lambda_1+\lambda_2)g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) - \lambda_1\lambda_2 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) \tag{4.62}$$

de donde

$$g_{\lambda_3}(x) = g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) - (\lambda_1+\lambda_2)g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) + \lambda_1\lambda_2 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x). \tag{4.63}$$

Otro problema de la solución y en (4.58) es conocer los valores de; $h_1(x_0), h_2(x_0)$, para ello, vamos a usar (4.55)

$$h_1 = y' - \lambda_3 y, \quad h_2 = h_1' - \lambda_2 h_1,$$

como $h_1' = y'' - \lambda_3 y'$, entonces

$$h_2 = y'' - \lambda_3 y' - \lambda_2(y' - \lambda_3 y)$$
$$h_2 = y'' - (\lambda_2 + \lambda_3)y' + \lambda_2\lambda_3 y,$$

para x_0 en I, se tiene

$$h_1(x_0) = y'(x_0) - \lambda_3 y(x_0), \qquad h_2(x_0) = y''(x_0) - (\lambda_2 + \lambda_3)y'(x_0) + \lambda_2\lambda_3 y(x_0)$$

$$h_1(x_0) = b_1 - \lambda_3 b_0, \qquad h_2(x_0) = b_2 - (\lambda_2 + \lambda_3)b_1 + \lambda_2\lambda_3 b_0. \tag{4.64}$$

Por último, sustituimos (4.61), (4.63) y (4.64) en (4.59)

$$\begin{aligned} y(x) = &\int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} g(x - t_1) f(t_1) dt_1 \\ &+ [b_2 - (\lambda_2 + \lambda_3)b_1 + \lambda_2\lambda_3 b_0]\, g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) \\ &+ (b_1 - \lambda_3 b_0)\left[g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) - \lambda_1\right] \\ &+ b_0\left[g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) - (\lambda_1 + \lambda_2)g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) + \lambda_1\lambda_2 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0)\right] \\ y(x) = &\int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} g(x - t_1) f(t_1) dt_1 \\ &+ [b_2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)b_1 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)b_0]\, g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) \\ &+ [b_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)b_0]\, g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) + b_0 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) = &\int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} g(x - t_1) f(t_1) dt_1 \\ &+ (b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) + (b_1 + a_1 b_0) g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) \\ &+ b_0 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Para la solución y podemos hacer el siguiente convenio. Sea

$$c_0 = b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$c_1 = b_1 + a_1 b_0$$
$$c_2 = b_0,$$

entonces se tiene y como

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - t) f(t) dt + c_0 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) + c_1 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0) + c_2 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0)$$
$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - t) f(t) dt}_{y_p(x)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{2} c_k g^{(k)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x - x_0)}_{y_h(x)}. \tag{4.66}$$

□

Podemos probar directamente que la función y dada por (4.49) soluciona (4.48).

Entonces derivemos y bajo el signo integral

$$y'(x) = g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(0)f(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x}\left[g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-t)f(t)\right] dt + (b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + (b_1 + a_1b_0)g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + b_0g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0)$$

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-t)f(t)dt + (b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + (b_1 + a_1b_0)g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + b_0g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0), \tag{4.67}$$

donde $g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(0) = 0$, cuando $x = 0$ en (4.50). Continuando, derivamos $y'(x)$

$$y''(x) = g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(0)f(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x}\left[g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-t)f(t)\right] dt + (b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + (b_1 + a_1b_0)g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + b_0g^{(4)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0)$$

$$y''(x) = \int_{x_0}^{x} g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-t)f(t) + (b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + (b_1 + a_1b_0)g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + b_0g^{(4)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0), \tag{4.68}$$

donde $g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(0) = 0$, cuando $x = 0$ en (4.60), Derivamos $y''(x)$

$$y'''(x) = g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(0)f(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x}\left[g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-t)f(t)\right] dt + (b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + (b_1 + a_1b_0)g^{(4)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + b_0g^{(5)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0)$$

$$y'''(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-t)f(t) + (b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + (b_1 + a_1b_0)g^{(4)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + b_0g^{(5)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0), \tag{4.69}$$

donde $g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(0) = 1$, cuando $x = 0$ en (4.62).

Sea $\gamma(x) = y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y$. Entonces, al sustituir (4.67), (4.68) y (4.69) en la expresión $y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\gamma(x) = f(x) &+ \int_{x_0}^{x} g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-t)f(t)dt + (b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) \\
&\qquad + (b_1 + a_1b_0)g^{(4)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + b_0 g^{(5)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) \\
&+ a_1\int_{x_0}^{x} g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-t)f(t)dt + a_1(b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) \\
&\qquad + a_1(b_1 + a_1b_0)g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + a_1b_0 g^{(4)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) \\
&+ a_2\int_{x_0}^{x} g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-t)f(t)dt + a_2(b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) \\
&\qquad + a_2(b_1 + a_2b_0)g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + a_2b_0 g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) \\
&+ a_3\int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-t)f(t)dt + a_3(b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) \\
&\qquad + a_3(b_1 + a_2b_0)g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) + a_3b_0 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x-x_0) \\
\gamma(x) = f(x) &+ \int_{x_0}^{x} (g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_1 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_2 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_3 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3})(x-t)f(t)dt \\
&+ (b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\left[(g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_1 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_2 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_3 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3})(x-x_0)\right] \\
&+ (b_1 + a_1b_0)\frac{d}{dx}\left[(g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_1 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_2 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_3 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3})(x-x_0)\right] \\
&+ b_0\frac{d^2}{dx^2}\left[(g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_1 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_2 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_3 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3})(x-x_0)\right].
\end{aligned} \tag{4.70}
$$

Para concluir, es necesario establecer el valor de la expresión $g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_1 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_2 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_3 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$. Para ello, vamos a emplear la ecuación (4.62)

$$g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = e^{\lambda_3 x} + (\lambda_1 + \lambda_2)g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) - \lambda_1\lambda_2 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x),$$

donde su derivada es

$$
\begin{aligned}
g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) &= \lambda_3 e^{\lambda_3 x} + (\lambda_1 + \lambda_2)g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) - \lambda_1\lambda_2 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) \\
&= \lambda_3\left[g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) - (\lambda_1 + \lambda_2)g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) + \lambda_1\lambda_2 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x)\right] \\
&\qquad + (\lambda_1 + \lambda_2)g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) - \lambda_1\lambda_2 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) \\
g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) &= -a_1 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) - a_2 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) - a_3 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x),
\end{aligned}
$$

ordenando la expresión anterior

$$g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) + a_1 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) + a_2 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) + a_3 g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = 0$$

$$\left(g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_1 g''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_2 g'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + a_3 g'''_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\right)(x) = 0. \tag{4.71}$$

Finalmente, reemplazando el resultado (4.71) en (4.70), se tiene

$$\begin{aligned} y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y &= f(x) + \int_{x_0}^{x} 0 \cdot f(t)dt + (b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \cdot 0 \\ &\qquad + (b_1 + a_1 b_0)\frac{d}{dx}(0) + b_0 \frac{d^2}{dx^2}(0) \\ &= f(x), \qquad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $y(x)$ resuelve (4.48) en el intervalo I, es decir $y(x)$ es una solución de (4.48).

De la demostración anterior, $g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ resuelve la siguiente ecuación homogénea de valor inicial

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 = 0$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$$

Corolario 4.3.1. Sea f una función continua en I y que x_0 sea fijo. Cada solución de $Ly = f(x)$ en el intervalo I puede ser escribirse como $y = y_p + y_h$, donde

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} g(x - x_0) f(t)dt \tag{4.72}$$

resuelve (4.46) con las condiciones iniciales $y_p(x_0) = y'_p(x_0) = y''_p(x_0) = 0$ y y_h es solución de la ecuación homogénea (4.47) tal que $y_h(x_0) = y(x_0), y'_h(x_0) = y'(x_0), y''_h(x_0) = y''(x_0)$.

Demostración. Sea y cualquier solución de (4.46) en I, y sea $b_0 = y(x_0), b_1 = y'(x_0), b_2 = y''(x_0)$. Entonces y resuelve el problema (4.48), y por unicidad y viene dado por (4.49). Así $y = y_p + y_h$, donde y_p, dada por (4.72), resuelve (4.46) con las condiciones iniciales triviales en x_0, y y_h, dada por (4.66), resuelve (4.47) con las condiciones iniciales de y en x_0. □

Teorema 4.3.2 ([3])**.** La respuesta impulsiva g del operador diferencial

$$L = \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + a_1\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + a_2\left(\frac{d}{dx}\right) + a_3$$

está dada como sigue. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3.$$

1. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

   1.a) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, entonces

$$g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_2 x}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}. \tag{4.73}$$

   1.b) $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ con $\beta \neq 0$, entonces

$$g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = \frac{1}{(\lambda_1-\alpha)^2+\beta^2}\left[e^{\lambda_1 x} + \frac{1}{\beta}(\alpha-\lambda_1)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x - e^{\alpha x}\cos\beta x\right]. \tag{4.74}$$

2. Si $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, entonces

$$g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)^2}\left[e^{\lambda_3 x} - e^{\lambda_1 x} + (\lambda_1-\lambda_3)xe^{\lambda_1 x}\right]. \tag{4.75}$$

3. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, entonces

$$g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = \frac{1}{2}x^2e^{\lambda_1 x}. \tag{4.76}$$

Demostración.

Para poder probar el teorema, utilizaremos la fórmula (4.50)

$$g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = \int_0^x e^{\lambda_3(x-t_2)}\left(\int_0^{t_2} e^{\lambda_2(t_2-t_1)}e^{\lambda_1 t_1}dt_1\right)dt_2. \tag{4.77}$$

1. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

   1.a) Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Entonces para las raíces reales diferentes λ_2 y λ_1 usaremos (4.21), que es la respuesta impulsiva para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden

$$\int_0^{t_2} e^{\lambda_2(t_2-t_1)}e^{\lambda_1 t_1}dt_1 = \frac{e^{t_2\lambda_1}-e^{\lambda_2 t_2}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

reemplazando la expresión anterior en (4.77)

$$\begin{aligned}
g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) &= \int_0^x e^{\lambda_3(x-t_2)}\left(\frac{e^{t_2\lambda_1}-e^{\lambda_2 t_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)dt_2\\
&= e^{\lambda_3 x}\int_0^x \frac{e^{t_2(\lambda_1-\lambda_3)}-e^{t_2(\lambda_2-\lambda_3)}}{\lambda_1-\lambda_2}dt_2\\
&= \frac{e^{\lambda_3 x}}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{e^{t_2(\lambda_1-\lambda_3)}}{\lambda_1-\lambda_3}-\frac{e^{t_2(\lambda_2-\lambda_3)}}{\lambda_2-\lambda_3}\right]_0^x\\
&= \frac{e^{\lambda_3 x}}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{e^{x(\lambda_1-\lambda_3)}}{\lambda_1-\lambda_3}-\frac{e^{x(\lambda_2-\lambda_3)}}{\lambda_2-\lambda_3}-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}\right]\\
g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) &= \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}+\frac{e^{\lambda_2 x}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}+\frac{e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

1.b) De (4.78), cuando $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ con $\beta \neq 0$, entonces

$$g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = \frac{e^{\lambda_1 x}}{[\lambda_1-(\alpha+i\beta)]\,[\lambda_1-(\alpha-i\beta)]}+\frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{(\alpha+i\beta-\lambda_1)(2i\beta)} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{e^{(\alpha-i\beta)x}}{(\alpha-i\beta-\lambda_1)(-2i\beta)}\\
&= \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{(\alpha-\lambda_1)\left(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}\right)}{[(\lambda_1-\alpha)^2+\beta^2]\,(2i\beta)}-\frac{i\beta\left(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}\right)}{[(\lambda_1-\alpha)^2+\beta^2]\,(2i\beta)}\\
&= \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{(\alpha-\lambda_1)\operatorname{sen}\beta x}{[(\lambda_1-\alpha)^2+\beta^2]\,(\beta)}-\frac{\cos\beta x}{[(\lambda_1-\alpha)^2+\beta^2]}
\end{aligned}$$

$$g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = \frac{1}{(\lambda_1-\alpha)^2+\beta^2}\left[e^{\lambda_1 x}+\frac{1}{\beta}(\alpha-\lambda_1)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x-e^{\alpha x}\cos\beta x\right]. \tag{4.80}$$

2. Sea $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Entonces para las raíces reales iguales λ_2 y λ_1 usaremos (4.23), que es la respuesta impulsiva para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden

$$\int_0^{t_2} e^{\lambda_2(t_2-t_1)}e^{\lambda_1 t_1}dt_1 = t_2 e^{\lambda_1 t_2}$$

reemplazando la expresión anterior en (4.77)

$$g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = \int_0^x e^{\lambda_3(x-t_2)}\left(t_2e^{\lambda_1 t_2}\right)dt_2 = e^{\lambda_3 x}\int_0^x t_2e^{(\lambda_1-\lambda_3)t_2}dt_2$$

$$= e^{\lambda_3 x}\left[\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_3)t_2}(t_2(\lambda_1-\lambda_3)-1)}{(\lambda_1-\lambda_3)^2}\right]_0^x$$

$$= \frac{e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_1-\lambda_3)^2}\left[e^{(\lambda_1-\lambda_3)x}(x(\lambda_1-\lambda_3)-1)+1\right]$$

$$g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)^2}[e^{\lambda_3 x}-e^{\lambda_1 x}+(\lambda_1-\lambda_3)xe^{\lambda_1 x}]$$

3. Sea $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_0^{t_2} e^{\lambda_2(t_2-t_1)}e^{\lambda_1 t_1}dt_1 = t_2e^{\lambda_1 t_2},$$

reemplazando la expresión anterior en (4.77)

$$g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x) = \int_0^x e^{\lambda_3(x-t_2)}\left(t_2e^{\lambda_1 t_2}\right)dt_2 = e^{\lambda_1 x}\int_0^x t_2dt_2 = e^{\lambda_1 x}\left.\frac{t_2^2}{2}\right|_0^x$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{\lambda_1 x}$$

□

4.4 RESPUESTA IMPULSIVA Y EDLNH CON COEFICIENTES CONSTANTES DE n-ÉSIMO ORDEN

Esta investigación no se centra en el caso general, pero se puede generalizar a partir de los resultados obtenidos para ecuaciones diferenciales de segundo y tercer orden. Sea la ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes de n-ésimo orden

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \tag{4.81}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes y $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en I. Si $f = 0$, se tiene la ecuación homogénea, asociada

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \tag{4.82}$$

podemos reescribir las dos últimas ecuaciones de la siguiente manera

$$Ly = f(x) \quad \text{y} \quad Ly = 0,$$

donde L es el operador diferencial lineal de n-esimo orden con coeficientes constantes dada por

$$L = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right) + a_n. \tag{4.83}$$

Teorema 4.4.1 ([3]). Sea f una función continua en I, $x_0 \in I$. Sea $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, y sea L el operador diferencial lineal (4.83). Entonces el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &Ly = f(x) \\ &y(x_0) = b_0,\ y'(x_0) = b_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{aligned} \tag{4.84}$$

tiene solución única, definida sobre I y está dada por

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t)f(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k g^{(k)}(x-x_0), \tag{4.85}$$

donde $g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ es la función definida por

$$\begin{aligned} g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x) = &\int_0^x e^{\lambda_n(x-t_{n-1})}\left(\int_0^{t_{n-1}} e^{\lambda_{n-1}(t_{n-1}-t_{n-2})}\ldots\right. \\ &\left.\ldots\left(\int_0^{t_3} e^{\lambda_3(t_3-t_2)}\left(\int_0^{t_2} e^{\lambda_2(t_2-t_1)}e^{\lambda_1 t_1}dt_1\right)dt_2\right)\cdots dt_{n-2}\right)dt_{n-1}, \end{aligned} \tag{4.86}$$

además, los coeficientes c_k están dados por

$$\begin{cases} c_0 = b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \cdots + a_{n-2}b_1 + a_{n-1}b_0 \\ c_1 = b_{n-2} + a_1 b_{n-3} + \cdots + a_{n-3}b_1 + a_{n-2}b_0 \\ \vdots \\ c_{n-3} = b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ c_{n-2} = b_1 + a_1 b_0 \\ c_{n-1} = b_0. \end{cases} \tag{4.87}$$

In particular, si $f = 0$, la solución del problema homogéneo

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = b_0, y'(x_0) = b_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}, \end{cases}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, es única, de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$, y está dada por

$$y_h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k g^{(k)}(x - x_0). \tag{4.88}$$

Demostración. La ecuación diferencial de n-ésimo orden

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \tag{4.89}$$

se puede reescribir como

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)\underbrace{\left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)\underbrace{\left(\frac{d}{dx}-\lambda_3\right)\cdots\underbrace{\left(\frac{d}{dx}-\lambda_{n-1}\right)\underbrace{\left(\frac{d}{dx}-\lambda_n\right)y}_{h_1}}_{h_2}}_{h_{n-2}}}_{h_{n-1}} = f(x) \tag{4.90}$$

de (4.90) tenemos las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)h_{n-1} = f(x), \quad \left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)h_{n-2} = h_{n-1}, \quad \cdots \quad, \left(\frac{d}{dx}-\lambda_n\right)y = h_1$$

$$h'_{n-1} - \lambda_1 h_{n-1} = f(x), \quad h'_{n-2} - \lambda_2 h_{n-2} = h_{n-1}\,, \quad \cdots \quad, y' - \lambda_n y = h_1. \tag{4.91}$$

vemos que y resuelve (4.84) si y sólo si h_{n-1} resuelve la primera ecuación de (4.91) con el valor inicial en el punto x_0, h_{n-2} resuelve la segunda ecuación de (4.91) con el valor inicial en el punto x_0, del mismo modo para las siguientes ecuaciones. Según (4.3), la solución a estas ecuaciones diferenciales se expresa como sigue:

$$h_{n-1}(t_2) = \int_{x_0}^{t_2} e^{\lambda_1(t_2-t_1)} f(t_1)dt_1 + h_{n-1}(x_0)e^{\lambda_1(t_2-x_0)}$$

$$h_{n-2}(t_3) = \int_{x_0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3-t_2)} h_{n-1}(t_2)dt_2 + h_{n-2}(x_0)e^{\lambda_2(t_3-x_0)}$$

$$h_{n-3}(t_4) = \int_{x_0}^{t_4} e^{\lambda_3(t_4-t_3)} h_{n-2}(t_3)dt_3 + h_{n-3}(x_0)e^{\lambda_3(t_4-x_0)}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$h_2(t_{n-1}) = \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_{n-2}(t_{n-1}-t_{n-2})} h_3(t_{n-2})dt_{n-2} + h_2(x_0)e^{\lambda_{n-2}(t_{n-1}-x_0)}$$

$$h_1(t_n) = \int_{x_0}^{t_n} e^{\lambda_{n-1}(t_n-t_{n-1})} h_2(t_{n-1})dt_{n-1} + h_1(x_0)e^{\lambda_{n-1}(t_n-x_0)}$$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_n(x-t_n)} h_1(t_n) dt_n + y(x_0) e^{\lambda_n(x-x_0)},$$

donde y está dada por

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_n(x-t_n)} \left(\int_{x_0}^{t_n} e^{\lambda_{n-1}(t_n-t_{n-1})} \dots \right.$$
$$\cdots \left(\int_{x_0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3-t_2)} \left(\int_{x_0}^{t_2} e^{\lambda_1(t_2-t_1)} f(t_1) dt_1 + h_{n-1}(x_0) e^{\lambda_1(t_2-x_0)} \right) dt_2 + h_{n-2}(x_0) e^{\lambda_2(t_3-x_0)} \right) dt_3 \cdots$$
$$\left. \cdots dt_{n-2} \right) dt_{n-2} + h_2(x_0) e^{\lambda_{n-2}(t_{n-1}-x_0)} \Big) dt_{n-1} + h_1(x_0) e^{\lambda_{n-1}(t_n-x_0)} \Big) dt_n + y(x_0) e^{\lambda_n(x-x_0)}$$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_n(x-t_n)} \left(\int_{x_0}^{t_n} e^{\lambda_{n-1}(t_n-t_{n-1})} \dots \left(\int_{x_0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3-t_2)} \left(\int_{x_0}^{t_2} e^{\lambda_1(t_2-t_1)} f(t_1) dt_1 \right) dt_2 \cdots \right) dt_{n-1} \right) dt_n$$
$$+ y(x_0) e^{\lambda_n(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_n(x-t_n)} h_1(x_0) e^{\lambda_{n-1}(t_n-x_0)} dt_n$$
$$+ \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_n(x-t_n)} \left(\int_{x_0}^{t_n} e^{\lambda_{n-1}(t_n-t_{n-1})} h_2(x_0) e^{\lambda_{n-2}(t_{n-1}-x_0)} dt_{n-1} \right) dt_n$$
$$+ \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_n(x-t_n)} \left(\int_{x_0}^{t_n} e^{\lambda_{n-1}(t_n-t_{n-1})} \left(\int_{x_0}^{t_{n-1}} e^{\lambda_{n-2}(t_{n-1}-t_{n-2})} h_3(x_0) e^{\lambda_{n-3}(t_{n-2}-x_0)} dt_{n-2} \right) dt_{n-1} \right) dt_n + \cdots$$
$$\cdots + \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_n(x-t_n)} \left(\int_{x_0}^{t_n} e^{\lambda_{n-1}(t_n-t_{n-1})} \dots \left(\int_{x_0}^{t_4} e^{\lambda_3(t_4-t_3)} \left(\int_{x_0}^{t_3} e^{\lambda_2(t_3-t_2)} h_{n-1}(x_0) e^{\lambda_1(t_2-x_0)} dt_2 \right) dt_3 \cdots \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdots \right) dt_{n-1} \right) dt_n$$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(x-t_1) f(t_1) dt_1 + y(x_0) g_{\lambda_n}(x-x_0) + h_1(x_0) g_{\lambda_n \lambda_{n-1}}(x-x_0)$$
$$+ h_2(x_0) g_{\lambda_n \lambda_{n-1} \lambda_{n-2}}(x-x_0) + \cdots + h_{n-2}(x_0) g_{\lambda_n \dots \lambda_2}(x-x_0)$$
$$+ h_{n-1}(x_0) g_{\lambda_n \dots \lambda_1}(x-x_0). \tag{4.92}$$

Ahora, para determinar $g_{\lambda_n}, g_{\lambda_{n-1}\lambda_n}, \dots, g_{\lambda_2 \cdots \lambda_n}$ utilizaremos $g_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$, recordemos que el orden de las raíces en la fórmula $g_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$ no altera el resultado. La fórmula $g_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$ está dada por:

$$g_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(x) = \int_0^x e^{\lambda_1(x-t_n)} \left(\int_0^{t_n} e^{\lambda_2(t_n-t_{n-1})} \left(\int_0^{t_{n-1}} e^{\lambda_3(t_{n-1}-t_{n-2})} \dots \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdots \left(\int_0^{t_4} e^{\lambda_{n-2}(t_4-t_3)} \left(\int_0^{t_3} e^{\lambda_{n-1}(t_3-t_2)} e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) dt_3 \right) dt_4 \cdots \right) dt_{n-1} \right) dt_n.$$

Primero derivamos $g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$

$$\begin{aligned}
g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x) &= g_{\lambda_2\ldots\lambda_n}(x) + \lambda_1 g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x)\\
g''_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x) &= g_{\lambda_3\ldots\lambda_n}(x) + \lambda_2 g_{\lambda_2\ldots\lambda_n}(x) + \lambda_1 g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x)\\
g'''_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x) &= g_{\lambda_4\ldots\lambda_n}(x) + \lambda_3 g_{\lambda_3\ldots\lambda_n}(x) + \lambda_2 g'_{\lambda_2\ldots\lambda_n}(x) + \lambda_1 g''_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x)\\
\vdots &= \vdots \qquad (4.93)\\
g^{(n-2)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x) &= g_{\lambda_{n-1}\lambda_n}(x) + \lambda_{n-2} g_{\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n}(x) + \lambda_{n-3} g'_{\lambda_{n-3}\ldots\lambda_n}(x) + \cdots + \lambda_2 g^{(n-4)}_{\lambda_2\ldots\lambda_n}(x) + \lambda_1 g^{(n-3)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x)\\
g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x) &= g_{\lambda_n}(x) + \lambda_{n-1} g_{\lambda_{n-1}\lambda_n}(x) + \lambda_{n-2} g'_{\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n}(x) + \cdots + \lambda_2 g^{(n-3)}_{\lambda_2\ldots\lambda_n}(x) + \lambda_1 g^{(n-2)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x),
\end{aligned}$$

luego despejando $g_{\lambda_{\lambda_2\ldots\lambda_n}}, g_{\lambda_3\lambda_n}, \ldots, g_{\lambda_{n-1}\lambda_n}, g_{\lambda_n}$ de las ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned}
g_{\lambda_2\ldots\lambda_n} &= g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n} - \lambda_1 g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\\
g_{\lambda_3\ldots\lambda_n} &= g''_{\lambda_1\ldots\lambda_n} - (\lambda_1+\lambda_2) g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + \lambda_1\lambda_2 g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\\
g_{\lambda_4\ldots\lambda_n} &= g'''_{\lambda_1\ldots\lambda_n} - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) g''_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + [\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2\lambda_3]\, g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n} - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\\
g_{\lambda_5\ldots\lambda_n} &= g^{(4)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4) g'''_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + [\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_3)+\lambda_2(\lambda_3+\lambda_4)+\lambda_3\lambda_4]\, g''_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\\
&\quad - [\lambda_1\lambda_2(\lambda_3+\lambda_4)+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4]\, g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\\
\vdots &= \vdots\\
g_{\lambda_{n-1}\lambda_n} &= g^{(n-2)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + (-1)^1 \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-2}\left(\prod_{j=1}^{1}\lambda_{i_j}\right) g^{(n-3)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\\
&\quad + (-1)^2 \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-2}\left(\prod_{j=1}^{2}\lambda_{i_j}\right) g^{(n-4)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + \cdots\\
&\quad \cdots + (-1)^{n-4} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-2}\left(\prod_{j=1}^{n-4}\lambda_{i_j}\right) g''_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\\
&\quad + (-1)^{n-3} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-2}\left(\prod_{j=1}^{n-3}\lambda_{i_j}\right) g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \qquad (4.94)\\
&\quad + (-1)^{n-2} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-2}\left(\prod_{j=1}^{n-2}\lambda_{i_j}\right) g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\\
g_{\lambda_n} &= g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + (-1)^1 \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1}\left(\prod_{j=1}^{1}\lambda_{i_j}\right) g^{(n-2)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}
\end{aligned}$$

$$+(-1)^2\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n-1}\left(\prod_{j=1}^{2}\lambda_{i_j}\right)g^{(n-3)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-3}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n-1}\left(\prod_{j=1}^{n-3}\lambda_{i_j}\right)g''_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$$
$$+(-1)^{n-2}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n-1}\left(\prod_{j=1}^{n-2}\lambda_{i_j}\right)g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$$
$$+(-1)^{n-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n-1}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_{i_j}\right)g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}.$$

Otro problema de la solución y en (4.92) es saber los valores de; $h_1(x_0)$,$h_2(x_0),\ldots,$ $h_{n-1}(x_0)$, para ello, vamos a usar (4.91)

$$
\begin{aligned}
h_1 &= y' - \lambda_n y\\
h_2 &= y'' - (\lambda_{n-1}+\lambda_n)y' + \lambda_{n-1}\lambda_n y\\
h_3 &= y''' - (\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n)y'' + \left[\lambda_{n-2}(\lambda_{n-1}+\lambda_n)+\lambda_{n-1}\lambda_n\right]y' - \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n y\\
\vdots &= \qquad\qquad \vdots\\
h_{n-2} &= y^{(n-2)} + (-1)^1\sum_{3\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{1}\lambda_{i_j}\right)y^{(n-3)}\\
&\quad+(-1)^2\sum_{3\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{2}\lambda_{i_j}\right)y^{(n-4)}+\cdots\\
&\quad\cdots+(-1)^{n-3}\sum_{3\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{n-3}\lambda_{i_j}\right)y' \qquad (4.95)\\
&\quad+(-1)^{n-2}\sum_{3\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{n-2}\lambda_{i_j}\right)y\\
h_{n-1} &= y^{(n-1)} + (-1)^1\sum_{2\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{1}\lambda_{i_j}\right)y^{(n-2)}\\
&\quad+(-1)^2\sum_{2\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{2}\lambda_{i_j}\right)y^{(n-3)}+\cdots\\
&\quad\cdots+(-1)^{n-2}\sum_{2\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{n-2}\lambda_{i_j}\right)y'\\
&\quad+(-1)^{n-1}\sum_{2\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_{i_j}\right)y,
\end{aligned}
$$

evaluando las ecuaciones (4.95) en x_0 y con las condiciones de valores iniciales, se tiene

$$
\begin{aligned}
h_1(x_0) &= b_1 - \lambda_n b_0 \\
h_2(x_0) &= b_2 - (\lambda_{n-1} + \lambda_n) b_1 + \lambda_{n-1}\lambda_n b_0 \\
h_3(x_0) &= b_3 - (\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n) b_2 + \left[\lambda_{n-2}(\lambda_{n-1} + \lambda_n) + \lambda_{n-1}\lambda_n\right] b_1 - \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n b_0 \\
\vdots &= \qquad \vdots \\
h_{n-2}(x_0) &= b_{n-2} + (-1)^1 \sum_{3\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \left(\prod_{j=1}^{1} \lambda_{i_j}\right) b_{n-3} \\
&\quad + (-1)^2 \sum_{3\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \left(\prod_{j=1}^{2} \lambda_{i_j}\right) b_{n-4} + \cdots \\
&\quad \cdots + (-1)^{n-3} \sum_{3\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \left(\prod_{j=1}^{n-3} \lambda_{i_j}\right) b_1 \\
&\quad + (-1)^{n-2} \sum_{3\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \left(\prod_{j=1}^{n-2} \lambda_{i_j}\right) b_0 \\
h_{n-1}(x_0) &= b_{n-1} + (-1)^1 \sum_{2\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \left(\prod_{j=1}^{1} \lambda_{i_j}\right) b_{n-2} \\
&\quad + (-1)^2 \sum_{2\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \left(\prod_{j=1}^{2} \lambda_{i_j}\right) b_{n-3} + \cdots \\
&\quad \cdots + (-1)^{n-2} \sum_{2\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \left(\prod_{j=1}^{n-2} \lambda_{i_j}\right) b_1 \\
&\quad + (-1)^{n-1} \sum_{2\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \left(\prod_{j=1}^{n-1} \lambda_{i_j}\right) b_0.
\end{aligned} \tag{4.96}
$$

Desde (4.92) tenemos

$$
\begin{aligned}
y(x) = &\int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x - t_1) f(t_1) dt_1 + y(x_0) g_{\lambda_n}(x - x_0) + h_1(x_0) g_{\lambda_n\lambda_{n-1}}(x - x_0) \\
&+ h_2(x_0) g_{\lambda_n\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}}(x - x_0) + \cdots + h_{n-2}(x_0) g_{\lambda_n\ldots\lambda_2}(x - x_0) \\
&+ h_{n-1}(x_0) g_{\lambda_n\ldots\lambda_1}(x - x_0).
\end{aligned} \tag{4.97}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
y_h(x) = {}& y(x_0) g_{\lambda_n}(x - x_0) + h_1(x_0) g_{\lambda_n\lambda_{n-1}}(x - x_0) + h_2(x_0) g_{\lambda_n\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}}(x - x_0) + \cdots \\
&\cdots + h_{n-2}(x_0) g_{\lambda_n\ldots\lambda_2}(x - x_0) + h_{n-1}(x_0) g_{\lambda_n\ldots\lambda_1}(x - x_0).
\end{aligned} \tag{4.98}
$$

Luego sustituimos (4.94) y (4.96) en (4.98)

$$\begin{aligned} y_h(x) = \Bigg[& b_{n-1} - (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)b_{n-2} + (\lambda_1(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)+\lambda_2(\lambda_3+\cdots+\lambda_n)+\cdots+\lambda_{n-1}\lambda_n)\, b_{n-3} \\ & +\cdots+(-1)^{n-2}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\left(\prod_{j=1}^{n-2}\lambda_{i_j}\right) b_1 + (-1)^{n-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_{i_j}\right) b_0 \Bigg] g_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \\ & + \Bigg[b_{n-2} - (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)b_{n-3} + (\lambda_1(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)+\lambda_2(\lambda_3+\cdots+\lambda_n)+\cdots+\lambda_{n-1}\lambda_n)\, b_{n-4} \\ & +\cdots+(-1)^{n-3}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\left(\prod_{j=1}^{n-3}\lambda_{i_j}\right) b_1 + (-1)^{n-2}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\left(\prod_{j=1}^{n-2}\lambda_{i_j}\right) b_0 \Bigg] g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \\ & +\cdots+\Big[b_2 - (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)b_1 + (\lambda_1(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)+\lambda_2(\lambda_3+\cdots+\lambda_n)+\cdots+\lambda_{n-1}\lambda_n)\, b_0 \Big] g^{(n-3)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \\ & + \Big[b_1 - (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)b_0 \Big] g^{(n-2)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \\ & + b_0\, g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}, \end{aligned}$$

utilizando las fórmulas de Vieta, tenemos la solución homogénea asociada

$$\begin{aligned} y_h(x) = & \left(b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + a_2 b_{n-3} + \cdots + a_{n-2} b_1 + a_{n-1} b_0 \right) g_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \\ & + \left(b_{n-2} + a_1 b_{n-3} + a_2 b_{n-4} + \cdots + a_{n-3} b_1 + a_{n-2} b_0 \right) g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \\ & + \cdots + \left(b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \right) g^{(n-3)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \\ & + \left(b_1 + a_1 b_0 \right) g^{(n-2)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \\ & + b_0\, g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}. \end{aligned}$$

Podemos reducir a un más y_h por medio del siguiente arreglo. Sea c_k los coeficientes dados por:

$$\begin{aligned} c_0 &= b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_1 + a_{n-1} b_0 \\ c_1 &= b_{n-2} + a_1 b_{n-3} + \cdots + a_{n-3} b_1 + a_{n-2} b_0 \\ &\vdots \\ c_{n-3} &= b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ c_{n-2} &= b_1 + a_1 b_0 \\ c_{n-1} &= b_0, \end{aligned} \tag{4.99}$$

entonces y_h puede escribirse como

$$\begin{aligned} y_h(x) &= c_0 g_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + c_1 g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + \cdots + c_{n-2} g^{(n-2)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + c_{n-1} g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k g^{(k)}(x-x_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto y de (4.97) queda expresado como

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t_1) f(t_1) dt_1 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k g^{(k)}(x-x_0). \tag{4.100}$$

$\square$

Podemos probar directamente que la función y dada por (4.85) soluciona (4.84). Entonces derivemos y bajo el signo integral

$$y'(x) = g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(0) f(x) + \int_{x_0}^{x} g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t_1) f(t_1) dt_1 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k g^{(k)}(x-x_0) \right)',$$

$$y'(x) = g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(0) f(x) + \int_{x_0}^{x} g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t_1) f(t_1) dt_1 + \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} g^{(k)}(x-x_0),$$

si evaluamos $x = 0$ en $g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x)$ de la ecuación (4.86), se tiene que $g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(0) = 0$, y además si evaluamos $x = 0$ en las fórmulas (4.93) se tiene:

$$g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(0) = 0,\ g''_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(0) = 0,\ \ldots\ ,\ g^{(n-2)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(0) = 0,\ g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(0) = 1$$

con este resultado, las derivadas de y están dadas de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int_{x_0}^{x} g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t_1) f(t_1) dt_1 + \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} g^{(k)}(x-x_0) \\ y''(x) &= \int_{x_0}^{x} g''_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t_1) f(t_1) dt_1 + \sum_{k=2}^{n+1} c_{k-2} g^{(k)}(x-x_0) \\ y'''(x) &= \int_{x_0}^{x} g'''_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t_1) f(t_1) dt_1 + \sum_{k=3}^{n+2} c_{k-3} g^{(k)}(x-x_0) \\ \vdots\ &= \ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) &= \int_{x_0}^{x} g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t_1) f(t_1) dt_1 + \sum_{k=n-1}^{2n-2} c_{k-n+1} g^{(k)}(x-x_0) \\ y^{(n)}(x) &= f(x) + \int_{x_0}^{x} g^{(n)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t_1) f(t_1) dt_1 + \sum_{k=n}^{2n-1} c_{k-n} g^{(k)}(x-x_0) \end{aligned}$$

Sea $\zeta(x) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\zeta(x) = f(x) &+ \int_{x_0}^{x} g^{(n)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t_1)f(t_1)dt_1 + \sum_{k=n}^{2n-1} c_{k-n} g^{(k)}(x-x_0) \\
&+ a_1\left(\int_{x_0}^{x} g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t_1)f(t_1)dt_1 + \sum_{k=n-1}^{2n-2} c_{k-n+1} g^{(k)}(x-x_0)\right) + \cdots \\
&\cdots + a_{n-1}\left(\int_{x_0}^{x} g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t_1)f(t_1)dt_1 + \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} g^{(k)}(x-x_0)\right) \\
&+ a_n\left(\int_{x_0}^{x} g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x-t_1)f(t_1)dt_1 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k g^{(k)}(x-x_0)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta(x) = f(x) &+ \int_{x_0}^{x}\left(g^{(n)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + a_1 g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + \cdots + a_n g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\right)(x-t_1)f(t_1)dt_1 \\
&+ c_0\left[\left(g^{(n)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + a_1 g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + \cdots + a_n g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\right)(x-t_1)\right] \\
&+ c_1\frac{d}{dx}\left[\left(g^{(n)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + a_1 g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + \cdots + a_n g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\right)(x-t_1)\right] \\
&+ c_2\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(g^{(n)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + a_1 g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + \cdots + a_n g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\right)(x-t_1)\right] + \cdots \\
&\cdots + c_{n-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[\left(g^{(n)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + a_1 g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + \cdots + a_n g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\right)(x-t_1)\right] \\
&+ c_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-2}}\left[\left(g^{(n)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + a_1 g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + \cdots + a_n g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\right)(x-t_1)\right]
\end{aligned} \tag{4.101}$$

ahora solo faltaría determinar $g^{(n)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + a_1 g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + \cdots + a_n g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$. Para ello, utilizaremos g_{λ_n} de (4.94)

$$\begin{aligned}
g_{\lambda_n} = g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} &+ (-1)^1 \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1}\left(\prod_{j=1}^{1}\lambda_{i_j}\right) g^{(n-2)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \\
&+ (-1)^2 \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1}\left(\prod_{j=1}^{2}\lambda_{i_j}\right) g^{(n-3)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} + \cdots \\
&\cdots + (-1)^{n-3} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1}\left(\prod_{j=1}^{n-3}\lambda_{i_j}\right) g''_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \\
&+ (-1)^{n-2} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1}\left(\prod_{j=1}^{n-2}\lambda_{i_j}\right) g'_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \\
&+ (-1)^{n-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_{i_j}\right) g_{\lambda_1\ldots\lambda_n},
\end{aligned} \tag{4.102}$$

derivamos g_{λ_n}, donde $g_{\lambda_n} = e^{\lambda_n x}$

$$g'_{\lambda_n} = \lambda_n g_{\lambda_n}$$

la ecuación anterior puede ser expresada en términos del operador diferencial

$$(D-\lambda_n)g_{\lambda_n}=0, \tag{4.103}$$

de igual manera, g_{λ_n} de (4.102) puede escribirse en términos del operador diferencial

$$\begin{aligned}
g_{\lambda_n} &= \Bigg(D^{n-1}+(-1)^1\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1}\left(\prod_{j=1}^{1}\lambda_{i_j}\right)D^{n-2}\\
&\quad +(-1)^2\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1}\left(\prod_{j=1}^{2}\lambda_{i_j}\right)D^{n-3}+\cdots\\
&\quad \cdots+(-1)^{n-3}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1}\left(\prod_{j=1}^{n-3}\lambda_{i_j}\right)D^{2}\\
&\quad +(-1)^{n-2}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1}\left(\prod_{j=1}^{n-2}\lambda_{i_j}\right)D\\
&\quad +(-1)^{n-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_{i_j}\right)\Bigg)g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\\
g_{\lambda_n} &= \big((D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_{n-1})\big)\,g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}
\end{aligned} \tag{4.104}$$

(4.104) en (4.103)

$$\big((D-\lambda_n)(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_{n-1})\big)\,g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}=0$$

utilizando las fórmulas de Vieta tenemos

$$g^{(n)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}+a_1g^{(n-1)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}+\cdots+a_ng_{\lambda_1\ldots\lambda_n}=0. \tag{4.105}$$

Finalmente, reemplazamos (4.105) en (4.101)

$$\begin{aligned}
y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_ny &= f(x)+\int_{x_0}^{x}(0)\,f(t_1)dt_1\\
&\quad +c_0\,[0]+c_1\frac{d}{dx}\,[0]+c_2\frac{d^2}{dx^2}\,[0]+\cdots\\
&\quad \cdots+c_{n-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\,[0]+c_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-2}}\,[0]\\
y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_ny &= f(x),\qquad \forall x\in I.
\end{aligned}$$

De la demostración anterior, podemos observar que toda solución puede escribirse como $y=y_p+y_h$, donde $y_p(x)=\int_{x_0}^{x}g(x-t)f(t)dt$ resuelve $Ly=f(x)$ con las condiciones iniciales $y_p^{(k)}(x_0)=0$ para $0\le k\le n-1$.

FÓRMULA RESPUESTA IMPULSIVA

Para la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden con coeficientes constantes, la respuesta impulsiva g está definido por

$$g_\lambda(x) = e^{\lambda x}, \tag{4.106}$$

donde λ es la raíz de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial homogénea de primer orden. En el caso de la ecuación diferencial de segundo orden, del cual se hizo un análisis extenso, la respuesta impulsiva es definida por

$$g_{\lambda_1\lambda_2}(x) = \int_0^x e^{\lambda_2(x-t)}e^{\lambda_1 t}dt = \int_0^x e^{\lambda_1(x-t)}e^{\lambda_2 t}dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.107}$$

o puede ser expresado de la siguiente manera

$$g_{\lambda_1\lambda_2}(x) = \int_0^x g_{\lambda_2}(x-t)g_{\lambda_1}(t)dt = \int_0^x g_{\lambda_1}(x-t)g_{\lambda_2}(t)dt,$$

donde λ_1, λ_2 son raíces de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial homogénea de segundo orden. Ahora verifiquemos (4.107)

$$\begin{aligned} g_{\lambda_2\lambda_1}(x) &= \int_0^x e^{\lambda_2(x-t)}e^{\lambda_1 t}dt \\ &= \int_0^x e^{\lambda_2 x}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}dt \\ &= e^{\lambda_2 x}\left[\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}}{\lambda_1-\lambda_2}\right]\Bigg|_0^x \\ g_{\lambda_2\lambda_1}(x) &= \frac{e^{\lambda_1 x}-e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1-\lambda_2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g_{\lambda_1\lambda_2}(x) &= \int_0^x e^{\lambda_1(x-t)}e^{\lambda_2 t}dt \\ &= \int_0^x e^{\lambda_1 x}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}dt \\ &= e^{\lambda_1 x}\left[\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{\lambda_2-\lambda_1}\right]\Bigg|_0^x \\ g_{\lambda_1\lambda_2}(x) &= \frac{e^{\lambda_2 x}-e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{e^{\lambda_1 x}-e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1-\lambda_2}. \end{aligned}$$

Por tanto, el valor de g es el mismo independientemente del orden de las raíces λ_1 y λ_2, esta será una propiedad que conservara para ecuaciones diferenciales de orden superior.

Con el análisis obtenido en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo, tercer y n-ésimo orden, podemos establecer lo siguiente: Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ las raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Entonces la respuesta impulsiva $g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ del operador diferencial lineal

$$L=\left(\frac{d}{dx}\right)^n+a_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)+a_n$$

está dada como sigue

$$\begin{aligned}g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x)=\int_0^x e^{\lambda_n(x-t_{n-1})}&\left(\int_0^{t_{n-1}}e^{\lambda_{n-1}(t_{n-1}-t_{n-2})}\cdots\right.\\ &\left.\cdots\left(\int_0^{t_3}e^{\lambda_3(t_3-t_2)}\left(\int_0^{t_2}e^{\lambda_2(t_2-t_1)}e^{\lambda_1t_1}dt_1\right)dt_2\right)\cdots dt_{n-2}\right)dt_{n-1},\end{aligned}$$

también puede ser expresado como

$$g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x)=\int_0^x g_{\lambda_n}(x-t_{n-1})g_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}(t_{n-1})dt_{n-1}\ \text{ para } n\geq 2 \tag{4.108}$$

donde $g_{\lambda_n}(x)=e^{\lambda_n x}$ y $g_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}(t_{n-1})$ es la respuesta impulsiva del operador lineal

$$L=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}+a_1'\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}+\cdots+a_{n-2}'\left(\frac{d}{dx}\right)+a_{n-1}'$$

donde $a_k'=(-1)^k\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n-1}\left(\prod_{j=1}^k\lambda_{i_j}\right)$. Además, la respuesta impulsiva $g_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ resuelve la ecuación homogénea (4.82) con las condiciones iniciales

$$y(0)=y'(0)=\cdots=y^{(n-2)}=0,\ y^{(n-1)}=1.$$

4.5 COMPARACIÓN CON EL MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Ejemplo 4.5.1. Resolver la ecuación diferencial

$$y''-2y'+y=4e^x-2\cos x. \tag{4.109}$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada $y''-2y'+y=0$ es $\lambda^2-2\lambda+1=0$, cuyas raíces son $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=1$, entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^x,xe^x\}$. En consecuencia, por (2.16) se obtiene la solución homogénea

$$y_h=c_1e^x+c_2xe^x.$$

Para la función $4e^x$ se tiene que $\alpha = 1 = \lambda$, donde 1 es de multiplicidad 2, y para la función $-2\cos x$ se tiene que $\alpha \pm i\beta \neq \lambda$. Entonces la solución particular tiene la forma

$$y_p(x) = Ax^2e^x + B\cos x + C\operatorname{sen} x$$

Derivando

$$y_p' = (Ax^2+2Ax)e^x - B\operatorname{sen} x + C\cos x, \quad y_p'' = (Ax^2+4Ax+2A)e^x - B\cos x - C\operatorname{sen} x,$$

reemplazando y_p, y_p' y y_p'' en $y'' - 2y' + y = 4e^x - 2\cos x$, se tiene

$$\begin{aligned} 4e^x - 2\cos x &= (Ax^2+4Ax+2A)e^x - B\cos x - C\operatorname{sen} x - 2(Ax^2+2Ax)e^x \\ &\quad - 2B\operatorname{sen} x + 2C\cos x + Ax^2e^x + B\cos x + C\operatorname{sen} x \\ 4e^x - 2\cos x &= 2Ae^x + 2B\operatorname{sen} x - 2C\cos x, \end{aligned}$$

de donde $A = 2$, $B = 0$ y $C = 1$. Entonces y_p está dado por

$$y_p(x) = 2x^2e^x + \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 4.5.2. Resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = 4e^x - 2\cos x.$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada $y'' - 2y' + y = 0$ es $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$, entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^x, xe^x\}$. Entonces, por la fórmula (4.23) se obtiene la respuesta impulsiva

$$g(x) = xe^x$$

Por (4.45) y sea $x_0 = 0 \in I$, entonces una solución particular está dada por

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_0^x (x-t)e^{x-t}\left(4e^t - 2\cos t\right)dt \\ &= 2e^x \int_0^x \left(2x - xe^{-t}\cos t - 2t + te^{-t}\cos t\right)dt \\ &= 2e^x \left(2x\int_0^x dt - x\int_0^x e^{-t}\cos t dt - \int_0^x 2t dt + \int_0^x te^{-t}\cos t dt\right) \end{aligned}$$

Utilizaremos la técnica de integración por partes. Sea $I = \int e^{-t}\cos t dt$, elegimos $u = e^{-t}$ y $dv = \cos t dt$, donde $du = -e^{-t}dt$ y $v = \operatorname{sen} t$, entonces

$$I = e^{-t}\operatorname{sen} t - \int -e^{-t}\operatorname{sen} t dt,$$

volvemos a elegir $u = -e^{-t}$ y $dv = \operatorname{sen} t$, donde $du = e^{-t}dt$ y $v = -\cos t$, entonces

$$\begin{aligned} I &= e^{-t}\operatorname{sen} t - \left(e^{-t}\cos t - \int -e^{-t}\cos t dt\right) \\ &= e^{-t}\operatorname{sen} t - e^{-t}\cos t - I \end{aligned}$$

de esta última ecuación se tiene que $I = e^{-t}(\operatorname{sen} t - \cos t)/2$. Ahora $II = \int te^{-t}\cos t dt$, elegimos $u = t$ y $dv = e^{-t}\cos t dt$, donde $du = dt$ y $v = I$, entonces

$$\begin{aligned} II &= \frac{te^{-t}}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t) + \int \frac{-e^{-t}\operatorname{sen} t + e^{-t}\cos t}{2} dt \\ &= \frac{te^{-t}}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t) + \frac{e^{-t}\operatorname{sen} t}{2}. \end{aligned}$$

Con estos resultados recientes tenemos

$$\begin{aligned} y_p(x) &= 2e^x \Bigg[2x(t)\Big|_{t=0}^{t=x} - \frac{x}{2}\left(e^{-t}\operatorname{sen} t - e^{-t}\cos t\right)\Big|_{t=0}^{t=x} - (t^2)\Big|_{t=0}^{t=x} \\ &\qquad + \left(\frac{t}{2}\left(e^{-t}\operatorname{sen} t - e^{-t}\cos t\right) + \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} t\right)\Big|_{t=0}^{t=x} \Bigg] \\ &= 2e^x\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}\operatorname{sen} x\right) \\ y_p(x) &= 2x^2e^x + \operatorname{sen} x - xe^x \end{aligned}$$

como $-xe^x$ es linealmente dependiente con un término del conjunto fundamental de soluciones ($-xe^x$ es removido), entonces

$$y_p(x) = 2x^2e^x + \operatorname{sen} x.$$

La solución particular del ejemplo 4.5.2 hallada utilizando el método de respuesta impulsiva es igual a la solución particular del ejemplo 4.5.1 hallada utilizando el método de coeficientes indeterminados. No obstante, el procedimiento para hallar la solución particular a través de la respuesta impulsiva resulta más complicado a causa del tipo de integrales involucradas.

4.6 COMPARACIÓN CON EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Ecuaciones de segundo orden

Ejemplo 4.6.1. Resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = e^{x + e^{-x}}.$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada $y'' - 5y' + 6y = 0$ es $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{2x}, e^{3x}\}$. En consecuencia, por (2.15) se obtiene la solución homogénea

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Por el método de variación de parámetros se propone como solución particular:

$$y_p(x) = u_1(x)e^{2x} + u_2(x)e^{3x}. \tag{4.110}$$

Entonces, de acuerdo con el procedimiento del método de variación de parámetros, debemos hallar u_1 y u_2 en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{2x}u_1'(x) + e^{3x}u_2'(x) &= 0 \\ 2e^{2x}u_1'(x) + 3e^{3x}u_2'(x) &= e^{x+e^{-x}}. \end{aligned}$$

Ahora requerimos determinar W, W_1 y W_2, entonces

$$W(x) = W(e^{2x}, e^{3x})(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{2x}(3e^{3x}) - 2e^{2x}(e^{3x}) = e^{5x},$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ e^{x+e^{-x}} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 0(3e^{3x}) - e^{3x}\left(e^{x+e^{-x}}\right) = -e^{4x+\,e^{-x}},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & e^{x+e^{-x}} \end{vmatrix} = e^{2x}\left(e^{x+e^{-x}}\right) - 2e^{2x}(0) = e^{3x+\,e^{-x}}$$

donde la solución del sistema es

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{-e^{4x+\,e^{-x}}}{e^{5x}} = -e^{-x+\,e^{-x}}$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{e^{3x+\,e^{-x}}}{e^{5x}} = e^{-2x+\,e^{-x}}$$

Integrando u_1' y u_2' tenemos

$$u_1(x) = \int u_1'(x)dx = \int -e^{-x+\,e^{-x}}dx = e^{e^{-x}} + k_1$$

$$u_2(x) = \int u_2'(x)dx = \int e^{-2x+\,e^{-x}}dx = e^{e^{-x}} - e^{-x+\,e^{-x}} + k_2.$$

Sustituyendo u_1 y u_2 en (4.110)

$$y_p(x) = e^{2x}\left(e^{e^{-x}} + k_1\right) + e^{3x}\left(e^{e^{-x}} - e^{-x+\,e^{-x}} + k_2\right).$$

Sea $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, entonces una solución particular ésta dada por

$$y_p(x) = e^{3x+e^{-x}}.$$

Ejemplo 4.6.2. Resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = e^{x + e^{-x}}.$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada $y'' - 5y' + 6y = 0$ es $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{2x}, e^{3x}\}$. La respuesta impulsiva está dada por (4.21), ya que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces

$$g(x) = \frac{1}{2-3}\left(e^{2x} - e^{3x}\right) = e^{3x} - e^{2x}.$$

Si $x_0 = 0 \in I$ en (4.45), entonces una solución particular está dada por

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \int_0^x \left(e^{3(x-t)} - e^{2(x-t)}\right) e^{t+e^{-t}}dt = e^{3x}\int_0^x e^{-2t+e^{-t}}dt - e^{2x}\int_0^x e^{-t+e^{-t}}dt \\
&= e^{3x}\left(e^{e^{-t}} - e^{-t+e^{-t}}\right)\Big|_{t=0}^{t=x} - e^{2x}\left(-e^{e^{-t}}\right)\Big|_{t=0}^{t=x} \\
&= e^{3x}\left(e^{e^{-x}} - e^{-x+e^{-x}} - e^1 + e^1\right) + e^{2x}\left(e^{e^{-x}} - e^1\right)
\end{aligned}$$

$$y_p(x) = e^{3x+e^{-x}} - e\,e^{2x}$$

como $-e\,e^{2x}$ es linealmente dependiente con un término del conjunto fundamental de soluciones ($-e\,e^{2x}$ es removido), entonces

$$y_p(x) = e^{3x+e^{-x}}.$$

Ejemplo 4.6.3. Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{2e^{-3x}}{x^2+1}.$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada $y'' + 6y' + 9y = 0$ es $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$, entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$. En consecuencia, por (2.16) se obtiene la solución homogénea

$$y_h = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$$

Por el método de variación de parámetros se propone como solución particular:

$$y_p(x) = u_1(x)e^{-3x} + u_2(x)xe^{-3x}. \tag{4.111}$$

Entonces, de acuerdo con el procedimiento del método de variación de parámetros, debemos hallar u_1 y u_2 en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{-3x}u_1'(x) + xe^{-3x}u_2'(x) =& 0 \\ -3e^{-3x}u_1'(x) + (1-3x)e^{-3x}u_2'(x) =& \frac{2e^{-3x}}{x^2+1} \end{aligned}$$

Ahora requerimos determinar W, W_1 y W_2, entonces

$$W(x) = W(e^{-3x}, xe^{-3x})(x) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & (1-3x)e^{-3x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-3x}(1-3x)e^{-3x} - (-3e^{-3x})xe^{-3x} = e^{-6x},$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-3x} \\ \frac{2e^{-3x}}{x^2+1} & (1-3x)e^{-3x} \end{vmatrix} = 0(1-3x)e^{-3x} - \frac{2e^{-3x}}{x^2+1}(xe^{-3x}) = -\frac{2xe^{-6x}}{x^2+1},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & \frac{2e^{-3x}}{x^2+1} \end{vmatrix} = e^{-3x}\left(\frac{2e^{-3x}}{x^2+1}\right) - (-3e^{-3x})0 = \frac{2e^{-6x}}{x^2+1},$$

donde la solución del sistema es

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{-\dfrac{2xe^{-6x}}{x^2+1}}{e^{-6x}} = -\frac{2x}{x^2+1}$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{\dfrac{2e^{-6x}}{x^2+1}}{e^{-6x}} = \frac{2}{x^2+1},$$

Integrando u_1' y u_2' tenemos

$$u_1(x) = \int u_1'(x)dx = \int -\frac{2x}{x^2+1}dx = -\ln\left|x^2+1\right| + k_1,$$

$$u_2(x) = \int u_2'(x)dx = \int \frac{2}{x^2+1}dx = 2\arctan x + k_2.$$

Sustituyendo u_1 y u_2 en (4.111)

$$y_p(x) = e^{-3x}\left(-\ln\left|x^2+1\right| + k_1\right) + xe^{-3x}\left(2\arctan x + k_2\right).$$

Sea $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, entonces una solución particular ésta dada por

$$y_p(x) = e^{-3x}\left(2x\arctan x - \ln\left|x^2+1\right|\right).$$

Ejemplo 4.6.4. Resuelve la ecuación diferencial

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{2e^{-3x}}{x^2+1}.$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada $y'' + 6y' + 9y = 0$ es $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$, entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$. La respuesta impulsiva está dada por (4.23), ya que $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces

$$g(x) = xe^{-3x}.$$

Si $x_0 = 0 \in I$ en (4.45), entonces una solución particular está dada por

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \int_0^x \left[(x-t)e^{-3(x-t)}\right] \frac{2e^{-3t}}{t^2+1}dt \\
&= e^{-3x}\int_0^x \frac{2(x-t)}{t^2+1}dt = e^{-3x}\left(2x\int_0^x \frac{1}{t^2+1}dt - \int_0^x \frac{2t}{t^2+1}dt\right) \\
&= e^{-3x}\left(2x \arctan t\Big|_{t=0}^{t=x} - \ln\left|t^2+1\right|\Big|_{t=0}^{t=x}\right) \\
&= e^{-3x}\left(2x\ \arctan x - 2x \arctan 0 - \ln\left|x^2+1\right| + \ln\left|0^2+1\right|\right) \\
y_p(x) &= e^{-3x}\left(2x\ \arctan x - \ln\left|x^2+1\right|\right)
\end{aligned}$$

La solución particular de los ejemplos 4.6.2, 4.6.4 obtenida utilizando el método de respuesta impulsiva es igual a la solución particular de los ejemplos 4.6.1, 4.6.3 obtenida con el método de variación de parámetros. Sin embargo, el procedimiento para hallar la solución particular a través de la respuesta impulsiva resulta menos trabajosa que la de variación de parámetros.

Ecuaciones de tercer orden

Ejemplo 4.6.5. Resolver la ecuación diferencial

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^x}{e^x+1}.$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ es $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{-x}, e^x, e^{2x}\}$. En consecuencia, por (2.15) se obtiene la solución homogénea

$$y_h(x) = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3e^{2x},$$

Por el método de variación de parámetros se propone como solución particular:

$$y_p(x) = u_1(x)e^{-x} + u_2(x)e^x + u_3(x)e^{2x}. \tag{4.112}$$

Entonces, de acuerdo con el procedimiento del método de variación de parámetros, debemos hallar u_1, u_2 y u_3 en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{-x}u_1'(x) + e^{x}u_2'(x) + e^{2x}u_3'(x) =& 0 \\ -e^{-x}u_1'(x) + e^{x}u_2'(x) + 2e^{2x}u_3'(x) =& 0 \\ e^{-x}u_1'(x) + e^{x}u_2'(x) + 4e^{2x}u_3'(x) =& \frac{e^{x}}{e^{x}+1} \end{aligned}$$

Ahora requerimos determinar W, W_1, W_2 y W_3, entonces

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & e^{x} & 2e^{2x} \\ e^{-x} & e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^{-x}\begin{vmatrix} e^{x} & 2e^{2x} \\ e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} - e^{x}\begin{vmatrix} -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} + e^{2x}\begin{vmatrix} -e^{-x} & e^{x} \\ e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}$$

$$W(x) = e^{-x}\left(4e^{3x} - 2e^{3x}\right) - e^{x}\left(-4e^{x} - 2e^{x}\right) + e^{2x}\left(-1-1\right) = 6e^{2x},$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{x} & e^{2x} \\ 0 & e^{x} & 2e^{2x} \\ \frac{e^{x}}{e^{x}+1} & e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} e^{x} & 2e^{2x} \\ e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} - e^{x}\begin{vmatrix} 0 & 2e^{2x} \\ \frac{e^{x}}{e^{x}+1} & 4e^{2x} \end{vmatrix} + e^{2x}\begin{vmatrix} 0 & e^{x} \\ \frac{e^{x}}{e^{x}+1} & e^{x} \end{vmatrix}$$

$$W_1(x) = 0\left(4e^{3x} - 2e^{3x}\right) - e^{x}\left(-\frac{2e^{3x}}{e^{x}+1}\right) + e^{2x}\left(-\frac{e^{2x}}{e^{x}+1}\right) = \frac{e^{4x}}{e^{x}+1},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 & e^{2x} \\ -e^{-x} & 0 & 2e^{2x} \\ e^{-x} & \frac{e^{x}}{e^{x}+1} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^{-x}\begin{vmatrix} 0 & 2e^{2x} \\ \frac{e^{x}}{e^{x}+1} & 4e^{2x} \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} + e^{2x}\begin{vmatrix} -e^{-x} & 0 \\ e^{-x} & \frac{e^{x}}{e^{x}+1} \end{vmatrix}$$

$$W_2(x) = e^{-x}\left(-\frac{2e^{3x}}{e^{x}+1}\right) - 0\left(-4e^{x} - 2e^{x}\right) + e^{2x}\left(-\frac{1}{e^{x}+1}\right) = -\frac{3e^{2x}}{e^{x}+1},$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{x} & 0 \\ e^{-x} & e^{x} & \frac{e^{x}}{e^{x}+1} \end{vmatrix} = e^{-x}\begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & \frac{e^{x}}{e^{x}+1} \end{vmatrix} - e^{x}\begin{vmatrix} -e^{-x} & 0 \\ e^{-x} & \frac{e^{x}}{e^{x}+1} \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -e^{-x} & e^{x} \\ e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}$$

$$W_3(x) = e^{-x}\left(\frac{e^{2x}}{e^{x}+1}\right) - e^{x}\left(-\frac{1}{e^{x}+1}\right) + 0\left[(-e^{-x})e^{x} - e^{x}e^{-x}\right] = \frac{2e^{x}}{e^{x}+1},$$

donde la solución del sistema es

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{\dfrac{e^{4x}}{e^x+1}}{6e^{2x}} = \frac{e^{2x}}{6(e^x+1)}$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{-\dfrac{3e^{2x}}{e^x+1}}{6e^{2x}} = -\frac{1}{2(e^x+1)}$$

$$u_3'(x) = \frac{W_3}{W} = \frac{\dfrac{2e^{x}}{e^x+1}}{6e^{2x}} = \frac{e^{-x}}{3(e^x+1)},$$

Integrando u_1', u_2' y u_3' tenemos

$$u_1(x) = \int u_1'(x)dx = \int \frac{e^{2x}}{6(e^x+1)}dx = -\frac{\ln|e^x+1|}{6} + \frac{e^x}{6} + k_1$$

$$u_2(x) = \int u_2'(x)dx = \int -\frac{1}{2(e^x+1)}dx = \frac{\ln|e^x+1|}{2} - \frac{x}{2} + k_2$$

$$u_3(x) = \int u_2'(x)dx = \int \frac{e^{-x}}{3(e^x+1)}dx = -\frac{\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|}{3} - \frac{1}{3e^x} + k_3.$$

Sustituyendo u_1, u_2 y u_3 en (4.112)

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-x}\left(-\frac{\ln|e^x+1|}{6} + \frac{e^x}{6} + k_1\right) + e^x\left(\frac{\ln|e^x+1|}{2} - \frac{x}{2} + k_2\right) \\ &\quad + e^{2x}\left(-\frac{\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|}{3} - \frac{1}{3e^x} + k_3\right). \end{aligned}$$

Sea $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, entonces una solución particular ésta dada por

$$y_p(x) = \left(\frac{e^{2x}}{3} + \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{6}\right)\ln|e^x+1| - \frac{xe^{2x}}{3} - \frac{xe^x}{2} - \frac{e^x}{3} + \frac{1}{6},$$

como $-\frac{e^x}{3}$ es linealmente dependiente con un término del conjunto fundamental de soluciones, entonces

$$y_p(x) = \left(\frac{e^{2x}}{3} + \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{6}\right)\ln|e^x+1| - \frac{xe^{2x}}{3} - \frac{xe^x}{2} + \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 4.6.6. Resuelve la ecuación diferencial

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^x}{e^x+1}.$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada

$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ es $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{-x}, e^x, e^{2x}\}$. La respuesta impulsiva está dada por (4.73), ya que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, entonces

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{e^{-x}}{(-1-1)(-1-2)} + \frac{e^x}{(1-(-1))(1-2)} + \frac{e^{2x}}{(2-(-1))(2-1)} \\ &= \frac{e^{-x}}{6} + \frac{e^{2x}}{3} - \frac{e^x}{2} \end{aligned}$$

Si $x_0 = 0 \in I$ en (4.3.1), entonces una solución particular está dada por

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_0^x \left(\frac{e^{-(x-t)}}{6} + \frac{e^{2(x-t)}}{3} - \frac{e^{x-t}}{2} \right) \frac{e^t}{e^t+1} dt \\ &= \frac{e^{-x}}{6} \int_0^x \frac{e^{2t}}{e^t+1} dt + \frac{e^{2x}}{3} \int_0^x \frac{e^{-t}}{e^t+1} dt - \frac{e^x}{2} \int_0^x \frac{1}{e^t+1} dt \\ &= \frac{e^{-x}}{6} (-\ln|e^t+1| + e^t) \Big|_{t=0}^{t=x} + \frac{e^{2x}}{3} \left(-\ln\left|\frac{e^t}{e^t+1}\right| - e^{-t} \right) \Big|_{t=0}^{t=x} \\ &\qquad - \frac{e^x}{2} \left(-\ln|e^t+1| + t \right) \Big|_{t=0}^{t=x} \\ &= -\frac{e^{-x}}{6} (\ln|e^x+1| - e^x - \ln 2 + 1) - \frac{e^{2x}}{3} \left(\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right| + e^{-x} - \ln\frac{1}{2} - 1 \right) \\ &\qquad + \frac{e^x}{2} (\ln|e^x+1| - x - \ln 2) \\ y_p(x) &= \left(\frac{e^{2x}}{3} + \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{6} \right) \ln|e^x+1| - \frac{xe^{2x}}{3} - \frac{xe^x}{2} + \frac{1}{6} \\ &\qquad - \frac{(1-\ln 2)}{6} e^{-x} + \frac{(1-\ln 2)}{3} e^{2x} - \frac{(2+3\ln 2)}{6} e^x \end{aligned}$$

como $-\frac{(1-\ln 2)}{6} e^{-x}$, $\frac{(1-\ln 2)}{3} e^{2x}$, $\frac{(2+3\ln 2)}{6} e^x$ cada uno de ellos es linealmente dependiente solo con un término del conjunto fundamental de soluciones ($-\frac{(1-\ln 2)}{6} e^{-x}$, $\frac{(1-\ln 2)}{3} e^{2x}$, $\frac{(2+3\ln 2)}{6} e^x$ son removidos), entonces

$$y_p(x) = \left(\frac{e^{2x}}{3} + \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{6} \right) \ln|e^x+1| - \frac{xe^{2x}}{3} - \frac{xe^x}{2} + \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 4.6.7. Resolver la ecuación diferencial

$$y''' + 4y' = 8\cot 2x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}.$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada $y''' + 4y' = 0$ es $\lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 0 \pm 2i$ (donde $\alpha = 0$ y $\beta = 2$), entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{1, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x\}$. En consecuencia, por (2.15) y (2.18) se obtiene la solución homogénea

$$y_h = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x,$$

Por el método de variación de parámetros se propone como solución particular:

$$y_p(x) = u_1(x) + u_2(x) \cos 2x + u_3(x) \operatorname{sen} 2x. \tag{4.113}$$

Entonces, de acuerdo con el procedimiento del método de variación de parámetros, debemos hallar u_1, u_2 y u_3 en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
(1)\, u_1'(x) + \cos 2x\ u_2'(x) + \operatorname{sen} 2x\ u_3'(x) &= 0\\
(0)\, u_1'(x) + (-2\operatorname{sen} 2x) u_2'(x) + 2\cos 2x\ u_3'(x) &= 0\\
(0)\, u_1'(x) + (-4\cos 2x)\, u_2'(x) + (-4\operatorname{sen} 2x)\, u_3'(x) &= 8\cot 2x
\end{aligned}$$

Ahora requerimos determinar W, W_1, W_2 y W_3, entonces

$$\begin{aligned}
W(x) &= \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ 0 & -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \\ 0 & -4\cos 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}\\
&= 1 \begin{vmatrix} -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \\ -4\cos 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} - \cos 2x \begin{vmatrix} 0 & 2\cos 2x \\ 0 & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} + \operatorname{sen} 2x \begin{vmatrix} 0 & -2\operatorname{sen} 2x \\ 0 & -4\cos 2x \end{vmatrix}\\
&= 1\left[(-2\operatorname{sen} 2x)(-4\operatorname{sen} 2x) - (-4\cos 2x)\, 2\cos 2x\right]\\
&\qquad - \cos 2x\left[0\,(-4\operatorname{sen} 2x) - 0(2\cos 2x)\right]\\
&\qquad\qquad + \operatorname{sen} 2x\left[0\,(-4\cos 2x) - 0\,(-2\operatorname{sen} 2x)\right]\\
W(x) &= 8,
\end{aligned}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ 0 & -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \\ 8\cot 2x & -4\cos 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}$$

$$= 0\begin{vmatrix} -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \\ -4\cos 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} - \cos 2x \begin{vmatrix} 0 & 2\cos 2x \\ 8\cot 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}$$

$$+ \operatorname{sen} 2x \begin{vmatrix} 0 & -2\operatorname{sen} 2x \\ 8\cot 2x & -4\cos 2x \end{vmatrix}$$

$$W_1(x) = 0\left[(-2\operatorname{sen} 2x)(-4\operatorname{sen} 2x) - (-4\cos 2x)\, 2\cos 2x\right]$$

$$- \cos 2x \left[0\,(-4\operatorname{sen} 2x) - 8\cot 2x\,(2\cos 2x)\right]$$

$$+ \operatorname{sen} 2x \left[0\,(-4\cos 2x) - 8\cot 2x\,(-2\operatorname{sen} 2x)\right]$$

$$= 16\cos 2x\left(\operatorname{sen} 2x + \frac{\cos^2 2x}{\operatorname{sen} 2x}\right)$$

$$W_1(x) = \frac{16\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \operatorname{sen} 2x \\ 0 & 0 & 2\cos 2x \\ 0 & 8\cot 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 0 & 2\cos 2x \\ 8\cot 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2\cos 2x \\ 0 & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} + \operatorname{sen} 2x \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8\cot 2x \end{vmatrix}$$

$$= 1\left[(0)(-4\operatorname{sen} 2x) - (8\cot 2x)\, 2\cos 2x\right]$$

$$- 0\left[0\,(-4\operatorname{sen} 2x) - 0(2\cos 2x)\right]$$

$$+ \operatorname{sen} 2x \left[0\,(8\cot 2x) - 0\,(0)\right]$$

$$W_2(x) = -16\cot 2x\,\cos 2x,$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & 0 \\ 0 & -2\operatorname{sen} 2x & 0 \\ 0 & -4\cos 2x & 8\cot 2x \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -2\operatorname{sen} 2x & 0 \\ -4\cos 2x & 8\cot 2x \end{vmatrix} - \cos 2x \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8\cot 2x \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & -2\operatorname{sen} 2x \\ 0 & -4\cos 2x \end{vmatrix}$$

$$= 1\left[(-2\operatorname{sen} 2x)(8\cot 2x) - (-4\cos 2x)\,0\right]$$

$$- \cos 2x\left[0\,(8\cot 2x) - 0(0)\right]$$

$$+ 0\left[0\,(-4\cos 2x) - 0\,(-2\operatorname{sen} 2x)\right]$$

$$W_3(x) = -16\cos 2x,$$

donde la solución del sistema es

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{\dfrac{16\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}}{8} = \frac{2\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{-16\cot 2x\ \cos 2x}{8} = -2\cot 2x\ \cos 2x$$

$$u_3'(x) = \frac{W_3}{W} = \frac{-16\cos 2x}{8} = -2\cos 2x.$$

Integrando u_1', u_2' y u_3' tenemos

$$u_1(x) = \int u_1'(x)dx = \int \frac{2\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}dx = \ln|\operatorname{sen} 2x| + k_1$$

$$u_2(x) = \int u_2'(x)dx = \int -2\cot 2x\ \cos 2x dx = -\ln|\tan x| - \cos 2x + k_2,$$

$$u_3(x) = \int u_2'(x)dx = \int -2\cos 2x dx = -\operatorname{sen} 2x + k_3.$$

Sustituyendo u_1, u_2 y u_3 en (4.113)

$$y_p(x) = \ln|\operatorname{sen} 2x| + k_1 + (-\ln|\tan x| - \cos 2x + k_2)\cos 2x + (-\operatorname{sen} 2x + k_3)\operatorname{sen} 2x.$$

Sea $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, entonces una solución particular ésta dada por

$$y_p(x) = \ln|\operatorname{sen} 2x| - \cos 2x\ \ln|\tan x| - 1$$

como -1 es linealmente dependiente con un término del conjunto fundamental de soluciones (-1 es removido), entonces

$$y_p(x) = \ln|\operatorname{sen} 2x| - \cos 2x\ \ln|\tan x|.$$

Ejemplo 4.6.8. Resuelve la ecuación diferencial

$$y''' + 4y' = 8\cot 2x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada $y''' + 4y' = 0$ es $\lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 0 \pm 2i$ (donde $\alpha = 0$ y $\beta = 2$), entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{1, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x\}$. La respuesta impulsiva está dada por (4.74), ya que $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$, entonces

$$g(x) = \frac{1 - \cos 2x}{4}$$

Si $x_0 = \frac{\pi}{6} \in I$ en (4.3.1), entonces una solución particular está dada por

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} \left(\frac{1 - \cos 2(x-t)}{4}\right) 8\cot 2t\, dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} 2\cot 2t\, dt - \cos 2x \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} 2\cos 2t\ \cot 2t\, dt - \operatorname{sen} 2x \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} 2\operatorname{sen} 2t\ \cot 2t\, dt \\
&= \ln|\operatorname{sen} 2t|\Big|_{t=\frac{\pi}{6}}^{t=x} - \cos 2x\,(\ln|\tan t| + \cos 2t)\Big|_{t=\frac{\pi}{6}}^{t=x} - \operatorname{sen} 2x\,(\operatorname{sen} 2t)\Big|_{t=\frac{\pi}{6}}^{t=x} \\
&= \ln|\operatorname{sen} 2x| - \ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x\left(\ln|\tan x| + \cos 2x - \ln\left(\tan\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&\qquad - \operatorname{sen} 2x\left(\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
y_p(x) &= \ln|\operatorname{sen} 2x| - \cos 2x \ln|\tan x| - \left(1 + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\
&\qquad + \left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{1}{2}\right)\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 2x,
\end{aligned}$$

como $-\left(1 + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$, $\left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{1}{2}\right)\cos 2x$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 2x$ cada uno de ellos es linealmente dependiente solo con un término del conjunto fundamental de soluciones, entonces

$$y_p(x) = \ln|\operatorname{sen} 2x| - \cos 2x \ln|\tan x|.$$

La solución particular de los ejemplos 4.6.6, 4.6.8 obtenida utilizando el método de respuesta impulsiva es igual a la solución particular de los ejemplos 4.6.5, 4.6.7 obtenida con el método de variación de parámetros. Sin embargo, el procedimiento para hallar la solución particular a través de la respuesta impulsiva resulta menos trabajosa que la de variación de parámetros.

V. CONCLUSIONES

- En el presente trabajo de investigación se obtuvo la solución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes de segundo, tercer y n-ésimo orden mediante la respuesta impulsiva. Dicha solución está garantizada por los teoremas 4.2.3, 4.3.1 y 4.4.1.

- Se ha realizado un análisis detallado de cómo hallar la solución particular de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes de segundo y tercer orden mediante la respuesta impulsiva. Del análisis se tiene las fórmulas (4.12), (4.45) y (4.72), que son una herramienta que ayudará a obtener soluciones particulares.

- Se puede concluir que el método de respuesta impulsiva es menos trabajosa que el método de variación de parámetros para ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes de segundo y tercer orden.

VI. RECOMENDACIONES

- Existen numerosos artículos sobre el análisis de ecuaciones diferenciales, en los que se presentan nuevas técnicas para su resolución. En estudios futuros, se recomienda presentar esas nuevas técnicas de resolución.

- En este trabajo de investigación se demostró que la respuesta impulsiva está relacionada con las raíces de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial lineal homogénea. Por lo tanto, se recomienda determinar para qué tipo de raíces, la solución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas mediante la respuesta impulsiva es menos trabajosa que el método de variación de parámetros.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Tom M Apostol. *Calculus, Volume 1*. John Wiley & Sons, 1991.

[2] Vladimir I Arnold. *Ordinary differential equations*. Springer Science & Business Media, 1992.

[3] Roberto Camporesi. «An introduction to linear ordinary differential equations with constant coefficients using the impulsive response method and factorization.» En: (2015).

[4] Earl A Coddington. *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*. CE Continental, 1968.

[5] Vladimir Dobrushkin. *Applied differential equations with boundary value problems*. Chapman y Hall/CRC, 2017.

[6] Isabel Carmona Jover. *Ecuaciones diferenciales*. Pearson Educación, 1992.

[7] Luz Marina Moya y Edixon Rojas. *Ecuaciones diferenciales ordinarias: técnicas de resolución*. Universidad Nacional de Colombia, 2021.

[8] R Kent Nagle, Edward B Saff y Arthur David Snider. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación, 2000.

[9] Josefa Perdomo-Díaz. «Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología». En: *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas* 78 (2011), págs. 113-134.

[10] Murray H Protter, B Charles Jr et al. *Intermediate calculus*. Springer Science, 1985.

[11] Shepley Ross. *Introduction to ordinary differential equations*. 1989.

[12] Jorge Manuel Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Inst. de matemática pura e aplicada, 1979.

[13] James Stewart. *Essential calculus: Early transcendentals*. Brooks/Cole, a part of the Thomson Corporation, 2007.

[14] George Brinton Thomas y Maurice D Weir. *Cálculo: una variable*. Pearson Educación, 2005.

[15] Stephen A Wirkus y Randall J Swift. *A course in ordinary differential equations*. CRC press, 2006.

[16] Dennis G Zill et al. *Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones de modelado*. Mexico: Cengage Learning, 2002.

ANEXOS

ANEXO 1: Algunas propiedades del análisis matemático

Teorema fundamental del álgebra

Toda ecuación polinómica de grado $n \geq 1$ se puede expresar de la siguiente forma

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0, \tag{A.1}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes.

Teorema A.1 ([14])**.** Toda ecuación polinómica de la forma

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son cualesquiera números complejos, cuyo grado $n \geq 1$, y cuyo coeficiente principal $a_0 \neq 0$, tiene exactamente n raíces en el sistema de números complejos.

Según este teorema, $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ puede expresarse de la siguiente manera

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = a_0 (z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n), \tag{A.2}$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$.

Fórmulas de Vieta

Teorema A.2. Sea

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \tag{A.3}$$

un polinomio de grado $n \geq 1$ definida en los números complejos. Entonces, los números complejos $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son raíces del polinomio $p(z)$ si y sólo si satisfacen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
&r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{a_1}{a_0}\\
&r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n = \frac{a_2}{a_0}\\
&\vdots\\
&\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{k} r_{i_j}\right) = (-1)^k\frac{a_k}{a_0}\\
&\vdots\\
&r_1r_2\cdots r_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Teorema fundamental del cálculo

Si $f(t)$ es una función integrable en un intervalo finito I, entonces la integral desde cualquier número fijo $a \in I$ a otro número $x \in I$ define una nueva función F cuyo valor en x es

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Teorema A.3 ([14])**.** Si f es continua en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y su derivada es $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x). \tag{A.5}$$

Teorema A.4 ([14])**.** Si f es continua en todo punto en $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{A.6}$$

Reemplazando b por x y x por t en la ecuación (A.6) se obtiene

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a). \tag{A.7}$$

Teorema del valor medio

Teorema A.5 ([13]). Si f es continua en $[a, b]$, además f es diferenciable en (a, b). Entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema A.6 ([13]). Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \tag{A.8}$$

Derivación bajo el signo integral

Definición A.1 ([10]). Sea $f(x, t)$ una función delimitada sobre el rectángulo

$$R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d, \;\; a \leq t \leq b\}$$

La función $\phi(x)$ definida por la integral

$$\phi(x) = \int_a^b f(x, t)dt$$

se llama integral dependiente de un parámetro.

Teorema A.7 ([10]). Sea f una función continua definida en el rectángulo

$$R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d, \;\; a \leq t \leq b\}.$$

Entonces

$$\phi(x) = \int_a^b f(x, t)dt \tag{A.9}$$

es continua en $[c, d]$.

Teorema A.8 ([10]). Sea $f(x, t)$ y $\partial f/\partial x$ funciones continuas en el rectángulo $R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d, \;\; a \leq t \leq b\}$. Entonces ϕ es derivable en $[c, d]$

$$\phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)dt$$

Demostración. Tenemos

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\frac{\int_a^b f(x+h,t)dt-\int_a^b f(x,t)dt}{h}=\int_a^b \frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}dt. \tag{A.10}$$

Ahora, por el teorema del valor medio

$$\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}=\frac{\partial}{\partial x}f(\xi,t)$$

donde $\xi \in (x,x+h)$, restando $\partial f/\partial x$ en ambos miembros

$$\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}-\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}f(\xi,t)-\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)$$

$$\int_a^b\left(\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}-\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right)dt=\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial x}f(\xi,t)-\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right)dt$$

Por la desigualdad del valor absoluto para integrales, se tiene

$$\left|\int_a^b \frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}dt-\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt\right|\leq \int_a^b\left|\frac{\partial}{\partial x}f(\xi,t)-\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right|dt$$

Por (A.10)

$$\left|\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}-\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt\right|\leq \int_a^b\left|\frac{\partial}{\partial x}f(\xi,t)-\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right|dt \tag{A.11}$$

como $\frac{\partial}{\partial x}f$ es continua en la región cerrada R, entonces $\frac{\partial}{\partial x}f$ es uniformemente continua en R. Sea para cualquier $\epsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que para todo (x,t) y (ξ,t) en R se cumple

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}f(\xi,t)-\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right|<\epsilon$$

si $|(x,t)-(\xi,t)|<\delta$. Como $\frac{\partial}{\partial x}f$ es uniformemente continua, entonces δ solo depende de ϵ, por lo que podemos elegir un δ de modo que

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}f(\xi,t)-\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right|<\frac{\epsilon}{b-a} \quad \text{cuando} \quad 0<|h|<\delta.$$

Aplicando la integral

$$\int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) \right| dt < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dt$$

$$\int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) \right| dt < \epsilon.$$

Utilizamos este resultado en (A.11)

$$\left| \frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) \right| dt < \epsilon$$

Entonces

$$\left| \frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt \right| < \epsilon \text{ cuando } 0 < |h| < \delta.$$

Por lo tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = \phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

□

Teorema A.9 ([10])**.** Supongamos que $f(x,t)$ y $\partial f/\partial x$ son funciones continuas en el rectángulo $R = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \;\; c \leq t \leq d\}$, y supongamos que $u_0(x), u_1(x)$ son continuamente diferenciable para $a \leq x \leq b$ y con el rango de u_0 y u_1 en (c,d). Si ϕ está dado por

$$\phi(x) = \int_{u_0(x)}^{u_1(x)} f(x,t)dt,$$

entonces ϕ' está dado por

$$\phi'(x) = f(x, u_1(x))u_1'(x) - f(x, u_0(x))u_0'(x) + \int_{u_0(x)}^{u_1(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt. \tag{A.12}$$

Demostración. Sea $x_0 \in [a,b]$, entonces se tiene

$$\phi(x) = \int_{u_0(x)}^{u_1(x)} f(x,t)dt = \int_{u_0(x_0)}^{u_1(x_0)} f(x,t)dt + \int_{u_1(x_0)}^{u_1(x)} f(x,t)dt - \int_{u_0(x_0)}^{u_0(x)} f(x,t)dt \tag{A.13}$$

por el teorema A.8, la derivada del primer término del lado derecho de la ecuación se expresa como

$$\int_{u_0(x_0)}^{u_1(x_0)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt.$$

Sea el segundo término de (A.13) igual a $\phi_1(x)$, entonces se tiene

$$\frac{\phi_1(x)-\phi_1(x_0)}{x-x_0} = \frac{\displaystyle\int_{u_1(x_0)}^{u_1(x)} f(x,t)dt - \int_{u_1(x_0)}^{u_1(x_0)} f(x,t)dt}{x-x_0} = \frac{\displaystyle\int_{u_1(x_0)}^{u_1(x)} f(x,t)dt}{x-x_0}.$$

Por el teorema del valor medio para integrales

$$\frac{\phi_1(x)-\phi_1(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}(u_1(x)-u_1(x_0))f(x,\xi),$$

donde ξ se puede representar como: $\xi = u_1(x_0+(x-x_0)\theta)$ con $0 \leq \theta \leq 1$. A continuación aplicamos el limite cuando x tiende a x_0

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\phi_1(x)-\phi_1(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{u_1(x)-u_1(x_0)}{x-x_0} \lim_{x\to x_0} f(x, u_1(x_0+(x-x_0)\theta)),$$

esto resulta

$$\phi_1'(x_0) = u_1'(x_0)f(x_0, u_1(x_0)).$$

Sea el tercer término de (A.13) igual a $\phi_2(x)$ y del resultado que se obtuvo para $\phi_1(x)$, entonces se tiene

$$\phi_2'(x_0) = u_0'(x_0)f(x_0, u_0(x_0)).$$

Como x_0 es un valor arbitrario en $[a,b]$, entonces

$$\phi'(x) = \int_{u_0(x)}^{u_1(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt + f(x,u_1(x))u_1'(x) - f(x,u_0(x))u_0'(x).$$

$\square$

Integrales dobles

Una integral doble tiene la siguiente forma

$$\iint_D f(x,y)dA$$

donde D es llamado región de integración y D pertenece al plano (x, y).

Teorema A.10. Si f es una función continua en el rectángulo

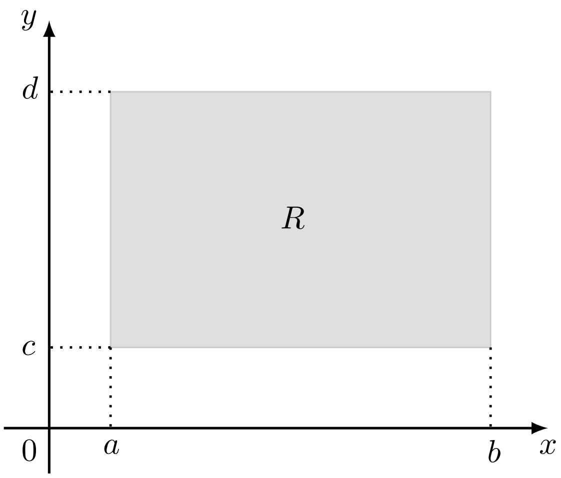
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \ c \leq y \leq d\},$$

entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

Figura 5

Región rectangular $R = [a, b] \times [c, d]$



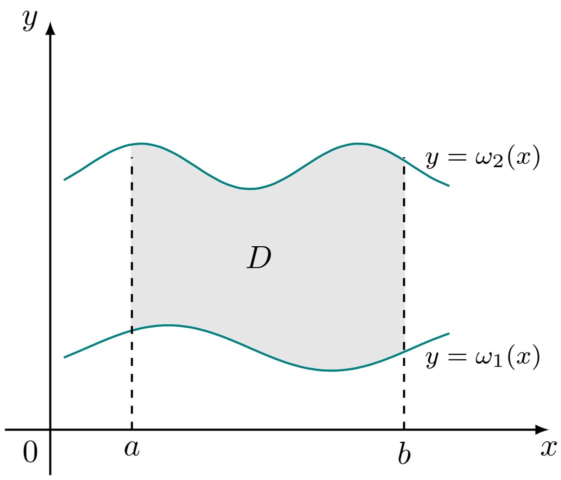
Definición A.2 ([13])**.** Una región D es de tipo I si se encuentra entre las gráficas de dos funciones continuas de x , es decir

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \ \omega_1(x) \leq y \leq \omega_2(x)\}$$

donde ω_1 y ω_2 son funciones continuas en $[a, b]$.

Figura 6

Región D de tipo I



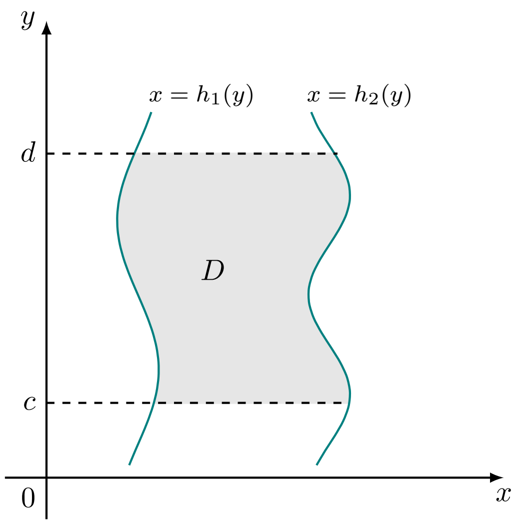
Definición A.3 ([13])**.** Una región D es de tipo II si se encuentra entre las gráficas de dos funciones continuas de y , es decir

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son funciones continuas en $[c, d]$.

Figura 7

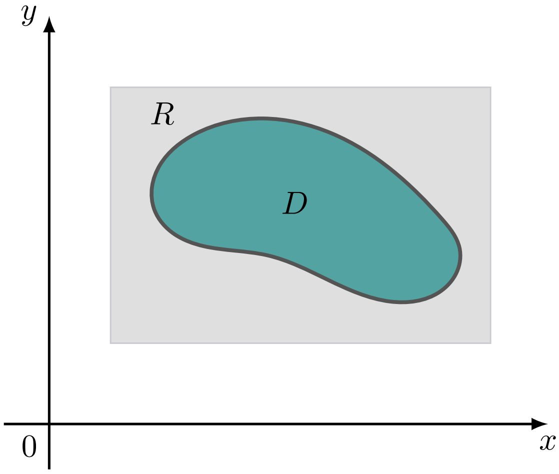
Región D de tipo II



Supongamos que D es una región acotada, es decir que D puede ser encerrada en una región rectangular R tal que $D \subseteq R$ (ver Figura 8).

Figura 8

Regiones D y R ($D \subseteq R$)



Entonces definimos una nueva función f^* con dominio en el rectángulo R, de la siguiente manera

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{si } (x,y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$

Si f^* es integrable en R, entonces definimos la integral doble de f en D como

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R f^*(x,y)dA.$$

Teorema A.11 ([13])**.** Si f es continua en la región D de tipo I tal que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \ \omega_1(x) \leq y \leq \omega_2(x)\}$$

donde $\omega_1(x)$ y $\omega_2(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$, entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{\omega_1(x)}^{\omega_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Demostración. Sea R un rectángulo que contenga a D, donde D es una región de tipo I como se observa en la figura 9 y sea f^* la función definida por

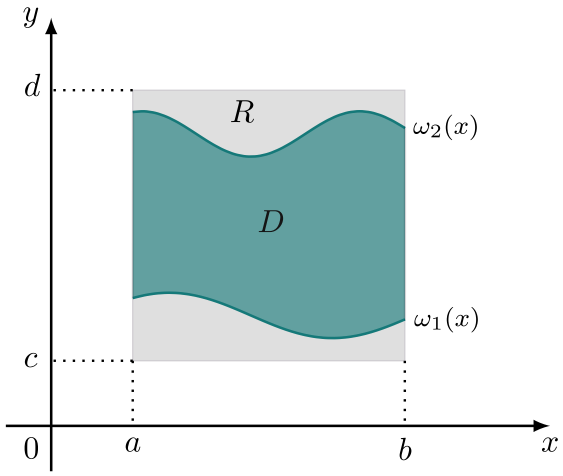
$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{si } (x,y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$

Entonces, por el teorema A.10

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R f^*(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_a^b f^*(x,y)dx \right) dy.$$

Figura 9

Regiones D y R ($D \subseteq R$) y las funciones $\omega_1(x)$ y $\omega_2(x)$



Si $y < \omega_1(x)$ o $y > \omega_2(x)$, entonces $f^*(x,y) = 0$, porque (x,y) está fuera de la región D. Además, $f^*(x,y) = f(x,y)$ en la región D, porque $\omega_1(x) \leq y \leq \omega_2(x)$. Por lo tanto

$$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_{\omega_1(x)}^{\omega_2(x)} f^*(x,y)dy = \int_{\omega_1(x)}^{\omega_2(x)} f(x,y)dy.$$

$\square$

Teorema A.12 ([13]). Si f es continua en la región D de tipo II tal que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\;\; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde $h_1(y)$ y $h_2(y)$ son funciones continuas en $[c,d]$, entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

La demostración del teorema A.12 es similar a la del teorema A.11.

ANEXO 2: Declaración jurada de autenticidad de tesis

Universidad Nacional del Altiplano Puno | VRI Vicerrectorado de Investigación | Repositorio Institucional

DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo WILMER ISAAC APAZA MEDINA, identificado con DNI 44286498 en mi condición de egresado de:

☒ **Escuela Profesional,** ☐ **Programa de Segunda Especialidad,** ☐ **Programa de Maestría o Doctorado**

CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS,

informo que he elaborado el/la ☒ **Tesis** o ☐ **Trabajo de Investigación** denominada:
"RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES NO HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES: MEDIANTE EL MÉTODO DE RESPUESTA IMPULSIVA USANDO FACTORIZACIÓN"

Es un tema original.

Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y **no existe plagio/copia** de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como suyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno 29 de agosto del 2024

FIRMA (obligatoria)

Huella

ANEXO 3: Autorización para el depósito de tesis en el Repositorio Institucional

Universidad Nacional del Altiplano Puno | Vicerrectorado de Investigación | Repositorio Institucional

AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo WILHER ISAAC APAZA MEDINA,
identificado con DNI 44286198 en mi condición de egresado de:

☒ **Escuela Profesional,** ☐ **Programa de Segunda Especialidad,** ☐ **Programa de Maestría o Doctorado**

CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS,

informo que he elaborado el/la ☒ **Tesis** o ☐ **Trabajo de Investigación** denominada:

"RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES NO HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES: MEDIANTE EL MÉTODO DE RESPUESTA IMPULSIVA USANDO FACTORIZACIÓN"

para la obtención de ☐**Grado,** ☒ **Título Profesional** o ☐ **Segunda Especialidad.**

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los "Contenidos") que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia:

Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno 29 de agosto del 2024

FIRMA (obligatoria)

Huella