UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA GEOLÓGICA Y METALÚRGICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA GEOLÓGICA

ANÁLISIS MATRICIAL PARA LA ESTABILIDAD DE TALUDES MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y SU APLICACIÓN EN LA PROGRESIVA 1+960 AL 2+640 DE LA VIA ARTICULACIÓN - JULIACA

TESIS

PRESENTADA POR:

Bach. YEVET SACACHIPANA CHIPANA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO GEÓLOGO

PUNO - PERÚ

2024

YEVET SACACHIPANA CHIPANA

ANÁLISIS MATRICIAL PARA LA ESTABILIDAD DE TALUDES MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y SU A

My Files

My Files

Universidad Nacional del Altiplano

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::8254:414373610

Fecha de entrega

9 dic 2024, 4:30 p.m. GMT-5

Fecha de descarga

9 dic 2024, 4:40 p.m. GMT-5

Nombre de archivo

Yevet Sacachipana Chipana.pdf

Tamaño de archivo

6.2 MB

263 Páginas

50,666 Palabras

259,906 Caracteres

5% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- Bibliografía
- Texto citado
- Texto mencionado
- Coincidencias menores (menos de 15 palabras)

Exclusiones

- N.º de coincidencias excluidas

Fuentes principales

4% Fuentes de Internet
0% Publicaciones
3% Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

Caracteres reemplazados
155 caracteres sospechosos en N.º de páginas
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO – Escuela Profesional de Ingeniería Geológica – DIRECCIÓN – FIGIM - UNA

Dr. Leonel Palomino Ascencio
DIRECTOR DEL PROGRAMA DE ESTUDIOS
INGENIERÍA GEOLÓGICA - UNA

Escuela Profesional de Ingeniería – DIRECCIÓN – FIGIM - UNA

COORDINADOR INVESTIGACIÓN
E.P. INGENIERÍA GEOLÓGICA

DEDICATORIA

A Dios*, por ser mi guía en cada paso que doy, iluminando mi camino en los momentos más difíciles, por darme la fortaleza cuando más la necesitaba, por sostenerme en los momentos de debilidad y por brindarme la sabiduría. Su presencia me ha permitido enfrentar los desafíos con fe y confianza, sabiendo que bajo su cuidado y protección no hay obstáculos imposibles de superar.*

A mi madre, María Chipana, porque su amor y dedicación han sido el pilar fundamental en mi vida. Gracias, mamá, por tus innumerables sacrificios, por enseñarme a nunca rendirme y por tu apoyo incondicional en los momentos más difíciles. Tu fuerza y determinación han sido mi mayor inspiración, y todo lo que he logrado es reflejo de los valores que me inculcaste.

A mis hermanos, A Iván, por su compañerismo y ejemplo de superación; y a Yimi, por su constante ánimo y confianza en mí. Ambos han sido mi apoyo emocional en los momentos de duda, y su presencia me ha motivado a dar siempre lo mejor de mí. Este logro es tan suyo como mío.

A mis abuelitos, quienes desde mi infancia me brindaron su sabiduría, cariño y consejos. A Martín Chipana, por ser un ejemplo de esfuerzo y trabajo constante, por enseñarme a perdonar, mostrándome que el perdón es un acto de fortaleza y liberación y a Cirila Yucra, por su ternura, sus palabras de aliento y sus enseñanzas llenas de amor. Sus historias y experiencias de vida me han dado la fuerza para persistir, aun cuando el camino se tornaba difícil.

A cada uno de ustedes, les dedico este trabajo con el corazón lleno de gratitud.

Yevet Sacachipana Chipana

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento a la Universidad Nacional del Altiplano - Puno, mi Alma Mater, por ser el hogar que me ha acogido durante todos los años de mi formación académica y profesional. Su compromiso con la educación y su entorno académico han sido fundamentales en mi desarrollo.

A todo el cuerpo docente de la Escuela Profesional de Ingeniería Geológica, por compartir generosamente sus conocimientos y experiencias. Gracias por su dedicación y por estar siempre dispuestos a resolver mis dudas y preguntas, enriqueciendo mi formación con su valioso apoyo.

Al Dr. Leonel Palomino Ascencio, por su apoyo incondicional y desinteresado. Su orientación y asesoría han sido cruciales para la presentación y culminación de este proyecto de tesis. Su compromiso con mi desarrollo académico ha sido una inspiración constante.

Agradezco profundamente a los miembros del jurado, Ing. Dr. Ernesto Samuel Machacca Hancco, Dr. Roger Gonzales Aliaga y M.Sc. Milton Quispe Quispe, por su tiempo, dedicación y valiosas observaciones, las cuales enriquecieron significativamente esta investigación.

Agradecimiento especial a mi familia, quienes han sido mi mayor fuente de apoyo y fortaleza a lo largo de este arduo proceso. Su incondicional compañía, orientación y ejemplo han sido fundamentales para mantenerme enfocado y perseverante en la consecución de mis metas.

Yevet Sacachipana Chipana

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

CAPÍTULO IV

CARACTERIZACIÓN DEL ÁREA DE ESTUDIO

CAPÍTULO V

RESULTADOS Y DISCUCIÓN

ÁREA: Ingeniería Geotécnica

LÍNEA: Estabilidad De Taludes

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 11 de diciembre 2024

ÍNDICE DE FIGURAS

Pág.

ÍNDICE DE TABLAS

Pág.

ACRÓNIMOS

MEF	: Método de los elementos finitos.
F	: Fuerza.
E_p	: Energía potencial.
dE_p	: Variación de la energía potencial.
dx	: Variación del desplazamiento.
σ	: Esfuerzo.
A, S	: Área.
ΔF	: Variación de la fuerza.
ΔA , ΔS	: Variación del área.
L_0	: Longitud inicial.
ΔL	: Variación de longitud.
σ_x	: Esfuerzo normal en el eje x.
σ_y	: Esfuerzo normal en el eje y.
σ_z	: Esfuerzo normal en el eje z.
τ_{xy}	: Esfuerzo cortante en el plano xy (torsión).
τ_{yz}	: Esfuerzo cortante en el plano yz (torsión).
τ_{zx}	: Esfuerzo cortante en el plano zx (torsión).
δ	: Desplazamiento.
ε	: Deformación.
L	: Longitud.
E	: Módulo de Young.
v	: Coeficiente de Poisson.
du	: Incremento o variación del desplazamiento en u.

ε_x	: Deformación en el eje x.
ε_y	: Deformación en el eje y.
ε_z	: Deformación en el eje z.
γ_{xy}	: Deformación angular en el plano xy.
γ_{yz}	: Deformación angular en el plano yz.
γ_{zx}	: Deformación angular en el plano zx.
G	: Coeficiente de Lamé.
ε_p	: Deformación perpendicular.
ε_a	: Deformación axial.
$[A]$	: Matriz A.
a_{ij}	: Elementos de la matriz A.
λ	: Escalar de la Matriz.
$\|A\|$	: Determinante de la matriz A.
M_{ij}	: Matriz de cofactores.
$adj\ A$	: Matriz adjunta de A.
$[A]^t$	: Matriz transpuesta.
$[A]^{-1}$	: Matriz inversa.
$<$	: Mayor que.
$>$	: Menor que.
m	: Metro.
cm	: Centímetro.
MPa	: Mega pascales.
KPa	: Kilo pascales.
Tn	: Toneladas.
Kg/m^2	: Kilogramos por metro cuadrado.

FEA	: Finite Element Análysis. (Días, 2019)
CAD	: Computer Aided Design.
EDP	: Ecuaciones diferenciales parciales.
F_e	: Fuerza externa.
$[K_e]$	: Matriz de rigidez
$[B]$	: Matriz de deformación del elemento
$[D]$	: Matriz constitutiva.
t	: Espesor del talud.
V	: Volumen.

RESUMEN

El análisis matricial de taludes accionados por la potencia del escarpe superior mediante el método de los elementos finitos y su aplicación en la progresiva 1+960 al 2+640 de la vía articulación -Juliaca, tendrá como objetivo, desarrollar el análisis matricial para la estabilidad de taludes mediante el método de los elementos finitos en su forma bidimensional para elementos triangulares, este desarrollo permitirá obtener un modelo matemático capaz de determinar cálculos de desplazamientos nodales, esfuerzos y deformaciones, este método se puede formular de distintas maneras, pero en esta investigación se realiza mediante el planteamiento directo a través de matrices de rigidez. La metodología de investigación aplicada tiene un enfoque cuantitativo de tipo descriptiva y aplicativa, con diseño experimental debido a que se realizan ensayos de laboratorio. La aplicación se centró en las progresivas 2+520, 2+540 y 2+560, logrando determinar los desplazamientos nodales, deformaciones y esfuerzos. En 2+520 los desplazamientos verticales alcanzan hasta -0.006930944 cm en los nodos $v12$ y $v13$, en 2+540 los nodos $v5$ y $v7$ de hasta -0.002162892 cm, en 2+560 los nodos $v2$ y $v4$ hasta -0.00662437 cm, sugiriendo debilidad estructural en estas zonas. Los nodos horizontales presentan desplazamientos mínimos. Los ε y σ muestran que los elementos 10, 11 y 7 son los más críticos en 2+520, en 2+540 los elementos 13 y 14 y en 2+560 el elemento 14 también presenta las mayores deformaciones, mientras que los elementos 1, 2, 3 y 12 de los tres taludes muestran estabilidad. Los resultados también indican que los taludes analizados corresponden a macizos rocosos de clase II con calidad buena, presentando valores de RMR 61.4, 61.8, 62.3 y GSI 63.6, 63.4 y 64.2, UCS de 95.04 MPa, 105.97 MPa y 106.13 MPa, módulo de elasticidad E de 13.86329 GPa, 14.47120 GPa y 15.16465 GPa y coeficiente de poisson v de 0.2170, 0.2174 y 0.2158 respectivamente.

Palabras Clave: Análisis Matricial, Elementos Finitos, Geotecnia, Taludes.

ABSTRACT

The matrix analysis of slopes driven by the power of the upper escarpment using the finite element method and its application in the progressive 1+960 to 2+640 of the articulation -Juliaca road, will have as objective, to develop the matrix analysis for the stability of slopes using the finite element method in its two-dimensional form for triangular elements, This development will allow to obtain a mathematical model capable of determining calculations of nodal displacements, stresses and deformations, this method can be formulated in different ways, but in this research is done by the direct approach through stiffness matrices. The applied research methodology has a quantitative approach of a descriptive and applicative type, with an experimental design due to the fact that laboratory tests are carried out. The application was centred on the 2+520, 2+540 and 2+560 progressions, and it was possible to determine the nodal displacements, deformations and stresses. In 2+520 the vertical displacements reach up to -0.006930944 cm in nodes v12 and v13, in 2+540 nodes v5 and v7 up to -0.002162892 cm, in 2+560 nodes v2 and v4 up to -0.00662437 cm, suggesting structural weakness in these areas. The horizontal nodes show minimal displacements. The ε and σ show that elements 10, 11 and 7 are the most critical at 2+520, at 2+540 elements 13 and 14 and at 2+560 element 14 also shows the largest deformations, while elements 1, 2, 3 and 12 of the three slopes show stability. The results also indicate that the slopes analysed correspond to Class II rock masses with good quality, presenting RMR values of 61.4, 61.8, 62.3 and GSI 63.6, 63.4 and 64. 2, UCS of 95.04 MPa, 105.97 MPa and 106.13 MPa, modulus of elasticity E of 13.86329 GPa, 14.47120 GPa and 15.16465 GPa and poisson's coefficient v of 0.2170, 0.2174 and 0.2158 respectively.

Keywords: Matrix Analysis, Finite Element Analysis, Geotechnics, Slopes.

1 CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

La estabilidad de los taludes es un aspecto esencial en la ingeniería geotécnica. El análisis matricial de taludes sería una herramienta eficaz para evaluar y predecir la interpretación de los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos de los suelos y rocas en pendientes, así como taludes, presas, carreteras, cimentaciones y demás proyectos. En este contexto, (ELENA BLANCO, 2015) junto a Miguel Cervera desarrollaron un libro para aquellos que están interesados en el análisis y diseño de estructuras de barras y columnas utilizando métodos matriciales, en ello fundamentan y sustentan de manera clara y rigurosa a través del análisis estructural, enfatizando especialmente el desarrollo del método de matrices de rigidez, por lo tanto en la presente investigación, el nexo entre el método matricial y el método de los elementos finitos ha establecido ser una técnica eficaz para analizar y resolver dificultades geotécnicos en cuanto se refiere a desplazamientos, deformaciones y esfuerzos.

Así mismo, uno de los propósitos de esta tesis es desarrollar la formulación matricial del método de los elementos finitos utilizando elementos triangulares bidimensionales, para luego aplicar y estudiar la estabilidad de un talud que se encuentra en la vía articulación - Juliaca, abarcando desde la progresiva 1+960 hasta la progresiva 2+640. Este tramo ha sido elegido debido a su importancia geotécnica y a la necesidad de evaluar su estabilidad con precisión. El estudio matricial de taludes por medio del método de los elementos finitos, faculta modelar el comportamiento del suelo o roca como un conjunto de elementos discretos, donde se consideran las particularidades mecánicas y geométricas de cada elemento. En este caso, se utilizarán elementos triangulares bidimensionales, que son especialmente adecuados para representar la geometría irregular del talud seleccionado.

El método de los elementos finitos se ha convertido en una herramienta esencial para el análisis de la estabilidad de taludes. Su uso permite evaluar de manera precisa y detallada el comportamiento del talud bajo diferentes condiciones de carga y escenarios geotécnicos, considerando tanto el comportamiento lineal como no lineal del suelo. Este método permite aproximar e identificar exclusivamente el análisis de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en el talud, lo que proporciona información crucial para la toma de decisiones que garanticen la seguridad y estabilidad de las obras.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El presente trabajo de investigación se expone en base a la inestabilidad de taludes que se suscitan en muchos frentes de corte, ya que estos generalmente sufren de derrumbes, caídas de bloques de roca, deslizamiento de masas de tierra, entre otros, por la consecuencia de una serie de factores geológicos externos e internos que alteran la característica física de los macizos rocosos, lo cual traen consigo la pérdida de bienes materiales y en el peor de los casos la pérdida de vidas humanas. Estos impactos son un peligro latente en el territorio peruano y así mismo en nuestra región de Puno, como es el caso de la provincia de san Román, en la reciente construcción de la carretera denominada Vía Articulación de la progresiva 1+960 al 2+640 se observan taludes que están sufriendo deterioros propensos a deslizamientos, por las pronunciadas pendientes que estos taludes poseen.

En la actualidad es cierto que hay una gran variedad de métodos de estabilidad de taludes, pero en cierto modo las aplicaciones de estos métodos tradicionales no tienen en cuenta las deformaciones del comportamiento de los macizos rocosos como es el caso del talud, a pesar de que existen herramientas avanzadas para su aplicación y además estos métodos se formulan para características y parámetros específicas de roca o suelo.

La contrariedad, también es la falta de gestión de riesgos en estudios geológicos para su construcción, muchos cortes de taludes en obras de ingeniería no cuentan con el respectivo estudio geológico, geotécnico y geomecánico por la mera idea falsa de que la investigación de los estudios de rocas y suelos serían costosos, sin comprender que es lo contrario.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Estos hechos y situaciones nos conllevan a realizar investigaciones, a buscar y estudiar más métodos y técnicas para el análisis de estabilización de taludes, es por eso que en este proyecto de investigación se plantea realizar el análisis matricial de la estructura del talud mediante los elementos finitos y su aplicación en la progresiva 1+960 al 2+640 de la vía Articulación de la ciudad de Juliaca, para poder determinar los desplazamientos nodales, las deformaciones y esfuerzos. Acorde a la situación problemática expuesta se plantea las siguientes interrogantes:

1.2.1 Pregunta general

¿Cómo será el desarrollo del análisis matricial para la estabilidad de taludes mediante el método de elementos finitos y su aplicación en la progresiva 1+960 al 2+640 de la Vía articulación – Juliaca?

1.2.2 Preguntas específicas

- ¿Cómo será el desarrollo del método de elementos finitos, para elementos triangulares bidimensionales matricialmente?

- ¿Cuál es la clasificación geomecánica del macizo rocoso, para lograr escalar y determinar el módulo de elasticidad y el coeficiente de poisson?

- ¿Cuáles serán los desplazamientos nodales, las deformaciones y los esfuerzos en el análisis matricial del talud aplicado por medio del método de elementos finitos?

1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación, titulada "Análisis matricial de taludes accionados por la potencia del escarpe superior mediante el método de los elementos finitos y su aplicación en la progresiva 1+960 al 2+640 de la vía articulación - Juliaca", es de vital importancia debido a los riesgos geotécnicos que se presentan. La inestabilidad de taludes en frentes de corte es un problema recurrente en la construcción de infraestructura vial, provocando derrumbes y deslizamientos que ponen en peligro tanto la seguridad de las personas como la integridad de las obras.

Los taludes inestables en la vía Articulación - Juliaca representan un peligro constante para la seguridad vial. La falta de un análisis riguroso y preciso de estas estructuras podría resultar en fallas catastróficas, con consecuencias graves para las comunidades locales y para la economía de la región. Este estudio responde a la necesidad de abordar esta problemática mediante una metodología avanzada, como es el Método de los Elementos Finitos (MEF), para obtener un análisis preciso y detallado de la estabilidad.

La investigación contribuye significativamente al campo de la ingeniería geotécnica, específicamente en la aplicación del MEF para elementos triangulares bidimensionales en taludes. La formulación matricial propuesta permite no solo calcular desplazamientos nodales, esfuerzos y deformaciones, sino también ofrece un enfoque innovador y preciso para el análisis de estructuras geotécnicas complejas. Este desarrollo metodológico amplía el conocimiento existente y proporciona una herramienta necesaria para futuros estudios y aplicaciones en ingeniería geológica.

El análisis matricial de taludes propuesto en esta tesis tiene un impacto directo en la práctica de la ingeniería geotécnica. Los resultados del estudio no solo ayudarán a mejorar la seguridad de la infraestructura vial en la progresiva 1+960 al 2+640, sino que también servirán como un modelo para otras regiones con condiciones geológicas similares. Además, la aplicación del sistema de clasificación Rock Mass Rating (RMR) y los ensayos de laboratorio proporcionan una caracterización precisa del macizo rocoso, lo que es crucial para la planificación y ejecución de proyectos de infraestructura segura y sostenible.

El estudio tiene un impacto social significativo al mejorar la seguridad vial y proteger la vida y los bienes de las personas que transitan por la vía Articulación - Juliaca. Además, la reducción de riesgos geotécnicos mediante un análisis detallado y preciso evitará pérdidas económicas derivadas de posibles fallas en los taludes. Esta investigación también contribuye a la concienciación sobre la importancia de realizar estudios geotécnicos y geomecánicos en proyectos de infraestructura, desafiando la percepción de que dichos estudios son innecesariamente costosos.

La viabilidad del estudio está garantizada por el acceso a herramientas numéricas avanzadas para la modelación mediante el MEF, así como por la disponibilidad de datos geotécnicos y geomecánicos recopilados a través de ensayos de laboratorio. Además, el enfoque cuantitativo y la metodología aplicada aseguran que los objetivos planteados se pueden alcanzar de manera efectiva dentro del marco temporal y de recursos disponibles.

En general, esta investigación, se centra en abordar la inestabilidad de taludes, ya que es un problema recurrente que pone en riesgo la seguridad vial y la infraestructura de la vía articulación en la provincia de San Román. Realizando el análisis matricial mediante Método de los Elementos Finitos (MEF) y la clasificación geomecánica detallada, el estudio ofrece una solución precisa para evaluar la estabilidad de taludes, calculando desplazamientos, esfuerzos y deformaciones. Más allá de su impacto práctico al mejorar la seguridad y reducir riesgos de derrumbes, esta investigación también contribuye al avance del conocimiento en ingeniería geotécnica y geológica, proporcionando mecanismos aplicables a proyectos de infraestructura en otras regiones con condiciones similares. La combinación de un enfoque teórico sólido con aplicaciones prácticas y la viabilidad del estudio respaldan la importancia de realizar esta tesis, que promete ser una referencia en la planificación y desarrollo de proyectos de infraestructura vial segura y sostenible.

1.4 HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

1.4.1 Hipótesis general

El desarrollo del Análisis Matricial para la estabilidad de taludes mediante el método de elementos finitos, se logra aplicar en el talud de la progresiva 1+960 al 2+640 de la vía Articulación – Juliaca.

1.4.2 Hipótesis específicas

- Analizando el método de los elementos finitos, se logra desarrollar el método para elementos triangulares bidimensionales, matricialmente.
- Al evaluar la clasificación geomecánica del macizo rocoso, se puede determinar el módulo de elasticidad y el coeficiente de poisson.

- Formulando el análisis matricial mediante el método de elementos finitos se logra determinar los desplazamientos nodales, deformaciones y esfuerzos.

1.5 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1 Objetivo general

Desarrollar el análisis matricial para la estabilidad de taludes mediante el método de elementos finitos y su aplicación en la progresiva 1+960 al 2+640 de la vía Articulación – Juliaca.

1.5.2 Objetivos específicos

- Desarrollar el método de los elementos finitos, para elementos triangulares bidimensionales, matricialmente.
- Realizar la clasificación geomecánica del macizo rocoso, para determinar el módulo de elasticidad y coeficiente de poisson.
- Determinar los desplazamientos nodales, deformaciones y esfuerzos del talud aplicado.

2 CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

(ALEJANDRO, 2020) realizó un estudio denominado, comienzos y adelantos en el método del elemento finito, dando a conocer la parte teórica e implementación del método en una dimensión, lo cual tiene un enfoque numérico para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDP) mediante aproximaciones definidas localmente llamados elementos. En este texto se presentan aplicaciones e implementaciones unidimensionales y también tiene una introducción hacia la implementación computacional del MEF.

(FRANK, 1985) Este libro está estructurado para que pueda utilizarse en cursos en los que el área de aplicación sea estrictamente el análisis de tensiones o el análisis térmico. Además, también es posible utilizar este libro sin cubrir ninguno de los materiales relacionados con el cálculo variacional. Esta estrategia es posible gracias al énfasis en el método Galerkin ponderado-residual en el análisis térmico de flujo de fluidos y el principio de desplazamientos virtuales en el análisis de tensiones. Por lo tanto, este libro es útil su la aplicación y uso de este texto.

(SEGERLIND, 1937) Es un libro muy importante ya que presenta la parte de la introducción del MEF cubre definiciones y conceptos, el texto presenta una aplicación al análisis estructural y a los problemas con elementos bidimensionales como, flujo de fluidos y la elasticidad de sólidos.

(DAVIS, 1976) En este libro se desarrolla la potencia de la metodología de elementos finitos cuando se utiliza con microordenadores y nanotecnologías, aunque su resolución gráfica y su memoria sean limitadas. En este libro se pretende potenciar los ordenadores digitales por medio del empleo del método (MEF)

(KARDESTUNCER) Fundamentos Matriciales de Estructuras, es uno de los libros sobre análisis estructural de hace algunos años atrás. Este texto de análisis estructural está orientado hacia el estudio de la solución de problemas específicos de estructuras. Este libro de Kardestuncer presenta los fundamentos necesarios para el análisis de estructuras por medio de un método general muy poderoso llamado "Método Matricial"

(SALIH) Es un texto que se desarrolló para estudiar las tensiones en estructuras aeronáuticas complejas; desde entonces se ha extendido y aplicado al amplio campo de la mecánica, incluida la mecánica de fluidos y sólidos. Debido a su capacidad para tratar problemas complejos y su flexibilidad como herramienta de análisis, el MEF ha adquirido un papel destacado en la ingeniería y el diseño.

(BELTRAN, 1998) El texto presenta un panorama global con relación al MEF aspectos y criterios de este, para la aplicación en la ingeniería. El texto resulta ser útil para aquellos que, al margen del curso, buscan un aprendizaje fundamental que les pueda acceder a utilizar softwares que tengan algoritmos del MEF con tendencias a la tecnología numérica y sus limitaciones.

(IÑEGUEZ, 2016) En este documento se presenta al análisis y parámetros que afectan al desplazamiento y deformación de un talud, si estos son accionados por cargas, en este texto se estudian temas con registro dinámico mediante características y propiedades tales como la extensión y la frecuencia, de la misma manera, se evalúan las propiedades del tipo de suelo teniendo en cuenta el peso específico, módulo de elasticidad y la cohesión del material rocoso como es el caso del talud.

(HAMDHAN) Este artículo se desarrolla la comparación del estudio de estabilización de taludes a través del método de elementos finitos y el método de equilibrio límite. En la evaluación de taludes, los estándares del factor de seguridad siguen siendo los principales índices para averiguar lo cerca o lejos que están los taludes del fallo. La evaluación puede realizarse mediante análisis convencional de círculos de deslizamiento como los de métodos de equilibrio límite a través métodos numéricos.

(GRIFFITHS, 1999) El documento presenta ejemplos de estudios de estabilización de los taludes, comparándolos con otros métodos de solución, incluyendo la de una superficie libre en la estabilidad de taludes y presas. Se incluyen resultados gráficos para ilustrar las deformaciones y los mecanismos de fallo. También se argumenta que la investigación de los elementos finitos para el estudio de la estabilidad de los taludes como una alternativa más potente que los de equilibrio límite en indica que el uso del MEF debería ser ahora estándar en la práctica geotécnica.

(VISCARRA, 2020) En este artículo se presenta una aplicación importante a la ingeniería geotécnica, el estudio se centra en normalizar el análisis de estabilidad de taludes por medio del MEF, para poder proceder las zonas donde se requieran el sostenimiento.

(MELO, 2016) En esta investigación de trabajo de tesis el autor genera a través del uso del método de los elementos finitos, modelar los muros de contención que tiene una estabilización mecánica, este estudio se realiza para el comportamiento de forma cuantitativa de estructuras que están construidas de concreto pre mezclado. Generalmente los muros de contención que son estabilizados mecánicamente tienen una característica compleja de interactuar con los elementos estructurales y el suelo o roca.

(FALCONÍ, 2003) Es un texto en donde generalmente trata sobre el cálculo numérico de la matriz de rigidez en los planos de planta destinados al análisis sísmico de edificios teniendo en cuenta la rigidez.

(JOSÉ LUIS BLANCO CLARACO, 2012) Es un libro en donde se aplica el cálculo matricial, mediante matrices de rigidez a barras rígidas y articuladas, realizando un ensamblaje general de matrices de rigidez completa, con condiciones de contorno, para lograr determinar los esfuerzos en las barras y las cargas nodales de las mismas.

(RAMÍREZ, 2004) Es un texto muy bueno, que trata sobre fundamentos e ingeniería de taludes, este libro se presenta en dos partes, la primera está en relación al estudio de mecánica de rocas, y la segunda parte en su mayoría trata sobre la ingeniería de taludes.

(LIZARZA J. T., 2011) Una introducción detallada al método de los elementos finitos y sus ecuaciones generales aplicadas a la ingeniería estructural se encuentra en el libro "Método de los elementos finitos para análisis estructural".

(TIMOSHENKO, 1957) Es un texto que fue traducido por Tomás Delgado Pérez de Alba, que trata en principio sobre la resistencia de materiales, es un texto que empieza a analizar los materiales desde un punto físico – matemático, usando la ley general de Hooke, para poder determinar fatigas, esfuerzos y deformaciones en el ambito de la ingeniería civil y estructural.

(TAYLOR, 1994) Es un libro que cubre cuatro áreas: placas y láminas, ejercicios no lineales, problemas unidos del tiempo y mecánica de fluidos. Aplica el método de los elementos finitos a placas y láminas donde es posible representar el estado de deformación y los desplazamientos laterales generalmente se aplica derivadas para su análisis.

(CANET, 2012) Es un texto que trata sobre los “fundamentos de la resistencia de materiales” y cálculo de estructuras aplicando las relaciones de tensión y deformación o más conocido como la ley de Hooke, el texto también trata sobre el análisis de barras como momento flexor, esfuerzos, tensión, torsión y energía de deformación que son aplicados a estructuras articuladas como vigas simples y vigas continuas.

(MAYORI) El texto de resistencia de materiales aplicado, pone énfasis en la solución de problemas y el diseño de elementos estructurales y dispositivos mecánicos. En general, nos será muy útil en texto porque nos permite las formas determinar los esfuerzos normales y las deformaciones. También se abordan temas como tracción, corte, torsión y flexión.

(GARCÍA, 2008) Es un texto que contiene problemas resueltos de estructuras aplicando el método de los elementos finitos y mediante el método del análisis matricial por matrices de rigidez, contiene también ejercicios resueltos aplicados a muros de contención en donde demuestras como calcular los desplazamientos, el vector de cargas y la obtención de la matriz de rigidez del muro de contención.

2.2 MARCO TEÓRICO

2.2.1 Elasticidad

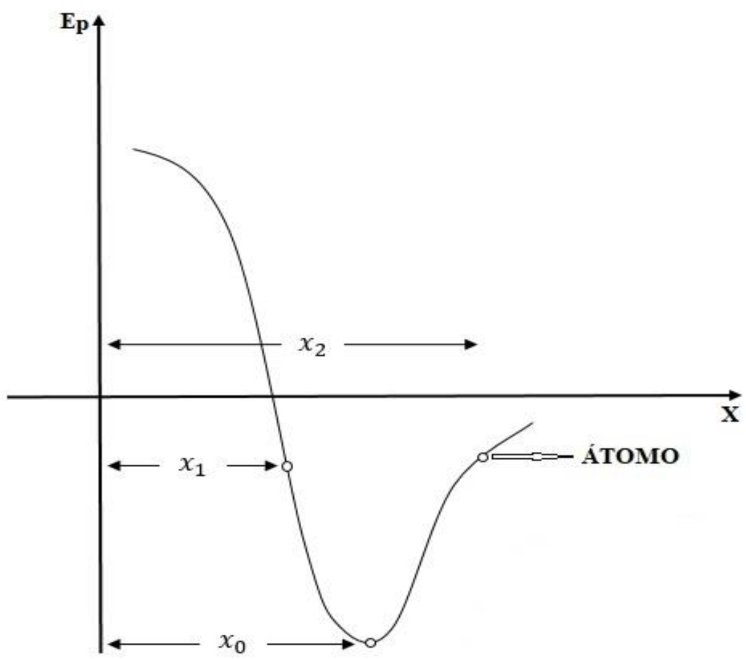
Según (NAVEROS, 2013), Una de las características del cuerpo cuando la fuerza aplicada deja de actuar es su capacidad para recuperar su forma y dimensiones naturales. Las deformaciones son reparables y la fuerza empleada se transforma en energía potencial de deformación.

2.2.2 Fuerzas elásticas

Esto ocurre internamente cuando la distancia entre átomos del material ha variado; si se acercan ocurre una fuerza de $compresión$; si se alejan los átomos, entonces presenta una fuerza de $tracción$. (NAVEROS, 2013) ver Figura 1.

Figura 1

Gradiente Ep vs X.



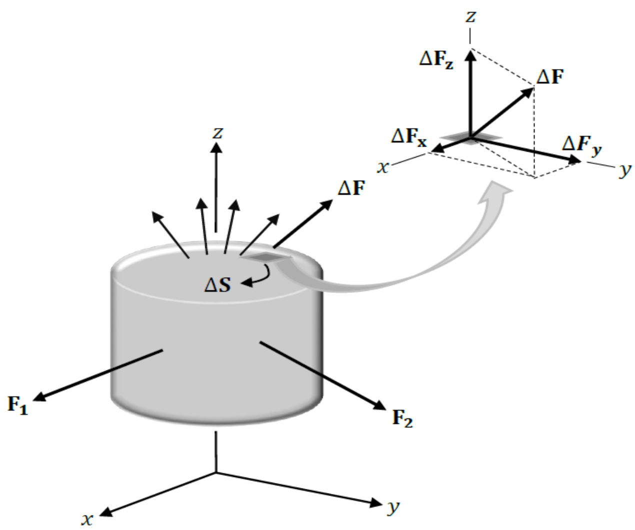
Nota: Adaptación Propia. Posición del átomo al aplicar fuerzas de compresión y tracción

2.2.3 Estado de esfuerzos (σ)

Se requiere un cuerpo sometido a la acción de un sistema de fuerzas en una determinada sección transversal S como podemos observar en la Figura 2. (RUIZ, 2014), indica que el concepto de esfuerzo debe ser introducido para un cuerpo $cohesivo\ y\ continuo$. Por ende, el límite entre el cociente $\Delta F/\Delta A$, cuando ΔA, tiende a 0, se le conoce como esfuerzo.

Figura 2

Estado de esfuerzo.



Nota: Adaptación Propia, fuerzas internas en cuerpos sólidos

Matemáticamente, el esfuerzo quedará definido de la siguiente manera

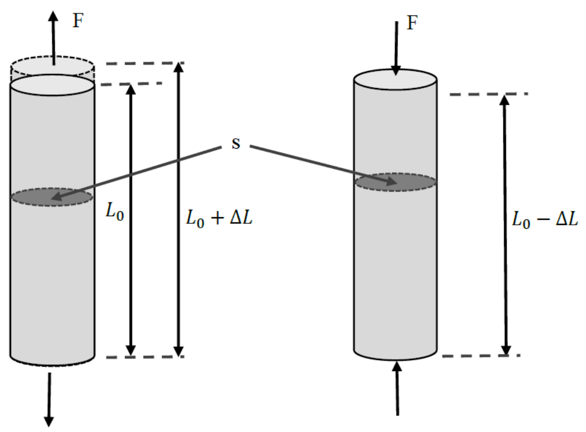
$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$$

2.2.3.1 Estado de esfuerzo unidimensional

Se dice estado de esfuerzo unidimensional al esfuerzo o fatiga, si una fuerza afecta al cuerpo. Consideremos una barra transversal Figura 3. El estado de esfuerzo unidimensional ocurre cuando la barra de sección S está en equilibrio bajo la acción de fuerzas iguales y opuestas de magnitud F en sus extremos, y toda la barra está en equilibrio. (ASCAMA).

Figura 3

Estado de esfuerzo unidimensional



Nota: Adaptación Propia, fuerzas unidimensionales de tensión y compresión que se ejercen en la barra.

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

2.2.3.2 Estado de esfuerzo bidimensional

Según (LIZARZA J. T., 2000) El estado de esfuerzo en dos dimensiones está dado por:

$$\sigma = \sigma_x$$
$$\sigma = \sigma_y$$
$$\sigma = \tau_{xy}$$

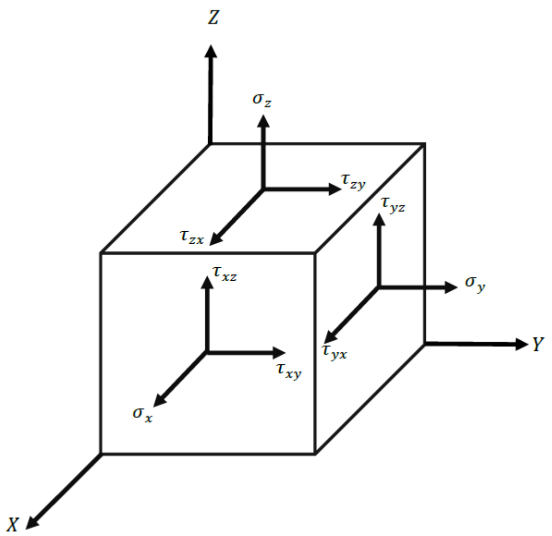
2.2.3.3 Estado de esfuerzo tridimensional

Según (LOPEZ, 1971) como se muestra en la Figura 4 un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas aplicadas en los ejes coordenados x, y, z, el estado de esfuerzos tridimensionales está definido por:

$$\sigma = \sigma_x \qquad \sigma = \tau_{xy}$$
$$\sigma = \sigma_y \qquad \sigma = \tau_{yz}$$
$$\sigma = \sigma_z \qquad \sigma = \tau_{zx}$$

Figura 4

Estado de esfuerzo tridimensional



Nota: Adaptación Propia, sistema de fuerzas aplicadas en los ejes coordenados

En donde:

$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z$: son los esfuerzos normales actuados en el sólido

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$: son los esfuerzos cortantes

Los compontes mostrados, representan los estados de esfuerzos en un determinado punto señalado.

2.2.4 Estado de deformación ($\boldsymbol{\varepsilon}$)

Al ser sometido a cargas externas los cuerpos sólidos se deforman. El propósito de esta parte del capítulo es describir cualitativamente y también cuantitativamente esa deformación (RICALDONI, 2013).

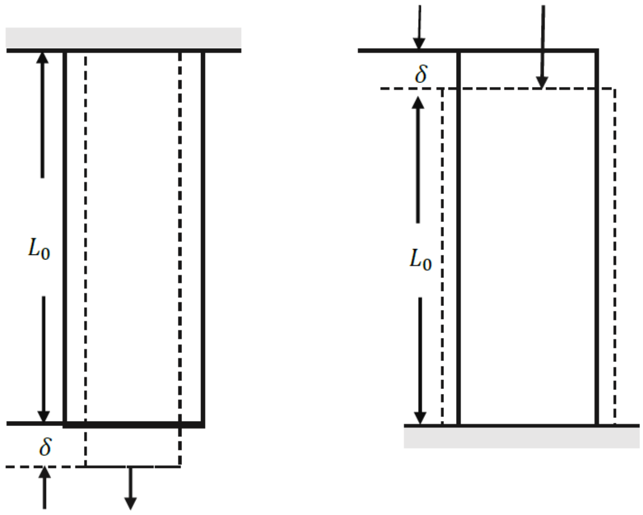
2.2.4.1 Estado de deformación unidimensional

La ampliación o retracción como se muestra de la Figura 5 de un sólido de línea por unidad de longitud está denominado por, estado de deformación unidimensional. Si una barra de longitud L_0 se somete a un esfuerzo de tensión, podría experimentar un aumento en su tamaño δ. Por lo tanto, la deformación unidimensional ε queda definido como se muestra a continuación (ASCAMA).

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

Figura 5

Estado de deformación unidimensional



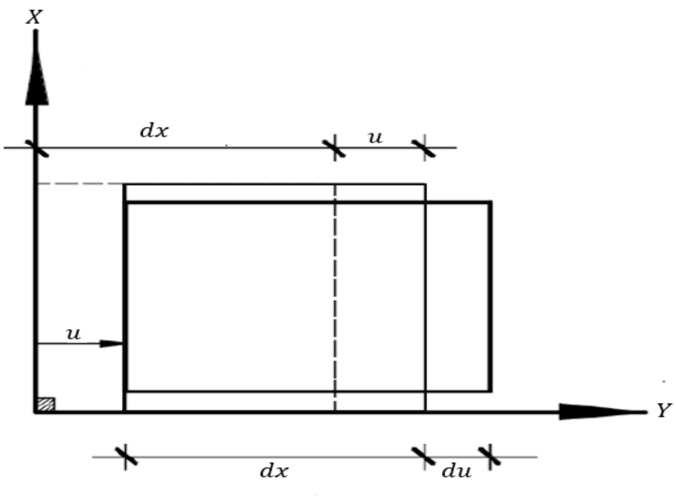
Nota: Adaptación Propia, ampliación o retracción del sólido debido a las fuerzas actuadas sobre ellas.

La Figura 6 muestra un sistema de deformación unidimensional general, el cuerpo con dimensión dx, se mueve una cantidad u que no tiene ningún tipo de deformación, posteriormente el sólido presenta una deformación du, lo cual esto identifica el aumento del desplazamiento u, esto es trazado con raya adiposo. Entonces a partir de esta representación gráfica y análisis expuesta se define la ecuación de deformación unitaria general:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

Figura 6

Estado de deformación unidimensional general



Nota: Adaptación Propia, Estado unidimensional de deformación en función a deformación unitaria.

En esta Figura 6, el periodo constante que se analiza se extiende en una dimensión única x.

2.2.4.2 Estado de deformación bidimensional

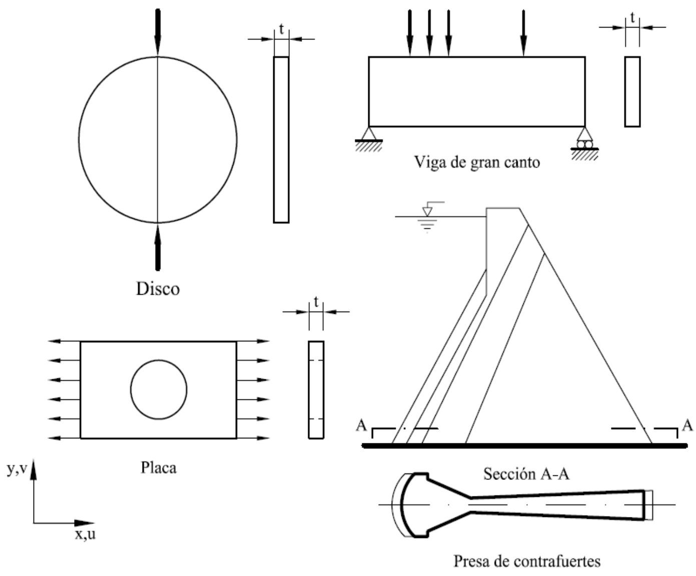
En ingeniería, la deformación bidimensional es muy común y fue en esta área donde se implementó el MEF. En este caso, las vías que se analiza en torno a la deformación bidimensional es plano y se implica trabajar con el plano cartesiano *XY* (LIZARZA J. T., 2000).

Las hipótesis de elasticidad bidimensional se pueden utilizar en una amplia gama de estructuras de ingeniería de interés práctico. Estos se catalogan en dos tipos.

a). Estructuras de tensión plana: si una de sus tamaños “espesor” es menor que los demás, dentro de esta clase se encuentran las vigas, presas de contrafuertes, ver Figura 7.

Figura 7

Estructuras de tensión plana

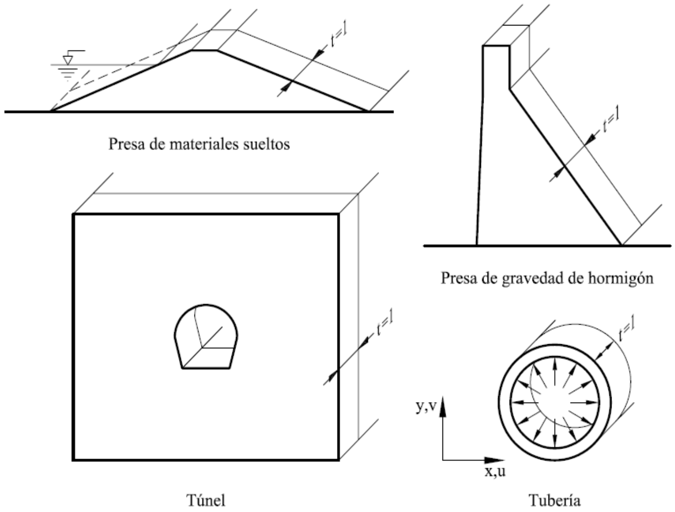


Nota: Adaptación de Cálculo de Estructuras, pág, 156, Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra.

b). Estructuras de deformación plana: es cuando la estructura tiene uno de sus tamaños “longitud” mucho mayor que los demás, en esta jerarquía podemos mencionar a presas de gravedad, tuberías bajo presión, túneles, zapatas, Figura 8.

Figura 8

Estructuras de deformación plana



Nota: Adaptación de Cálculo de Estructuras, pág, 156, Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra.

2.2.4.2.1 Campo de desplazamientos

El catedrático (NAVARRA, 1995) indica que si se sabe la traslación en las direcciones x e y de todos los puntos, el campo o grados de libertad de desplazamientos de la sección está completamente definido. El vector de desplazamiento en un punto es:

$$\delta(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$

En donde:

$u(x,y)$: son los desplazamientos en dirección al eje x.

$v(x, y)$ son los desplazamientos en dirección al eje y.

2.2.4.2.2 Campo de deformación

Según las definiciones anteriores, se deducen las deformaciones efectuando la teoría general de la elasticidad (NAVARRA, 1995).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

2.2.4.3 Estado de deformación tridimensional

Es común encontrar problemas de elasticidad tridimensional en sólidos que, debido a su desarrollo de elaboración o a sus necesidades funcionales, no pueden tener una dimensión significativamente menor que las otras dos. generalmente esto sucede cuando las piezas están forjadas en la que no se puede aceptar la hipótesis de que no hay esfuerzo en la dirección del grosor. La operación de esfuerzos y deformaciones en un elemento de tres dimensiones es una cuestión que no tiene mayor complicación conceptual que el caso de elementos de dos dimensiones, (LIZARZA J. T., 2000).

2.2.4.3.1 Campo de desplazamientos

Según (NAVARRA, 1995), En un determinado lugar del sólido, sea su ubicación, esta tiene tres desplazamientos u, v, w, los cuales están en función a (x, y, z) del lugar, y que generalmente se unen en la siguiente representación:

$$\delta(x,y,z) = \begin{Bmatrix} u\ (x,y,z) \\ v\ (x,y,z) \\ w\ (x,y,z) \end{Bmatrix}$$

Además, siendo $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ y $w(x,y,z)$ que representan los recorridos del punto al rumbo a los ejes x , y y z correspondientemente.

2.2.4.3.2 Campo de deformación

La Figura 9 muestra seis términos que representan las tres deformaciones unitarias y las tres deformaciones de corte, en un punto específico del sólido en tres dimensiones. La representación matemática de estos desplazamientos en forma diferencial, es para situaciones de deformaciones pequeñas. (LIZARZA J. T., 2000):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

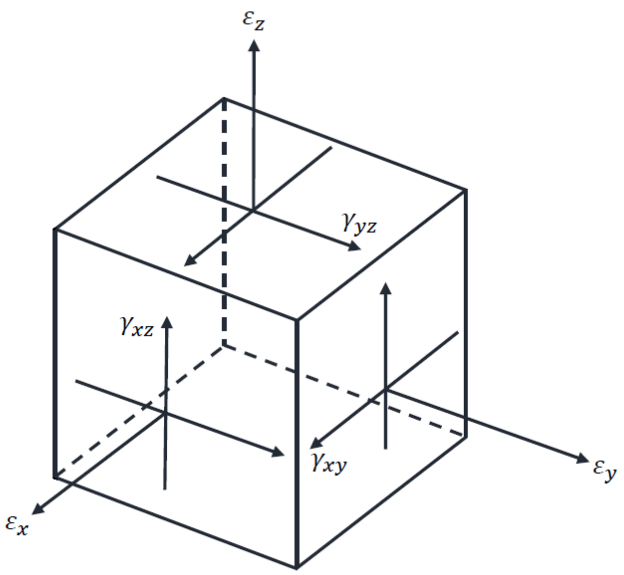
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Figura 9

Campo de deformación tridimensional



Nota: Adaptación Propia, deformaciones unitarias y de corte en las tres dimensiones.

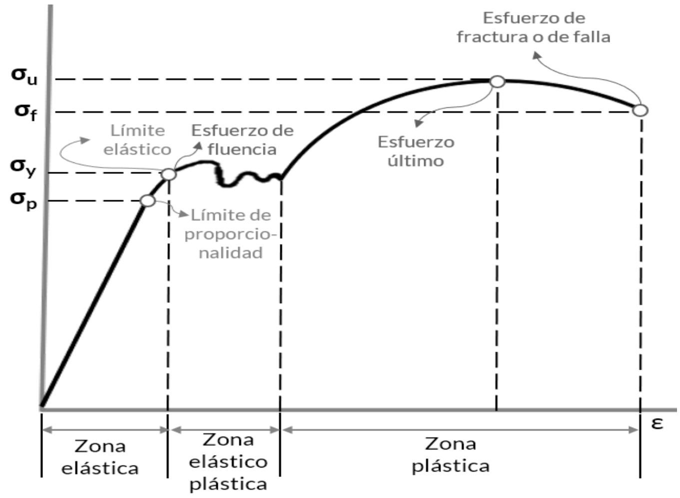
2.2.5 Diagrama esfuerzo – deformación

Los ingenieros realizan ensayos de laboratorio para determinar cómo los diferentes esfuerzos alteran la resistencia de los materiales. Por ejemplo, la prueba de tracción radica en someter una muestra de prueba estandarizada llevado a cabo con el testigo a ensayar, a un esfuerzo axial normal de tracción hasta que se ocasiona la rotura del testigo de prueba. (ASCAMA).

Por ejemplo, durante la fabricación de componentes estructurales, se determinan las propiedades de resistencia y rigidez del material utilizado. Al probar una barra bajo carga axial, se pueden establecer relaciones entre estas propiedades, como se ilustra en la Figura 10. Para ello, se miden simultáneamente la fuerza aplicada y el alargamiento resultante, lo que permite calcular el esfuerzo y la deformación.

Figura 10

Diagrama esfuerzo - deformación



Nota: Adaptación Propia, muestra a detalle de la curva correspondiente de esfuerzo y deformación incluyendo cuatro regiones características.

2.2.6 Relación esfuerzo – deformación. ley de Hooke

Se utiliza la ley de Hooke para establecer una relación directa entre las fuerzas aplicadas y los desplazamientos resultantes en los materiales. Esta ley se basa en la proporcionalidad entre las tensiones y las deformaciones que ocurren en un material. Dado que las propiedades de esfuerzo y deformación son inherentes a cada punto del material, los coeficientes de proporcionalidad que se presentan son constantes exclusivas del material y no dependen de la forma del cuerpo. (RUIZ, 2014)

2.2.7 Relación esfuerzo – deformación estado unidimensional

En 1678, el destacado físico y astrónomo inglés Robert Hooke, llevó a cabo experimentos innovadores sometiendo diversos tipos de elementos prismáticos a extensiones controladas en una sola dimensión. A partir de estos estudios, Hooke propuso una relación directamente proporcional entre las fuerzas aplicadas y las deformaciones resultantes, lo que se resume en una ecuación fundamental que describe esta correspondencia lineal.

$$\delta = \frac{PL}{ES}$$

Tras realizar algunas operaciones matemáticas, se llega a la expresión siguiente:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Esta ecuación establece la relación fundamental entre el esfuerzo aplicado y la deformación unitaria, permitiendo calcular la resistencia del material o sólido sometido a dicha carga.

2.2.8 Relación esfuerzo – deformación estado tridimensional

La representación tridimensional de las relaciones entre esfuerzo y deformación se ilustra a continuación, donde las deformaciones lineales $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ y las deformaciones angulares $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ caracterizan el estado de deformación en un punto específico del sólido. Hooke relaciona los componentes del estado de deformación con los componentes del estado de esfuerzo, es aplicable a materiales que presentan isotropía (igual comportamiento en todas las direcciones) y elasticidad lineal. (LOPEZ, 1971).

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{v}{E}\left(\sigma_y + \sigma_z\right) \qquad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{v}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Las investigaciones de Robert Hooke permitieron establecer las relaciones tridimensionales entre deformaciones y esfuerzos, y se descubrió que existe una relación entre los módulos de elasticidad E y G, dada por $E/G = 2(1 + v)$. A partir de esto, se derivan las ecuaciones de Lamé, que establecen una conexión entre las componentes del estado de esfuerzos y las componentes del estado de deformaciones, las cuales se presentan a continuación.

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[(1-v)\varepsilon_x + v(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$$
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[(1-v)\varepsilon_y + v(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right]$$
$$\sigma_z = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[(1-v)\varepsilon_z + v(\varepsilon_y + \varepsilon_x)\right]$$
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+v)}\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+v)}\gamma_{xz}$$
$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+v)}\gamma_{yz}$$

Además G coeficientes de Lamé.

$$G = \frac{E}{2(1+v)}$$

2.2.9 Relación esfuerzo – deformación estado bidimensional

La relación Esfuerzo – Deformación en dos dimensiones, puede disponer el uso de una abreviación del estado de deformación en tres dimensiones, por lo tanto, dentro del análisis bidimensional existen dos problemas diferentes denominado estados planos.

2.2.9.1 Estados planos

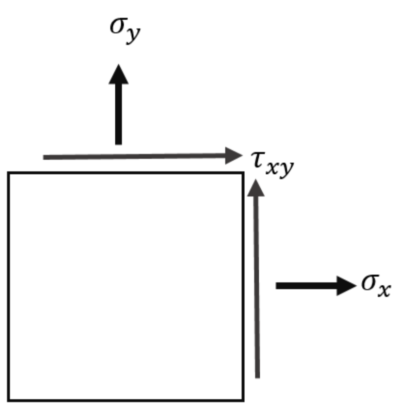
En este capítulo veremos el problema de elasticidad lineal en el caso en que los estados del contorno y las fuerzas externas aplicadas definen un problema con simetría de traslación respecto de una cierta dirección. En este caso podremos eliminar algunas variables y formular un problema bidimensional, conocido como estado plano.

a) Estado plano de esfuerzo

En la Figura 11 se puede observar el esfuerzo σ_z en dirección ortogonal al plano xy es 0, ya que el cuerpo puede ampliarse libremente en la dirección de su grosor. Así que habrá una deformación unitaria donde ε_z valido en dicho sentido lo cual se expresan bidimensionalmente de la siguiente manera (LIZARZA J. T., 2000).

Figura 11

Estado plano de esfuerzo



Nota: Adaptación Propia

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - v^2}\left(\varepsilon_x + v\varepsilon_y\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-v^2}(v\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-v^2}\left(\frac{1-v}{2}\right)\gamma_{xy}$$

b) Estado plano de deformación

En la dirección del espesor del cuerpo no hay medios de deformación, por lo que se podrá expresar que $\varepsilon_z = 0$ lo cual causa una tensión en la dirección de σ_z no nula (LIZARZA J. T., 2000), es decir:

$$\sigma_z = \frac{E(v)}{(1+v)(1-2v)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Mientras los demás quedarán expresadas de la siguiente manera:

$$\sigma_x = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\left(\varepsilon_x + \frac{v}{1-v}\varepsilon_y\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\left(\frac{v}{1-v}\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+v)}\gamma_{xy}$$

2.2.10 Módulo de Young (E)

El módulo de elasticidad, también conocido como módulo de elasticidad, determina la resistencia de cualquier material a una alteración de longitud, lo cual según (NAVEROS, 2013) quedará expresada de la siguiente manera:

$$E = \frac{Esfuerzo}{Deformación}$$

2.2.11 Coeficiente de Poisson (v)

El coeficiente de Poisson mide la relación entre la deformación transversal y la deformación axial, proporcionando un valor que caracteriza esta respuesta del material.

$$v = -\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_a}$$

Y si el cuerpo es tiene las mismas características físicas en todas las direcciones entonces quedara como se muestra a continuación:

$$v = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

2.2.12 Algebra matricial

2.2.12.1 Definición

Una matriz se define como una disposición organizada de números reales en forma de rectángulo, dividida en filas y columnas, delimitada por corchetes o paréntesis. Su estructura se representa de la siguiente manera (FRIEDLAND, 2001):

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.2.12.2 Orden de una matriz

Consideremos una matriz con m filas y n columnas, como se ilustra.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \downarrow_{Columna} \quad \to^{Fila}$$

2.2.12.3 Matriz fila

Cualquier matriz que tenga el de orden $1\ x\ n$ se les designa matriz fila, como se muestra a continuación:

$$[M] = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad \cdots \quad a_{1n}]$$

2.2.12.4 Matriz columna

Se denomina Matriz Columna a los que son de orden $n\ x\ 1$, es decir de la forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

2.2.12.5 Aritmética de matrices

En esta parte de tema se describirán los cálculos que se realizan para resolver matrices de manera casi parecido a lo que se resuelven los números, con algunos cuidados adicionales, ya que algunas propiedades cruciales de los números reales dejan de ser válidas al trasladarlas a las matrices. (FRIEDLAND, 2001).

2.2.12.6 Igualdad de matrices

M y N son matrices equivalentes cuando tienen la misma estructura y sus componentes respectivos son idénticos en valor y posición. (LOPEZ, 1971).

$$[M] = [N] \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}, \qquad \forall\ i, j$$

$$[M] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad [N] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

2.2.12.7 Suma de matrices

Consideramos las siguientes matrices M y N con mismo orden, la suma de estos genera otra matriz C.

$$[C] = [M] + [N]$$

En donde los elementos de c_{ij} se determinan realizando la sumatoria de los elementos la matriz $[M] = [a_{ij}]$ y $[N] = [b_{ij}]$ que se encuentran en la misma posición, es decir:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

2.2.12.8 Resta de matrices

Tengamos las siguientes matrices $[M]\ y\ [N]$ de igual orden, por lo tanto la resta de estas matrices quedará definido por:

$$[C] = [M] - [N]$$

2.2.12.9 Multiplicación de un escalar por una matriz

Sea la matriz $[M]$ de orden $m\ x\ n$ y un número λ a la multiplicación de $\lambda[M]$ se le define de la siguiente manera:

$$\lambda[M] = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \dots & \lambda a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.2.12.10 Multiplicación de matrices

Supongamos una matriz M de orden $m\ x\ n$ que se multiplica por otra matriz $[N]$ de orden $p\ x\ q$. (LOPEZ, 1971):

Por ejemplo, si:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \ \ y \ \ [N] = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$MN = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$MN = \begin{bmatrix} (1x - 2) + (2x3) \\ (3x - 2) + (4x3) \end{bmatrix}$$

$$MN = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2.2.12.11 Matriz de cofactores

Supongamos la matriz:

$$[M] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

La matriz de cofactores se crea si reemplazamos a cada elemento de la matriz M por sus respectivos cofactores. Esta matriz se representa por:

$$[CM] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

Los cofactores de un elemento $M_{ij} = (-1)^{i+j}R_{ij}$ por lo tanto los cofactores serán:

$$[CM] = \begin{bmatrix} Q_{11} & -Q_{12} & Q_{13} \\ -Q_{21} & Q_{22} & -Q_{23} \\ Q_{31} & -Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

2.2.12.12Matriz adjunta

La adjunta se obtiene al calcular la transpuesta de la matriz de cofactores y luego encontrar su adjunta, como se muestra en el ejemplo:

Si $$[CM] = \begin{bmatrix} Q_{11} & -Q_{12} & Q_{13} \\ -Q_{21} & Q_{22} & -Q_{23} \\ Q_{31} & -Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

Entonces la adjunta de M quedará expresado por:

$$adj(M) = (CM)^t = \begin{bmatrix} Q_{11} & -Q_{21} & Q_{31} \\ -Q_{12} & Q_{22} & -Q_{32} \\ Q_{13} & -Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

2.2.12.13Matriz transpuesta

Al tomar la transpuesta de una matriz [M], se invierte la disposición de sus elementos, de manera que cada fila i se transforma en la columna i correspondiente en la matriz transpuesta. (RAMOS, 2002).

La transpuesta de la matriz $[M]$ denotaremos por $[M]^t$, es decir:

Sí

$$[M] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & a_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \Longrightarrow [M]^t = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & \cdots & c_{m2} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & \cdots & c_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1m} & c_{2m} & c_{3m} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

2.2.12.14Determinante de una matriz

Supongamos la siguiente matriz:

$$[M] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

(RAMOS, 2002) indica que la determinante de la matriz $[M]$ es un valor numérico real que generalmente está denotado por $\det(M)$ o simplemente $|M|$

$$|A| = d_{11}\begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} - d_{12}\begin{vmatrix} d_{21} & d_{23} \\ d_{31} & d_{33} \end{vmatrix} + d_{13}\begin{vmatrix} d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = d_{11}(d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32}) - d_{12}(d_{21}d_{33} - d_{23}d_{13}) + d_{13}(d_{21}d_{32} - d_{31}d_{22})$$

2.2.12.15Inversa de una matriz

La matriz inversa de una matriz cuadrada $[M]$, denotada como $[M]^{-1}$, tiene el mismo orden que $[M]$ y cumple con la condición de que su producto con $[M]$ sea igual a la matriz identidad, es decir:

$$[M][M]^{-1} = [M]^{-1}[M] = I$$

Siendo I la matriz identidad.

Según (RAMOS, 2002), la inversa de la matriz $[M]$ también se define de la siguiente manera:

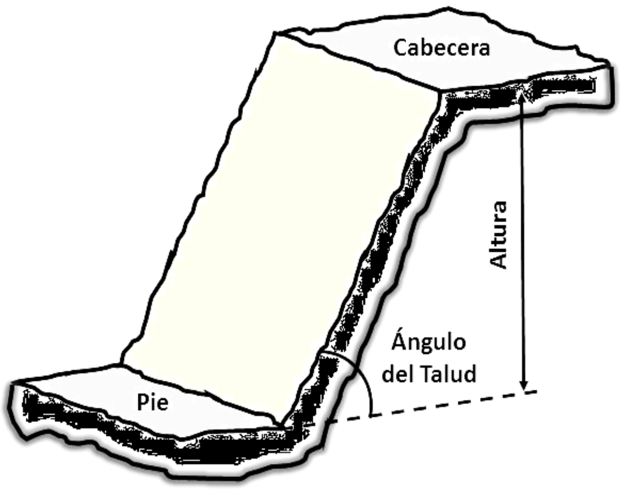
$$[M]^{-1} = \frac{1}{|M|}adj(M)$$

2.2.13 Taludes

El diseño de taludes es un componente crítico en la ingeniería geológica para la mayoría de las actividades constructivas o extractivas. Los taludes como en la Figura 12 en ingeniería suelen tener alturas de 40 a 50 metros y se proyectan para ser estables durante un período prolongado. No obstante, en la industria minera, las excavaciones pueden llegar a profundidades considerables, superando los varios cientos de metros. (VALLEJO, 2002)

Figura 12

Representación gráfica del talud



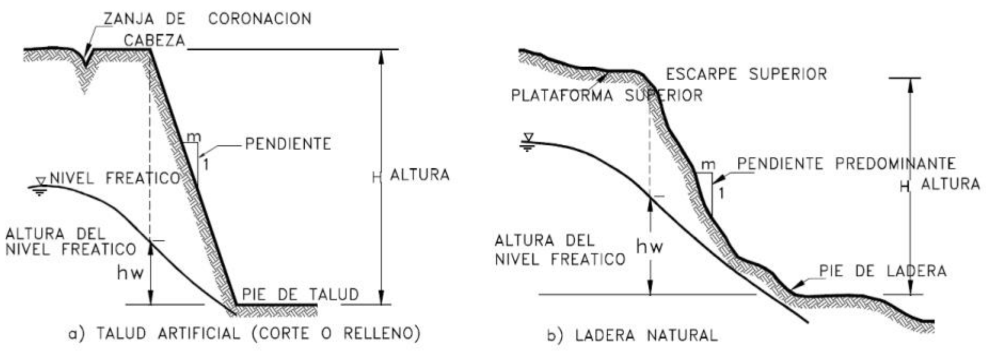
Nota: Adaptación Propia

2.2.14 Tipos de talud

El término "talud" se refiere a toda la masa de suelo que se inclina con respecto a la horizontal del suelo. Las laderas, también conocidas como laderas naturales, son taludes que se han desarrollado naturalmente sin la intervención humana. Taludes o taludes artificiales son toda inclinación de masa de suelo causada por la actividad humana, como excavaciones o rellenos Figura 13. (JAIR, 2004)

Figura 13

Tipos de talud



Nota: Fuente (JAIR, 2004) Se muestra la nomenclatura general de los taludes y además a) talud artificial y b) talud natural.

2.2.15 Factores que influyen la estabilidad de taludes

El aumento de los esfuerzos accionantes o la disminución de la resistencia al esfuerzo cortante del suelo pueden causar la falla de un talud o ladera. Los efectos naturales y las actividades humanas suelen causar esta variación. (OROSCO, Abril 2009)

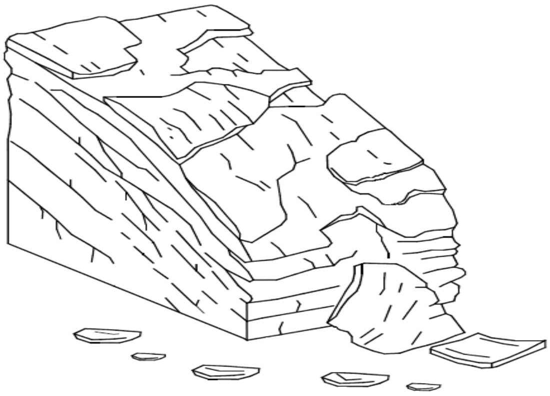
En general, los derrumbes de taludes se deben a fuerzas naturales, errores humanos y animales y actividades de madriguera. A continuación, enumeraremos algunos de los principales factores que contribuyen a las fallas de taludes. (BUDHU, 2007).

2.2.15.1 Erosión

Los taludes artificiales y naturales como la Figura 14 son continuamente erosionados por el agua, viento y otros factores. La erosión altera la forma de una pendiente, lo que resulta en su fractura o, en otras palabras, en una caída de tierra. Los ríos y arroyos erosionan constantemente sus orillas, socavando sus taludes naturales o artificiales.

Figura 14

Erosión de taludes



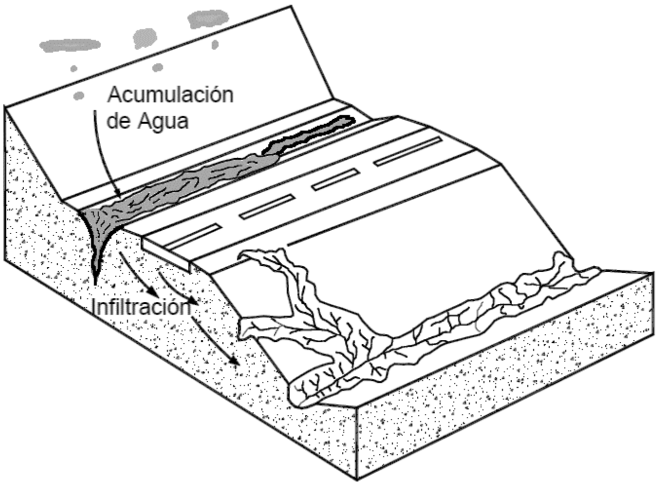
Nota: Adaptación de Análisis Geotécnico de (DIAS, 1998) Se observa el talud erosionado con una fracturación intensa lo cual determina la ocurrencia de deslizamientos.

2.2.15.2 Precipitaciones

Los largos periodos de lluvia saturan, ablandan y erosionan los suelos. El agua penetra en las grietas existentes y puede debilitar las capas de suelo subyacentes, provocando fallos, por ejemplo, deslizamientos de lodo, Figura 15.

Figura 15

Precipitación - condiciones que debilitan estabilidad del talud



Nota: Adaptado de (DIAS, 1998), *El agua, genera erosión al talud abajo de la vía.*

2.2.15.3 Sismicidad de la zona

Los terremotos inducen fuerzas dinámicas, especialmente fuerzas de corte dinámicas que reducen la dureza al corte y la rigidez del suelo. Las estructuras en estos suelos se derrumbarían; las estructuras enterradas en ellos se elevarían. enterradas se levantarían. La rapidez (unos pocos segundos) con la que se inducen las fuerzas dinámicas impide incluso a los suelos de grano grueso drenar el excedente de presión del agua de las aberturas y poros. Por lo tanto, el fallo en un sísmico suele producirse en condiciones no drenadas. (OROSCO, Abril 2009).

2.2.15.4 Características geológicas

El tipo de inestabilidad que puede experimentar un talud está directamente relacionado con la naturaleza del material que lo compone; las diferentes litologías tienen diferentes niveles de susceptibilidad potencial ante la ocurrencia de deslizamientos o roturas. (VALLEJO, 2002)

2.2.15.5 Cargas externas

Las cargas colocadas en la cresta de un talud, la parte superior del talud, se suman a la carga gravitacional y pueden causar fallo del talud. Una carga colocada en la punta, llamada berma, aumentará la estabilidad del talud.

2.2.15.6 Actividades de construcción

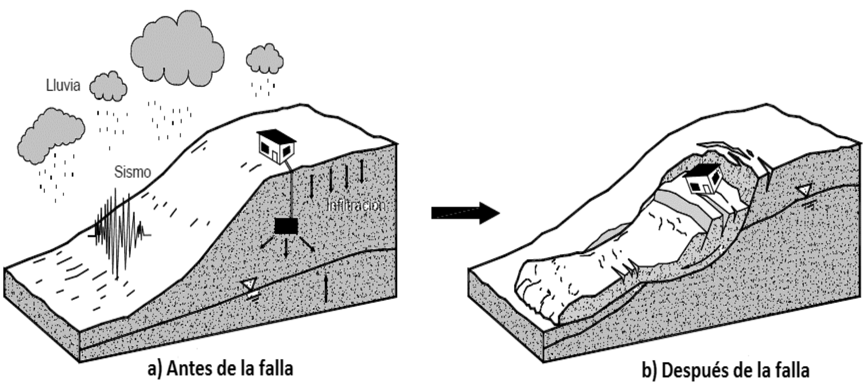
Las acciones humanas pueden alterar algunos de los factores mencionados. Las alteraciones de las condiciones de equilibrio iniciales podrían resultar en procesos de inestabilidad si se intervienen en laderas naturales o se construyen taludes artificiales.

2.2.16 Tipos de fallas

El mecanismo de falla explica técnicamente cómo el deterioro y los agentes activadores hacen que un talud estable se vuelva inestable, figura 16 (DIAS, 1998).

Figura 16

Las falla y sus tipos, causas del talud inestable



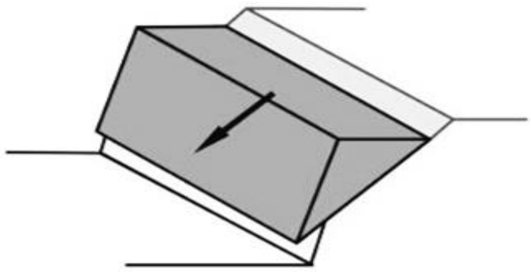
Nota: Adaptado de (DIAS, 1998), acción de deterioro antes y después de la falla.

2.2.16.1 Rotura plana

La rotura plana se produce principalmente en plataformas rocosas formadas por rocas que tienen una rigidez media o alta que han sido modificado por fallas y diaclasas. Esta rotura se ilustra esquemáticamente en la Figura 17. (MONGE, 2004)

Figura 17

Rotura plana en un talud



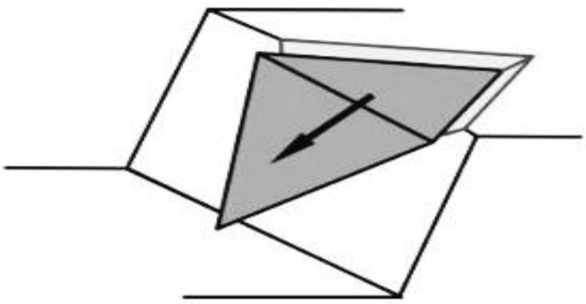
Nota: Adaptación (DIAS, 1998)

2.2.16.2 Rotura en cuña

Como se muestra en la Figura 18, la falla en cuña es un tipo de deslizamiento de roca que ocurre cuando dos o más planos de debilidad como capas de rocas, esquistosidad, diaclasas, fallas, se interceptan formando una cuña. (MONGE, 2004).

Figura 18

Rotura en cuña



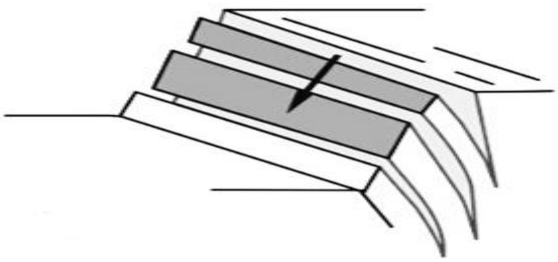
Nota: Adaptación (DIAS, 1998)

2.2.16.3 Vuelco de estratos

Según (DIAS, 1998), Este deslizamiento implica la rotación de material terrestre alrededor de un núcleo bajo el centro, como se muestra en la Figura 19. Ocurre en formaciones rocosas y su velocidad varía según la geometría y estructura geológica.

Figura 19

Vuelco de estratos



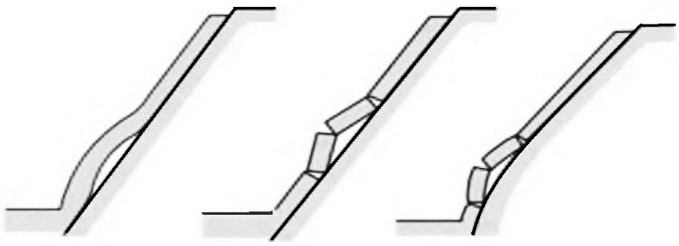
Nota: Adaptación (DIAS, 1998).

2.2.16.4 Rotura por pandeo

La rotura de este tipo ocurre cuando los estratos están a la vez al talud y tienen un declive mayor que el ángulo de rozamiento interno. Puede acontecerse con o sin curvatura del estrato, pero es necesario que los estratos sean bastante esbeltos en correlación con la elevación del talud, como se muestra en las Figuras 20. (VALLEJO, 2002).

Figura 20

Rotura por pandeo



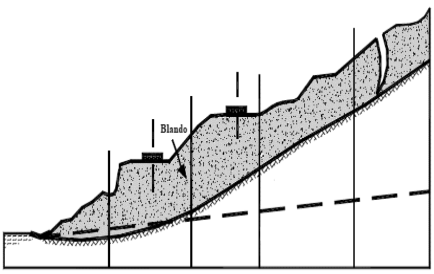
Nota: Adaptación de (DIAS, 1998).

2.2.16.5 Falla por desplazamiento superficial

Como se ilustra en la Figura 21. La masa puede deformarse, romperse o fluir en muchos desplazamientos de traslación, especialmente en áreas con pendientes pronunciadas. (DIAS, 1998).

Figura 21

Falla por desplazamiento superficial



Nota: Adaptado de (DIAS, 1998).

2.2.16.6 Falla por licuación

La licuación se presenta con mayor asiduidad en arenas de grano fino, sometida a una mayor presión intersticial debido a las oscilaciones, lo que provoca el derrumbe del terreno en el que se manifiesta, por lo tanto, de la estructura que forma o se encuentra sobre él. (OROSCO, Abril 2009)

2.2.16.7 Falla por rotación

Según (MATTEIS, 2003) Los deslizamientos de rotación reciben su nombre según la ubicación del extremo de la masa de rotación. Estos pueden producirse cuando la superficie de deslizamiento cruza la base del talud, ya sea en su parte inferior, en el pie o delante del talud, afectando el suelo sobre el que se asienta el talud.

2.2.16.8 Falla por flujo

Según (DIAS, 1998) Cuando algunos suelos son perturbados, agrietados por un deslizamiento inicial, absorben agua con facilidad, lo que provoca la formación de un flujo.

2.2.16.9 Falla traslacional

Estas fallas generalmente se caracterizan por avances traslacionales significativos del cuerpo del talud sobre área de falla esencialmente planas, lo que se debe a la existencia de estratos vulnerables ubicados a poca fondura del talud. (MATTEIS, 2003).

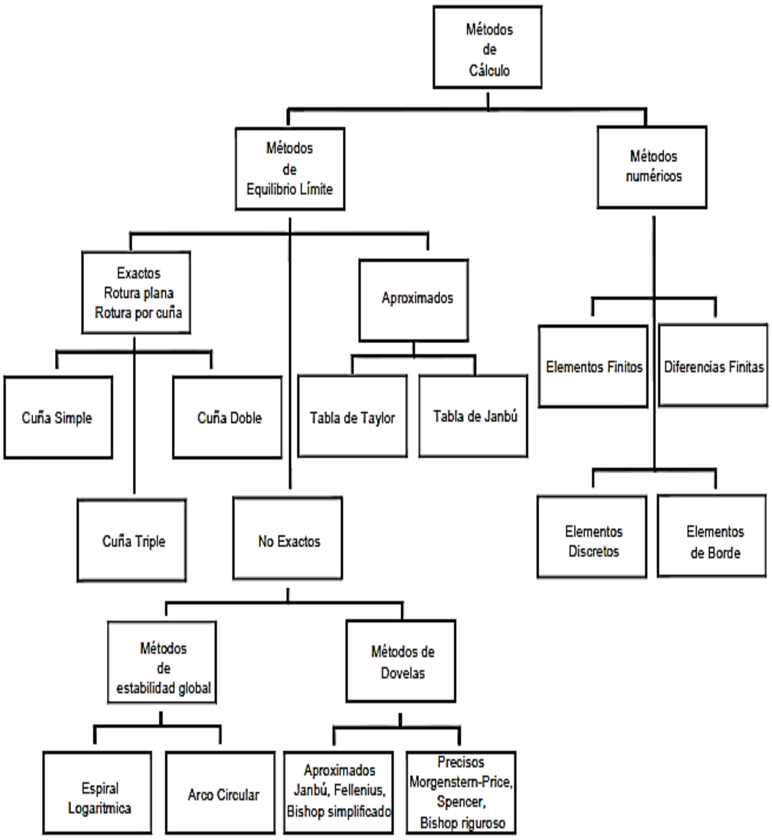
2.2.17 Métodos de estabilidad de taludes

Según (VALLEJO, 2002) Las técnicas para evaluar la estabilidad de taludes se apoyan en un enfoque físico-matemático, teniendo en cuenta las fuerzas que mantienen y las que comprometen la estabilidad del talud, las cuales influyen en su comportamiento y estado de estabilidad. Estas técnicas se pueden clasificar en:

- Métodos determinísticos
- Métodos probabilísticos

Figura 22

Clasificación de métodos de cálculo de estabilidad de taludes



Nota: Adaptado de (DIAS, 1998).

2.2.18 Métodos numéricos

técnicas para formular problemas que puedan resolverse mediante aproximaciones numéricas utilizando operaciones aritméticas (OSPINA, 2009) .

Según (CANALE, 2007), los métodos numéricos son métodos que permiten formular problemas matemáticos que pueden resolverse mediante operaciones aritméticas. A pesar de la variedad de técnicas numéricas, todas ellas tienen una característica común: siempre requieren una gran cantidad de aburridos cálculos aritméticos. El empleo de técnicas numéricas para resolver problemas en el campo de la ingeniería ha crecido considerablemente en los años recientes, gracias al avance de las computadoras digitales que son rápidas y eficientes.

2.2.19 Método de los elementos finitos

El método de elementos finitos es una técnica de aproximación para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera e iniciales, común en problemas de ingeniería, física y matemáticas. Divide el dominio en pequeños elementos (triángulos, cuadriláteros, etc.) con puntos llamados nodos, a los cuales se asignan valores de variables mediante interpolación. Las ecuaciones diferenciales se transforman en ecuaciones algebraicas de elementos finitos, que se combinan en un sistema global, permitiendo la incorporación de condiciones iniciales y de frontera. Los valores en los nodos se obtienen resolviendo este sistema de ecuaciones. (NARANJO, 1999).

Debido a la complejidad de las ecuaciones que rigen las estructuras continuas y la mayoría de las estructuras, es fundamental utilizar el método de elementos finitos (MEF). Este procedimiento reemplaza la solución continua y exacta del sistema de ecuaciones diferenciales, que generalmente es impracticable de resolver, por una solución discontinua o discreta y, por lo tanto, aproximada, para determinar el comportamiento de una estructura bajo cargas. Para ello, la estructura se divide en elementos finitos, que no son diferenciales, y que se conectan entre sí a través de un número específico de puntos denominados nodos. (LOPEZ, 1971).

2.2.20 Breve reseña histórica

En el ámbito de la mecánica estructural y de sólidos, los métodos de elementos finitos han llegado a ser la técnica de cálculo más utilizada. Su uso es frecuente en la resolución de problemas de transferencia de calor y está cobrando importancia en otras disciplinas como la mecánica de fluidos y el electromagnetismo. Dado que la mayoría de los análisis de tensiones en la industria se basan en estas técnicas numéricas, es prácticamente indispensable que los profesionales de Ingeniería Civil e Ingeniería Mecánica las dominen. Los métodos de elementos finitos, en su forma actual, son relativamente nuevos, pese a su amplia difusión. Su desarrollo y popularización se deben a la disponibilidad de herramientas electrónicas de cálculo cada vez más potentes. Por lo tanto, estas técnicas pueden considerarse un resultado adicional de la revolución informática de finales del siglo XX. (BELTRAN, 1998).

El método de elementos finitos, propuesto hace siglos, no se utilizó hasta la aparición de las primeras computadoras debido a sus altas exigencias de cálculo, especialmente para modelos tridimensionales. Su uso se expandió con el desarrollo de computadoras y lenguajes de programación avanzados. La evolución tecnológica, con procesadores más rápidos, mayores capacidades de memoria y compiladores más eficientes, ha permitido manejar modelos más grandes. Los avances en análisis numérico e informática gráfica también han influido significativamente. Más recientemente, el procesamiento paralelo promete un impacto importante en el cálculo estructural y la simulación. (GIUDICI, 2015).

2.2.21 El MEF en la actualidad

En los años 90, la reducción del costo de las computadoras hizo que el software de elementos finitos fuera más costoso. Aunque el acceso a estas herramientas se ha expandido, a menudo carece de la capacitación adecuada, lo que puede llevar a errores en los cálculos. Hoy en día, la combinación del análisis por elementos finitos con el diseño asistido por computadora (CAD) es esencial para reducir los tiempos de desarrollo. (BELTRAN, 1998)

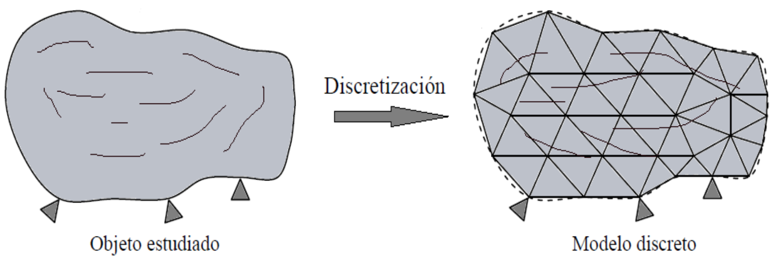
2.2.22 Conceptos generales del MEF

El Método de Elementos Finitos (MEF) descompone un cuerpo continuo en una serie de pequeños elementos conectados por puntos conocidos como nodos. El comportamiento de cada elemento finito está regulado por las mismas ecuaciones que determinan el comportamiento del elemento continuo original. Esto permite transformar un sistema continuo, con infinitos grados de libertad que solo se pueden analizar mediante métodos analíticos y que está descrito por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, en un sistema con un número finito de grados de libertad. Este nuevo sistema se modela mediante ecuaciones lineales y se resuelve utilizando el método de rigidez matricial. Los nodos, que están interconectados y vinculados a los elementos de la estructura, son los puntos que definen cada elemento. Las incógnitas principales del problema se encuentran en estos nodos.

Esto se ilustra en la Figura 23, que muestra el caso de una placa plana sometida a cargas en su mismo plano. Esta figura se utiliza para definir la terminología comúnmente empleada en el tratamiento de este tema. (GIUDICI, 2015):

Figura 23

Discretización del sólido



Nota: Adaptación Propia

Elementos: Subdominios elementales continuos, que se manejan mediante ecuaciones de elasticidad, se emplean para representar el objeto de análisis.

Los Nudos: Son puntos distintivos que establecen las propiedades elásticas de los elementos y facilitan la conexión entre diferentes elementos.

Malla: Un conjunto de elementos cuyo objetivo es representar un entorno continuo específico a través de un modelo discreto.

Grados de libertad de un nodo: se definen como la cantidad mínima de parámetros necesarios para definir completamente la posición de un nodo.

Grados de libertad de un elemento: Se refieren a la cantidad de criterios mediante los cuales se manifiestan sus características elásticas, así como al orden de la matriz de rigidez correspondiente.

Grados de libertad de un modelo discreto: Los grados de libertad totales de los nodos se determinan restando los restringidos por las condiciones de apoyo, ya sean fijas o con movimientos predefinidos, lo que define el orden de la matriz de rigidez.

Condición de carga: El conjunto de acciones que se realizan sobre el objeto estudiado se denomina.

2.2.23 Tipos de elementos

Se debe elegir un tipo de elemento según las restricciones de frontera, el tipo de carga y el elemento original a examinar. Para lograrlo, los siguientes son los más comunes. (RODRÍGUEZ, 2018).

Según (RODRÍGUEZ, 2018) y (PANCA, 2016) Los elementos finitos se clasifican según sus cargas en la estructura y su comportamiento.

a) Elementos tipo armazón o barra.

Las barras son componentes de dos nodos con tres grados de libertad de traslación, sin rotación, que solo transmiten fuerzas axiales. Se usan en estructuras como puentes, torres y edificios. (RODRÍGUEZ, 2018).

b) Elementos tipo viga

Las vigas soportan torsión y flexión, resistiendo momentos y fuerzas. A diferencia de las barras, tienen hasta seis grados de libertad y tres nodos. (RODRÍGUEZ, 2018). Para aplicar correctamente un elemento de viga, se deben seguir las siguientes instrucciones:

- El elemento tiene una longitud mucho mayor que su ancho.

- Sus secciones y características son constantes.
- Puede transferir instantes.
- Puede soportar cargas distribuidas a lo largo de su longitud.

c) Elemento tipo marco

El elemento marco combina propiedades de armadura y viga, representando una barra recta con una sección específica. Es útil en estructuras porque abarca deformaciones axiales y transversales, con nodos que poseen seis grados de libertad.

d) Elementos tipo membrana.

Los elementos de membrana, con tres o cuatro nodos en tres dimensiones, se usan para modelar estructuras como redes. No tienen grados de libertad de rotación, solo de traslación. Admiten cargas solo en su plano, siendo útiles cuando el grosor es insignificante frente a la longitud o ancho. (RODRÍGUEZ, 2018).

e) Elemento solido en dos dimensiones

Este elemento bidimensional se representa por el plano medio de su espesor y solo soporta cargas transversales que causan deformaciones en el plano. Las deformaciones dependen de las coordenadas x, y, z, son independientes del eje. Puede modelar muros de carga en edificios, sujetos a cargas de su propio peso y a cargas vivas. (PANCA, 2016).

f) Elemento tipo placa.

Estos componentes se emplean para modelar partes de automóviles o contenedores con paredes delgadas. Son elementos tridimensionales con tres o cuatro nodos. Poseen una gran variedad de grados de libertad. (RODRÍGUEZ, 2018).

Los componentes de placa se utilizan cuando:

- El elemento mantiene una relación con su longitud de aproximadamente un décimo.
- El recorrido es limitado.
- El objeto se mantiene plano.

g) Elemento tipo cascaron

Los elementos de cáscara son capaces de soportar cargas en todas las direcciones y permiten flexiones y deformaciones fuera del plano. Son ideales para modelar grandes losas, pisos, tanques cilíndricos y esféricos, así como estructuras significativas como los fuselajes de aeronaves. (PANCA, 2016).

2.2.24 Matriz de rigidez para estructuras

La matriz de rigidez generalmente se desarrolla utilizando el teorema o principio de trabajos virtuales. (LOPEZ, 1971).

2.2.25 Teorema de los trabajos virtuales

El teorema de trabajos virtuales es una de las metodologías más eficaces para establecer el equilibrio en un sistema y se aplica predominantemente en el Análisis Estructural para resolver problemas relacionados con el equilibrio. Al imponer un estado deformado virtual que provoca desplazamientos virtuales en todo el sistema y una estructura en un estado deformado debido a fuerzas externas, el equilibrio se alcanzará únicamente si el trabajo realizado por las fuerzas externas sobre los desplazamientos virtuales es igual al trabajo realizado por las fuerzas internas (esfuerzos) sobre las deformaciones virtuales.

Según (LOPEZ, 1971) en la página 39, define la fórmula de la matriz de rigidez de la siguiente manera.

$$\mathrm{F}_1\delta_1^* + \mathrm{F}_2\delta_2^* + \mathrm{F}_3\delta_3^* + \mathrm{F}_4\delta_4^* + \cdots + \mathrm{F}_n\delta_n^* = \int \sigma.\varepsilon^*\mathrm{dV}$$

2.2.26 Ensamblaje de rigidez de la estructura

Esta etapa de MEF, también denominada ensamblaje de elementos, consiste en construir la matriz de rigidez total de la estructura combinando las matrices de rigidez de los elementos en los que se ha dividido la estructura. Para ello, es necesario expandir las matrices de rigidez de los elementos $[K_e]$ al tamaño de la estructura, tal como se detalla en el método de desplazamientos. A continuación, se obtiene la matriz de rigidez completa utilizando la expresión correspondiente. (LOPEZ, 1971).

$$[K_0] = \sum [K_e^0]$$

Donde $[K_e^0]$ representa la matriz de rigidez de cada elemento, la cual ha sido ampliada para ajustarse al tamaño de la estructura y se encuentra en un orden distinto al de los grados de libertad de la estructura discretizada. Para alcanzar esto, será necesario utilizar submatrices nulas como submatrices complementarias.

$$\mathbf{K}_0 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & N \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ N \end{array} & \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \ddots & & & & \\ \hline & \sum_\alpha \mathbf{K}_{ii}^\alpha & & \mathbf{K}_{ij}^\beta & \\ \hline & & \ddots & & \\ \hline & \mathbf{K}_{ji}^\beta & & \sum_\alpha \mathbf{K}_{jj}^\alpha & \\ \hline & & & & \ddots \end{array} \right] \end{array}$$

2.2.27 Consideraciones generales

2.2.27.1 Caracterización geológica

(FLORES, 2002) Indica que la caracterización geológica debe posibilitar la identificación de los diversos tipos de unidades fundamentales presentes en el área de análisis, así como la disposición de la subsuperficie, en relación con los contactos entre los distintos cuerpos geológicos. Es necesario examinar las propiedades individuales de cada tipo de roca, así como las discontinuidades y cómo estas características interactúan entre sí dentro del conjunto. (DIAS, 1998)

2.2.27.1.1 Litología

(VALLEJO, 2002) Indica que el tipo de inestabilidad que puede afectar a un talud está directamente asociado con la naturaleza del material que lo forma; las distintas litologías presentan diversos niveles de susceptibilidad potencial a deslizamientos o fracturas. La presencia de capas o estratos con diferente competencia en los macizos rocosos también conlleva un grado variado de fracturación en los materiales, lo que complica la caracterización y el análisis del comportamiento del talud.

2.2.27.2 Caracterización estructural

Es esencial empezar con la geología estructural a nivel distrital para identificar las macro tendencias que explican el patrón estructural del área. Sin este enfoque, puede ser difícil definir los dominios estructurales correctamente. De no ser así, la caracterización estructural puede ser incorrecta y necesitar revisión. Por ello, los geólogos suelen recibir asesoría de expertos en geología estructural para asegurar una caracterización adecuada. (FLORES, 2002)

2.2.27.3 Mapeo superficial de estructuras

El mapeo "lineal" y el mapeo "cuadrícula" son métodos para analizar características geológicas. El mapeo lineal utiliza una cinta métrica para registrar líneas a lo largo del talud, permitiendo identificar discontinuidades al examinar los extremos de las líneas. (WYLLIE, 2004)

La ISRM propone 10 parámetros para la descripción cuantitativa de discontinuidades en macizos rocosos, los cuales se ilustran en el esquema de la Figura 24. (FLORES, 2002)

1. Número de familias o sistemas de estructuras que aparecen en el macizo rocoso.
2. Orientación de cada familia (definida por valores característicos del buzamiento
3. y de la dirección de buzamiento).
4. Espaciamiento entre estructuras de una misma familia o set estructural (puede ser
5. verdadero si se mide en la dirección normal al plano de las estructuras, o aparente
6. si se mide en otra dirección)
7. Persistencia o extensión de las estructuras de cada familia de discontinuidad.
8. Rugosidad de las estructuras de cada familia.
9. Apertura (estructuras abiertas) o potencia (estructuras selladas) de las estructuras

10 de cada familia.

11 Tipo(s) de relleno(s) presente(s) en las estructuras de cada familia.

12 Resistencia de la roca caja para cada set de estructuras (si bien el tipo de roca

13 puede ser el mismo, distintos sets de estructuras pueden presentar distintas

14 características de alteración, afectando de diferente forma a la roca de caja).

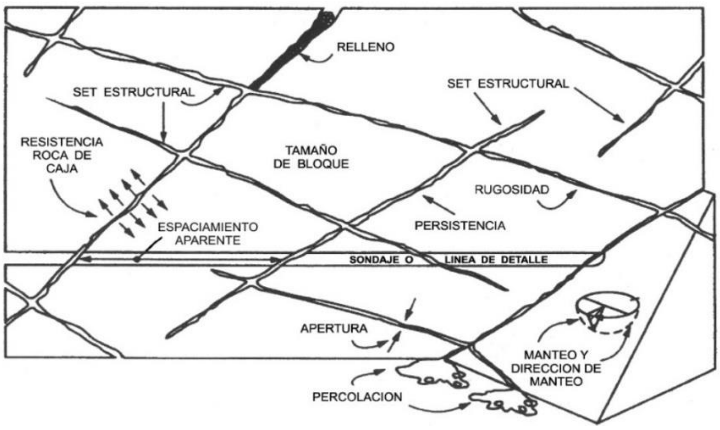
15 Características de la percolación de aguas observada en las estructuras de cada

16 familia.

17 Tamaño de los bloques que definen las estructuras en el macizo rocoso.

Figura 24

Esquema ilustrativo de los parámetros las estructuras



Nota: (VALLEJO, 2002)**,** Adaptado de Hudson, 1989.

El mapeo por ventanas es útil para el levantamiento de rocas macizas cuando el acceso completo al objeto no está disponible. Un mapeo típico puede involucrar la recopilación de datos sobre las siguientes discontinuidades. (DIAS, 1998)

1.Tipo de discontinuidades (falla, junta, estrato, etc.).

2. Dirección buzamiento (orientación espacial).

3. Localización (coordenadas y elevación de la ocurrencia).

4. Continuidad (longitud de la exposición de la continuidad).

5. Rugosidad y planaridad (la rugosidad relativa).

6. Espaciado (distancia aproximada entre las discontinuidades paralelas).

7. Relleno (el tipo, blando, duro o varios).

8. Roca (tipo y resistencia)

2.2.27.3.1 Familia de discontinuidades

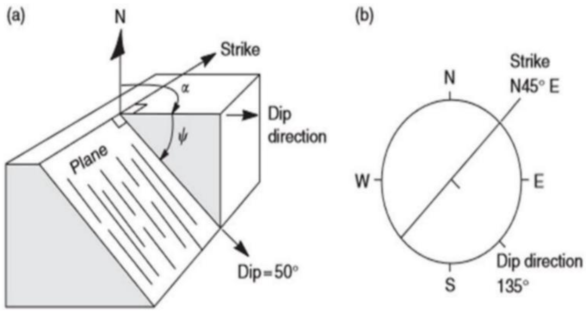
Para identificar y estimar familias de discontinuidades con orientaciones y orígenes similares, se usan los polos de las discontinuidades en una red polar equiareal con un plantillo de Schmidt. El diagrama de polos ayuda a determinar cómo se distribuyen las discontinuidades en el macizo rocoso. El comportamiento del macizo depende del número de familias de discontinuidades, su capacidad para deformarse sin fracturarse, y el tipo de ruptura que presentan. (MONGE, 2004)

2.2.27.3.2 Buzamientos y dirección de buzamientos

Para describir las discontinuidades en geotecnia, se utiliza la dirección del buzamiento y la inclinación con respecto a la horizontal. La dirección del buzamiento se mide colocando la brújula geotécnica sobre la discontinuidad y ajustando la burbuja. El buzamiento se mide con el clinómetro integrado en la brújula, colocándola en posición vertical sobre la discontinuidad. (MONGE, 2004)

Figura 25

Buzamientos y dirección de buzamientos



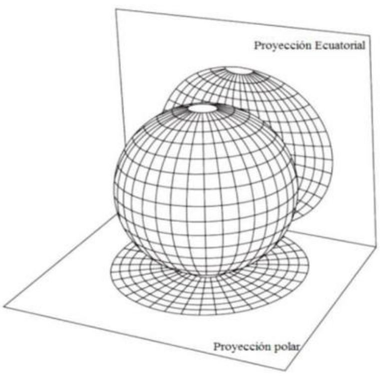
Nota: (a) vista isométrica del plano (b) vista en planta del plano. (WYLLIE, 2004)

2.2.27.3.3 Proyecciones estereográficas

Las Figuras 26, 27 y 28, muestran los tipos de proyección estereográfica utilizados en geología estructural: polar y ecuatorial. Mientras que la proyección polar solo se puede usar para plotear polos, la proyección ecuatorial puede usarse para plotear planos mayores y polos. (WYLLIE, 2004)

Figura 26

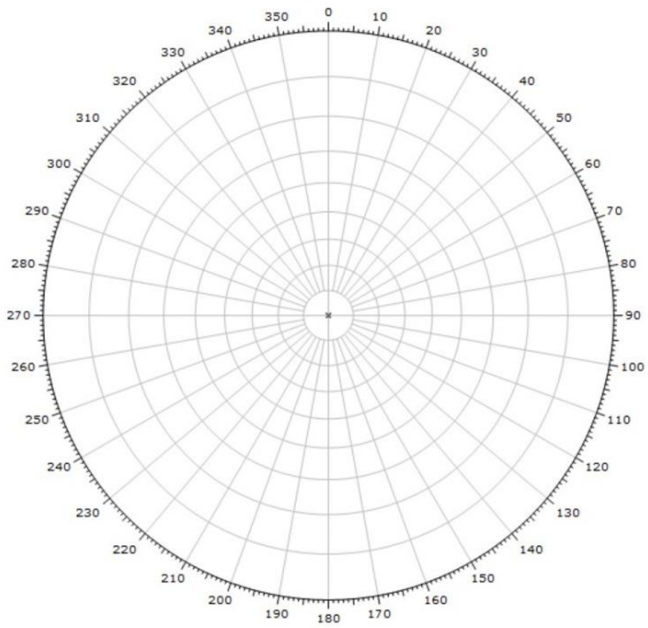
Proyección polar y ecuatorial en una esfera



Nota: *Adaptado de* (WYLLIE, 2004)

Figura 27

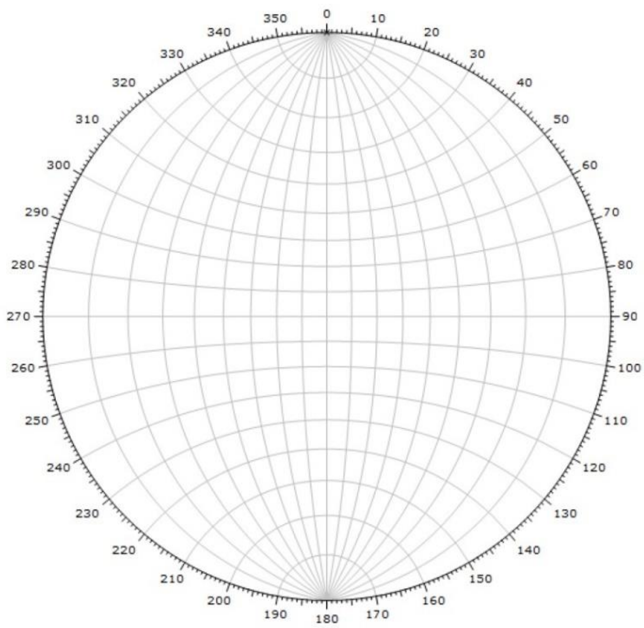
Representación estereográfica polar de igual ángulo



Nota: *Adaptado de* (PRIEST, 1985)

Figura 28

Representación estereográfica ecuatorial de igual ángulo



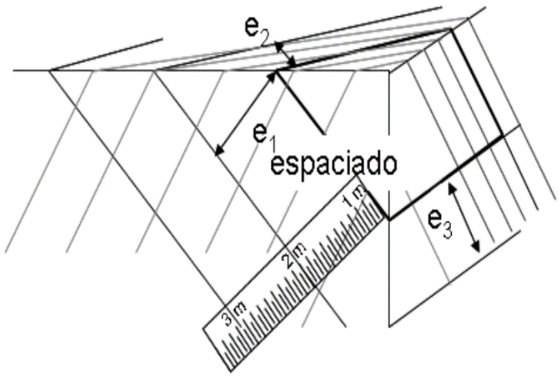
Nota: *Adaptado de* (PRIEST, 1985)

2.2.27.3.4 Espaciamiento de estructuras

El espaciado de las discontinuidades es clave para determinar el tamaño de los bloques en un macizo rocoso, se usa una cinta métrica perpendicular a las discontinuidades en el afloramiento, como se muestra en la Figura 29. (MONGE, 2004).

Figura 29

Medidas de espaciamiento entre discontinuidades



Nota: *Adaptado de* (BROWN, 1981)

A cada conjunto de estructuras se le asigna un valor "característico" de espaciamiento, como el promedio o el modal, ya que el espaciamiento abarca un rango de valores. Para una descripción precisa, se requiere al menos 200 mediciones y se sugiere usar las definiciones de la ISRM, según se detalla en la Tabla 1. (FLORES, 2002)

Tabla 1

Descripción del espaciamiento de las estructuras

Descripción	Espaciamiento (mm)
Extremadamente Junto	<20
Muy Junto	20 a 60
Junto	60 a 200
Moderado	200 a 600
Separado	600 a 2000
Muy Separado	2000 a 6000
Extremadamente Separado	> 6000

Fuente : ISRM commission on standardization of laboratory and field test.

2.2.27.3.5 Persistencia o continuidad de estructuras

Las dimensiones de una discontinuidad se pueden medir observando su longitud en los afloramientos como se muestra en la Figura 30, tanto en la dirección del rumbo como en la del buzamiento. (MONGE, 2004). La persistencia se puede clasificar por el tamaño mediante las siguientes terminologías, Tabla 2. recomendada por la ISRM.

Tabla 2

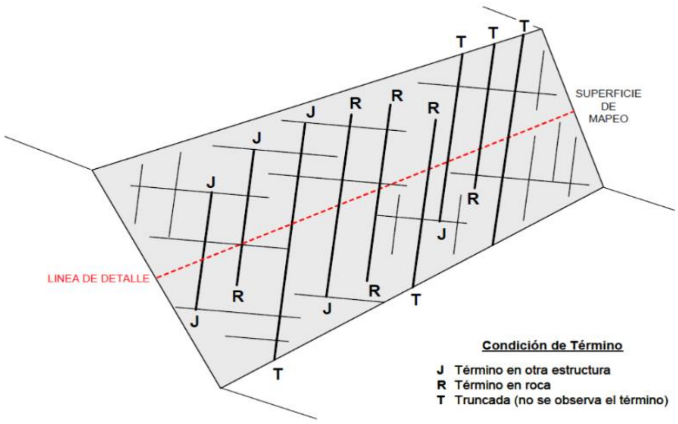
Descripción de la persistencia de las estructuras

Descripción	Persistencia (m)
Muy Baja	<1
Baja	1 a 3
Madia	3 a 10
Alta	10 a 20
Muy Alta	>20

Fuente : *ISRM commission on standardization of laboratory and field test, 1978.*

Figura 30

Esquema como se presentan los macizos rocosos



Nota: *Adaptado de* (FLORES, 2002)

2.2.27.3.6 Apertura

La distancia perpendicular que separa las paredes adyacentes de una roca de una discontinuidad, cuando hay agua o aire en el espacio intermedio, se conoce como apertura. Esto marca la diferencia entre la apertura y el espesor del relleno. (MONGE, 2004)

Para describir la apertura de las discontinuidades se puede emplear la terminología recomendada por la ISRM presentado en la Tabla 3. (BROWN, 1981)

Tabla 3

Descripción de la apertura de las estructuras

Descripción	Apertura
Cerrado	0
Muy Angosta	<0.1 mm
Angosta	0.1 - 1.0 mm
Abierta	1.0 - 5.0 mm
Muy Abierta	>5 mm

Fuente: Terminología de apertura recomendada por la ISRM (BROWN, 1981).

2.2.27.3.7 Rugosidad

La rugosidad es la presencia de características morfológicas en la superficie del plano que indican una discontinuidad que aumenta o disminuye la resistencia al esfuerzo cortante. (DIAS, 1998)

Figura 31

Caracterización de la rugosidad de las estructuras

Clase	Escala		Perfil Típico de Rugosidad de la Estructura	JRC$_{20}$	JRC$_{100}$
	Intermedia	Menor			
I	Escalonada	Rugosa		20	11
II		Lisa		14	9
III		Pulida		11	8
IV	Ondulosa	Rugosa		14	9
V		Lisa		11	8
VI		Pulida		7	6
VII	Plana	Rugosa		2.5	2.3
VIII		Lisa		1.5	0.9
IX		Pulida		0.5	0.4

Nota: *La longitud de cada perfil puede estar en el rango de 1 a 10 m. Las escalas vertical y horizontal son iguales. JRC20 y JRC100 corresponde al valor estimado del coeficiente de rugosidad de la estructura cuando el perfil se "asimila" a un largo de 20 y de 100 cm, respectivamente. (BARTON, 1987)*

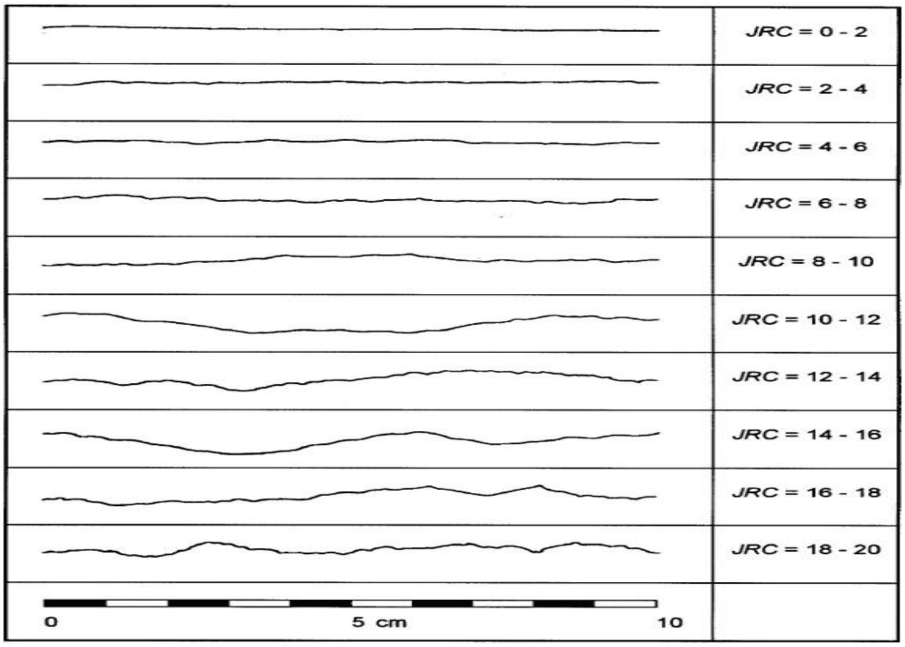
Para definir la rugosidad de las estructuras se recomienda el empleo de los perfiles que se muestran en Figura 31 y considerar 2 escalas:

ESCALA INTERMEDIA (varios metros), en que la ondulación de las estructuras permite clasificarlas en 3 clases: escalonadas, ondulosas, y planas.

ESCALA MENOR (varios centímetros), en que las disparidades de la estructura permiten clasificarlas en 3 clases:rugosas, lisas, y pulidas.

Figura 32

Perfiles de rugosidad y valores asociados del coeficiente JRC



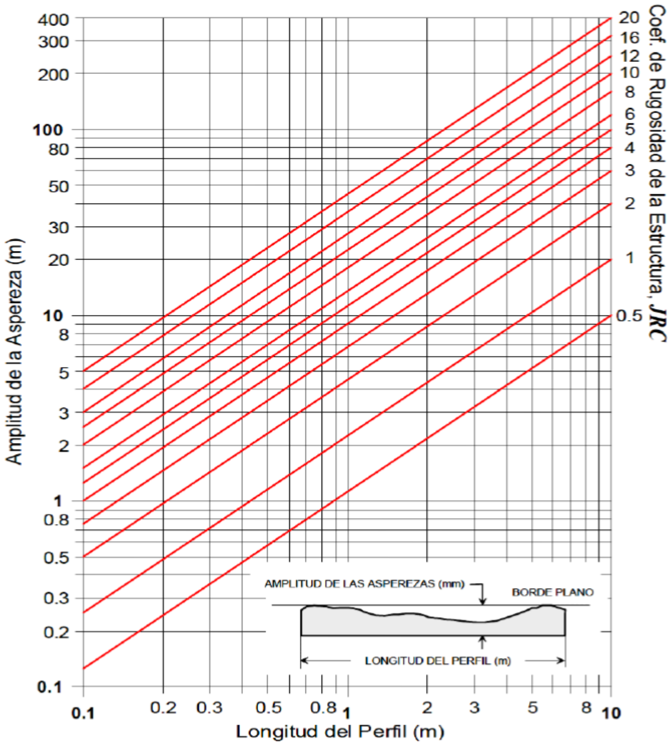
Fuente: Adaptado de, Barton & Choubey, 1977.

Esto permite definir un total de 9 clases de estructuras: (I) escalonadas rugosas, (II) escalonadas lisas, (III) escalonadas pulidas, (IV) ondulosas rugosas, (V) ondulosas lisas, (VI) ondulosas pulidas, (VII) planas rugosas, (VIII) planas lisas, y (IX) planas pulidas.

A pesar de la recomendación anterior, también es común utilizar el coeficiente de rugosidad de la estructura (Joint Roughness Coefficient, JRC), definido por Barton y Choubey (1977), para caracterizar la rugosidad de las estructuras a escala centimétrica. Esto se realiza mediante la aplicación de los perfiles de rugosidad ilustrados en la Figura 32.

Figura 33

Ábaco para evaluar el coeficiente JRC



Nota: Evaluación en función del largo del perfil de la estructura y la amplitud máxima de las asperezas (BARTON, 1974)

Finalmente, cabe señalar que a veces resulta útil el ábaco propuesto por (BARTON, 1974) para estimar la rugosidad en términos del índice JRC, como se muestra en la Figura 33.

2.2.27.3.8 Relleno

Las discontinuidades pueden estar cubiertas con materiales de relleno con diversas propiedades físicas y mecánicas. Es crucial describir detalladamente estos materiales, ya que su estado afecta el comportamiento de las discontinuidades. Los materiales blandos o alterados pueden experimentar cambios significativos en sus propiedades resistentes debido a variaciones en la humedad o movimientos en las juntas. (VALLEJO, 2002)

2.2.27.3.9 Meteorización

El grado de meteorización de una roca es un factor fundamental que influye de manera importante en sus propiedades mecánicas. Las descripciones proporcionadas en la Tabla 4 facilitan una identificación sistemática del estado o nivel de meteorización de la matriz rocosa. (VALLEJO, 2002)

Tabla 4

Descripción del grado de meteorización

Termino	Descripción
No meteorizada	No se observan signos de meteorización
Ligeramente Meteorizada	Las discontinuidades se encuentran manchadas o descoloridas y pueden contener un pequeño relleno producto de la alteración del material.
Moderadamente Meteorizada	Leve decoloración extendida a lo largo de la discontinuidad. Las discontinuidades pueden contener relleno del material alterado. Parcialmente se pueden observar capas de granos.
Altamente Meteorizada	Decoloración extendida a lo largo de la roca, y el material de roca es parcialmente friable, La textura original de la roca se mantiene y es preservada, pero va ocurriendo separación de granos.
Descompuesta	La roca se ha alterado al estado de un suelo, alguno o todos los minerales están descompuestos. El material se encuentra en una condición friable.

Fuente : Tabla obtenido del texto de (BIENIAWSKI, 1989)

2.2.27.3.10 Agua en discontinuidades

La circulación de agua en los macizos rocosos generalmente se produce a lo largo de las discontinuidades, lo que se conoce como permeabilidad secundaria. Sin embargo, en las rocas sedimentarias con un alto índice de poros, el agua circula por la propia roca, lo que se conoce como permeabilidad primaria. Esta permeabilidad requiere que los estratos permeables se entrelazan, a menudo a través de discontinuidades. Los macizos de rocas ígneas y metamórficas tienen una permeabilidad secundaria más alta. En los macizos rocosos, la permeabilidad suele ser muy anisotrópica, como se mencionó anteriormente. (MONGE, 2004)

Tanto si se presentan rellenas como limpias, las observaciones sobre las filtraciones en discontinuidades se pueden encontrar en la Tabla 5. conforme a los consejos de ISRM. (VALLEJO, 2002)

Tabla 5

Descripción de la condición de humedad de las estructuras

Condición	Descripción de la Condición de Humedad	
	Estructuras Sin Relleno	Estructuras Con Relleno
I	Estructura cerrada y seca. No parece posible que a través de la misma circule agua	El relleno se observa consolidado y seco. No parece posible el flujo de agua.
II	Estructura seca y sin evidencia de que haya permitido el flujo de agua.	El relleno está húmedo pero sin señales de agua libre.
III	Estructura seca pero con evidencia de que ha permitido el flujo de agua.	El relleno está mojado y presenta goteos ocasionales.
IV	La estructura está húmeda pero no hay goteos ni otras señales de agua libre.	Se observa un flujo continuo de agua (estimar el caudal). El relleno puede mostrar señales de lavado.
V	La estructura presenta goteos ocasionales, pero sin un flujo continuo de agua.	Se observa flujo considerable de agua según canales preferentes (estimar el caudal y la presión). El relleno está localmente lavado.
VI	La estructura muestra un flujo continuo de agua	Se observa un flujo considerable de agua (estimar caudal y

Condición	Descripción de la Condición de Humedad	
	Estructuras Sin Relleno	Estructuras Con Relleno
	(estimar el caudal y la presión).	presión). El relleno ha sido, al menos localmente, completamente lavado.

Fuente : Tabla obtenido de (BROWN, 1981)

2.2.27.4 Resistencia en las paredes de las discontinuidades

La resistencia a la compresión de las rocas se puede estimar a partir de la dureza superficial de las mismas, la cual se puede obtener mediante el martillo de Schmidt, Figura 34. (MONGE, 2004)

Tabla 6

Estimación en campo de la resistencia-martillo de geólogo

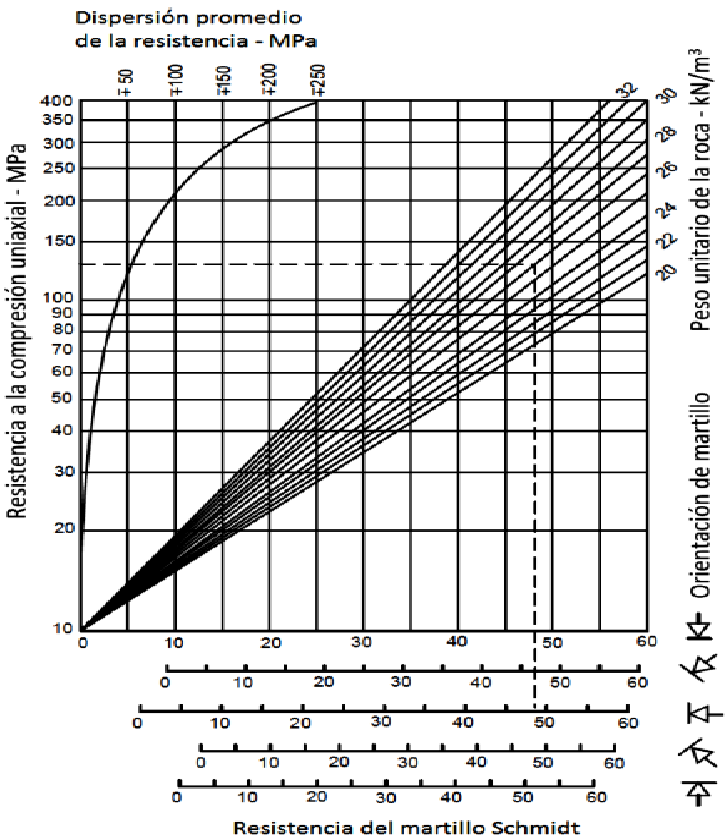
GRADO	DESCRIPCIÓN	IDENTIFICACIÓN DE CAMPO	RCS
R1	Roca muy débil	Desmenuzable bajo golpes firmes con la punta de un martillo de geólogo, puede desconcharse con una navaja	1.0 – 5.0
R2	Roca débil	Puede desconcharse con dificultad con una navaja, se puede hacer marcas poco profundas golpeando firmemente con el martillo de geólogo.	5.0 – 25
R3	Roca medianamente dura	No se puede rayar o desconchar con una navaja, las muestras se pueden romper con un golpe firme del martillo de geólogo.	25 – 50
R4	Roca dura	Se requiere más de un golpe con el martillo de geólogo para romper la muestra.	50 – 100
R5	Roca muy dura	Se requieren varios golpes con el martillo de geólogo para romper la muestra.	100 – 250
R6	Roca extremadamente dura	Solo se puede romper esquirlas de la muestra con el martillo de geólogo.	>250

Fuente: *Adaptado de* (BROWN, 1981) *en* (VALLEJO, 2002)

La ISRM define la resistencia de las paredes de una discontinuidad como equivalente a la resistencia a la compresión de la roca adyacente a estas paredes. tal como se detalla en la Tabla 6. (BARTON, 1974)

Figura 34

Abaco para la obtención de la resistencia a compresión simple



Fuente: (Hoek, E. & Bray, 1991). Abaco para la obtención de la resistencia a compresión simple de una roca de una discontinuidad a partir de medidas con el martillo Schmidt tipo L

2.2.27.5 Caracterización geotécnica

Para determinar las propiedades mecánicas de la roca "intacta", las estructuras y el macizo rocoso, es esencial realizar una caracterización geotécnica. Esta caracterización es clave para entender los mecanismos de fallo en los taludes rocosos. (MONGE, 2004)

2.2.27.5.1 Clasificación geomecánica del macizo rocoso

Las clasificaciones geomecánicas son útiles para determinar parámetros mecánicos clave del macizo rocoso, como el módulo de elasticidad y los coeficientes del criterio Hoek-Brown. Sin embargo, aunque son beneficiosas en las fases iniciales del estudio de taludes, su utilidad para la toma de decisiones a nivel de proyecto es cuestionable. (BIENIAWSKI, 1989)

2.2.27.5.2 Índice de designación de la calidad de la roca (RQD)

El índice RQD (Rock Quality Designation) mide el porcentaje de testigos de más de 10 cm recuperados sin incluir fracturas generadas durante la perforación, en relación con la longitud total del sondeo. Su valor puede variar según la fracturación del macizo rocoso y factores como la técnica, dirección y diámetro de la perforación. (MONGE, 2004)

$$RQD = \frac{\sum Trozos\ de\ longitud\ \geq 10cm}{Longitud\ total\ de\ la\ perforación} x100\%$$

2.2.27.5.3 Clasificación RMR (Bieniawski, 1793)

Para evaluar la calidad de la roca compacta, se divide en dominios estructurales homogéneos delimitados por discontinuidades geológicas. El índice RMR (Rock Mass Rating) se usa para clasificar la calidad de la roca maciza. (MONGE, 2004)

Para determinar el índice RMR de calidad de la roca se hace uso de los seis parámetros de los terrenos siguientes:

- La resistencia a compresión simple del material
- El RQD (Rock Quality Designacion)
- El espaciamiento de las discontinuidades
- El estado de las discontinuidades
- La presencia de agua
- La orientación de las discontinuidades, según sea para cimentaciones, túneles o taludes.

El índice RMR se calcula sumando las puntuaciones asignadas a cada uno de los seis parámetros, con valores que varían entre 0 y 100; a medida que aumenta la calidad de la roca, también lo hace el RMR. Basado en el valor obtenido del RMR, Bieniawski clasifica las rocas en cinco categorías distintas. (BIENIAWSKI, 1989)

- Macizos de calidad MUY MALA (Clase V, $0 \leq RMR \leq 20$).
- Macizos de calidad MALA (Clase IV, $20 < RMR \leq 40$).
- Macizos de calidad REGULAR (Clase III, $40 < RMR \leq 60$).
- Macizos de calidad BUENA (Clase II, $60 < RMR \leq 80$).
- Macizos de calidad MUY BUENA (Clase I, $80 < RMR \leq 100$).

2.2.27.5.4 Clasificación por el método de GSI

La clasificación GSI es cualitativa y se basa en la observación visual del macizo rocoso en afloramientos y sondeos. Evalúa aspectos clave como la fracturación y la resistencia al corte de las discontinuidades para determinar el comportamiento del macizo rocoso. (MONGE, 2004)

El caso que interesa se compara con las condiciones típicas que se muestran en la Figura 35 y 36, y la evaluación del GSI varía de 0 a 100, lo que permite definir cinco clases de macizos rocosos:

- Macizos de calidad MUY MALA (Clase V, $0 \leq GSI \leq 20$).
- Macizos de calidad MALA (Clase IV, $20 < GSI \leq 40$).
- Macizos de calidad REGULAR (Clase III, $40 < GSI \leq 60$).
- Macizos de calidad BUENA (Clase II, $60 < GSI \leq 80$).
- Macizos de calidad MUY BUENA (Clase I, $80 < GSI \leq 100$).

Figura 35

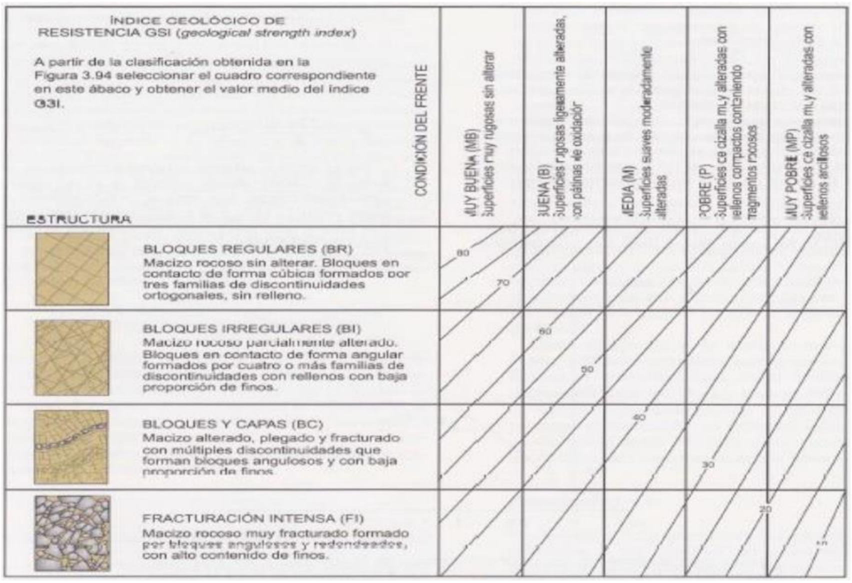
Caracterización del macizo rocoso para estimar su resistencia

CARACTERIZACIÓN DEL MACIZO ROCOSO PARA ESTIMAR SU RESISTENCIA Basándose en el aspecto de la roca elegir la categoría que mejor describa las condiciones del macizo previo a la excavación. Tener en cuenta que las voladuras pueden crear una impresión falsa sobre la calidad del macizo rocoso, en cuyo caso será necesario realizar algún tipo de ajuste por daños debidos a voladuras; la observación de testigos de sondeos y de frentes de roca en zonas afectadas y no afectadas por voladuras puede ser de ayuda. Para la definición del grado de fracturación (*blockiness*) debe considerarse la relación entre el tamaño del bloque y la dimensión del frente de excavación. ESTRUCTURA / CONDICIÓN DEL FRENTE	MUY BUENA (MB) Superficies muy rugosas sin alterar	BUENA (B) Superficies rugosas ligeramente alteradas, con pátinas de oxidación	MEDIA (M) Superficies suaves moderadamente alteradas	POBRE (P) Superficies de cizalla muy alteradas con rellenos compactos conteniendo fragmentos rocosos	MUY POBRE (MP) Superficies de cizalla muy alteradas con rellenos arcillosos
BLOQUES REGULARES (BR) Macizo rocoso sin alterar. Bloques en contacto de forma cúbica formados por tres familias de discontinuidades ortogonales, sin relleno.	BR/MB	BR/B	BR/M	BR/P	BR/MP
BLOQUES IRREGULARES (BI) Macizo rocoso parcialmente alterado. Bloques en contacto de forma angular formados por cuatro o más familias de discontinuidades con rellenos con baja proporción de finos.	BI/MB	BI/B	BI/M	BI/P	BI/MP
BLOQUES Y CAPAS (BC) Macizo alterado, plegado y fracturado con múltiples discontinuidades que forman bloques angulosos y con baja proporción de finos.	BC/MB	BC/B	BC/M	BC/P	BC/MP
FRACTURACIÓN INTENSA (FI) Macizo rocoso muy fracturado formado por bloques angulosos y redondeados, con alto contenido de finos.	FI/MB	FI/B	FI/M	FI/P	FI/MP

Fuente: Caracterización del macizo rocoso en base a su grado de fracturación y estado de las juntas. (Hoek, 1997)

Figura 36

Índice de resistencia geológica de resistencia GSI.



Fuente*: Estimación de índice GSI en base a descripciones geológicas.* (Hoek, 1997)

2.2.27.5.5 Criterio de rotura de Hoek-Brown generalizado

Es posible evaluar las propiedades geomecánicas del macizo rocoso después de evaluar las características de la roca intacta y determinar su calidad geotécnica. Para lograr esto, se recomienda utilizar el criterio generalizado de Hoek-Brown, que permite evaluar la resistencia del rocoso macizo como:

$$\sigma_1' = \sigma_3' + \sigma_{ci}\left(m_b \frac{\sigma_3'}{\sigma_{ci}} + S\right)^a$$

Donde:

σ_1' y σ_3' :son los esfuerzos principales efectivos en condición de falla.

σ_{ci} : es la resistencia en compresión uniaxial de la roca intacta.

m_b, s y a : son constantes del material, estas se desarrollan como sigue:

$$m_b = m_i e^{\left(\frac{GSI-100}{28-14D}\right)}$$

$$S = e^{\left(\frac{GSI-100}{9-3D}\right)}$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(e^{\frac{-GSI}{15}} - e^{\frac{-20}{3}}\right)$$

D, es un parámetro, donde su cálculo se obtiene a partir de la Tabla 7.

Tabla 7

Guías para evaluar el parámetro D para taludes

Condición Del Macizo Rocoso	D
Voladuras con excelente control en pequeños taludes (sobre todo si se utiliza precorte o recorte). La relajación de tensiones produce perturbación.	**0.7**
Excavación por arranque mecánico o ripado en rocas blandas.	
Voladuras poco cuidadosas en pequeños taludes en el ámbito de la ingeniería civil.	
En cortas y grandes explotaciones mineras a cielo abierto se produce mucha perturbación por las grandes voladuras de producción y por la relajación de tensiones asociada a la retirada de material.	**1.0**

Fuente: Tabla obtenido de (Hoek, 1997)

Además

m_i es el valor del parámetro

m para la roca intacta,

GSI es el índice de resistencia geológica del macizo rocoso

D es un factor que considera la perturbación que produce en el macizo rocoso el desconfinamiento y las voladuras.

Según (RAMÍREZ, 2004) el valor del parámetro m_i se puede estimar en primera aproximación a partir de la Tabla 8.

Tabla 8

Tabla de estimación de la constante m_i

Tipo de roca	Clase	Grupo	Textura: Gruesa	Textura: Media	Textura: Fina	Textura: Muy fina
SEDIMENTARIAS	Clásticas		Conglomerado (22)	Arenisca 19	Limolita 9	Argilita 4
			← Grauwaca (18) →			
	No clásticas	Orgánicas	← Creta(18) → ← Carbón (8-21) →			
		Carbonatadas	Brecha (20)	Caliza Esparítica (10)		Caliza Micrítica 8
		Evaporitas		Yeso 16	Anhidrita 13	
METAMÓRFICAS	No foliadas		Mármol 9	Corneanas (19)	Cuarcita 24	
	Ligeramente foliadas		Migmatita (30)	Anfibolita 31	Milota (6)	
	Foliadas*		Gneiss 33	Esquisto (10)	Filita (10)	Pizarra 9
IGNEAS	Claras		Granito 33		Riolita (16)	Obsidiana (19)
			Granodiorita (30)		Dacita (17)	
			Diorita (28)		Dacita 19	
	Oscuras		Gabro 27	Dolerita (19)	Basalto (17)	
			Norita 22			
	Extrusivas piroclásticas		Aglomerado (20)	Brecha (18)	Toba (15)	

Fuente: Adaptado de (RAMÍREZ, 2004), para rocas con foliación se recomienda ensayos triaxiales.

2.2.27.5.6 Mohr-Coulomb a partir de los del criterio de Hoek-Brown

Dado que la mayoría de los programas geotécnicos se basan en el criterio de rotura de Mohr-Coulomb y los ingenieros están más familiarizados con los parámetros de cohesión y fricción que con los del criterio de Hoek-Brown, es crucial poder calcular los ángulos de cohesión y fricción para cada macizo rocoso en función de diferentes rangos de tensión.

El criterio de rotura de Mohr-Coulomb se expresa en ejes tensión cortante-tensión normal en la forma:

$$\tau = c\sigma_n' tan\varphi$$

Que al pasarlo a unos ejes $\sigma_1' - \sigma_3'$ tales como los que se utilizan para representar el criterio de rotura de Hoek-Brown, quedaría en la forma:

$$\sigma_1' = \frac{2cCos\varphi}{1 - Sen\varphi} + \frac{1 + Sen\varphi}{1 - Sen\varphi}\sigma_3'$$

Ajustando una envolvente lineal a la de Hoek-Brown, como se muestra en la Figura 37, es posible determinar valores para la cohesión, c , y el ángulo de fricción, φ, del macizo rocoso como:

$$\varphi = sen^{-1}\left(\frac{6am_b(s + m_b\sigma_3')^{a-1}}{2(1+a)(2+a) + 6am_b(s + m_b\sigma_3')^{a-1}}\right)$$

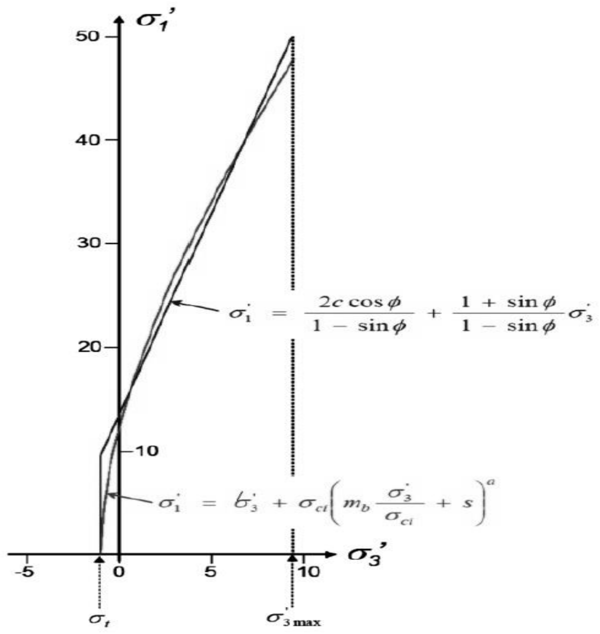
$$c = \frac{\sigma_{ci}\left((1+2a)s + (1-a)m_b\sigma_{3n}'\right)^{a-1}}{(1+a)(2+a)\sqrt{1 + \frac{6am_b(s + m_b\sigma_{3n}')^{a-1}}{(1+a)(2+a)}}}$$

Además

$$\sigma_{3n}' = \frac{\sigma_{3\,max}'}{\sigma_{ci}}$$

Figura 37

Ajuste de una envolvente lineal a la envolvente de Hoek-Brown



Fuente: Adaptado de (Hoek, 1997)

El límite superior de la tensión de confinamiento, sobre el cual se estimará la relación entre los criterios de rotura de Hoek-Brown y Mohr-Coulomb, se determinará específicamente para cada problema. El valor de $\sigma_{3\,max}'$ corresponde al límite superior de la tensión de confinamiento.

Si es necesario, se puede calcular la resistencia a compresión simple de un material rocoso macizo utilizando estos valores:

$$\sigma_{cm}' = \frac{2c' Cos\varphi'}{1 - Sen\varphi'}$$

2.2.27.5.7 Propiedades de deformabilidad de los macizos rocosos

Para evaluar el módulo de deformabilidad E_m del macizo rocoso, (Hoek, 1997), sugieren utilizar la formula siguiente:

$$E_m = \left(1 - \frac{D}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_{ci}}{100}}x10^{\left(\frac{GSI-10}{40}\right)}$$

Donde E_m se expresa en GPa y σ_{ci} en MPa.

Finalmente, para determinar el coeficiente de poisson se usa la formula planteada por (FLORES, 2002) como se muestra a continuación:

$$v_m = 0.4 - \frac{GSI^{0.7}}{100}$$

2.2.27.5.8 Peso específico y densidad

Según el texto de física de (RICALDONI, 2013), el peso específico de una roca y cualquier material, γ, es definida como la relación entre el peso (W) y el volumen total (V_T) de la muestra.

$$\gamma = \frac{W}{V_T}$$

(ASCAMA), la densidad de una roca, ρ, es definida como la relación entre la masa (M) y el volumen total (V_T) de la roca.

$$\rho = \frac{M}{V_T}$$

2.2.27.5.9 Ensayos de carga puntual

El ensayo de Franklin calcula la fuerza necesaria para fracturar muestras, tanto regulares como irregulares, comprimidas entre dos puntas, como se ilustra en las Figuras 38 y 39. En el caso del ensayo diametral, la fractura ocurre en un plano paralelo al eje de carga. Este ensayo está estandarizado de acuerdo con la norma ASTM D5731 y mide el índice de resistencia a carga puntual Is en rocas, ya sea en condiciones secas o húmedas. El índice de carga puntual se determina mediante la siguiente fórmula. (RAMÍREZ, 2004)

$$I_s = \frac{P}{D_e^2}$$

Donde,

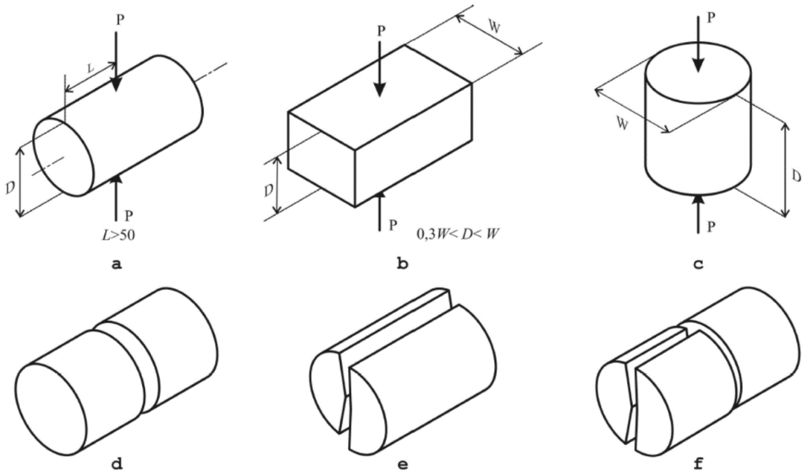
I_s: Índice de carga puntual

P: Fuerza o carga aplicada

D_e: Diámetro equivalente de la probeta

Figura 38

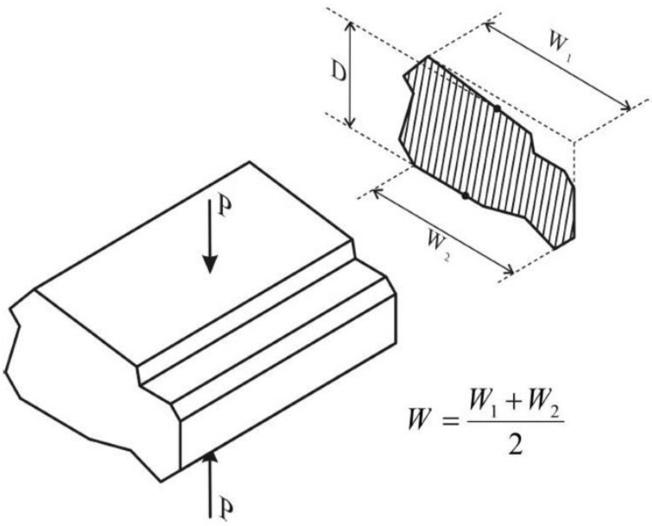
Muestras regulares y formas de aplicar carga



Fuente: *Adaptado de* (DIAS, 1998)

Figura 39

Muestra irregular y forma de aplicar carga



Fuente: *Adaptado de* (DIAS, 1998)

El diámetro equivalente se puede calcular mediante la siguiente expresión: Para muestras diametrales:

$$D_e^2 = D^2$$

Para muestras irregulares, axiales o bloques, Se emplea cuando la muestra ensayada es un trozo de roca de geometría irregular como se muestra en la Figura 39.

$$D_e^2 = \frac{4WD}{\pi}$$

Donde,

W: Es la anchura media de la muestra.

D: Diámetro del núcleo.

Cuando el valor de D_e es distinto de 50mm es conveniente hacer una corrección para eliminar la influencia del tamaño, esta corrección permite obtener el $I_{s(50)}$ y se puede efectuar usando la siguiente formula. (RAMÍREZ, 2004)

$$\mathrm{I}_{s(50)} = \left(\frac{\mathrm{D}}{50}\right)^{0,45} \mathrm{I}_s$$

Además (RAMÍREZ, 2004) indica que Broch y Franklin encontraron una correlación entre $\mathrm{I}_{s(50)}$ y la resistencia a compresión simple con la siguiente relación:

$$\sigma_{ci} = 24\mathrm{I}_{s(50)}$$

3 CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 UBICACIÓN GEOGRÁFICA DEL ESTUDIO

El presente proyecto de investigación se realizó su aplicación durante sus etapas in situ, en el Departamento de Puno, Provincia de San Román del Distrito de Juliaca en la vía Articulación de la progresiva 1+960 al 2+640.

3.2 METODOLOGÍA

La metodología empleada para este estudio, se sustenta en un enfoque de investigación cuantitativo, basados en la estabilidad de taludes, debido a que la investigación se trabaja con variables que se pueden medir y contar, como los desplazamientos nodales, las deformaciones y los esfuerzos.

3.3 POBLACIÓN Y MUESTRA

3.3.1 Población

La población de estudio en esta investigación está compuesta por todos los taludes presentes en la vía articulación de la Provincia de San Román, específicamente en el tramo comprendido entre la progresiva 1+960 y la 2+640. Estos taludes se caracterizan por estar ubicados en una zona con condiciones geológicas diversas, donde factores como la composición del suelo, la topografía, y las variaciones climáticas pueden influir en su estabilidad.

Si bien muchos de los taludes de la región presentan grados variables de estabilidad, esta investigación está orientada a aquellos que, aunque no muestran inestabilidad crítica, podrían estar en riesgo bajo ciertas condiciones externas, como eventos sísmicos o cambios en las cargas aplicadas. La población total abarca taludes que, aunque actualmente se mantengan estables, requieren un análisis detallado de sus condiciones mecánicas y geotécnicas para prever posibles deslizamientos o deformaciones en el futuro.

3.3.2 Muestra

Para esta investigación, la muestra seleccionada está conformada por tres taludes específicos, ubicados en las progresivas 2+520, 2+540 y 2+560 de la misma vía. Estos taludes no presentan signos evidentes de inestabilidad, pero debido a su geometría y las características del terreno en la región, son relevantes para el análisis del mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF).

La elección de esta muestra se realizó de manera intencional, dado que estos taludes, aunque actualmente estables, representan un escenario ideal para evaluar el comportamiento frente a cargas de su escarpe superior además estos taludes fueron seleccionados, además, por su fácil accesibilidad.

3.4 MATERIALES

Los materiales son indispensables en esta investigación ya que requerimos de:

- Softwares: Civil 3D, AutoCAD, ArcGis, Agisoft, Excel
- Textos
- Laptop
- Impresora
- GPS
- Brújula
- Computadora
- Cámara fotográfica
- Flexómetro

- Martillo de geólogo
- Martillo de Schmidt
- Dron
- Útiles de escritorio

3.5 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Este proyecto de investigación tiene una perspectiva descriptiva y aplicativa. Consiste en el análisis matricial de la estructura del talud mediante el método de los elementos finitos a través del desarrollo directo mediante matrices de rigidez, es de tipo descriptivo porque se detallan las propiedades y comportamientos del talud, como la estabilidad, la geometría, las caracterizaciones geomecánicas, las descripciones geológicas entre otros y aplicativo porque tratará de responder los fenómenos físicos del talud que se ubica en la vía articulación – Juliaca.

3.6 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El diseño del presente proyecto de investigación es experimental, debido a que se observa y se analizan distintas variables, así mismo se realizan ensayos experimentales en laboratorio de las muestras obtenidas in-situ.

3.7 VARIABLES

Variable Dependiente: Caracterización geomecánica del macizo rocoso.

- Sistema RMR
- Módulo de elasticidad y coeficiente de poisson
- Desplazamientos
- Deformaciones
- Esfuerzos

Variable Independiente: Método matricial y método de los elementos finitos

3.8 ESTRATEGIAS

Constará de tres fases, las tres fases de las estrategias empleadas para la presente investigación son las siguientes:

3.8.1 Recopilación de información

En esta primera etapa se revisará toda la información bibliográfica disponible y que tenga relación al estudio que ya se menciona en este proyecto y sobre todo textos, revistas científicas, tesis, videos relacionados al análisis matricial de estructuras, así mismo para la aplicación de este proyecto al talud de la vía articulación de la ciudad de Juliaca, se elaborará planos topográficos base a diferentes escalas, se descargaron planos geológicos regionales existentes (GEOCATMIN).

3.8.2 Trabajo de campo

En esta fase se realizará el reconocimiento y trabajos de evaluación in situ, como la obtención de datos superficiales y muestras necesarios para su posterior evaluación.

3.8.3 Trabajo de gabinete

En esta fase se procederá a sistematizar y consolidar la información recopilada, generando una base de datos para poder cartografiar mapas geológicos, y así mismo el desarrollo y obtención de los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos, para finalmente proceder a redactar el presente proyecto de investigación y su posterior entrega.

4 CAPÍTULO IV

CARACTERIZACIÓN DEL ÁREA DE ESTUDIO

4.1 DESCRIPCIÓN DEL ÁREA DE APLICACIÓN

4.1.1 Ubicación

EL área de aplicación se encuentra en la vía Articulación entre las progresivas 1+960 al 2+640 a 2.40 km de la plaza de armas del distrito de Juliaca en dirección SE, políticamente, dentro de las siguientes coordenadas UTM que se muestran en la Tabla 9. El área de aplicación se observa en la imagen satelital del Anexo 2- A, así mismo se presenta en el plano de ubicación del Anexo 2-B.

Tabla 9

Ubicación UTM del área de aplicación

Punto	Norte	Este
Extremo A	8285700	377442
Extremo B	8284778	377441
Extremo C	8284777	378801
Extremo D	8285699	378800

Nota: Elaboración Propia

4.1.2 Accesibilidad

La accesibilidad al área de aplicación desde la ciudad de Puno, es por la vía transoceánica, hacia la ciudad de Juliaca, detalles Tabla 10.

Tabla 10

Accesibilidad al área de aplicación

Tramo	Distancia	Tiempo	Tipo de Vía
Juliaca-Puno	43.3 km	50 min	Asfalto

Tramo	Distancia	Tiempo	Tipo de Vía
Juliaca – Área de aplicación	2.40 km	25 min	Asfalto
Total	45.7 km	1h: 15 min	

Nota: Elaboración Propia

4.2 CARACTERIZACIÓN GEOLÓGICA LOCAL

Se realizó el mapeo geológico del área de aplicación dentro del cuadrángulo presentado en la Tabla 8, localmente en estas zonas afloran litologías que datan generalmente del paleozoico, se observó litologías del Grupo Iscay, Grupo Ambo y Grupo Cabanillas, que según investigaciones del Ingemmet estos pertenecen al Pérmico superior, sistema carbonífero inferior y Devónico, respectivamente y los depósitos aluviales en la zona de aplicación son sedimentos cuaternarios, todo lo indicado anteriormente se menciona en el mapa geológica del Anexo 2-C así mismo se presenta en la Figura 40.

Figura 40

Vista panorámica del área de estudio

Nota: En la imagen se observa las litologías que presenta la zona de estudio.

4.2.1 Grupo Cabanillas (D - ca)

En el área de estudio, se identifican afloramientos litológicos del Grupo Cabanillas con espesores que varían entre 15 y 50 metros. Estas formaciones están en contacto fallado con el Grupo Iscay, como se ilustra en la Fotografía 3 del Anexo 3. Los afloramientos están compuestos principalmente por lutitas, con intercalaciones de areniscas y fragmentos líticos, que presentan una coloración pardo oscuro. Este color, más intenso en las zonas de contacto, podría estar relacionado con la presencia de minerales como mica o compuestos orgánicos preservados en las lutitas.

A medida que se aumenta la distancia del contacto con el Grupo Iscay, las rocas adquieren tonalidades más grisáceas. Este cambio podría explicarse por procesos de meteorización que alteraron los minerales originales o por las variaciones de presión y temperatura experimentadas en la zona. La ubicación de este grupo en un contexto geológico activo, como el Cerro Zapantiana, resalta la relevancia de su estudio. La distribución de estas unidades se detalla en el plano geológico del Anexo 2-C.

4.2.2 Grupo Ambo (Ci - a)

Aquí se observan areniscas cuarzosas blanquecinas de grano medio a grueso, con potencias que varían de 0.30 m a 5 m, intercaladas con delgadas capas de lutitas. Estas formaciones se extienden en discordancia paralela sobre las rocas del Grupo Cabanillas, lo que evidencia un cambio significativo en las condiciones ambientales durante su formación.

La coloración blanquecina de este afloramiento, documentada en las imágenes satelitales presentadas en el Anexo 2-A, es un indicativo de la alta cantidad de sílice que pueden ser significativas talvez desde el punto de vista industrial. Además, estas areniscas cuarzosas son más susceptibles a la erosión que las rocas más duras del Grupo Iscay, lo que debe considerarse en cualquier análisis de estabilidad del terreno. La información detallada en el mapa geológico del Anexo 2-C subraya la relevancia de estas formaciones para entender las interacciones geológicas en la zona.

4.2.3 Grupo Iscay (Ps - is)

En la zona de estudio, se pueden observar rocas volcánicas del Grupo Iscay, que están constituidas por tobas cristalolíticas, con fragmentos líticos y la presencia de dentritas grises. Este grupo, refleja una historia geológica rica en actividad volcánica, y es crucial para entender la tectónica de la región. La estructura del talud en esta área está compuesta litológicamente por rocas como la traquita, caracterizadas por su color rosáceo y su masividad, además de contener minerales como biotitas, cuarzo y feldespato.

El contacto con el Grupo Ambo en discordancia angular, y el contacto fallado con el Grupo Cabanillas, como se muestra en la Fotografía 03 del Anexo 3, sugiere un complejo historial tectónico que incluye eventos de elevación y erosión. La actividad volcánica intensa que dio origen a estas rocas ha influido notablemente en la morfología del terreno, generando un paisaje abrupto y característico de la región

4.2.4 Cuaternario Aluvial (Q - al)

Finalmente, se identifican depósitos aluviales recientes, que son el resultado de la meteorización de las rocas presentes en la parte alta de la zona de estudio y en ciertas áreas sobre el talud. Estos depósitos aluviales, compuestos por limos, arenas, arcillas y gravas, son resultado de un ciclo de sedimentación que continúa hasta la actualidad. Estos materiales, menos consolidados, son más susceptibles a la erosión, lo que puede afectar la estabilidad de las estructuras construidas sobre ellos.

La predominancia de depósitos aluviales en las partes más bajas de la zona de trabajo indica procesos geológicos activos y una dinámica hidráulica que debe ser considerada en el análisis de la estabilidad del terreno. Estos sedimentos rellenan depresiones y quebradas, formando un manto que cubre casi todas las formaciones rocosas, como se detalla en el Anexo 2-C.

4.2.5 Geomorfología local

La geomorfología de la zona de aplicación y en la ciudad de Juliaca está comprendida con unidades montañosas como: pie de monte, colinas altas, colinas medías. También presentan regatos fluviales como: lechos de ríos, terrazas aluviales, valles en U y bofedales, así mismo unidades antrópicas.

4.3 CARACTERIZACIÓN ESTRUCTURAL LOCAL

En la caracterización del macizo rocoso en la zona de aplicación, se observó estructuras menores los cuales repercuten directa e indirectamente en la estabilidad del talud en donde estos se ven afectados por los agentes geodinámicos externos.

4.3.1 Mapeo superficial de estructuras

El mapeo superficial "in situ" de estructuras aflorantes se efectuó mediante el mapeo geomecánico lineal a detalle, en las tres zonas de aplicación que se alinean al pie del talud de corte a lo largo de la vía Articulación entre las progresivas 1+960 a 2+640. Para la caracterización de cada zona de aplicación se realizó una descripción cuantitativa y cualitativa de las estructuras que afloran. La recolección de la base de datos tomados en "in situ" se encuentran registrados en las fichas geomecánicas que se muestran en el Anexo 4.

4.3.1.1 Familia de discontinuidades

Para cada zona de aplicación, se tomaron datos de campo con una brújula, la dirección del buzamiento y el buzamiento a lo largo de la vía Articulación al pie del talud de corte mediante un mapeo lineal a detalle. Estos datos se muestran en el Anexo 4.

De las 3 zonas de aplicación se obtuvieron 277 datos de buzamiento y dirección de buzamiento, 97 datos de la zona de aplicación prog 2+520, 93 datos de la zona de aplicación prog 2+540 y 87 datos de la progresiva 2+560, estas rumbos de discontinuidades, se procesaron en el software Dips esta herramienta permitió identificar las familias principales de discontinuidades con la ayuda del diagrama de densidad de polos, ya que esto muestra una agrupación de datos a detalle y definiéndose así el número de familias de discontinuidades en cada zona como se muestra en la tabla 11 y en el Anexo 6. De acuerdo al procesamiento de los datos, en la progresiva 2+520 se puede observar 3 familias de discontinuidades, la progresiva 2+540 de acuerdo a la concentración de polos presentan 3 familias de discontinuidades y finalmente la progresiva 2+560 de acuerdo al software y las observaciones que se realizaron en la zona, esto presenta 4 familias de discontinuidades. En el Anexo 6 se presentan todos los diagramas estereográficos.

Tabla 11

Familia de discontinuidades de las 3 zonas de aplicación

Zona	N° Familias	Fam.	Buzamiento	Dir/ Buzamiento
Prog 2+520	3	Fam. 01	66	146
		Fam. 02	71	197
		Fam. 03	49	263
Prog 2+540	3	Fam. 01	73	186
		Fam. 02	73	245
		Fam. 03	67	333
Prog 2+560	4	Fam. 01	79	197
		Fam. 02	75	237
		Fam. 03	76	283
		Fam. 04	74	318

Fuente: Elaboración Propia

4.3.1.2 Buzamiento y dirección de buzamiento

Como se observa en la Fotografía 04. El buzamiento y la dirección de Buzamiento se presenta en el Anexo 4, estos determinan el número de familias principales de discontinuidades. Para el presente trabajo de investigación se requiere el buzamiento promedio de cada zona del talud, por ende, se presenta la siguiente Tabla 12.

Tabla 12

Datos de buzamiento y Dir/ Buzamiento promedio

Zona de Talud	Buzamiento Promedio	Dir/Buzamiento Promedio
Prog 2+520	60.8	216.9
Prog 2+540	71.1	251.4
Prog 2+560	74	270.4

Fuente: Elaboración Propia

4.3.1.3 Espaciamiento de estructuras

El espaciamiento entre las discontinuidades, tomados los datos in situ, fueron medidas con el instrumento denominado flexómetro, colocando esta de forma ortogonal a las discontinuidades que afloran en las 3 progresivas de aplicación, en el Anexo 4 se presentan los datos de espaciamientos medidos, así mismo en la Tabla 13 se presenta el promedio de las 3 progresivas y su respectiva valoración.

Tabla 13

Espaciamiento de estructuras

Zonas	**Espaciado**	**Descripción**	**Valoración**
Prog 2+520	200-600 mm	Moderadamente Juntas	10
Prog 2+540	200-600 mm	Moderadamente Juntas	10
Prog 2+560	200-600 mm	Moderadamente Juntas	10

Fuente: Elaboración propia, en esta tabla se muestra los espaciamientos promedios de las 3 progresivas aplicadas.

4.3.1.4 Persistencia o continuidad de estructuras

De cierto modo es uno de las referencias de mayor interés, el cual afecta el comportamiento del macizo rocoso, estos se cuantificaron revisando la expansión de las discontinuidades ya sea en la dirección del rumbo o buzamiento. Los datos obtenidos in situ se presentan en el Anexo 4 como datos de mapeo lineal. Para esta investigación estos datos de persistencia fueron agrupados por zonas de aplicación y se presentan a continuación en la Tabla 14.

Tabla 14

Persistencia de estructuras

Zonas	Persistencia	Descripción	Valoración
Prog 2+520	3 -10 m	Continuidad Media	2
Prog 2+540	3 -10 m	Continuidad Media	2
Prog 2+560	3 -10 m	Continuidad Media	2

Fuente: Elaboración propia

4.3.1.5 Apertura

La distancia que se separan entre las discontinuidades fueron tomados los datos con una regla graduada y a continuación se muestra en la Tabla 15, la apertura promedio de cada zona de aplicación.

Tabla 15

Apertura entre discontinuidades

Zonas	Descripción	Apertura	valoración
Prog 2+520	Angosta	0.1 – 1.0 mm	4
Prog 2+540	Angosta	0.1 – 1.0 mm	4
Prog 2+560	Angosta	0.1 – 1.0 mm	4

Fuente: Elaboración propia

Las aperturas que se observaron en la zona de aplicación no siempre tenían las mismas características, como se muestra en los datos del Anexo 4, se tienen aperturas que van desde abiertas, angostas, muy angostas, cerradas.

4.3.1.6 JRC (Joint Roughness Coefficient)

Este valor depende del grado de rugosidad de la discontinuidad y los valores de JRC (Joint Roughness Coefficient) obtenidos en campo son valores que van desde lisa hasta muy rugosa. Para la determinación, los valores de JRC fueron obtenidos utilizando el diagrama de Barton y promediando los valores de cada zona de aplicación obtenidos en campo como se muestra en la Tabla 16.

Tabla 16

JRC (Joint Roughness Coefficient) Del Talud

Zonas	Descripción	Parámetro	Valor Promedio
Prog 2+520	Ligeramente rugosa	6-12	9.09
Prog 2+540	Ligeramente rugosa	6-12	10.07
Prog 2+560	Ligeramente rugosa	6-12	9.55

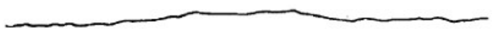
Fuente: Elaboración propia

4.3.1.7 Rugosidad

La rugosidad que presenta cada una de las discontinuidades se presentan en la ficha del mapeo lineal a detalle en el Anexo 4 Este parámetro es muy valioso porque controla la estabilidad estructural de los bloques que se encuentran en el talud. La rugosidad de las discontinuidades fue medida con la clasificación de perfiles y los valores que están asociados al coeficiente de rugosidad, como se muestra en la Tabla 17.

Tabla 17

Rugosidad de la estructura

Zonas	Descripción	JRC	Valoración
Prog 2+520		8-10	3
Prog 2+540		8-10	3
Prog 2+560		8-10	3

Fuente: Elaboración Propia

4.3.1.8 Relleno

La caracterización in situ del relleno en las tres zonas de aplicación se encontró en su mayoría material blando. Que generalmente estos materiales son el producto de la fricción, meteorización y desplazamientos que sufren los planos de las discontinuidades. Los datos de relleno que fueron mapeados in situ se presentan en el Anexo 4 y los resultados promedios presentamos en la siguiente Tabla 18.

Tabla 18

Relleno de la estructura

Zonas	Descripción	Valoración
Prog 2+520	Relleno Blando < 5mm	1
Prog 2+540	Relleno Blando < 5mm	1
Prog 2+560	Relleno Blando < 5mm	1

Fuente: Elaboración Propia

4.3.1.9 Meteorización

El grado de alteración o meteorización del macizo rocoso en la zona de estudio se evaluó directamente en el afloramiento y se compara con los índices estándares promedio como se muestra en la Tabla 19. La zona de aplicación al ser un talud de corte producto de la excavación para la apertura de la vía articulación, presentan alteraciones.

Tabla 19

Grados de meteorización de la estructura

Zonas	Grado de Meteorización	Descripción	Valoración
Prog 2+520	III	Ligeramente Meteorizada	5
Prog 2+540	III	Moderadamente Meteorizada	3
Prog 2+560	III	Ligeramente Meteorizada	5

Fuente: Elaboración Propia

4.3.1.10 Agua en discontinuidades

En la zona de aplicación, generalmente presenta dos temporalidades de estaciones, una de sequía y otra con avenidas de precipitaciones. La toma de datos presentados en el Anexo 4 fueron realizados en la temporada de sequía lo cual las zonas de aplicación estuvieron completamente secas. A continuación, en la Tabla 20 presentamos lo que se observó in situ.

Tabla 20

Agua en las discontinuidades

Zonas	Descripción	Valoración
Prog 2+520	Seco	15
Prog 2+540	Seco	15
Prog 2+560	Seco	15

Fuente: Elaboración propia

4.3.1.11 Resistencia de las paredes de las discontinuidades

Para medir la resistencia de las paredes de las discontinuidades como se observa en la Fotografía 6 Del Anexo 3 y demás presentados en el Anexo 4 fueron medidas con el martillo de Schmidt tipo L, estos valores de resistencia fueron agrupados y procesados de acuerdo a la zona de aplicación como se presenta en la siguiente Tabla 21.

Tabla 21

Resistencia de las paredes de las discontinuidades

Zonas	Descripción	JCS	Valoración
Prog 2+520	Muy Resistente	116.46 Mpa	9.4
Prog 2+540	Muy Resistente	126.49 Mpa	9.8
Prog 2+560	Muy Resistente	129.34 Mpa	10.03

Fuente: Elaboración propia

4.4 CARACTERIZACIÓN GEOTÉCNICA LOCAL

4.4.1 Clasificación geomecánica del macizo rocoso

En la clasificación geomecánica se definió propiedades mecánicas de cada talud aplicado a partir del mapeo lineal a detalle en donde se pudo determinar los valores de índice de RQD, los valores de las clasificaciones RMR y GSI.

4.4.1.1 Índice de designación de la calidad de la roca (RQD)

Para lograr determinar el RQD se a hecho uso del criterio de Priest y Hudson (1976), cuya aplicación trivial, se considera la medición y conteo exacta del número de fisuras por metro lineal, esto quedará representado por el símbolo λ, en las zonas de aplicación se pudieron observar y contar de 6 a 10 aproximado fisuras por metro lineal, por ende lo que se presenta a continuación es el promedio de fisuras por metro lineal de las tres Zonas de aplicación, para luego hacer el uso de la ecuación de Priest y Hudson y poder hallar el RQD. Se presentan los resultados que se muestran en la Tabla 22.

Tabla 22

Índice de designación de la calidad de la roca (RQD)

Zonas	λ	RQD
Prog 2+520	8 fisuras/ml	80.87
Prog 2+540	9 fisuras/ml	77.25
Prog 2+560	9 fisuras/ml	77.25

Fuente: Elaboración propia

Por lo tanto, en la siguiente tabla 23 se muestra la descripción del índice de calidad del macizo rocoso por zonas.

Tabla 23

Descripción del índice de calidad del macizo rocoso por zonas

Zonas	Calidad	Índice de calidad de roca	Valoración
Prog 2+520	Buena	75 a 90 %	17
Prog 2+540	Buena	75 a 90 %	17
Prog 2+560	Buena	75 a 90 %	17

Fuente: Adaptación Propia

4.4.1.2 Clasificación RMR (Bieniawski, 1973)

La clasificación de RMR es la calidad del macizo rocoso, que es el producto de la sumatoria de los valores de la compresión uniaxial, RQD, caracterización y orientación de las discontinuidades, presencia de agua, todos estos obtenidos de la observación y caracterización del macizo rocoso, la formula se expresa como sigue:

$$\boldsymbol{RMR} = A1 + A2 + A3 + A4 + A5 - B$$

Para determinar se tiene los siguientes parámetros.

Tabla 24

Clasificación RMR (Bieniawski, 1973)

Parámetros	**Descripción**	**Valores**		
		Prog 2+520	**Prog 2+540**	**Prog 2+560**
A1	Resistencia a la compresión simple	9.4	9.8	10.03
A2	Índice de la calidad de roca RQD	17	17	17
A3	Espaciamiento entre discontinuidad	10	10	10
A4	Condición de las discontinuidades	15	15	15

Parámetros	Descripción	Valores		
		Prog 2+520	Prog 2+540	Prog 2+560
A5	Agua Subterránea	15	15	15
B	Orientación de las discontinuidades	-5	-5	-5
TOTAL	RMR	61.4	61.8	62.3

Fuente: Adaptación Propia

Luego para la clasificación del macizo rocoso se usa los resultados mostrados en la Tabla 24, por lo tanto de acuerdo a estos resultados clasificamos la calidad del macizo rocos de las 3 progresivas aplicadas, como se muestra en la Tabla 25.

Tabla 25

Calidad del macizo rocoso

Zona	Clase	Calidad	Parámetros
Prog 2+520	II	Buena	80 - 61
Prog 2+540	II	Buena	80 - 61
Prog 2+560	II	Buena	80 - 61

Fuente: *Adaptación propia, la tabla muestra la calidad del macizo rocoso de las 3 progresivas.*

4.4.1.3 Clasificación por el método GSI

El resultado del GSI promedio del macizo rocoso de las tres zonas, son obtenidos de la relación del RMR, así mismo basándonos en los criterios de (Hoek, 1997) como se muestra en la Tabla 26.

Tabla 26

Clasificación por el método GSI

Zona	Estructura (RQD 75-90%)	(Condición de Frente 70-60)	GSI (Descripción)
Prog 2+520	17	63.6	BR/B
Prog 2+540	17	63.4	BR/B
Prog 2+560	17	64.2	BR/B

Fuente: Adaptación propia

4.4.2 Propiedades físicas (densidad y peso específico)

Los ensayos de propiedades físicas, como densidad y peso específico de todas las muestras fueron realizados en el Laboratorio de Geomecánica de rocas de la escuela profesional de Ingeniería geológica de la UNA-PUNO, estos resultados se muestran a continuación en la Tabla 27, en el Anexo 8 y en el panel fotográfico del Anexo 3.

Tabla 27

Propiedades físicas - densidad y peso específico

Muestra	Densidad (gr/cm^3)	Peso Específico (KN/m^3)
M-01 Prog 2+520	2.55	25.03
M-02 Prog 2+540	2.54	24.95
M-03 Prog 2+560	2.6	26.3

Fuente: Elaboración propia

4.4.3 Ensayos de carga puntual (PLT)

Los resultados del ensayo de carga puntual al igual que el anterior se realizaron en el Laboratorio de Geomecánica de rocas de la escuela profesional de Ingeniería geológica UNA-PUNO, obteniéndose así resultados como se muestra en la Tabla 28 y en el Anexo 8. Así mismo se presenta su ejecución en la Fotografía 15 del Anexo 3.

Tabla 28

Ensayos de carga puntual (PLT)

Muestra	I_s (MPa)
M-01 Prog 2+520	4.45
M-02 Prog 2+540	5.45
M-03 Prog 2+560	3.60

Fuente: Elaboración propia

4.4.4 Ensayos de compresión simple (UCS)

El ensayo de carga puntual, también permite determinar la resistencia de la roca por ende obtener los datos de compresión simple como se muestra en la Tabla 29 y en el Anexo 8, los resultados que se muestran fueron obtenidos del Laboratorio de Geomecánica de Rocas de la escuela profesional de Ingeniería Geológica de la UNA – PUNO:

Tabla 29

Ensayos de compresión simple (UCS)

Muestra	σ_{ci} (MPa)
M-01 Prog 2+520	95.04
M-02 Prog 2+540	105.97
M-03 Prog 2+560	106.13

Fuente: Elaboración propia

4.4.5 Criterio de resistencia generalizado de Hoek – Brown

La valoración de los criterios de resistencia del macizo rocoso, se realizó con el objetivo de determinar las propiedades físicas que están involucradas con el macizo rocoso en conjunto, con la ayuda del software RocData v.3.0, de la compañía Rocscience, el cual es un software practico que contempla los criterios de resistencia de macizo rocoso como es el de Hoek - Brown y Morh – Coulomb,

Para lo cual se requieren datos que se presentan en la Tabla 30, estos son, resistencia a la compresión simple que se presentó en la Tabla 29, el peso unitario, este dato fue obtenido en los ensayos de laboratorio y se presenta en la Tabla 27, los valores de GSI que fueron obtenidos mediante correlaciones, D es un parámetro de perturbación que se producen en el macizo rocoso en desconfinamiento y las voladuras dado por el tipo de excavación, en este caso se considera 0.7 debido al tipo de corte mecánico y finalmente m_i es un parámetro de acuerdo al tipo y propiedades de la roca muestra la Tabla 8.

Tabla 30

Datos de ingreso en el software RocData.

Zona	UCS (MPa)	GSI	m_i	D	Peso Unitario (MN/m^3)	Altura del Talud
Prog 2+520	95.04	63.6	8	0.7	0.02503	67.00
Prog 2+540	105.97	63.4	8	0.7	0.02495	63.74
Prog 2+560	106.13	64.2	8	0.7	0.02630	41.00

Fuente: Elaboración Propia, datos para el cálculo de resistencia del macizo rocoso por el criterio generalizado de Hoek – Brown

Con estos datos se podrán calcular parámetros de resistencia de las tres zonas de aplicación, usando las fórmulas presentadas en el capítulo II del ítem 2.2.27.5.5. El criterio de rotura de Hoek y Brown es el más utilizado para estudio del comportamiento de los macizos rocosos, en la Tabla 31 se presenta los parámetros obtenidos, así mismo en el Anexo 9 también presentamos los parámetros obtenidos con la ayuda del programa RocData v.3.0. cabe recalcar que los parámetros que se presentan en la Tabla 31 son solo los que nos interesa para esta investigación.

Tabla 31

Resumen del cálculo de resistencia del macizo rocoso.

Zona	m_b	a	s	E_m (MPa)
Prog 2+520	1.0826	0.5021	0.005116	13863.29
Prog 2+540	1.0708	0.5022	0.004969	14471.20
Prog 2+560	1.1189	0.5020	0.005880	15164.65

Fuente: Elaboración propia, parámetros obtenidos por el criterio generalizado de Hoek – Brown

Finalmente ajustando la envolvente lineal a la de Hoek-Brown para la estimación de los parámetros de Mohr-Coulomb del macizo a partir de los del criterio de rotura de Hoek-Brown y haciendo uso de las fórmulas presentadas, podremos obtener otros dos parámetros muy importantes como lo que es la cohesión C y el ángulo de fricción φ. Estos resultados se muestran en la siguiente Tabla 32 como también en el Anexo 9.

Tabla 32

Ajuste del criterio de Mohr – Coulomb.

Zona	Peso Unitario (MN/m^3)	Cohesión (MPa)	$\varphi°$
Prog 2+520	0.02503	1.205	48.14°
Prog 2+540	0.02495	1.286	48.98°
Prog 2+560	0.02630	1.279	51.12°

***Fuente**: Elaboración propia*

4.4.6 Cálculo de volumen

Se llegó a calcular el volumen del escarpe superior de las tres progresivas, este desarrollo se logró con la ayuda del software Civil 3D y posteriormente convertidos a sistemas convenientes a trabajar, en la Tabla 33 se muestra los valores, así mismo para lograr este desarrollo en principio se realizó el levantamiento fotogramétrico como se muestra en el Anexo 7.

Tabla 33

Cálculo de volumen

Zona	Desmonte (Yarda Cúbica)	Desmonte (m^3)
Progresiva 2+520	25.25	19.31
Progresiva 2+540	16.70	12.77
Progresiva 2+560	62.76	47.93

***Fuente**: Elaboración propia*

5 CAPÍTULO V

RESULTADOS Y DISCUCIÓN

5.1 DESARROLLO MATRICIAL DEL MEF PARA ELEMENTOS TRIANGULARES BIDIMENSIONALES

Naturalmente las combinaciones del algebra matricial, resistencia de materiales y el código de los elementos finitos para la investigación de la estabilidad de taludes es definitivamente una de las propuestas más eficaces para poder determinar los grados de deformación y desplazamientos nodales que pueden ocurrir en un talud.

5.1.1 Formulación matricial de desplazamientos

Teniendo en consideración las definiciones del ítem 2.2.1 presentadas sobre esfuerzo y deformación se tiene:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad (1)$$

Despejamos de la ecuación 1 el esfuerzo se tiene:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (2)$$

La ecuación (2) matricialmente quedará definida de la siguiente manera:

$$[\sigma] = [E][\varepsilon] \qquad (3)$$

Así mismo las deformaciones y los esfuerzos están definidos por las siguientes relaciones:

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad (4)$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} \qquad (5)$$

Reemplazando estas ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (1), se definirá el módulo de elasticidad:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\delta}{L_0}} \qquad (6)$$

$$E = \frac{FL}{A\delta} \qquad (7)$$

Luego despejamos la deformación de la ecuación (7) se tendrá lo siguiente:

$$\delta = \frac{FL}{AE} \qquad (8)$$

De forma similar despejamos la fuerza de la ecuación (7):

$$F = \frac{AE}{L}\delta \qquad (9)$$

Luego en la ecuación (9) se observa la constante $AE/_L$ lo cual representa la constante de proporcionalidad, conocido rigidez del talud. Esta rigidez es la fuerza necesaria para crear un determinado desplazamiento, lo cual dicha constante quedará representada con la letra K.

$$K = \frac{AE}{L} \qquad (10)$$

Luego la ecuación (10) reemplazamos en la ecuación (9) se tiene:

$$F = K.\delta \qquad (11)$$

Lo cual matricialmente quedará representada de la siguiente manera:

$$[F] = [K][\delta] \qquad (12)$$

Entonces a partir de la ecuación (12) se podrá conocer los desplazamientos ocurridos en los taludes, para ello tendremos que despejar $[\delta]$.

$$[\delta] = [K]^{-1}[F] \qquad (13)$$

Para poder determinare la constante de rigidez o matriz de rigidez usaremos el teorema de trabajos virtuales, la forma como se presentó en el capítulo II está expresado como sigue.

$$\mathrm{F}_1\delta_1^* + \mathrm{F}_2\delta_2^* + \mathrm{F}_3\delta_3^* + \mathrm{F}_4\delta_4^* + \cdots + \mathrm{F}_n\delta_n^* = \int \sigma.\varepsilon^*\mathrm{dV}$$

La expresión anterior matricialmente quedará:

$$[F]^T[\delta^*] = \int [\sigma]^T[\varepsilon^*]dV$$

Finalmente realizando el desarrollo correspondiente la matriz de rigidez de la estructura quedará como sigue:

$$[K_e] = [B]^T[D][B]V$$

$$[K_e] = [B]^T[D][B]t.A$$

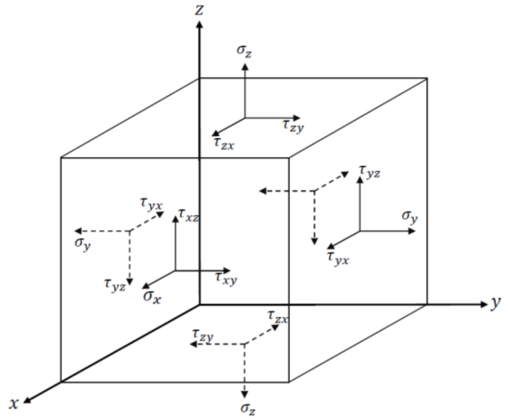
5.1.2 Esfuerzo y deformación – Ley de Hooke

Su estudio se desarrolla en un material elástico (muestra), como podemos observar en la Figura 41 que estará sujeto a cargas en dirección a los ejes de las coordenadas $x, y\,, z$. Al desarrollar las ecuaciones de estado de esfuerzo y deformación se podrá determinar una matriz numérica con propiedades de los materiales que estos poseen.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Figura 41

Estados de esfuerzo y deformación (aplicación - Ley de Hooke)



Nota: Elaboración Propia, sobre el paralelepípedo actúan esfuerzos y deformaciones

A partir de la Figura 40, sobre ella actúan esfuerzos, por ende, dan lugar a tensiones o compresiones, si aplicamos la ley de Hooke generalizada se tendrá:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} & v = -\dfrac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} & v = -\dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} & v = -\dfrac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} & v = -\dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} & v = -\dfrac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} & v = -\dfrac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} \end{array} \tag{15}$$

Despejamos las deformaciones convenientemente:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} & -v\varepsilon_x = \varepsilon_y & -v\varepsilon_x = \varepsilon_z \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} & -v\varepsilon_y = \varepsilon_x & -v\varepsilon_y = \varepsilon_z \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} & -v\varepsilon_z = \varepsilon_x & -v\varepsilon_z = \varepsilon_y \end{array} \tag{16}$$

Reemplazando y sumando estas deformaciones en la dirección x, y, z se obtendrá:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - v\frac{\sigma_y}{E} - v\frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - v\frac{\sigma_x}{E} - v\frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - v\frac{\sigma_x}{E} - v\frac{\sigma_y}{E} \end{aligned} \qquad (17)$$

Cuando el cuerpo sólido es de material homogéneo y lineal elástico, satisface y cumple con la Ley de Hooke; por lo tanto, La siguiente expresión muestra la deformación en función de los componentes del esfuerzo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \qquad (18)$$

De la misma forma las deformaciones angulares:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \qquad (19)$$

Una vez determinado las deformaciones lineales $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ y las deformaciones angulares $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ se identifica G, esta constituye las componentes del estado de deformaciones en el punto, además $G = \frac{E}{2(1+v)}$.Luego expresamos las ecuaciones (18) y (19) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-v}{E} & \frac{-v}{E} \\ \frac{-v}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-v}{E} \\ \frac{-v}{E} & \frac{-v}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} \qquad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \qquad (21)$$

Luego despejamos los esfuerzos axiales σ y los esfuerzos de torsión τ se tendrá:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-v}{E} & \frac{-v}{E} \\ \frac{-v}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-v}{E} \\ \frac{-v}{E} & \frac{-v}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad (22)$$

Se determinó ecuación (20), por lo tanto se necesita desarrollar la inversa de una matriz, a esto llamaremos matriz $[M]$ a:

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-v}{E} & \frac{-v}{E} \\ \frac{-v}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-v}{E} \\ \frac{-v}{E} & \frac{-v}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

Entonces $[M]^{-1}$ será:

$$[M]^{-1} = \frac{1}{|M|} adj(M) \qquad (24)$$

Calculamos la determinante de la matriz M.

$$|M| = \frac{1}{E}\left(\frac{1}{E^2} - \frac{v^2}{E^2}\right) + \frac{v}{E}\left(-\frac{v}{E^2} - \frac{v^2}{E^2}\right) - \frac{v}{E}\left(\frac{v^2}{E^2} + \frac{v}{E^2}\right)$$

$$|M| = \left(\frac{1}{E^3} - \frac{v^2}{E^3}\right) + \left(-\frac{v^2}{E^3} - \frac{v^3}{E^3}\right) - \left(\frac{v^3}{E^3} + \frac{v^2}{E^3}\right)$$

$$|M| = \left(\frac{1 - v^2}{E^3}\right) + \left(-\frac{v^2 - v^3}{E^3}\right) - \left(\frac{v^3 + v^2}{E^3}\right)$$

$$|M| = \left(\frac{1 - v^2 - v^2 - v^3 - v^3 - v^2}{E^3}\right)$$

$$|M| = \frac{-(2v^3 + 3v^2 - 1)}{E^3}$$

$$|M| = \frac{-(v + 1)(2v^2 + v - 1)}{E^3} \qquad (25)$$

Calculamos la $adj(M)$, si:

$$[M]=\begin{bmatrix}\frac{1}{E} & \frac{-v}{E} & \frac{-v}{E}\\ \frac{-v}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-v}{E}\\ \frac{-v}{E} & \frac{-v}{E} & \frac{1}{E}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{-1}{E} & \frac{v}{E} & \frac{v}{E}\\ \frac{v}{E} & \frac{-1}{E} & \frac{v}{E}\\ \frac{v}{E} & \frac{v}{E} & \frac{-1}{E}\end{bmatrix}$$

Entonces:

$$[CM]=-\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}\frac{-1}{E} & \frac{v}{E}\\ \frac{v}{E} & \frac{-1}{E}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\frac{v}{E} & \frac{v}{E}\\ \frac{v}{E} & \frac{-1}{E}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\frac{v}{E} & \frac{-1}{E}\\ \frac{v}{E} & \frac{v}{E}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}\frac{v}{E} & \frac{v}{E}\\ \frac{v}{E} & \frac{-1}{E}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\frac{-1}{E} & \frac{v}{E}\\ \frac{v}{E} & \frac{-1}{E}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\frac{-1}{E} & \frac{v}{E}\\ \frac{v}{E} & \frac{v}{E}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}\frac{v}{E} & \frac{v}{E}\\ \frac{-1}{E} & \frac{v}{E}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\frac{-1}{E} & \frac{v}{E}\\ \frac{v}{E} & \frac{v}{E}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\frac{-1}{E} & \frac{v}{E}\\ \frac{v}{E} & \frac{-1}{E}\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$[CM]=-\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{E^2}-\frac{v^2}{E^2}\right) & \left(\frac{v}{E^2}+\frac{v^2}{E^2}\right) & \left(\frac{v^2}{E^2}+\frac{v}{E^2}\right)\\ \left(\frac{v}{E^2}+\frac{v^2}{E^2}\right) & \left(\frac{1}{E^2}-\frac{v^2}{E^2}\right) & \left(\frac{v}{E^2}+\frac{v^2}{E^2}\right)\\ \left(\frac{v^2}{E^2}+\frac{v}{E^2}\right) & \left(\frac{v}{E^2}+\frac{v^2}{E^2}\right) & \left(\frac{1}{E^2}-\frac{v^2}{E^2}\right)\end{bmatrix}$$

$$[CM]=-\begin{bmatrix}\frac{1-v^2}{E^2} & \frac{v+v^2}{E^2} & \frac{v^2+v}{E^2}\\ \frac{v+v^2}{E^2} & \frac{1-v^2}{E^2} & \frac{v+v^2}{E^2}\\ \frac{v^2+v}{E^2} & \frac{v+v^2}{E^2} & \frac{1-v^2}{E^2}\end{bmatrix}$$

$$[CM]=-\begin{bmatrix}\frac{(1-v)(1+v)}{E^2} & \frac{v(1+v)}{E^2} & \frac{v(v+1)}{E^2}\\ \frac{v(1+v)}{E^2} & \frac{(1-v)(1+v)}{E^2} & \frac{v(1+v)}{E^2}\\ \frac{v(v+1)}{E^2} & \frac{v(1+v)}{E^2} & \frac{(1-v)(1+v)}{E^2}\end{bmatrix}$$

$$adj(M)=[CM]^t=-\begin{bmatrix}\frac{(1-v)(1+v)}{E^2} & \frac{v(1+v)}{E^2} & \frac{v(v+1)}{E^2}\\ \frac{v(1+v)}{E^2} & \frac{(1-v)(1+v)}{E^2} & \frac{v(1+v)}{E^2}\\ \frac{v(v+1)}{E^2} & \frac{v(1+v)}{E^2} & \frac{(1-v)(1+v)}{E^2}\end{bmatrix} \qquad (26)$$

Reemplazamos las ecuaciones (25) y (26) en la expresión (24)

$$[M]^{-1} = \frac{1}{|M|} adj(M)$$

$$[M]^{-1} = \frac{1}{\frac{-(v+1)(2v^2+v-1)}{E^3}} \left(- \begin{bmatrix} \frac{(1-v)(1+v)}{E^2} & \frac{v(1+v)}{E^2} & \frac{v(v+1)}{E^2} \\ \frac{v(1+v)}{E^2} & \frac{(1-v)(1+v)}{E^2} & \frac{v(1+v)}{E^2} \\ \frac{v(v+1)}{E^2} & \frac{v(1+v)}{E^2} & \frac{(1-v)(1+v)}{E^2} \end{bmatrix} \right)$$

Factorizamos los términos comunes:

$$[M]^{-1} = \frac{(1+v)E^3}{(v+1)(2v^2+v-1)E^2} \begin{bmatrix} (1-v) & v & v \\ v & (1-v) & v \\ v & v & (1-v) \end{bmatrix}$$

$$[M]^{-1} = \frac{E}{(2v^2+v-1)} \begin{bmatrix} (1-v) & v & v \\ v & (1-v) & v \\ v & v & (1-v) \end{bmatrix} \qquad (27)$$

Por lo tanto, la expresión (22) quedará representado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(2v^2+v-1)} \begin{bmatrix} (1-v) & v & v \\ v & (1-v) & v \\ v & v & (1-v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad (28)$$

Se desarrollará de forma similar para el esfuerzo de torsión τ, despejando la expresión (21) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \qquad (29)$$

De ecuación (29) se requiere desarrollar la inversa una matriz la cual llamaremos matriz $[A]$ a:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \qquad (30)$$

Por lo tanto las matriz $[A]^{-1}$ será:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) \qquad (31)$$

Calculamos la determinante de la matriz A.

$$|A| = \frac{1}{G}\left(\frac{1}{G^2}\right)$$

$$|A| = \frac{1}{G^3} \qquad (32)$$

Luego calculamos la $adj(A)$.

Si:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

$$[CA] = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{G} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{G} & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[CA] = \begin{bmatrix} \frac{1}{G^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G^2} \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = [CA]^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{G^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G^2} \end{bmatrix} \qquad (33)$$

Reemplazamos las ecuaciones (32) y (33) en la expresión (31)

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{G^3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{G^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G^2} \end{bmatrix}$$

Desarrollando se tiene:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

Además, se sabe que $G = \frac{E}{2(1+v)}$ reemplazando :

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{E}{2(1+v)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+v)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+v)} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la expresión (29) quedará representado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{2(1+v)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+v)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+v)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \qquad (34)$$

Ensamblando y ordenando las matrices (28) y (34) se obtiene:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{bmatrix} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix}(1-v) & v & v & 0 & 0 & 0\\ v & (1-v) & v & 0 & 0 & 0\\ v & v & (1-v) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{bmatrix} \qquad (35)$$

Se tiene que:

$$[D] = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix}(1-v) & v & v & 0 & 0 & 0\\ v & (1-v) & v & 0 & 0 & 0\\ v & v & (1-v) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2}\end{bmatrix} \qquad (36)$$

En donde:

$[D]$: es la matriz de esfuerzos – deformaciones o matriz constitutiva.

La ecuación (36) representa a matriz simétrica, en relación del módulo de elasticidad y del coeficiente de Poissón del material es también llamado matriz constante de propiedades de los materiales.

Por lo tanto, la relación (35) también puede ser representa en su forma matricial y compacta. Como sigue:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \qquad (37)$$

5.1.3 Estado de planos

Si se desea encontrar una solución a una cuestión que implica condiciones bidimensionales, se puede utilizar una reducción del estado tridimensional. Para un plano de trabajo XY, se pueden obtener dos tipos de casos siguientes.

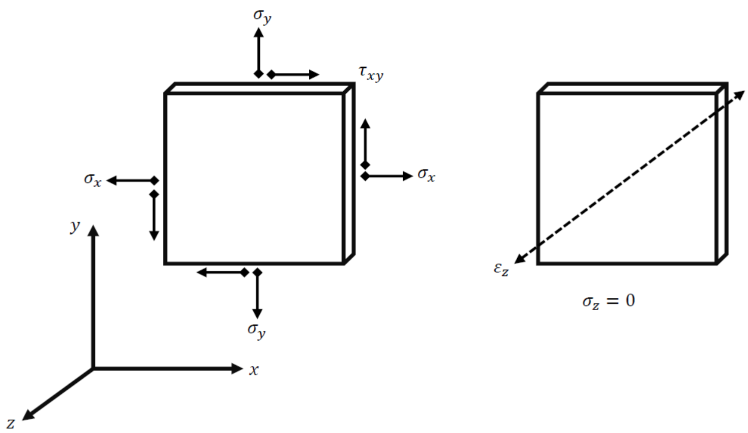
5.1.3.1 Estado de esfuerzos plano

como ya se había mencionado en el marco teórico, esto sucede cuando el espesor de un elemento no está en paridad con sus demás dimensiones, se dice que se encuentra en el caso de esfuerzo plano, y esto se puede expresar de la siguiente manera.

Primero, en la Figura 42 se muestra los esfuerzos en un estado de esfuerzo plano actúan en el plano xy y son nulos en la dirección z,es decir:

Figura 42

Estado de esfuerzo plano



Nota: Elaboración Propia

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \qquad (38)$$

Aplicando las definiciones del enunciado (38) en las expresiones (18) y (19) se tendrá:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_y + \mathbf{0}) \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_x + \mathbf{0}) \\ \varepsilon_z &= \frac{\mathbf{0}}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \qquad (39)$$

Podemos observar en caso de las deformaciones en ε_z no son nulas, por lo tanto, su valor es $\varepsilon_z = -v(\sigma_x + \sigma_y)/E$ pero no será considerado ya que se está analizando el caso de un plano xy. De la misma forma las deformaciones angulares:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\mathbf{0}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\mathbf{0}}{G} \end{aligned} \qquad (40)$$

Por lo tanto, estas expresiones quedarán, reducidas en:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \qquad (41)$$

Expresamos estas ecuaciones (41) en su forma matricial, resulta:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-v}{E} & 0 \\ \frac{-v}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \qquad (42)$$

Luego despejamos los esfuerzos axiales σ y los esfuerzos de torsión τ se tendrá:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-v}{E} & 0 \\ \frac{-v}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad (43)$$

Para su desarrollo primero se habrá que determinar la inversa de la matriz, donde será le llamará $[S]$ a:

$$[S]=\begin{bmatrix}\frac{1}{E} & \frac{-v}{E} & 0\\ \frac{-v}{E} & \frac{1}{E} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{bmatrix} \qquad (44)$$

Por lo tanto, la matriz $[S]^{-1}$ será:

$$[S]^{-1}=\frac{1}{|S|}adj(S) \qquad (45)$$

Calculamos la determinante de la matriz S.

$$|S|=\frac{1}{E}\left(\frac{1}{EG}\right)-\frac{v}{E}\left(\frac{v}{EG}\right)$$

$$|S|=\frac{(1-v^2)}{E^2G} \qquad (46)$$

Luego calculamos la $adj(S)=([CS])^t$.

Se tiene:

$$[CS]=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}\frac{1}{E} & 0\\ 0 & \frac{1}{G}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\frac{-v}{E} & 0\\ 0 & \frac{1}{G}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\frac{-v}{E} & \frac{1}{E}\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}\frac{-v}{E} & 0\\ 0 & \frac{1}{G}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\frac{1}{E} & 0\\ 0 & \frac{1}{G}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\frac{1}{E} & \frac{-v}{E}\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}\frac{-v}{E} & 0\\ \frac{1}{E} & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\frac{1}{E} & 0\\ \frac{-v}{E} & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\frac{1}{E} & \frac{-v}{E}\\ \frac{-v}{E} & \frac{1}{E}\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$[CS]=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{EG} & \dfrac{v}{EG} & 0\\ \dfrac{v}{EG} & \dfrac{1}{EG} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-v^2}{E^2}\end{bmatrix}$$

$$adj(S)=[CS]^t=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{EG} & \dfrac{v}{EG} & 0\\ \dfrac{v}{EG} & \dfrac{1}{EG} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-v^2}{E^2}\end{bmatrix} \qquad (47)$$

Reemplazamos las ecuaciones (46) y (47) en la expresión (45) se tiene:

$$[S]^{-1}=\frac{1}{|S|}adj(S)$$

$$[S]^{-1}=\frac{1}{\dfrac{(1-v^2)}{E^2G}}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{EG} & \dfrac{v}{EG} & 0\\ \dfrac{v}{EG} & \dfrac{1}{EG} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-v^2}{E^2}\end{bmatrix}$$

$$[S]^{-1}=\frac{E^2G}{(1-v^2)}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{EG} & \dfrac{v}{EG} & 0\\ \dfrac{v}{EG} & \dfrac{1}{EG} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-v^2}{E^2}\end{bmatrix}$$

$$[S]^{-1}=\frac{E^2G}{(1-v^2)EG}\begin{bmatrix}1 & v & 0\\ v & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{(1-v^2)G}{E}\end{bmatrix}$$

Recordemos que $G=\frac{E}{2(1+v)}$

$$[S]^{-1}=\frac{E}{(1-v^2)}\begin{bmatrix}1 & v & 0\\ v & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{(1-v)(1+v)E}{2E(1+v)}\end{bmatrix}$$

$$[S]^{-1} = \frac{E}{(1-v^2)}\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-v)}{2} \end{bmatrix} \tag{48}$$

Por lo tanto, la expresión (43) quedará como sigue:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-v^2)}\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-v)}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{49}$$

Donde la expresión $[D]$ es la matriz constitutiva o matriz de propiedades elásticas del material:

$$[D] = \frac{E}{(1-v^2)}\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-v)}{2} \end{bmatrix} \tag{50}$$

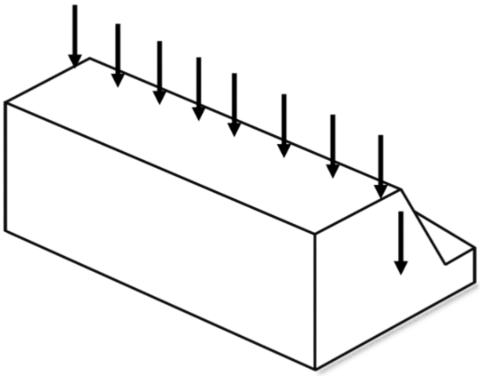
Por lo tanto, generalmente este estado se da en las en estructuras planas tales como: placas, vigas, muros y también en taludes como se viene realizando en esta investigación.

5.1.3.2 Estado de deformación plano

Como se indica en el marco teórico la estructura que se muestra en la Figura 43, es un talud, esta estructura se encuentra en el caso de estado de deformación plano, porque el espesor del talud si tiene comparación con las demás dimensiones que la conforman y se puede expresar de esta manera.

Figura 43

Estado de deformación plano-talud



Nota: Elaboración Propia

En un estado de deformaciones plano, para solidos isótropos, las deformaciones con dirección al eje z son nulas, entonces cabe decir que, $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$. Por lo tanto, para poder determinar la matriz constitutiva se empezará eliminando en la matriz (35) las filas y columnas 3, 5, Y 6, como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} (1-v) & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & (1-v) & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & (1-v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Finalmente, la expresión (51) se reduce en:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Factorizando se tiene:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{v}{(1-v)} & 0\\ \dfrac{v}{(1-v)} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{(1-2v)}{2(1-v)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \qquad (53)$$

En donde la matriz constitutiva para estados planos de deformación será:

$$[D]=\frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{v}{(1-v)} & 0\\ \dfrac{v}{(1-v)} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{(1-2v)}{2(1-v)}\end{bmatrix} \qquad (54)$$

El estado de este tipo se aplica a estructuras como: taludes, túneles, tuberías, alcantarillas, etc.

Las expresiones (50) y (54) se pueden generalizar en una sola matriz:

$$[D]=d_1\begin{bmatrix}1 & d_2 & 0\\ d_2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & d_3\end{bmatrix} \qquad (55)$$

Siendo:

- $Para\ estado\ de\ esfuerzo\ plano$

$$d_1=\frac{E}{(1-v^2)}$$

$$d_2=v$$

$$d_3=\frac{(1-v)}{2}$$

- $Estado\ de\ deformación\ plano$

$$d_1=\frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}$$

$$d_2=\frac{v}{(1-v)}$$

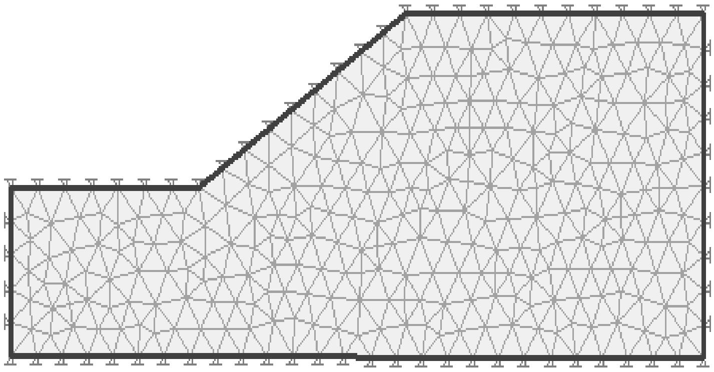
$$d_3=\frac{(1-2v)}{2(1-v)}$$

5.1.4 Discretización en elementos triangulares del talud

Según el método de elementos finitos, un dominio debe dividirse en subdominios llamados elementos para resolver un problema. En el caso bidimensional, el dominio se divide en superficies, lo que permite que el volumen total del estudio se avecine al conjunto de elementos que lo componen. Por lo tanto, Como se muestra en la Figura 44, el método de elementos finitos se basa en dividir el talud continuo en un conjunto de pequeños elementos conectados por una serie de puntos llamados nodos.

Figura 44

Discretización del talud

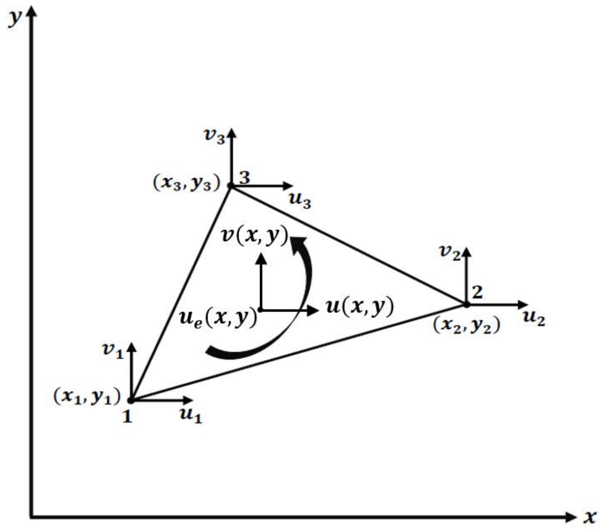


Nota: Elaboración Propia

Dado que el elemento finito bidimensional de tres nodos juega un papel importante en el desarrollo del método, se seleccionará un elemento triangular de tres nodos a partir de la discretización, como se muestra en la Figura 45. Este elemento nos permitirá determinar los desplazamientos y esfuerzos. que ocurre en cada elemento triangular.

Figura 45

Elemento triangular bidimensional de tres nodos



Nota: Elaboración Propia

El análisis de este elemento será un punto de inicio para entender el planteamiento del método de los elementos finitos bidimensionales.

5.1.5 Campo de desplazamiento

Según las características geométricas del elemento, el campo de desplazamiento quedará perfectamente definido como:

$$u_e(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \tag{56}$$

De la expresión: $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son los desplazamientos del nodo en dirección de los ejes x e y respectivamente.

Además, es importante tener en cuenta que, aunque este enfoque y la ley de Hooke solo permitirán obtener los desplazamientos en los nodos mencionados, se aplicarán funciones lineales aproximadas de desplazamiento para determinar el desplazamiento dentro del elemento.

5.1.6 Funciones lineales de aproximación

Es una ecuación o función que se adapta para referir el comportamiento de los desplazamientos dentro de cada elemento. Su importancia radica en que el código o método de elementos finitos se implementa mediante el método de la rigidez, con los desplazamientos de los nodos como incógnitas principales y las distribuciones de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos en el interior de los elementos, por lo que es necesaria una función. Dado que los polinomios son fáciles de interpretar matemáticamente, evaluar y derivar, se utilizan con frecuencia para la aproximación, lo que implica que una función de grado "n" para el planteamiento bidimensional responde a la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \cdots + \alpha_{m-1} x^n + \alpha_m y^n \\ v(x,y) &= \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} x + \alpha_{m+3} y + \alpha_{m+4} xy + \alpha_{m+5} x^2 + \cdots + \alpha_{2m} y^n \end{aligned} \qquad (57)$$

Dado el carácter polinómico de la aproximación del MEF el elemento finito será tanto mejor cuanto mayor sea el grado de dicha función, la expresión (57) de grado “n” quedará reducida a la siguiente expresión:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x^j y^k \quad , \Leftrightarrow j + k \leq n \qquad (58)$$

Donde p es el número de términos del polinomio lo está definido por:

$$p = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad (59)$$

Entonces para el polinomio lineal de grado 1 bidimensional, la función lineal de aproximación para el elemento triangular quedará representada de la siguiente manera.

Si $n = 1$ y $j + k \leq n$ realizando un análisis se tendrá:

$$\begin{gathered} 0 + 0 \leq 1 \\ 1 + 0 \leq 1 \\ 0 + 1 \leq 1 \end{gathered}$$

Entonces la función será:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \tag{60}$$

5.1.7 Matriz de deformación, esfuerzo y rigidez del elemento

A partir de las funciones de aproximación citados en (60) para elementos triangulares bidimensionales se desarrollarán los esfuerzos, deformaciones y la matriz de rigidez.

Por lo tanto, la ecuación (60) matricialmente quedará definido como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \tag{61}$$

Reduciendo se tendrá:

$$[u_e] = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} [\alpha_i] \tag{62}$$

Donde:

$$[u_e] = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix}$$

$$[\alpha_i] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

Las expresiones (60) se pueden aplicar a los vértices del elemento triangular, estos también son denominados condiciones de contorno, por ende, se obtendrá sistemas de ecuaciones para cada punto, es decir:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, y_1) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ u_2(x_2, y_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ u_3(x_3, y_3) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \\ v_1(x_1, y_1) &= \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 y_1 \\ v_2(x_2, y_2) &= \alpha_4 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 y_2 \\ v_3(x_3, y_3) &= \alpha_4 + \alpha_5 x_3 + \alpha_6 y_3 \end{aligned} \tag{63}$$

Estas ecuaciones serán expresadas en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \tag{64}$$

Reduciendo se tendrá:

$$[\delta_e] = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} [\alpha_i] \tag{65}$$

Donde:

$$[\delta_e] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$[\alpha_i] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

Despejando la ecuación matricial (65) se tiene:

$$[\alpha_i] = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} [\delta_e] \qquad (66)$$

Sustituyendo la ecuación (66) en (62).

$$[u_e] = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} [\delta_e]$$

$$[u_e] = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix} [\delta_e] \qquad (67)$$

Cabe mencionar que las deformaciones en el interior del elemento se calcularán realizando las primeras derivadas de las funciones de aproximación.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \qquad (68)$$

Aplicando la derivada a la expresión (60), la deformación expresada matricialmente será:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} [u_e] \qquad (69)$$

Reemplazamos (67) en (69) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}}_{II} [\delta_e] \qquad (70)$$

Desarrollamos por separado:

- Parte I.

Si : $[P] = [1 \quad x \quad y]$

Entonces

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}$$

Derivando se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (71)$$

- parte II.

De la expresión (65) se tiene:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \qquad (72)$$

Entonces: $$[C]^{-1} = \frac{1}{|C|} adj(C) \qquad (73)$$

Primero calculamos la determinante $|C|$:

$$|C| = 1(x_2y_3 - x_3y_2) - x_1(y_3 - y_2) + y_1(x_3 - x_2)$$

$$|C| = (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_1y_2) + (y_1x_3 - y_1x_2)$$

Ordenando se tiene:

$$|C| = x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 \tag{74}$$

Por un lado, haciendo el uso de la geometría analítica, se sabe que el área del triángulo es:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{75}$$

$$A = \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1)$$

Acomodando se tiene:

$$2A = \underbrace{x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1}_{|C|}$$

Por lo tanto

$$|C| = 2A \tag{76}$$

En donde A es el área del triangulo.

Luego calculamos la $adj(C) = ([CC])^t$.

Se tiene:

$$[CC] = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[CC] = \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & -(y_3 - y_2) & (x_3 - x_2) \\ -(x_1y_3 - x_3y_1) & (y_3 - y_1) & -(x_3 - x_1) \\ (x_1y_2 - x_2y_1) & -(y_2 - y_1) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

$$adj(C) = [CC]^t = \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & -(x_1y_3 - x_3y_1) & (x_1y_2 - x_2y_1) \\ -(y_3 - y_2) & (y_3 - y_1) & -(y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_2) & -(x_3 - x_1) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

$$adj(C) = [CC]^t = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \tag{77}$$

Reemplazamos las ecuaciones (76) y (77) en la expresión (73) se tiene:

$$[C]^{-1} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \tag{78}$$

Realizamos un cambio de variable para reducir la expresión (78)

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \qquad b_1 = y_2 - y_3 \qquad c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \qquad b_2 = y_3 - y_1 \qquad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \qquad b_3 = y_1 - y_2 \qquad c_3 = x_2 - x_1$$

Además:

$$2A = a_1 + a_2 + a_3$$

Reemplazando II quedará como sigue:

$$\begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \tag{79}$$

Finalmente reemplazamos los valores (71) y(79) en (70) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} [\delta_e] \tag{80}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} [\delta_e] \tag{81}$$

La expresión (81) también se puede expresar como sigue:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} [\delta_e] \tag{82}$$

Llamaremos $[B]$ a:

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \qquad (83)$$

En donde $[B]$ es la matriz de deformación del elemento definida.

a) Matriz de rigidez del elemento

Esta fase del método de los elementos finitos determina la matriz de rigidez del elemento que permite calcular los parámetros nodales de un elemento $[\delta]$ en función de las fuerzas nodales $[F]$ que actúan sobre él. A continuación, se formula la matriz de rigidez del elemento utilizando, primero, el teorema de los trabajos virtuales y, después, el principio de la energía potencial total, finalmente se obtendrá la matriz de rigidez del elemento $[K_e]$, como se presentó en el capítulo II, esto quedará como sigue:

$$[K_e] = [B]^t[D][B]V \qquad (84)$$

b) Desplazamientos nodales

Usualmente los desplazamientos nodales conocidos son nulos, $[\delta]$= 0, pero al ser coaccionados por enlaces externos experimentan pequeños desplazamientos. En este caso, despejado la ecuación (12) se podrá determinar los desplazamientos nodales.

$$[\delta] = [K]^{-1}[F] \qquad (85)$$

c) Deformación del elemento

Reduciendo la expresión (81) nos permite calcular las deformaciones en cualquier punto de un elemento en función de los desplazamientos nodales $[\delta]$

$$[\varepsilon] = [B][\delta] \qquad (86)$$

d) Esfuerzo del elemento

Reemplazando la expresión (86) en la ecuación (37) permite calcular los esfuerzos en cualquier punto de un elemento triangular en función de los desplazamientos nodales $[\delta]$ de ese elemento.

Si:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon]$$

Entonces:

$$[\sigma] = [D][B][\delta] \qquad (87)$$

5.2 DETERMINACIÓN DEL MÓDULO DE ELASTICIDAD Y COEFICIENTE DE POISSON

5.2.1 Propiedades de deformabilidad del macizo rocoso

5.2.2 Módulo de elasticidad (E_m)

Para evaluar el módulo de deformabilidad E_m cómo se indicó en el capítulo II se usará la fórmula planteada por (Hoek, 1997) conjuntamente con los datos obtenidos en campo y laboratorio, estos resultados se muestran a continuación en la Tabla 34.

$$E_m(GPa) = \left(1 - \frac{D}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_{ci}}{100}}x10^{\left(\frac{GSI-10}{40}\right)}$$

Tabla 34

Módulo de elasticidad del macizo rocoso

Muestra	D	GSI	σ_{ci}(MPa)	E_m (GPa)
M-01 Prog 2+520	0.7	63.6	95.04	13.86329
M-02 Prog 2+540	0.7	63.4	105.97	14.47120
M-03 Prog 2+560	07	64.2	106.13	15.16465

Fuente: Elaboración Propia

5.2.3 Coeficiente de poisson (v_m)

El coeficiente de poisson del macizo rocoso, suele ser bastante pequeña al mismo tiempo que su variabilidad es de 0.15 a 0.45 por lo que no se presta mucha atención, pero para efectos de comprobación usaremos la formula planteada por (FLORES, 2002) ver Tabla 35.

$$v_m = 0.4 - \frac{GSI^{0.7}}{100}$$

Tabla 35

Coeficiente de poisson del macizo rocoso

Muestra	GSI	v_m
M-01 Prog 2+520	63.6	0.2170
M-02 Prog 2+540	63.4	0.2174
M-03 Prog 2+560	64.2	0.2158

Fuente: Elaboración propia

5.2.4 Cálculo de fuerza aplicada

Con los datos de cubicación de la Tabla 35 y los datos de densidad de la Tabla 27 podremos determinar la masa del escape superior de las tres progresivas para posteriormente hallar las fuerzas aplicadas a lo largo de la plataforma superior del talud. También cabe mencionar que la aceleración de gravedad a considerar es de 9.8 m/s^2. Finalmente convertimos sistemas a kg.f. veamos estos resultados en la Tabla 36.

Tabla 36

Cálculo de la fuerza aplicada

Zona	F (N)	F (kg.f)
Progresiva 2+520	482556.9	49190.31
Progresiva 2+540	317870.84	32402.74
Progresiva 2+560	1222530.4	124620.84

***Fuente**: Elaboración propia*

5.3 DETERMINACIÓN DE DESPLAZAMIENTOS, DEFORMACIONES Y ESFUERZOS

Para analizar y determinar los desplazamientos nodales, los esfuerzos y las deformaciones en los taludes estudiados, se considerarán los datos obtenidos tanto en campo como en laboratorio. Estos datos son fundamentales, ya que permiten obtener las propiedades mecánicas del material, como el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson, que son esenciales para alimentar el modelo numérico. La precisión de los resultados del análisis depende directamente de la calidad de estos datos, los cuales reflejan las condiciones reales del talud y su entorno.

Además, de acuerdo con el desarrollo presentado en el capítulo II, donde se analiza el estado de elemento, se ha definido que el talud será tratado como un elemento en estado de deformación plana. Esto implica que, para simplificar el análisis y ajustarlo a la realidad del problema, el espesor del talud se considerará constante y equivalente a 1 metro lineal. Esta simplificación es una aproximación común en la ingeniería geotécnica, ya que permite reducir la complejidad del problema tridimensional a uno bidimensional, sin perder de vista los fenómenos de deformación más relevantes que ocurren en el plano del talud.

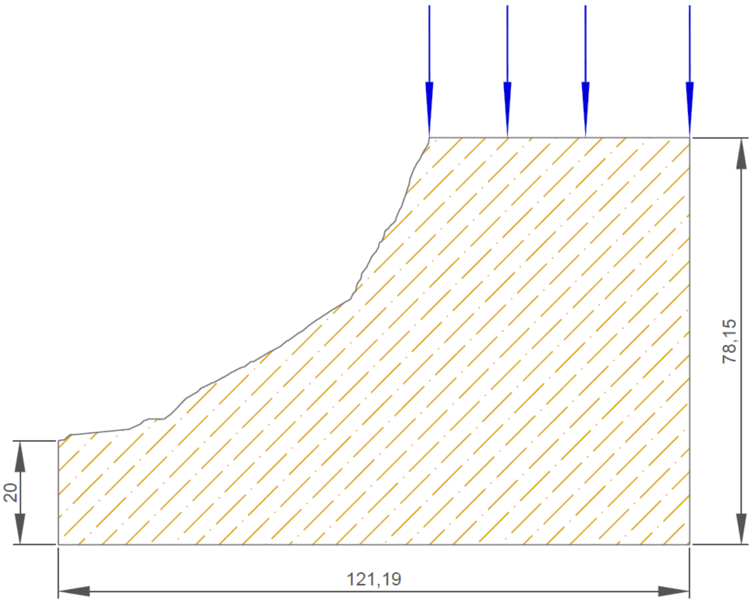
Asimismo, en el análisis se está considerando la acción del escarpe superior para cada talud, modelada como fuerzas puntuales verticales distribuidas a lo largo de la plataforma superior del talud. Esta aproximación permite simular de manera efectiva la carga que genera el peso del material y otros factores que contribuyen a la inestabilidad del talud. La distribución de estas fuerzas es crucial para representar correctamente las condiciones de carga a las que está sometido el talud en la realidad, y su ubicación a lo largo de la plataforma superior es un factor determinante en la propagación de esfuerzos y deformaciones en el cuerpo del talud.

5.3.1 Aplicación y análisis del talud progresiva 2+520

En la Figura 46 se muestra la sección transversal del talud ubicado en la Progresiva 2+520 de la vía Articulación Juliaca. En esta figura se destaca no solo la geometría del talud, sino también la ubicación precisa de los puntos donde se aplicarán las fuerzas. Estos puntos de aplicación son fundamentales para el análisis, ya que representan las cargas que actúan sobre el talud, influenciando su estabilidad y comportamiento mecánico. La correcta identificación y disposición de estas fuerzas es clave para asegurar la validez del modelo numérico y obtener resultados que reflejen con precisión las condiciones reales del talud. Esta visualización también permite comprender mejor la interacción entre las fuerzas aplicadas y la respuesta del talud en términos de desplazamientos, esfuerzos y deformaciones, lo que es crucial para evaluar su estabilidad bajo las condiciones específicas de carga.

Figura 46

Sección transversal prog 2+520



***Fuente**: Elaboración propia*

5.3.1.1 Discretización y numeración de elementos y nodos

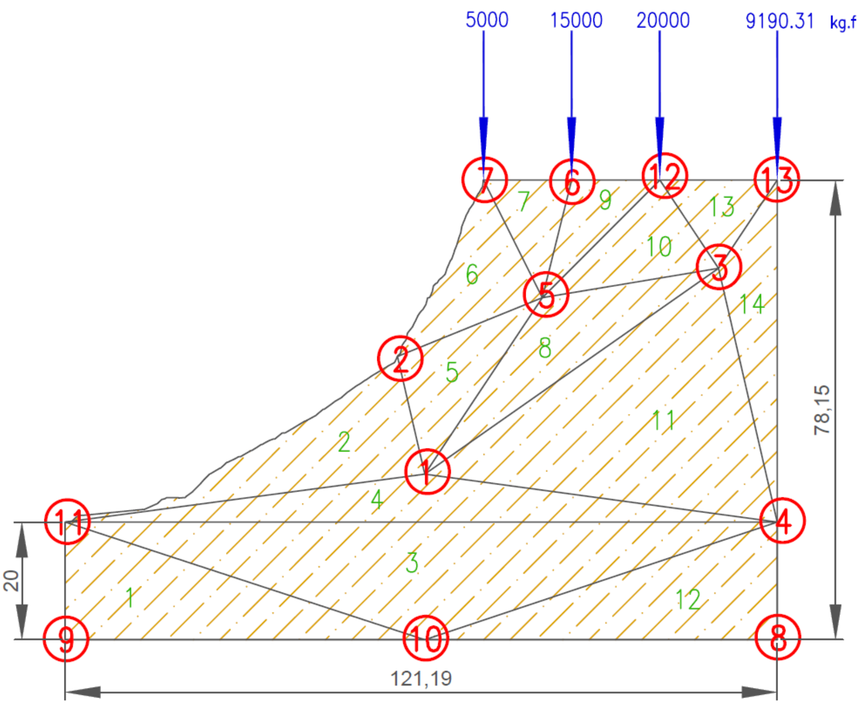
Una vez definida la geometría del talud, el siguiente paso crucial es su discretización en elementos finitos, específicamente en elementos triangulares de tres nodos. Este proceso es de vital importancia, ya que la precisión de los resultados obtenidos dependerá en gran medida de la forma en que se realice esta subdivisión. La discretización permite transformar el problema continuo en un sistema de ecuaciones discretas que puede ser resuelto numéricamente.

En este contexto, se presta especial atención a las zonas donde se anticipan mayores concentraciones de esfuerzos, como cerca de las pendientes más pronunciadas o en las proximidades de discontinuidades geológicas. En estas áreas, la discretización se realiza de manera más estricta, utilizando una mayor densidad de elementos para capturar con mayor detalle las variaciones de esfuerzos y deformaciones.

En la Figura 47 se ilustra la discretización del talud, compuesto por 14 elementos triangulares y 13 nodos, cada uno con sus respectivas coordenadas. Esta configuración de elementos y nodos es fundamental para la correcta representación del comportamiento del talud bajo las condiciones de carga especificadas, ya que permite modelar de manera más realista las distribuciones de esfuerzos y desplazamientos a lo largo del talud. La elección de la discretización adecuada, junto con la correcta asignación de las propiedades del material y las condiciones de frontera, asegura que el análisis mediante el método de los elementos finitos sea confiable y preciso.

Figura 47

Discretización de la sección del talud prog 2+520



Fuente: *Elaboración propia*

En la Tabla 37 se presenta la numeración de los nodos, la cual se ha realizado en sentido antihorario para mantener una secuencia lógica y consistente en el análisis. Este orden es esencial, ya que facilita la identificación y el seguimiento de los nodos durante el proceso de cálculo y permite una correcta formulación de las ecuaciones que describen el comportamiento del talud.

Además, en la Tabla 38 se muestran las coordenadas de cada nodo, lo que es fundamental para definir la geometría del talud dentro del modelo numérico. Estas coordenadas son cruciales para el cálculo de las matrices de rigidez y para la evaluación de los desplazamientos y esfuerzos en cada nodo. La precisión en la ubicación de los nodos asegura que el modelo represente de manera fiel las condiciones geométricas y topográficas del talud, lo que, a su vez, influye directamente en la exactitud de los resultados obtenidos mediante el método de los elementos finitos.

Tabla 37

Numeración de nodos en sentido antihorario prog 2+520

N° Elemento	Nodo i	Nodo j	Nodo K
1	9	10	11
2	11	1	2
3	11	10	4
4	11	4	1
5	2	1	5
6	2	5	7
7	5	6	7
8	1	3	5
9	5	12	6
10	5	3	12
11	1	4	3
12	10	8	4
13	3	13	12
14	4	13	3

***Fuente**: Elaboración propia*

Tabla 38

Coordenadas de nodos prog 2+520

Nodo	Desfase - X	Cota - Y
1	61.192	3906.999
2	56.536	3926.999
3	111.192	3941.999
4	121.192	3898.851
5	81.192	3936.999
6	86.192	3956.999
7	71.192	3956.999
8	121.192	3878.851
9	0	3878.851
10	61.192	3878.851
11	0	3898.851
12	101.192	3956.999
13	121.192	3956.999

***Fuente**: Elaboración propia*

5.3.1.2 Deducción de la matriz constitutiva

De acuerdo con la ecuación 54 presentada en el capítulo II, se define la matriz constitutiva, también conocida como matriz de propiedades elásticas del macizo rocoso. Esta matriz será fundamental para este análisis, ya que relaciona los esfuerzos y las deformaciones en el material, permitiendo caracterizar su comportamiento bajo cargas.

Para el caso específico de un estado de deformación plana, esta matriz adopta una forma particular que toma en cuenta las propiedades elásticas del macizo rocoso, como el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson. Estos parámetros determinan cómo el material se deformará y distribuirá los esfuerzos bajo las condiciones de carga consideradas. La correcta formulación de esta matriz es clave para el desarrollo del método de los elementos finitos, ya que influye directamente en la precisión de los cálculos de esfuerzos y desplazamientos en el talud.

$$[D] = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{(1-v)} & 0 \\ \frac{v}{(1-v)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2(1-v)} \end{bmatrix}$$

Además: se tiene la ecuación anterior en su forma reducida:

$$[D] = d_1 \begin{bmatrix} 1 & d_2 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

Entones para el desarrollo de la matriz D se requieren los siguientes datos:

E(kg/m2)	1413662158
v	0.217
d1	1606942678
d2	0.277139208
d3	0.361430396

$$D = \begin{pmatrix} 1606942678 & 445346821.4 & 0 \\ 445346821.4 & 1606942678 & 0 \\ 0 & 0 & 580797928.4 \end{pmatrix}$$

La matriz D representa las propiedades elásticas del macizo rocoso y depende del módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson. En el talud de la Progresiva 2+520, se asume que estos valores son iguales para todos los elementos, debido a la uniformidad e isotropía de la litología.

5.3.1.3 Matriz de deformación y de rigidez del elemento

En el capítulo II, sección 2.4.3, se desarrolló la matriz de deformación del elemento, denotada como $[B]$. Esta matriz es fundamental para el análisis del comportamiento mecánico del talud, ya que relaciona los desplazamientos nodales con las deformaciones en el interior del elemento. La formulación de $[B]$ se basa en las coordenadas de los nodos de cada elemento, lo que permite capturar cómo las deformaciones se distribuyen espacialmente dentro de la geometría definida. Finalmente, la matriz de deformación se expresa mediante la siguiente relación:

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

De aquí se realizaron cambios de variable donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Además:

$$2A = a_1 + a_2 + a_3$$

A: Área del elemento triangular

Para deducir la matriz de rigidez, se empleará el teorema de los trabajos virtuales que se presentó en el capítulo II, el cual es fundamental en la formulación del método de los elementos finitos. Al aplicar el teorema en su forma matricial, se obtiene la matriz de rigidez, que representa la resistencia del talud a las deformaciones bajo cargas. Esta matriz es crucial para calcular con precisión los desplazamientos, esfuerzos y deformaciones en el talud, y su deducción se expresa de la siguiente manera:

$$[K_e] = [B]^t[D][B]V$$

Aplicamos estos desarrollos a cada elemento del talud discretizado.

ELEMENTO “1”:

Aquí se presenta las coordenadas de los nodos del elemento triangular 1.

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 9	X1	0	Y1	3878.851
NODO 10	X2	61.192	Y2	3878.851
NODO 11	X3	0	Y3	3898.851

Determinación de los constantes que se realizaron el cambio de variable.

a1	238578.4904	b1	-20	c1	-61.192
a2	0	b2	20	c2	0
a3	-237354.65	b3	0	c3	61.192

Los factores a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3, están directamente relacionados con las coordenadas de los nodos y se utilizan para calcular el área del elemento, su forma y el comportamiento estructural.

Además

2A = a1 + a2 + a3 = 1223.84 m^2 sí despejamos A, resulta ser el área del elemento triangular 1.

Luego introducimos a la formula se obtiene B_1:

$$B_1 = 0.0008171 \begin{pmatrix} -20 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -61.192 & 0 & 0 & 0 & 61.192 \\ -61.192 & -20 & 0 & 20 & 61.192 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -0.01634201 & 0 & 0.016342005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.05 \\ -0.05 & -0.016342005 & 0 & 0.016342005 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos B_1 esta matriz es denominado matriz de deformación del elemento o matriz de coeficientes de las coordenadas de los nodos y su interpretación se da como sigue:

Primera Fila: Deformación en la Dirección x (ε_x)

$$\begin{bmatrix} -0.01634201 & 0 & 0.016342005 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- -0.01634201 (Columna 1): Indica cómo el desplazamiento en la dirección u en el nodo 9 afecta la deformación en x. Un valor negativo implica que un incremento en el desplazamiento en u en el nodo 9 tiende a reducir la deformación en x. Esto sugiere que el nodo 9 está contribuyendo a la deformación en x de una manera que tiende a "estirar" el elemento en esa dirección, pero de manera inversa.
- 0 (Columna 2): No hay influencia del desplazamiento en la dirección v en el nodo 9 sobre la deformación en x. Esto significa que un cambio en el desplazamiento v en el nodo 9 no afecta la deformación en x en el interior del elemento.
- 0.016342005 (Columna 3): Muestra cómo el desplazamiento en la dirección u en el nodo 10 afecta la deformación en x. Un valor positivo indica que un incremento en el desplazamiento u en el nodo 10 contribuye a aumentar la deformación en x. Esto sugiere que el nodo 10 está "expandiendo" el elemento en x cuando su desplazamiento en u aumenta.
- 0 (Columnas 4, 5 y 6): No hay influencia de los desplazamientos en u y v de los nodos 9, 10 y 11 en la deformación en x. Esto significa que estos nodos no afectan directamente la deformación en x en el interior del elemento.

Segunda Fila: Deformación en la Dirección y (ε_y)

0	-0.05	0	0	0	0.05

- 0 (Columna 1): No hay influencia del desplazamiento en u en el nodo 9 en la deformación de y. Esto sugiere que un cambio en el desplazamiento en u en el nodo 9 no afecta la deformación en y.

- -0.05 (Columna 2): Indica cómo el desplazamiento en la dirección v en el nodo 9 afecta la deformación en y. Un valor negativo sugiere que un aumento en el desplazamiento en v en el nodo 9 tiende a reducir la deformación en y. Este nodo está causando una contracción en la dirección y cuando su desplazamiento en v aumenta.

- **0** (Columna 3, 4 y 5): No hay influencia del desplazamiento en u y v en el nodo 10 y nodo 11 en u sobre la deformación en y. Estos nodos no afectan directamente la deformación en y en el interior del elemento.

- 0.05 (Columna 6): Muestra cómo el desplazamiento en la dirección v en el nodo 11 afecta la deformación en y. Un valor positivo indica que un aumento en el desplazamiento en v en el nodo 11 contribuye a aumentar la deformación en y. Esto sugiere que el nodo 11 está "expandiendo" el elemento en y cuando su desplazamiento en v aumenta.

Tercera Fila: Deformación de Corte (ε_{xy})

$$\begin{bmatrix} -0.05 & -0.016342005 & 0 & 0.016342005 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}$$

- -0.05 (Columna 1): Indica cómo el desplazamiento en u en el nodo 9 afecta la deformación de corte en xy. Un valor negativo sugiere que un aumento en el desplazamiento en u en el nodo 9 tiende a reducir la deformación de corte en xy.

Esto sugiere que el nodo 9 está causando una reducción en la deformación de corte cuando su desplazamiento en u aumenta.

- -0.016342005 (Columna 2): Muestra cómo el desplazamiento en v en el nodo 9 afecta la deformación de corte en xy. Un valor negativo indica que un aumento en el desplazamiento en v en el nodo 9 también tiende a reducir la deformación de corte en xy.
- 0 (Columna 3): No hay influencia del desplazamiento en u en el nodo 10 en la deformación de corte en xy.
- 0.016342005 (Columna 4): Indica cómo el desplazamiento en v en el nodo 10 afecta la deformación de corte en xy. Un valor positivo sugiere que un aumento en el desplazamiento en v en el nodo 10 contribuye a aumentar la deformación de corte en xy.
- 0.05 (Columna 5): Muestra cómo el desplazamiento en u en el nodo 11 afecta la deformación de corte en xy. Un valor positivo indica que un aumento en el desplazamiento en u en el nodo 11 contribuye a aumentar la deformación de corte en xy.
- 0 (Columna 6): No hay influencia del desplazamiento en v en el nodo 11 sobre la deformación de corte en xy.

La matriz $[B_1]$ proporciona una descripción precisa de cómo los desplazamientos en los nodos del triángulo afectan las deformaciones dentro del elemento. Cada fila de la matriz está asociada con un tipo específico de deformación (dirección x, dirección y, y corte) y muestra cómo los desplazamientos en los nodos contribuyen a estas deformaciones. Esta interpretación es esencial para comprender el comportamiento del elemento triangular en el análisis de elementos finitos y su impacto en el modelo global del talud.

Luego, para el desarrollo de la matriz de rigidez se requiere determinar la transpuesta de la matriz $[B_1]$.

$$B_1{}^{t} = \begin{pmatrix} -0.01634201 & 0 & -0.05 \\ 0 & -0.05 & -0.016342005 \\ 0.016342005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.016342005 \\ 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = Área x $1m$ = 611.92 m^3 volumen del elemento triangular 1

Reemplazamos los valores D, B y V en la fórmula de los trabajos virtuales obtenemos la matriz de rigidez del elemento 1 quedara como sigue:

		u9	**v9**	**u10**	**v10**	**u11**	**v11**
K_1	**u9**	1151111332	513072374.9	-262606660.7	-290398964.2	-888504670.9	-222673410.7
	v9	513072374.9	2553214939	-222673410.7	-94914029.36	-290398964.2	-2458300909
	u10	-262606661	-222673410.7	262606660.7	0	0	222673410.7
	v10	-290398964	-94914029.36	0	94914029.36	290398964.2	0
	u11	-888504671	-290398964.2	0	290398964.2	888504670.9	0
	v11	-222673411	-2458300909	222673410.7	0	0	2458300909

La matriz de rigidez anterior indica de cuan duro o suave es el elemento 1 o cuanta fuerza se requiere para deformarlo, la diagonal principal representa las fuerzas que aparecen en cada nodo y no puede ser negativo. A continuación, la interpretación:

Nodo $u9, v9$:

- $K_1 u9, u9$ = 1151111332 y $K_1 v9, v9$ = 2553214939: Estos términos en la diagonal representan la rigidez asociada al desplazamiento del nodo 9 en las direcciones x y

y, respectivamente. Valores grandes en estos términos indican que el nodo 9 es muy rígido y resistirá los desplazamientos en ambas direcciones.

- $K_1 u9, v9$ = 513072374.9: Este término acopla los desplazamientos en x y y para el nodo 9. Un valor distinto de cero indica que hay un acoplamiento entre los desplazamientos en u y v, lo que significa que un desplazamiento en una dirección puede influir en la otra.

Nodo $u10, v10$:

- $K_1 u10, u10$ = 262606661 y $K_1 v10, v10$ = 94914029.36: Estos términos representan la rigidez asociada a los desplazamientos en las direcciones x y y del nodo 10. En comparación con los valores del nodo 9, se observa que este nodo es significativamente menos rígido, lo que indica que tiene mayor libertad para moverse.

- $K_1 u9, u10$ = −262606660.7 y $K_1 v9, u10$ = −222673410.7: Estos términos representan las interacciones entre los desplazamientos de los nodos 9 y 10. Los valores negativos indican que un desplazamiento en el nodo 10 tendrá un efecto inverso en la respuesta del nodo 9.

Nodo $u11, v11$:

- $K_1 u11, u11$ = 888504670.9 y $K_1 v11, v11$ = 2458300909: Estos términos representan la rigidez asociada al nodo 11. Observamos que los valores de rigidez en la dirección x son menores que en y, lo que sugiere que el nodo 11 es más resistente al movimiento en la dirección y que en x.

- $K_1u9, u11 = -888504670.9$ y $K_1v9, u11 = -2458300909$: Los términos de interacción entre los nodos 9 y 11 muestran un acoplamiento importante entre ellos. Los valores negativos sugieren que, si el nodo 11 se desplaza en una dirección, tendrá un efecto inverso en el nodo 9.

Términos de interacción entre los nodos 10 y 11:

- $K_1u10, u11$=0 y $Kv10, u11$=0: Estos términos indican que no hay interacción directa entre los desplazamientos en x y y de los nodos 10 y 11. Es decir, los desplazamientos en uno de estos nodos no afectan directamente al otro.

La interpretación detallada sugiere que el nodo 9 es el más rígido en ambas direcciones, mientras que los nodos 10 y 11 son menos rígidos, especialmente el nodo 10. Además, hay una interacción significativa entre los desplazamientos de los nodos 9 y 11, mientras que los nodos 10 y 11 están más desacoplados. Esto puede indicar que el nodo 9 es una especie de "punto fijo" o ancla del sistema, mientras que los otros dos nodos tienen más libertad de movimiento, especialmente el nodo 10.

Realizamos el mismo procedimiento para cada elemento del talud discretizado.

ELEMENTO “2”:

Los nodos del elemento triangular 2 tienen las siguientes coordenadas:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 11	X1	0	Y1	3898.851
NODO 1	X2	61.192	Y2	3906.999
NODO 2	X3	56.536	Y3	3926.999

Los coeficientes a1,a2,a3,b1,b2,b3 y c1,c2,c3 son factores que dependen de las posiciones de los nodos y están involucrados en el cálculo de la matriz de deformación y en el cálculo del área del elemento.

a1	19414.82734	b1	-20	c1	-4.656
a2	220425.4401	b2	28.148	c2	-56.536
a3	-238578.49	b3	-8.148	c3	61.192

Además:

$$2A = a1 + a2 + a3 = 1261.777088\ m^2$$

$$B_2 = 0.000792533 \begin{pmatrix} -20 & 0 & 28.148 & 0 & -8.148 & 0 \\ 0 & -4.656 & 0 & -56.536 & 0 & 61.192 \\ -4.656 & -20 & -56.536 & 28.148 & 61.192 & -8.148 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -0.01585066 & 0 & 0.022308219 & 0 & -0.006457559 & 0 \\ 0 & -0.003690034 & 0 & -0.044806647 & 0 & 0.04849668 \\ -0.00369003 & -0.01585066 & -0.044806647 & 0.022308219 & 0.04849668 & -0.006457559 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene 3 filas y 6 columnas. Las tres filas corresponden a los tres tipos de deformaciones que se producen dentro de un elemento triangular en dos dimensiones:

- Deformación axial en x (ε_x): Deformación en la dirección horizontal.
- Deformación axial en y (ε_y): Deformación en la dirección vertical.
- Deformación cortante (ε_{xy}): Relacionada con las distorsiones angulares o de cizalladura en el plano xy.

Cada columna está asociada a los grados de libertad de los nodos del elemento. Dado que el triángulo tiene tres nodos, y cada nodo tiene dos grados de libertad (desplazamiento en x y desplazamiento en y), la matriz tiene un total de seis columnas.

Primera Fila: Deformación en la Dirección x (ε_x)

$$\begin{pmatrix} -0.01585066 & 0 & 0.022308219 & 0 & -0.006457559 & 0 \end{pmatrix}$$

- Columna 1 y 2: -0.01585066 es el coeficiente que relaciona el desplazamiento en $\boldsymbol{x}$ del nodo 11 con la deformación axial en la dirección x (ε_x). El cero en la segunda columna indica que el desplazamiento en y del nodo 11 no contribuye a la deformación en x.

- Columna 3 y 4: 0.022308219 es el coeficiente que relaciona el desplazamiento en $\boldsymbol{x}$ del nodo 1 con la deformación en x. Al igual que con el nodo 11, el desplazamiento en y del nodo 1 no afecta a (ε_x).

- Columna 5 y 6: -0.006457559 representa el coeficiente de influencia del desplazamiento en x del nodo 2 en (ε_x), y el cero indica que no hay influencia del desplazamiento en y del nodo 2 sobre la deformación axial en x.

Segunda Fila: Deformación en la Dirección y (ε_y)

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.003690034 & 0 & -0.044806647 & 0 & 0.04849668 \end{bmatrix}$$

- Columna 1 y 2: -0.003690034 relaciona el desplazamiento en y del nodo 11 con la deformación axial en y (ε_y). El cero en la primera columna muestra que el desplazamiento en x del nodo 11 no afecta ε_y.

- Columna 3 y 4: -0.044806647 indica la influencia del desplazamiento en y del nodo 1 sobre ε_y , y el cero en la tercera columna implica que no hay efecto del desplazamiento en x del nodo 1 sobre la deformación axial en y.

- Columna 5 y 6: 0.04849668 representa la influencia del desplazamiento en y del nodo 2 en ε_y , mientras que el desplazamiento en x del nodo 2 no tiene influencia.

Tercera Fila: Deformación de Corte (ε_{xy})

La tercera fila describe cómo los desplazamientos en x y y en los nodos afectan la deformación por corte dentro del elemento.

- Columna 1 y 2: -0.00369003 y -0.01585066 indican la influencia de los desplazamientos en x y y del nodo 11 en la deformación cortante ε_{xy}.

- Columna 3 y 4: -0.044806647 y 0.022308219 muestran cómo los desplazamientos en x y y del nodo 1 afectan la deformación cortante.

- Columna 5 y 6: 0.04849668 y -0.006457559 expresan la relación entre los desplazamientos en x y y del nodo 2 y la deformación por corte.

Luego se requiere la matriz transpuesta de $[B_2]$

$$
{B_2}^t = \begin{pmatrix} -0.01585066 & 0 & -0.003690034 \\ 0 & -0.003690034 & -0.01585066 \\ 0.022308219 & 0 & -0.044806647 \\ 0 & -0.044806647 & 0.022308219 \\ -0.00645756 & 0 & 0.04849668 \\ 0 & 0.04849668 & -0.006457559 \end{pmatrix}
$$

Volumen(m3) = 630.888544

Finalmente

K_2		u11	v11	u1	v1	u2	v2
	u11	259700310.9	37865087.27	-297897338.6	169382086.9	38197027.77	-207247174.2
	v11	37865087.27	105864584.7	237107640.4	38054311.32	-274972727.7	-143918896
	u1	-297897339	237107640.4	1240160506	-647095851.3	-942263167.8	409988210.9
	v1	169382086.9	38054311.32	-647095851.3	2217695144	477713764.4	-2255749455
	u2	38197027.77	-274972727.7	-942263167.8	477713764.4	904066140	-202741036.8
	v2	-207247174	-143918896	409988210.9	-2255749455	-202741036.8	2399668351

Los elementos de esta matriz, si lo interpretamos indican lo siguiente:

Primera y Segunda Filas: Nodo 11

- $K_2 u11, u11$ = 259700310.9: Este valor representa la rigidez axial en x del nodo 11, es decir, cómo el desplazamiento en x del nodo 11 está relacionado con la fuerza que se aplica en la dirección x en el mismo nodo. Este coeficiente es elevado, lo que indica que el nodo 11 es bastante rígido en la dirección x.

- $K_2 u11, u1$ = −297897338.6: Relaciona el desplazamiento en x del nodo 1 con la fuerza en x del nodo 11. Un valor negativo indica que cuando el nodo 1 se desplaza en x, esto provoca una fuerza en sentido contrario en el nodo 11, lo que indica una relación de interdependencia entre los desplazamientos de estos dos nodos.

- $K_2 v11, v11$ = 105864584.7: Indica la rigidez en la dirección y del nodo 11. Similar al término anterior en x, este valor mide cuánto resiste el nodo 11 una fuerza en y cuando hay un desplazamiento en la misma dirección.

Tercera y Cuarta Filas: Nodo 1

- $K_2 u1, u1$ = 1240160506: Este valor indica la rigidez axial en x del nodo 1. Es el valor más elevado de la matriz, lo que indica que el nodo 1 tiene una resistencia significativa a los desplazamientos en la dirección x.

- $K_2 v1, v1$ = 2217695144: Este coeficiente representa la rigidez axial en y del nodo 1, que también es considerablemente alta, lo que sugiere que el nodo 1 ofrece una gran resistencia a los desplazamientos en la dirección y.

- $K_2 u1, u2$ = −942263167.8: Indica cómo el desplazamiento en x del nodo 2 está relacionado con una fuerza en $\boldsymbol{x}$ en el nodo 1. Nuevamente, el valor negativo sugiere que los desplazamientos en un nodo generan fuerzas en dirección opuesta en el otro nodo, reflejando la interdependencia entre los nodos.

Quinta y Sexta Filas: Nodo 2

- $K_2 u2, u2$ = 904066140: Este valor describe la rigidez axial en x del nodo 2. Aunque no es tan grande como el valor correspondiente del nodo 1, aún muestra que el nodo 2 tiene una considerable resistencia a los desplazamientos en la dirección x.

- $K_2v2, v2$ = 2399668351: Es el mayor valor en toda la matriz, lo que indica una resistencia extrema en la dirección y para el nodo 2. Esto puede sugerir que el nodo 2 está en una posición crítica dentro del elemento, donde las fuerzas en y generan grandes resistencias.

- $K_2v2, u1 = -202741036.8$: Este coeficiente relaciona el desplazamiento en x del nodo 1 con una fuerza en y en el nodo 2. Un valor negativo refleja, una vez más, la interrelación entre los desplazamientos en un nodo y las fuerzas que se generan en otro nodo en una dirección distinta.

ELEMENTO “3”:

Coordenadas del elemento 3 en sus respectivos nodos

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 11	X1	0	Y1	3898.851
NODO 10	X2	61.192	Y2	3878.851
NODO 4	X3	121.192	Y3	3898.851

a1	-231507.22	b1	-20	c1	60
a2	472509.5504	b2	0	c2	-121.192
a3	-238578.49	b3	20	c3	61.192

2A = a1 + a2 + a3 = 2423.84

$$B_3 = \begin{pmatrix} -0.00825137 & 0 & 0 & 0 & 0.00825137 & 0 \\ 0 & 0.024754109 & 0 & -0.05 & 0 & 0.025245891 \\ 0.024754109 & -0.00825137 & -0.05 & 0 & 0.025245891 & 0.00825137 \end{pmatrix}$$

Interpretando esta matriz se detalla:

Primera fila:

- Esta fila muestra cómo los desplazamientos nodales en x ($u11, u10, u4$) afectan las deformaciones en x (ε_x) del elemento. Aquí, los desplazamientos nodales $u11$ y $u4$ tienen un efecto en ε_x, con contribuciones negativas y positivas, respectivamente.

Segunda fila:

- Esta fila describe la relación entre los desplazamientos nodales en y ($v11, v10\,, v4$) y las deformaciones en y (ε_y). El desplazamiento en $v11$ tiene una contribución positiva hacia ε_y, mientras que el desplazamiento en $v10$ tiene una contribución negativa significativa.

Tercera fila:

- Esta fila relaciona los desplazamientos en ambos ejes (x e y) con la deformación cortante ε_{xy}. En este caso, los desplazamientos en x y y en los nodos 11, 10, y 4 tienen un efecto combinado sobre ε_{xy}, con distintas magnitudes y signos.

Esta matriz B_3 describe cómo los desplazamientos en los nodos 11, 10 y 4 generan las deformaciones internas del Elemento 3 en un talud.

Luego expresamos esta matriz en su transpuesta se tendrá como sigue:

$$B_3{}^t = \begin{pmatrix} -0.00825137 & 0 & 0.024754109 \\ 0 & 0.024754109 & -0.00825137 \\ 0 & 0 & -0.05 \\ 0 & -0.05 & 0 \\ 0.00825137 & 0 & 0.025245891 \\ 0 & 0.025245891 & 0.00825137 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 1211.92

		u11	v11	u10	v10	u4	v4
K_3	u11	563908841.7	-254012991.8	-871196892.6	222673410.7	307288051	31339581.03
	v11	-254012992	1241276820	290398964.2	-2410414017	-36385972.46	1169137198
	u10	-871196893	290398964.2	1759701564	0	-888504670.9	-290398964.2
	v10	222673410.7	-2410414017	0	4868714927	-222673410.7	-2458300909
	u4	307288051	-36385972.46	-888504670.9	-222673410.7	581216620	259059383.2
	v4	31339581.03	1169137198	-290398964.2	-2458300909	259059383.2	1289163712

Interpretación:

- $K_3u11, u11$ = 563908841.7: Indica la rigidez en x del nodo 11. Un valor alto significa que el nodo 11 tiene una alta resistencia a los desplazamientos en la dirección x.
- $K_3v11, v11$ = 1241276820: Representa la rigidez en y del nodo 11. Es aún más grande, lo que indica una mayor resistencia a desplazamientos en la dirección vertical.
- $K_3u10, u10$ = 1759701564: Este valor es uno de los mayores en la matriz, lo que indica que el nodo 10 es muy rígido en la dirección x, oponiéndose fuertemente a los desplazamientos horizontales.
- $K_3K_3v10, v10$ = 4868714927: Es el valor más alto en toda la matriz, lo que indica una extrema resistencia en y en el nodo 10, mostrando que cualquier desplazamiento en esa dirección requerirá grandes fuerzas.
- $K_3u4, u4$ = 581216620 y $K_3v4, v4$ = 1289163712: Estos términos muestran la rigidez del nodo 4 en x e y, respectivamente. Aunque menores que los valores de los nodos 10 y 11, todavía son bastante significativos.

También se puede realizar un análisis cruzadas entre nodos. Los términos fuera de la diagonal indican cómo los desplazamientos en un nodo afectan a otros nodos:

- $K_3u11, u10$ = −871196892.6: Relaciona el desplazamiento en x del nodo 10 con la fuerza en x del nodo 11. Un valor negativo significa que los desplazamientos en una dirección generan fuerzas en la dirección opuesta, mostrando una interacción entre estos dos nodos.

- $K_3 v11, v10 = -2410414017$: Relaciona el desplazamiento en y del nodo 10 con la fuerza en y del nodo 11. De nuevo, la fuerza en el nodo 11 actúa en dirección opuesta a los desplazamientos en el nodo 10, y el valor negativo indica esta relación inversa.

- $K_3 u10, u4 = -888504670.9$: Relaciona el desplazamiento en x del nodo 4 con la fuerza en x del nodo 10, mostrando una interacción similar entre estos nodos.

- La matriz muestra una estructura donde los nodos 10 y 11 son más rígidos en general, especialmente en la dirección y.

- Las interacciones entre los nodos (elementos fuera de la diagonal) muestran cómo los desplazamientos en un nodo afectan las fuerzas en los otros dos, con relaciones inversas predominando.

- El nodo 10 presenta la mayor rigidez, particularmente en la dirección vertical, lo que sugiere que este nodo es crítico en el comportamiento del elemento.

ELEMENTO “4”:

Coordenadas de los nodos del elemento 4:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 11	X1	0	Y1	3898.851
NODO 4	X2	121.192	Y2	3898.851
NODO 1	X3	61.192	Y3	3906.999

a1	234918.5324	b1	-8.148	c1	-60
a2	238578.4904	b2	8.148	c2	-61.192
a3	-472509.55	b3	0	c3	121.192

El área del triángulo se calcula a partir de los coeficientes a1, a2, y a3 que dependen de las coordenadas de los nodos:

$$2A = a1 + a2 + a3 = 987.472416$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} -0.00825137 & 0 & 0.00825137 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.060761191 & 0 & -0.061968313 & 0 & 0.122729504 \\ -0.06076119 & -0.00825137 & -0.061968313 & 0.00825137 & 0.122729504 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada fila en la matriz B_4 se refiere a las deformaciones axiales (ε_x), deformaciones axiales (ε_y) y deformaciones cortantes (ε_{xy}) respectivamente.

Primera fila: Representa cómo los desplazamientos en los nodos afectan la deformación en la dirección x.

- El valor -0.00825137 en la primera columna indica la relación entre el desplazamiento $u11$ (desplazamiento en x en el nodo 11) y la deformación en x.
- El valor 0.00825137 en la tercera columna indica la influencia de $u4$ (desplazamiento en x del nodo 4) sobre la deformación en x.

Segunda fila: Relaciona los desplazamientos con la deformación en la dirección y.

- El valor -0.060761191 en la segunda columna indica la influencia de $v11$ (desplazamiento en y del nodo 11) en la deformación en y.
- Los demás valores indican cómo los desplazamientos en otros nodos (nodo 4, nodo 1) afectan la deformación en y.

Tercera fila: Representa las deformaciones por cortante (ε_{xy}).

- Aquí vemos cómo los desplazamientos en las direcciones x y y en todos los nodos contribuyen a la deformación por cortante.

la matriz transpuesta de matriz B_4 será:

$$B_4{}^{t} = \begin{pmatrix} -0.00825137 & 0 & -0.060761191 \\ 0 & -0.060761191 & -0.00825137 \\ 0.00825137 & 0 & -0.061968313 \\ 0 & -0.061968313 & 0.00825137 \\ 0 & 0 & 0.122729504 \\ 0 & 0.122729504 & 0 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 493.736208

K_4		u11	v11	u4	v4	u1	v1
	u11	1112718329	254012991.8	1025712925	-31339581.03	-2138431253	-222673410.7
	v11	254012991.8	2948716676	36385972.46	2967861668	-290398964.2	-5916578344
	u4	1025712925	36385972.46	1155201829	-259059383.2	-2180914754	222673410.7

	v4	-31339581	2967861668	-259059383.2	3066259366	290398964.2	-6034121034
	u1	-2138431253	-290398964.2	-2180914754	290398964.2	4319346008	0
	v1	-222673411	-5916578344	222673410.7	-6034121034	0	11950699378

Realizando las interpretaciones correspondientes de la Matriz de rigidez, se detalla.

Nodo 11 en dirección u (desplazamiento en x):

- $K_4u11, u11 =$ 1112718329: Este valor describe cuánta resistencia hay al desplazamiento en x en el nodo 11 cuando se aplica una fuerza en la misma dirección. Un valor alto indica que el nodo 11 es muy rígido en esta dirección.
- $K_4u11, v11$ = 254012991.8: Describe cómo una fuerza en y en el nodo 11 afecta el desplazamiento en x en el mismo nodo. Este valor no es tan grande como los valores de la diagonal, pero aún indica una interacción significativa entre los desplazamientos en las direcciones x y y.
- $K_4u11, u4$ = 1025712925: Este valor describe cómo una fuerza aplicada en x en el nodo 4 afecta el desplazamiento en x en el nodo 11. El valor es elevado, lo que indica que los nodos están fuertemente acoplados en esta dirección.
- $K_4u11, v4 = -31339581.03$: Describe el efecto de una fuerza en y en el nodo 4 sobre el desplazamiento en x en el nodo 11. Este valor es más pequeño y negativo, lo que implica un acoplamiento menor y en sentido opuesto.
- $K_4u11, u1$ $= -2138431253$: Indica cómo una fuerza en x en el nodo 1 afecta el desplazamiento en x en el nodo 11. Un valor negativo significa que estos desplazamientos están correlacionados en direcciones opuestas.
- $K_4u11, v1$ $= -222673410.7$: Representa el efecto de una fuerza en y en el nodo 1 sobre el desplazamiento en x en el nodo 11, mostrando una interacción significativa.

Nodo 11 en dirección v (desplazamiento en y):

- $K_4v11, u11$ = 254012991.8: Este valor indica cómo una fuerza en x en el nodo 11 afecta el desplazamiento en y en el mismo nodo.
- $K_4v11, v11$ = 2948716676: Muestra cuánta rigidez hay al desplazamiento en y en el nodo 11 cuando se aplica una fuerza en esa misma dirección. El valor es extremadamente alto, lo que indica una alta resistencia.
- $K_4v11, u4$ = 36385972.46: Describe cómo una fuerza en x en el nodo 4 afecta el desplazamiento en y en el nodo 11, lo que muestra una correlación relativamente pequeña.
- $K_4v11, v4$ = 2967861668: Indica la fuerte influencia de una fuerza en y en el nodo 4 sobre el desplazamiento en y en el nodo 11. Un valor grande muestra que los dos nodos están muy acoplados en esta dirección.
- $K_4v11, u1$ = −290398964.2 y $K_4v11, v1$ = −5916578344: Estos valores indican cómo las fuerzas en x y y en el nodo 1 afectan los desplazamientos en y en el nodo 11, con una fuerte correlación negativa en la dirección y.

Nodo 4:

- Los términos en la matriz para el nodo 4, como $K_4u4, u4$ = 1155201829, $K_4v4, v4$ = 3066259366, y otros, describen la resistencia del nodo 4 a desplazarse en sus direcciones x y y, además de cómo interactúa con los desplazamientos en los otros nodos.

Nodo 1:

- El nodo 1 también muestra un fuerte acoplamiento con los otros nodos, especialmente en los términos $K_4u1, u1$=4319346008 y $K_4v1, v1$=11950699378 lo que indica una alta rigidez en ambas direcciones en este nodo.

En general:

- Los valores diagonales grandes, como 1112718329 para $K_4 u11, u11$ y 2948716676 para $K_4 v11, v11$, muestran que el Elemento 4 es muy rígido, particularmente en los nodos 11 y 1. Estos valores indican que el sistema resistirá fuertemente los desplazamientos en estas direcciones bajo fuerzas aplicadas.
- Los valores fuera de la diagonal muestran el acoplamiento entre diferentes direcciones y nodos. Un acoplamiento fuerte entre nodos indica que una fuerza en un nodo también afectará los desplazamientos en otro nodo.

ELEMENTO “5”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 2	X1	56.536	Y1	3926.999
NODO 1	X2	61.192	Y2	3906.999
NODO 5	X3	81.192	Y3	3936.999

a1	-76304.22	b1	-30	c1	20
a2	96258.72734	b2	10	c2	-24.656
a3	-19414.8273	b3	20	c3	4.656

2A = a1 + a2 + a3 = 539.68

$$B_5 = \begin{pmatrix} -0.0555885 & 0 & 0.018529499 & 0 & 0.037058998 & 0 \\ 0 & 0.037058998 & 0 & -0.045686333 & 0 & 0.008627335 \\ 0.037058998 & -0.055588497 & -0.045686333 & 0.018529499 & 0.008627335 & 0.037058998 \end{pmatrix}$$

$$B_5{}^t = \begin{pmatrix} -0.0555885 & 0 & 0.037058998 \\ 0 & 0.037058998 & -0.055588497 \\ 0.018529499 & 0 & -0.045686333 \\ 0 & -0.045686333 & 0.018529499 \\ 0.037058998 & 0 & 0.008627335 \\ 0 & 0.008627335 & 0.037058998 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 269.84

		u2	v2	u1	v1	u5	v5
K_5	**u2**	1555150813	-570418442.3	-711982913.9	412812891.5	-843167899.4	157605550.8
	v2	-570418442	1079802111	480538445	-895581596.6	89879997.35	-184220514.8
	u1	-711982914	480538445	475996866.7	-234403951.9	235986047.2	-246134493.1
	v1	412812891.5	-895581596.6	-234403951.9	958873510.1	-178408939.6	-63291913.57
	u5	-843167899	89879997.35	235986047.2	-178408939.6	607181852.2	88528942.25
	v5	157605550.8	-184220514.8	-246134493.1	-63291913.57	88528942.25	247512428.4

Evaluación de Rigidez Diagonal

- Valores Altos en la Diagonal: $K_5\, u2, u2$ = 1555150813, $K_5\, v2, v2$ = 1079802111, y $K_5 v1, v1$ = 958873510.1 son significativamente altos. Esto indica que los nodos correspondientes a $u2$, $v2$, y $v1$ tienen una alta rigidez en sus direcciones respectivas. Esta alta rigidez sugiere que estos nodos son muy resistentes a los desplazamientos y por lo tanto, contribuyen a la estabilidad general del sistema.
- Valores Moderados: $K_5 u1, u1$ = 475996866.7 y $K_5 u5, u5$ = 607181852.2 son relativamente altos, pero menos que los anteriores, indicando rigidez moderada en esos nodos en sus respectivas direcciones.
- Valor Relativamente Bajo: $K_5\, v5, v5$=247512428.4 es el valor más bajo en la diagonal, indicando menor rigidez en el nodo correspondiente a $v5$. Esto puede sugerir que este nodo es más flexible en comparación con otros nodos.

Interacciones entre Nodos

Valores Negativos:

- $K_5 u2, v2 = -570418442.3$, $K_5 u2, u1 = -711982913.9$ y $K_5 u2, u5 = -843167899.4$ muestran efectos negativos en las interacciones entre nodos. Estos valores indican que los desplazamientos en estos nodos tienden a reducir los desplazamientos en otros nodos, lo que puede sugerir un comportamiento de acoplamiento desfavorable entre esos nodos. Por ejemplo, el valor negativo de $K_5\, u2, v2$ indica una fuerte interacción negativa entre $u2$ y $v1$, lo que podría ser crítico para la estabilidad del sistema si estos nodos están conectados directamente.

Valores Positivos:

- $K_5 v2, u1$ = 480538445 y $K_5 v2, u5$ = 89879997.35 indican interacciones positivas, donde el desplazamiento en un nodo tiende a incrementar los desplazamientos en otros nodos. Estos valores sugieren que hay acoplamientos constructivos que pueden contribuir a la estabilidad del sistema en ciertas configuraciones.

ELEMENTO “6”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 2	X1	56.536	Y1	3926.999
NODO 5	X2	81.192	Y2	3936.999
NODO 7	X3	71.192	Y3	3956.999

a1	40993.83	b1	-20	c1	-10
a2	55858.01734	b2	30	c2	-14.656
a3	-96258.7273	b3	-10	c3	24.656

2A = a1 + a2 + a3 = 593.12

$$B_6 = \begin{pmatrix} -0.03371999 & 0 & 0.050579984 & 0 & -0.016859995 & 0 \\ 0 & -0.016859995 & 0 & -0.024710008 & 0 & 0.041570003 \\ -0.01685999 & -0.033719989 & -0.024710008 & 0.050579984 & 0.041570003 & -0.016859995 \end{pmatrix}$$

$$B_6{}^t = \begin{pmatrix} -0.03371999 & 0 & -0.016859995 \\ 0 & -0.016859995 & -0.033719989 \\ 0.050579984 & 0 & -0.024710008 \\ 0 & -0.024710008 & 0.050579984 \\ -0.01685999 & 0 & 0.041570003 \\ 0 & 0.041570003 & -0.016859995 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 296.56

		u2	v2	u5	v5	u7	v7
K_6	u2	590822147.4	173007949.5	-741033739	-36838513.48	150211591.6	-136169436
	v2	173007949.5	331310223.2	30887040.02	-95229665.27	-203894989.5	-236080558
	u5	-741033739	30887040.02	1324354970	-380340676.1	-583321230.5	349453636.1
	v5	-36838513.5	-95229665.27	-380340676.1	731628295.2	417179189.6	-636398630
	u7	150211591.6	-203894989.5	-583321230.5	417179189.6	433109638.9	-213284200.1
	v7	-136169436	-236080558	349453636.1	-636398630	-213284200.1	872479187.9

- La matriz de rigidez muestra que el elemento tiene una alta rigidez en general, especialmente en los nodos 5 y 7, lo que implica una buena resistencia a las deformaciones.

ELEMENTO “7”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR

NODO 5	X1	81.192	Y1	3936.999
NODO 6	X2	86.192	Y2	3956.999
NODO 7	X3	71.192	Y3	3956.999

a1	59354.985	b1	0	c1	-15
a2	-40993.83	b2	20	c2	10
a3	-18061.155	b3	-20	c3	5

2A = a1 + a2 + a3 = 300

$$B_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.066666667 & 0 & -0.066666667 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 & 0.033333333 & 0 & 0.016666667 \\ -0.05 & 0 & 0.033333333 & 0.066666667 & 0.016666667 & -0.066666667 \end{pmatrix}$$

$$B_7{}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.05 \\ 0 & -0.05 & 0 \\ 0.066666667 & 0 & 0.033333333 \\ 0 & 0.033333333 & 0.066666667 \\ -0.06666667 & 0 & 0.016666667 \\ 0 & 0.016666667 & -0.066666667 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 150

		u5	v5	u6	v6	u7	v7
K_7	u5	217799223.2	0	-145199482.1	-290398964.2	-72599741.05	290398964.2
	v5	0	602603504.4	-222673410.7	-401735669.6	222673410.7	-200867834.8
	u6	-145199482	-222673410.7	1168094774	342048250	-1022895292	-119374839.2
	v6	-290398964	-401735669.6	342048250	655022398.7	-51649285.74	-253286729.1
	u7	-72599741.1	222673410.7	-1022895292	-51649285.74	1095495033	-171024125
	v7	290398964.2	-200867834.8	-119374839.2	-253286729.1	-171024125	454154563.9

- El Elemento 7 muestra una buena capacidad de resistir deformaciones bajo carga debido a su alta rigidez en los nodos. Sin embargo, las interacciones reductivas entre nodos pueden llevar a una redistribución de cargas que debe ser considerada en el diseño general.

ELEMENTO “8”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 1	X1	61.192	Y1	3906.999
NODO 3	X2	111.192	Y2	3941.999
NODO 5	X3	81.192	Y3	3936.999

a1	117704.01	b1	5	c1	-30
a2	76304.22	b2	30	c2	-20

a3	-193208.23	b3	-35	c3	50

2A = a1 + a2 + a3 = 800

$$B_8 = \begin{pmatrix} 0.00625 & 0 & 0.0375 & 0 & -0.04375 & 0 \\ 0 & -0.0375 & 0 & -0.025 & 0 & 0.0625 \\ -0.0375 & 0.00625 & -0.025 & 0.0375 & 0.0625 & -0.04375 \end{pmatrix}$$

$$B_8{}^t = \begin{pmatrix} 0.00625 & 0 & -0.0375 \\ 0 & -0.0375 & 0.00625 \\ 0.0375 & 0 & -0.025 \\ 0 & -0.025 & 0.0375 \\ -0.04375 & 0 & 0.0625 \\ 0 & 0.0625 & -0.04375 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 400

		u1	v1	u3	v3	u5	v5
K_8	**u1**	351807314.1	-96201070.3	368450099.3	-354533011.1	-720257413.3	450734081.4
	v1	-96201070.3	912980224.2	-286807457.6	657053310.2	383008527.9	-1570033534
	u3	368450099.3	-286807457.6	1049104739	-384804281.2	-1417554838	671611738.8
	v3	-354533011	657053310.2	-384804281.2	728434504.3	739337292.3	-1385487814
	u5	-720257413	383008527.9	-1417554838	739337292.3	2137812251	-1122345820
	v5	450734081.4	-1570033534	671611738.8	-1385487814	-1122345820	2955521349

- La matriz B_8 muestra cómo las deformaciones están distribuidas en el elemento. La presencia de valores significativos como 5 y 30 sugiere que el elemento está diseñado para manejar deformaciones considerables en las direcciones especificadas.
- La rigidez en el nodo 5 es notablemente alta en comparación con los otros nodos, lo que indica que este nodo tiene una gran capacidad para resistir deformaciones.

ELEMENTO “9”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 5	X1	81.192	Y1	3936.999
NODO 12	X2	101.192	Y2	3956.999
NODO 6	X3	86.192	Y3	3956.999

a1	59354.985	b1	0	c1	-15
a2	18061.155	b2	20	c2	-5
a3	-77116.14	b3	-20	c3	20

2A = a1 + a2 + a3 = 300

$$B_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.066666667 & 0 & -0.066666667 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 & -0.016666667 & 0 & 0.066666667 \\ -0.05 & 0 & -0.016666667 & 0.066666667 & 0.066666667 & -0.066666667 \end{pmatrix}$$

$$B_9{}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.05 \\ 0 & -0.05 & 0 \\ 0.066666667 & 0 & -0.016666667 \\ 0 & -0.016666667 & 0.066666667 \\ -0.06666667 & 0 & 0.066666667 \\ 0 & 0.066666667 & -0.066666667 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 150

		u5	v5	u12	v12	u6	v6
K_9	**u5**	217799223.2	0	72599741.05	-290398964.2	-290398964.2	290398964.2
	v5	0	602603504.4	-222673410.7	200867834.8	222673410.7	-803471339.2
	u12	72599741.05	-222673410.7	1095495033	-171024125	-1168094774	393697535.7
	v12	-290398964	200867834.8	-171024125	454154563.9	461423089.2	-655022398.7
	u6	-290398964	222673410.7	-1168094774	461423089.2	1458493738	-684096499.9
	v6	290398964.2	-803471339.2	393697535.7	-655022398.7	-684096499.9	1458493738

- La matriz B_9 muestra cómo se distribuyen las deformaciones en el elemento. Los valores como 20 y -15 sugieren que el elemento está diseñado para manejar deformaciones notables en las direcciones especificadas.
- El elemento 9 muestra que en los nodos 12 y 6 tienen valores significativamente altos en comparación con el nodo 5. Esto indica que los nodos 12 y 6 tienen una mayor capacidad para resistir deformaciones, lo cual puede estar relacionado con una mayor rigidez o mayor masa en estas posiciones.

ELEMENTO “10”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 5	X1	81.192	Y1	3936.999
NODO 3	X2	111.192	Y2	3941.999
NODO 12	X3	101.192	Y3	3956.999

a1	41087.87	b1	-15	c1	-10
a2	77116.14	b2	20	c2	-20
a3	-117704.01	b3	-5	c3	30

2A = a1 + a2 + a3 = 500

$$B_{10} = \begin{pmatrix} -0.03 & 0 & 0.04 & 0 & -0.01 & 0 \\ 0 & -0.02 & 0 & -0.04 & 0 & 0.06 \\ -0.02 & -0.03 & -0.04 & 0.04 & 0.06 & -0.01 \end{pmatrix}$$

$$B_{10}{}^{t} = \begin{pmatrix} -0.03 & 0 & -0.02 \\ 0 & -0.02 & -0.03 \\ 0.04 & 0 & -0.04 \\ 0 & -0.04 & 0.04 \\ -0.01 & 0 & 0.06 \\ 0 & 0.06 & -0.01 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 250

		u5	v5	u3	v3	u12	v12
	u5	419641895.5	153921712.5	-365923217.8	17444460.75	-53718677.66	-171366173.2
	v5	153921712.5	291373801.7	85170014.24	147149157.1	-239091726.7	-438522958.9
K_{10}	u3	-365923218	85170014.24	875096242.7	-410457900	-509173024.9	325287885.7
	v3	17444460.75	147149157.1	-410457900	875096242.7	393013439.2	-1022245400
	u12	-53718677.7	-239091726.7	-509173024.9	393013439.2	562891702.5	-153921712.5
	v12	-171366173	-438522958.9	325287885.7	-1022245400	-153921712.5	1460768359

- Los nodos 3 y 12 tienen valores de rigidez significativos, con el nodo 3 mostrando la mayor rigidez. Esto sugiere que el nodo 3 tiene una capacidad considerable para resistir deformaciones .

ELEMENTO “11”

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 1	X1	61.192	Y1	3906.999
NODO 4	X2	121.192	Y2	3898.851
NODO 3	X3	111.192	Y3	3941.999

a1	44217.70242	b1	-43.148	c1	-10
a2	193208.23	b2	35	c2	-50
a3	-234918.532	b3	8.148	c3	60

2A = a1 + a2 + a3 = 2507.4

$$B_{11} = \begin{pmatrix} -0.01720826 & 0 & 0.013958682 & 0 & 0.003249581 & 0 \\ 0 & -0.003988195 & 0 & -0.019940975 & 0 & 0.02392917 \\ -0.00398819 & -0.017208264 & -0.019940975 & 0.013958682 & 0.02392917 & 0.003249581 \end{pmatrix}$$

$$B_{11}{}^{t} = \begin{pmatrix} -0.01720826 & 0 & -0.003988195 \\ 0 & -0.003988195 & -0.017208264 \\ 0.013958682 & 0 & -0.019940975 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{matrix}
0 & -0.019940975 & 0.013958682 \\
0.003249581 & 0 & 0.02392917 \\
0 & 0.02392917 & 0.003249581
\end{matrix}
$$

Volumen(m3) = 1253.7

		u1	v1	u4	v4	u3	v3
	u1	608160877.8	88290846.43	-426013745.3	151055267.9	-182147132.5	-239346114.4
	v1	88290846.43	247665860.1	218780821.4	-14684150.2	-307071667.9	-232981709.9
K_{11}	**u4**	-426013745	218780821.4	682080960.8	-358090713.9	-256067215.5	139309892.5
	v4	151055267.9	-14684150.2	-358090713.9	942975623.8	207035446	-928291473.6
	u3	-182147133	-307071667.9	-256067215.5	207035446	438214348	100036221.8
	v3	-239346114	-232981709.9	139309892.5	-928291473.6	100036221.8	1161273184

- Los valores en B_{11} indican que el elemento está diseñado para manejar deformaciones en varias direcciones. Los valores negativos y positivos muestran que el elemento está sujeto a una variedad de condiciones de carga, lo cual es importante para su estabilidad.
- El elemento 11 muestra una alta capacidad de rigidez, especialmente en el nodo 4, que es el más resistente. La matriz de rigidez sugiere que este nodo tiene una capacidad significativa para resistir deformaciones, lo cual es crucial para la estabilidad del elemento.

ELEMENTO “12”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 10	X1	61.192	Y1	3878.851
NODO 8	X2	121.192	Y2	3878.851
NODO 4	X3	121.192	Y3	3898.851

a1	2423.84	b1	-20	c1	0
a2	231507.22	b2	20	c2	-60
a3	-232731.06	b3	0	c3	60

2A = a1 + a2 + a3 = 1200

$$
B_{12} = \begin{pmatrix}
-0.00797639 & 0 & 0.00797639 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.02392917 & 0 & 0.02392917 \\
0 & -0.00797639 & -0.02392917 & 0.00797639 & 0.02392917 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
B_{12}{}^{t} = \begin{pmatrix}
-0.00797639 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.00797639
\end{pmatrix}
$$

0.00797639	0	-0.02392917
0	-0.02392917	0.00797639
0	0	0.02392917
0	0.02392917	0

Volumen(m3) = 600

		u10	v10	u8	v8	u4	v4
K_{12}	u10	128176013.3	0	-128176013.3	106567796.5	0	-106567796.5
	v10	0	46326707.22	138980121.7	-46326707.22	-138980121.7	0
	u8	-128176013	138980121.7	545116378.3	-245547918.1	-416940365	106567796.5
	v8	106567796.5	-46326707.22	-245547918.1	1199910827	138980121.7	-1153584119
	u4	0	-138980121.7	-416940365	138980121.7	416940365	0
	v4	-106567796	0	106567796.5	-1153584119	0	1153584119

- La matriz B_{12} indica que el elemento está sujeto a deformaciones distribuidas en varias direcciones. Los valores negativos y positivos reflejan cómo las deformaciones en un nodo pueden afectar a los otros nodos.
- El elemento 12 es un componente clave en la estructura, con una distribución de rigidez que permite una resistencia significativa en nodos críticos como el nodo 8. Su diseño refleja una capacidad eficiente para manejar las cargas y deformaciones, comparado con otros elementos del sistema. Mientras que el Elemento 10 presenta valores de rigidez diferentes y el Elemento 11 tiene un diseño con un mayor volumen y una distribución de rigidez más dispersa, el Elemento 12 destaca por su equilibrio entre rigidez y volumen, ofreciendo una solución estructural efectiva para la aplicación en cuestión.

ELEMENTO “13”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 3	X1	111.192	Y1	3941.999
NODO 13	X2	121.192	Y2	3956.999
NODO 12	X3	101.192	Y3	3956.999

a1	79139.98	b1	0	c1	-20
a2	-41087.87	b2	15	c2	10
a3	-37752.11	b3	-15	c3	10

2A = a1 + a2 + a3 = 300

$$B_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.005982292 & 0 & -0.005982292 & 0 \\ 0 & -0.00797639 & 0 & 0.003988195 & 0 & 0.003988195 \\ -0.00797639 & 0 & 0.003988195 & 0.005982292 & 0.003988195 & -0.005982292 \end{pmatrix}$$

$$B_{13}{}^{t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.00797639 \\ 0 & -0.00797639 & 0 \\ 0.005982292 & 0 & 0.003988195 \\ 0 & 0.003988195 & 0.005982292 \\ -0.00598229 & 0 & 0.003988195 \\ 0 & 0.003988195 & -0.005982292 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 150

		u3	v3	u13	v13	u12	v12
K_{13}	u3	46326707.22	0	-23163353.61	-34745030.42	-23163353.61	34745030.42
	v3	0	128176013.3	-26641949.12	-64088006.63	26641949.12	-64088006.63
	u13	-23163353.6	-26641949.12	83680684.27	30693489.77	-60517330.66	-4051540.649
	v13	-34745030.4	-64088006.63	30693489.77	58102776.13	4051540.649	5985230.504
	u12	-23163353.6	26641949.12	-60517330.66	4051540.649	83680684.27	-30693489.77
	v12	34745030.42	-64088006.63	-4051540.649	5985230.504	-30693489.77	58102776.13

- Los valores en la diagonal de K_{13} destacan la rigidez axial y cortante predominante en el Elemento 13. En particular, los términos $u3, v3$ y $u12, v12$ muestran valores elevados que indican una alta resistencia a deformaciones en esas direcciones.

ELEMENTO “14”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 4	X1	121.192	Y1	3898.851
NODO 13	X2	121.192	Y2	3956.999
NODO 3	X3	111.192	Y3	3941.999

a1	37752.11	b1	15	c1	-10
a2	-44217.7024	b2	43.148	c2	10
a3	7047.072416	b3	-58.148	c3	0

2A = a1 + a2 + a3 = 581.48

$$B_{14} = \begin{pmatrix} 0.005982292 & 0 & 0.017208264 & 0 & -0.023190556 & 0 \\ 0 & -0.003988195 & 0 & 0.003988195 & 0 & 0 \\ -0.00398819 & 0.005982292 & 0.003988195 & 0.017208264 & 0 & -0.023190556 \end{pmatrix}$$

$$B_{14}{}^{t} = \begin{pmatrix} 0.005982292 & 0 & -0.003988195 \\ 0 & -0.003988195 & 0.005982292 \end{pmatrix}$$

0.017208264	0	0.003988195
0	0.003988195	0.017208264
-0.02319056	0	0
0	0	-0.023190556

Volumen(m3) = 290.74

		u4	v4	u13	v13	u3	v3
K_{14}	u4	83680684.27	-30693489.77	195813521.5	-36651644.52	-279494205.7	67345134.29
	v4	-30693489.8	58102776.13	-20945712.14	42914925.3	51639201.91	-101017701.4
	u13	195813521.5	-20945712.14	608160877.8	88290846.43	-803974399.2	-67345134.29
	v13	-36651644.5	42914925.3	88290846.43	247665860.1	-51639201.91	-290580785.4
	u3	-279494206	51639201.91	-803974399.2	-51639201.91	1083468605	0
	v3	67345134.29	-101017701.4	-67345134.29	-290580785.4	0	391598486.9

- Diagonal Principal, Los términos en la diagonal principal de K_{14} indican una alta rigidez en varias direcciones. Por ejemplo, las entradas $u4$ y $u13$ muestran valores elevados, como 195813521.5 y 83680684.27, lo que sugiere una significativa capacidad de resistencia a las deformaciones en esas direcciones.
- Términos Fuera de la Diagonal, Los valores fuera de la diagonal, como -36651644.5 y -51639201.91, sugieren interacciones complejas entre los nodos, reflejando cómo las cargas en un nodo afectan a los otros nodos del elemento. Estas interacciones son cruciales para evaluar la transferencia de cargas y las posibles deformaciones combinadas en el sistema estructural.

En general:

- Por lo tanto, el Elemento 1 y el Elemento 3 son los más rígidos, , el elemento 6 tiene una rigidez no muy elevado, mientras que el Elemento 5 y el Elemento 7 son los menos rígidos de los elementos analizados.

5.3.1.4. Ensamblaje de las matrices de rigidez (matriz global)

El ensamblaje de las matrices de rigidez para formar la matriz global es un proceso clave en el análisis de elementos finitos. La matriz global integra la información de rigidez de todos los elementos individuales, proporcionando una representación completa del comportamiento estructural del talud. Para mayor claridad y detalle, la matriz global se presentará de manera más accesible en el Anexo 10. Este anexo ofrece una visualización detallada, facilitando la comprensión de cómo se ensamblan y combinan las contribuciones de cada elemento para formar el modelo global.

	u1	v1	u2	v2	u3	v3	u4	v4	u5	v5	u6	v6	u7	v7	u8	v8	u9	v9	u10	v10	u11	v11	u12	v12	u13	v13
u1	6995471573	-889410027	-1654246082	890526655.9	186302966.7	-593879125	-2606928500	441454232.1	-484271366	204599588.3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.44E+09	-53291324	0	0	0	0
v1	-889410027	1.6288E+10	890526655.9	-3151331052	-593879125	424071600.2	441454232.1	-6048805184	204599588.3	-1633325448	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-53291324	-5.88E+09	0	0	0	0
u2	-1654246082	890526656	3050039101	-600151530	0	0	0	0	-1584201638	120767037.4	0	0	150211591.6	-136169436	0	0	0	0	0	0	38197028	-2.75E+08	0	0	0	0
v2	890526655.9	-3.151E+09	-600151530	3810780686	0	0	0	0	120767037.4	-279450180	0	0	-203894989	-236080558	0	0	0	0	0	0	-2.07E+08	-1.44E+08	0	0	0	0
u3	186302966.7	-593879125	0	0	3492210642	-695225959	-535561421	258674647.9	-1783478056	756781753	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5.32E+08	360032916	-8.27E+08	-86384232
v3	-593879125	424071600	0	0	-695225959	3284578431	206655026.8	-1029309175	756781753	-1238338657	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	419655388	-1.09E+09	-93987083	-3.55E+08
u4	-2606928500	441454232	0	0	-535561421	206655026.8	2919120459	-388784204	0	0	0	0	0	0	-416940365	138980121.7	0	0	-8.89E+08	-3.62E+08	1.333E+09	2.034E-06	0	0	195813521	-36651645
v4	441454232.1	-6.049E+09	0	0	258674647.9	-1029309175	-388784204	6510085597	0	0	0	0	0	0	106567796.5	-1153584119	0	0	-3.97E+08	-2.46E+09	-1.74E-06	4.137E+09	0	0	-20945712	42914925
u5	-484271366	204599588	-1584201638	120767037.4	-1783478056	756781753	0	0	4924589415	-1260235842	-435598446	-5.6386E-05	-655920972	639852600.3	0	0	0	0	0	0	0	0	18881063	-4.62E+08	0	0
v5	204599588.3	-1.633E+09	120767037.4	-279450180	756781753	-1238338657	0	0	-1260235842	5431242883	-4.3213E-05	-1205207009	639852600.3	-837266465	0	0	0	0	0	0	0	0	-4.62E+08	-2.38E+08	0	0
u6	0	0	0	0	0	0	0	0	-435598446	-4.3243E-05	2626588511	-342048250	-1022895292	-119374839	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.17E+09	461423089	0	0
v6	0	0	0	0	0	0	0	0	-5.6386E-05	-1205207009	-342048250	2113516136	-51649285.7	-253286729	0	0	0	0	0	0	0	0	393697536	-6.55E+08	0	0
u7	0	0	150211591.6	-203894989	0	0	0	0	-655920972	639852600.3	-1022895292	-51649285.7	1528604671	-384308325	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v7	0	0	-136169436	-236080558	0	0	0	0	639852600.3	-837266465	-119374839	-253286729	-384308325	1326633752	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u8	0	0	0	0	0	0	-416940365	106567796.5	0	0	0	0	0	0	545116378.3	-245547918	0	0	-1.28E+08	138980122	0	0	0	0	0	0
v8	0	0	0	0	0	0	138980121.7	-1153584119	0	0	0	0	0	0	-245547918	1199910827	0	0	106567796	-46326707	0	0	0	0	0	0
u9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.151E+09	513072375	-2.63E+08	-2.9E+08	-8.89E+08	-2.23E+08	0	0	0	0
v9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	513072375	2.553E+09	-2.23E+08	-94914029	-2.9E+08	-2.46E+09	0	0	0	0
u10	0	0	0	0	0	0	-888504671	-396966761	0	0	0	0	0	0	-128176013	106567796.5	-2.63E+08	-2.23E+08	2.15E+09	0	-8.71E+08	513072375	0	0	0	0
v10	0	0	0	0	0	0	-361653532	-2458300909	0	0	0	0	0	0	138980121.7	-46326707.2	-2.9E+08	-94914029	0	5.01E+09	513072375	-2.41E+09	0	0	0	0
u11	-2436328592	-53291324	38197027.77	-207247174	0	0	1333000976	-1.7881E-06	0	0	0	0	0	0	0	0	-8.89E+08	-2.9E+08	-8.71E+08	513072375	2.825E+09	37865087	0	0	0	0
v11	-53291323.8	-5.879E+09	-274972728	-143918896	0	0	2.01911E-06	4136998866	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.23E+08	-2.46E+09	513072375	-2.41E+09	37865087	6.754E+09	0	0	0	0
u12	0	0	0	0	-532336378	419655388.3	0	0	18881063.4	-461765137	-1168094774	393697535.7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.742E+09	-3.56E+08	-60517331	4051540.6
v12	0	0	0	0	360032916.1	-1086333406	0	0	-461765137	-237655124	461423089.2	-655022399	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3.56E+08	1.973E+09	-4051541	5985230.5
u13	0	0	0	0	-827137753	-93987083.4	195813521.5	-20945712.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-60517331	-4051541	691841562	118984336
v13	0	0	0	0	-86384232.3	-354668792	-36651644.5	42914925.3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4051540.6	5985230.5	118984336	305768636

Después de ensamblar la matriz global de rigidez, se procede a eliminar las restricciones y nodos que no son relevantes para el análisis. Esta etapa es crucial para simplificar el modelo y enfocarse únicamente en las áreas de interés, eliminando nodos y restricciones que no afectan significativamente el comportamiento del talud. Este proceso asegura que el análisis sea más eficiente y se concentre en los aspectos críticos del problema, facilitando la interpretación y solución del modelo.

	u1	v1	u2	v2	u3	v3	u4	v4	u5	v5	u6	v6	u7	v7	u8	v8	u9	v9	u10	v10	u11	v11	u12	v12	u13	v13
u1	6995471573	-889410027	-1654246082	890526655.9	186302966.7	-593879125	-2606928500	441454232.1	-484271366	204599588.3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.44E+09	-53291324	0	0	0	0
v1	-889410027	1.6288E+10	890526655.9	-3151331052	-593879125	424071600.2	441454232.1	-6048805184	204599588.3	-1633325448	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-53291324	-5.88E+09	0	0	0	0
u2	-1654246082	890526656	3050039101	-600151530	0	0	0	0	-1584201638	120767037.4	0	0	150211591.6	-136169436	0	0	0	0	0	0	38197028	-2.75E+08	0	0	0	0
v2	890526655.9	-3151331052	-600151530	3810780686	0	0	0	0	120767037.4	-279450180	0	0	-203894989	-236080558	0	0	0	0	0	0	-2.07E+08	-1.44E+08	0	0	0	0
u3	186302966.7	-593879125	0	0	3492210642	-695225959	-535561421	258674647.9	-1783478056	756781753	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5.32E+08	360032916	-8.27E+08	-86384232
v3	-593879125	424071600	0	0	-695225959	3284578431	206655026.8	-1029309175	756781753	-1238338657	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	419655388	-1.09E+09	-93987083	-3.55E+08
u4	-2606928500	441454232	0	0	-535561421	206655026.8	2919120459	-388784204	0	0	0	0	0	0	-416940365	138980121.7	0	0	-8.89E+08	-3.62E+08	1.333E+09	2.034E-06	0	0	195813521	-36651645
v4	441454232.1	-6048805184	0	0	258674647.9	-1029309175	-388784204	6510085597	0	0	0	0	0	0	106567796.5	-1153584119	0	0	-3.97E+08	-2.46E+09	-1.74E-06	4.137E+09	0	0	-20945712	42914925
u5	-484271366	204599588	-1584201638	120767037.4	-1783478056	756781753	0	0	4924589415	-1260235842	-435598446	-5.6386E-05	-655920972	639852600.3	0	0	0	0	0	0	0	0	18881063	-4.62E+08	0	0
v5	204599588.3	-1633325448	120767037.4	-279450180	756781753	-1238338657	0	0	-1260235842	5431242883	-4.3213E-05	-1205207009	639852600.3	-837266465	0	0	0	0	0	0	0	0	-4.62E+08	-2.38E+08	0	0
u6	0	0	0	0	0	0	0	0	-435598446	-4.3243E-05	2626588511	-342048250	-1022895292	-119374839	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.17E+09	461423089	0	0
v6	0	0	0	0	0	0	0	0	-5.6386E-05	-1205207009	-342048250	2113516136	-51649285.7	-253286729	0	0	0	0	0	0	0	0	393697536	-6.55E+08	0	0
u7	0	0	150211591.6	-203894989	0	0	0	0	-655920972	639852600.3	-1022895292	-51649285.7	1528604671	-384308325	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v7	0	0	-136169436	-236080558	0	0	0	0	639852600.3	-837266465	-119374839	-253286729	-384308325	1326633752	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u8	0	0	0	0	0	0	-416940365	106567796.5	0	0	0	0	0	0	545116378.3	-245547918	0	0	-1.28E+08	138980122	0	0	0	0	0	0
v8	0	0	0	0	0	0	138980121.7	-1153584119	0	0	0	0	0	0	-245547918	1199910827	0	0	106567796	-46326707	0	0	0	0	0	0
u9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.151E+09	513072375	-2.63E+08	-2.9E+08	-8.89E+08	-2.23E+08	0	0	0	0
v9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	513072375	2.553E+09	-2.23E+08	-94914029	-2.9E+08	-2.46E+09	0	0	0	0
u10	0	0	0	0	0	0	-888504671	-396966761	0	0	0	0	0	0	-128176013	106567796.5	-2.63E+08	-2.23E+08	2.15E+09	0	-8.71E+08	513072375	0	0	0	0
v10	0	0	0	0	0	0	-361653532	-2458300909	0	0	0	0	0	0	138980121.7	-46326707.2	-2.9E+08	-94914029	0	5.01E+09	513072375	-2.41E+09	0	0	0	0
u11	-2436328592	-53291323.8	38197027.77	-207247174	0	0	1333000976	-1.7881E-06	0	0	0	0	0	0	0	0	-8.89E+08	-2.9E+08	-8.71E+08	513072375	2.825E+09	37865087	0	0	0	0
v11	-53291323.8	-5878524033	-274972728	-143918896	0	0	2.01911E-06	4136998866	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.23E+08	-2.46E+09	513072375	-2.41E+09	37865087	6.754E+09	0	0	0	0
u12	0	0	0	0	-532336378	419655388.3	0	0	18881063.4	-461765137	-1168094774	393697535.7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.742E+09	-3.56E+08	-60517331	4051540.6
v12	0	0	0	0	360032916.1	-1086333406	0	0	-461765137	-237655124	461423089.2	-655022399	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3.56E+08	1.973E+09	-4051541	5985230.5
u13	0	0	0	0	-827137753	-93987083.4	195813521.5	-20945712.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-60517331	-4051541	691841562	118984336
v13	0	0	0	0	-86384232.3	-354668792	-36651644.5	42914925.3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4051540.6	5985230.5	118984336	305768636

Finalmente, al desestimar los puntos de apoyo, la matriz de rigidez global se expresará de la siguiente manera. Esta simplificación permite centrarse en las interacciones entre los nodos activos del modelo, excluyendo los efectos de los puntos de apoyo que no contribuyen directamente al análisis de la rigidez estructural. De este modo, se obtiene una representación más clara y específica de la rigidez del sistema bajo las condiciones consideradas.

	u1	v1	u2	v2	u3	v3	u5	v5	u6	v6	u7	v7	u12	v12	u13	v13
u1	6995471573	-889410027	-1654246082	890526655.9	186302966.7	-593879125	-484271366	204599588.3	0	0	0	0	0	0	0	0
v1	-889410027	1.6288E+10	890526655.9	-3151331052	-593879125	424071600.2	204599588.3	-1633325448	0	0	0	0	0	0	0	0
u2	-1654246082	890526656	3050039101	-600151530	0	0	-1584201638	120767037.4	0	0	150211591.6	-136169436	0	0	0	0
v2	890526655.9	-3151331052	-600151530	3810780686	0	0	120767037.4	-279450180	0	0	-203894989	-236080558	0	0	0	0
u3	186302966.7	-593879125	0	0	3492210642	-695225959	-1783478056	756781753	0	0	0	0	-532336378	360032916.1	-827137753	-86384232.3
v3	-593879125	424071600	0	0	-695225959	3284578431	756781753	-1238338657	0	0	0	0	419655388.3	-1086333406	-93987083.4	-354668792
u5	-484271366	204599588	-1584201638	120767037.4	-1783478056	756781753	4924589415	-1260235842	-435598446	-5.6386E-05	-655920972	639852600.3	18881063.4	-461765137	0	0
v5	204599588.3	-1633325448	120767037.4	-279450180	756781753	-1238338657	-1260235842	5431242883	-4.3213E-05	-1205207009	639852600.3	-837266465	-461765137	-237655124	0	0
u6	0	0	0	0	0	0	-435598446	-4.3243E-05	2626588511	-342048250	-1022895292	-119374839	-1168094774	461423089.2	0	0
v6	0	0	0	0	0	0	-5.6386E-05	-1205207009	-342048250	2113516136	-51649285.7	-253286729	393697535.7	-655022399	0	0
u7	0	0	150211591.6	-203894989	0	0	-655920972	639852600.3	-1022895292	-51649285.7	1528604671	-384308325	0	0	0	0
v7	0	0	-136169436	-236080558	0	0	639852600.3	-837266465	-119374839	-253286729	-384308325	1326633752	0	0	0	0
u12	0	0	0	0	-532336378	419655388.3	18881063.4	-461765137	-1168094774	393697535.7	0	0	1742067419	-355639327	-60517330.7	4051540.649
v12	0	0	0	0	360032916.1	-1086333406	-461765137	-237655124	461423089.2	-655022399	0	0	-355639327	1973025699	-4051540.65	5985230.504
u13	0	0	0	0	-827137753	-93987083.4	0	0	0	0	0	0	-60517330.7	-4051540.65	691841562.1	118984336.2
v13	0	0	0	0	-86384232.3	-354668792	0	0	0	0	0	0	4051540.649	5985230.504	118984336.2	305768636.2

5.3.1.5. Determinación de desplazamientos nodales

La ecuación $[\delta] = [K]^{-1}[F]$, desarrollada en el capítulo IV, permite calcular los desplazamientos nodales de cada elemento triangular en el talud. Esta ecuación establece que los desplazamientos $[\delta]$se obtienen multiplicando la inversa de la matriz de rigidez global $[K]^{-1}$ por el vector de fuerzas aplicadas $[F]$. Para aplicar esta ecuación, es crucial contar con datos precisos sobre las fuerzas verticales que actúan sobre la plataforma superior del talud, así como con la matriz de rigidez global, que refleja la resistencia total del sistema a las deformaciones. Estos elementos son esenciales para obtener resultados precisos en la evaluación de la estabilidad del talud.

		u1	v1	u2	v2	u3	v3	u5	v5	u6	v6	u7	v7	u12	v12	u13	v13
	u1	1.94958E-10	1.94941E-12	1.72104E-10	-1.3486E-11	1.20388E-10	3.43154E-11	1.46249E-10	1.6589E-11	1.22007E-10	2.06638E-11	1.20722E-10	5.09266E-12	1.2077E-10	3.35401E-11	1.57594E-10	1.02332E-11
	v1	1.94941E-12	8.21512E-11	3.20238E-12	7.76142E-11	3.36492E-11	1.65564E-11	2.41014E-11	5.30022E-11	4.894E-11	4.63119E-11	4.84058E-11	6.32353E-11	4.96872E-11	2.79493E-11	4.52893E-11	9.88161E-12
	u2	1.72104E-10	3.20238E-12	6.96095E-10	8.93251E-11	4.9637E-10	-6.8119E-11	5.47849E-10	1.58609E-11	5.71234E-10	8.25427E-12	5.67154E-10	5.03948E-11	5.66182E-10	-2.4751E-11	6.69018E-10	-2.0613E-10
	v2	-1.3486E-11	7.76142E-11	8.93251E-11	3.71046E-10	1.0644E-10	1.45121E-11	1.0183E-10	9.19601E-11	1.98239E-10	9.15899E-11	2.28326E-10	1.8559E-10	1.77826E-10	3.9919E-11	1.4735E-10	-1.3572E-11
	u3	1.20388E-10	3.36492E-11	4.9637E-10	1.0644E-10	1.38509E-09	-2.0535E-10	9.16963E-10	-1.068E-10	1.23923E-09	-1.5694E-10	1.22683E-09	-2.8345E-12	1.31225E-09	-2.6393E-10	1.84022E-09	-5.7519E-10
	v3	3.43154E-11	1.65564E-11	-6.8119E-11	1.45121E-11	-2.0535E-10	8.06079E-10	-1.9909E-10	3.40292E-10	-4.6247E-10	4.14586E-10	-4.6188E-10	2.10117E-10	-4.5281E-10	6.36106E-10	-3.4466E-10	1.00465E-09
	u5	1.46249E-10	2.41014E-11	5.47849E-10	1.0183E-10	9.16963E-10	-1.9909E-10	9.81418E-10	7.75087E-13	1.09462E-09	-2.9498E-11	1.11651E-09	1.77983E-11	1.07929E-09	-1.1443E-10	1.24343E-09	-4.6779E-10
K^(-1)red	v5	1.6589E-11	5.30022E-11	1.58609E-11	9.19601E-11	-1.068E-10	3.40292E-10	7.75087E-13	4.7802E-10	-8.297E-11	4.3938E-10	-1.4047E-10	3.55039E-10	-6.4179E-11	4.16726E-10	-1.5655E-10	4.18151E-10
	u6	1.22007E-10	4.894E-11	5.71234E-10	1.98239E-10	1.23923E-09	-4.6247E-10	1.09462E-09	-8.297E-11	2.40526E-09	-8.6859E-11	2.16712E-09	3.41231E-10	2.05992E-09	-4.4834E-10	1.74856E-09	-8.8527E-10
	v6	2.06638E-11	4.63119E-11	8.25427E-12	9.15899E-11	-1.5694E-10	4.14586E-10	-2.9498E-11	4.3938E-10	-8.6859E-11	9.89886E-10	-9.3502E-11	4.62766E-10	-1.9692E-10	6.14324E-10	-2.3406E-10	5.18216E-10
	u7	1.20722E-10	4.84058E-11	5.67154E-10	2.28326E-10	1.22683E-09	-4.6188E-10	1.11651E-09	-1.4047E-10	2.16712E-09	-9.3502E-11	2.72391E-09	4.37921E-10	1.88585E-09	-4.2554E-10	1.71676E-09	-8.7385E-10
	v7	5.09266E-12	6.32353E-11	5.03948E-11	1.8559E-10	-2.8345E-12	2.10117E-10	1.77983E-11	3.55039E-10	3.41231E-10	4.62766E-10	4.37921E-10	1.25339E-09	2.22768E-10	2.76431E-10	6.34579E-12	2.32088E-10
	u12	1.2077E-10	4.96872E-11	5.66182E-10	1.77826E-10	1.31225E-09	-4.5281E-10	1.07929E-09	-6.4179E-11	2.05992E-09	-1.9692E-10	1.88585E-09	2.22768E-10	2.47963E-09	-3.3745E-10	1.87913E-09	-9.1198E-10
	v12	3.35401E-11	2.79493E-11	-2.4751E-11	3.9919E-11	-2.6393E-10	6.36106E-10	-1.1443E-10	4.16726E-10	-4.4834E-10	6.14324E-10	-4.2554E-10	2.76431E-10	-3.3745E-10	1.17341E-09	-3.8867E-10	7.96019E-10
	u13	1.57594E-10	4.52893E-11	6.69018E-10	1.4735E-10	1.84022E-09	-3.4466E-10	1.24343E-09	-1.5655E-10	1.74856E-09	-2.3406E-10	1.71676E-09	6.34579E-12	1.87913E-09	-3.8867E-10	4.01157E-09	-1.4582E-09
	v13	1.02332E-11	9.88161E-12	-2.0613E-10	-1.3572E-11	-5.7519E-10	1.00465E-09	-4.6779E-10	4.18151E-10	-8.8527E-10	5.18216E-10	-8.7385E-10	2.32088E-10	-9.1198E-10	7.96019E-10	-1.4582E-09	4.8372E-09

A continuación, las fuerzas verticales aplicadas a los nodos se representarán en forma matricial. Esta representación es esencial para el análisis, ya que permite integrar las fuerzas dentro del modelo numérico y relacionarlas directamente con los desplazamientos y deformaciones en el talud. La formulación matricial de las fuerzas asegura que se puedan aplicar de manera consistente y precisa en el cálculo de la respuesta estructural del sistema.

$$F = \begin{Bmatrix} F_{1x} = 0 \\ F_{1y} = 0 \\ F_{2x} = 0 \\ F_{2y} = 0 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{3y} = 0 \\ F_{4x} = R \\ F_{4y} = R \\ F_{5x} = 0 \\ F_{5y} = 0 \\ F_{6x} = 0 \\ F_{6y} = -15000 \\ F_{7x} = 0 \\ F_{7y} = -5000 \\ F_{8x} = R \\ F_{8y} = R \\ F_{9x} = R \\ F_{9y} = R \\ F_{10x} = R \\ F_{10y} = R \\ F_{11x} = R \\ F_{11y} = R \\ F_{12x} = 0 \\ F_{12y} = -20000 \\ F_{13x} = 0 \\ F_{13y} = -9190.31 \end{Bmatrix} Kgf \quad \Rightarrow \quad [F_{red}] = \begin{pmatrix} F_{1x} = 0 \\ F_{1y} = 0 \\ F_{2x} = 0 \\ F_{2y} = 0 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{3y} = 0 \\ F_{5x} = 0 \\ F_{5y} = 0 \\ F_{6x} = 0 \\ F_{6y} = -15000 \\ F_{7x} = \\ F_{7y} = -5000 \\ F_{12x} = 0 \\ F_{12y} = -20000 \\ F_{13x} = 0 \\ F_{13y} = -9190.31 \end{pmatrix} Kgf$$

Reemplazando las matrices en la ecuación $[\delta] = [K]_{red}{}^{-1}[F]_{red}$ se obtiene los desplazamientos nodales.

$$\delta = \begin{pmatrix} u1 \\ v1 \\ u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \\ u5 \\ v5 \\ u6 \\ v6 \\ u7 \\ v7 \\ u12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.10027E-06 \\ -1.66066E-06 \\ 2.01367E-06 \\ -2.97544E-06 \\ 1.2933E-05 \\ -2.92245E-05 \\ 6.94116E-06 \\ -2.05433E-05 \\ 1.66995E-05 \\ -3.42112E-05 \\ 1.57547E-05 \\ -2.087E-05 \\ 1.69702E-05 \end{pmatrix} \mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \delta = \begin{pmatrix} -0.000110027 \\ -0.000166066 \\ 0.000201367 \\ -0.000297544 \\ 0.0012933 \\ -0.00292245 \\ 0.000694116 \\ -0.002054334 \\ 0.001669946 \\ -0.003421117 \\ 0.00157547 \\ -0.002087004 \\ 0.00169702 \end{pmatrix} \mathrm{cm}$$

v12	-4.13809E-05	-0.004138087
u13	2.46541E-05	0.002465408
v13	-6.93094E-05	-0.006930944

Interpretando se detalla:

- Los desplazamientos horizontales u son generalmente pequeños, con valores en el rango de micrómetros. Los nodos 3, 6, 7, 12, y 13 muestran desplazamientos horizontales mayores en comparación con otros nodos. Esto puede indicar una mayor deformación en esas áreas específicas del talud.
- Los desplazamientos verticales v son más significativos y varían entre -0.000166066 cm y -0.006930944 cm. Los nodos 12 y 13 tienen los desplazamientos verticales más grandes, indicando que están sometidos a las mayores deformaciones verticales, debido a cargas aplicadas o a la geometría del talud.
- Las mayores deformaciones verticales en los nodos 12 y 13 sugieren que estas áreas están experimentando mayores tensiones y, por lo tanto, podrían estar más propensas a fallos o inestabilidad. Las deformaciones horizontales, aunque menores, aún son importantes para evaluar el comportamiento general del talud.

5.3.1.4 Determinación de esfuerzos y deformaciones

Para su determinación de estos parámetros se aplica las ecuaciones de deformación unitaria $[\varepsilon] = [B][\delta]$ y la ecuación de esfuerzos $[\sigma] = [D][\varepsilon]$ presentados en el capítulo II.

ELEMENTO “1”:

$[\varepsilon_1] = [B_1][\delta]$.

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} -0.01634201 & 0 & 0.01634201 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.05 \\ -0.05 & -0.01634201 & 0 & 0.01634201 & 0.05 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_1 =$	ε_{1x}	=	0
	ε_{1y}		0

	ε_{1xy}		0

- Las deformaciones en este elemento son nulas, lo que indica que no hay deformación axial ni cortante en este elemento. Esto puede ocurrir si el elemento está en una zona sin carga significativa o si está sujeto a condiciones que no provocan deformación.

Luego:

$[\sigma_1] = [D][\varepsilon_1].$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1606942678 & 445346821 & 0 \\ 445346821 & 1606942678 & 0 \\ 0 & 0 & 580797928.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 =$	σ_{1x}	=	0	kg/m^2 =	0	kg/cm^2
	σ_{1y}		0		0	
	σ_{1xy}		0		0	

- Dado que las deformaciones son cero, los esfuerzos también son cero. Esto refuerza la idea de que el elemento no está experimentando cargas significativas o está en equilibrio bajo las condiciones actuales.

ELEMENTO “2”:

$\varepsilon_2 =$	ε_{2x}	=	-3.75484E-06
	ε_{2y}		-6.98907E-06
	ε_{2xy}		1.29124E-05

- ε_{2x} y ε_{2y} son negativas, indicando compresión en las direcciones x e y.
- ε_{2xy} es positiva, indicando deformación cortante en el plano xy.

$\sigma_2 =$	σ_{2x}	=	-9146.378286	kg/m^2 =	-0.914637829	kg/cm^2
	σ_{2y}		-12903.23685		-1.290323685	
	σ_{2xy}		7499.475233		0.749947523	

- σ_{2x} y σ_{2y} son negativos, confirmando que el elemento está bajo compresión.
- σ_{2xy} es positivo, indicando que la deformación cortante está actuando en el mismo sentido que la deformación cortante, consistente con el valor positivo de ε_{2xy}.

ELEMENTO “3”:

$\varepsilon_3 =$	ε_{3x}	=	0
	ε_{3y}		0
	ε_{3xy}		0

$\sigma_3 =$	σ_{3x}	=	0	kg/m^2 =	0	kg/cm^2
	σ_{3y}		0		0	
	σ_{3xy}		0		0	

Al igual que el Elemento 1, este elemento no muestra deformaciones, lo que sugiere que no está experimentando esfuerzos significativos. La ausencia de deformaciones lleva a una ausencia de esfuerzos en este elemento.

ELEMENTO "4":

$\varepsilon_4 =$	ε_{4x}	=	0
	ε_{4y}		-2.03812E-05
	ε_{4xy}		-1.35035E-05

Este elemento muestra:

- ε_{4y} negativa, indicando compresión en la dirección y.
- ε_{4xy} negativa, indicando deformación cortante en la dirección xy.
- El elemento 4 presenta compresión vertical y cortante, con deformación horizontal nula.

$\sigma_4 =$	σ_{4x}	=	-9076.681214	kg/m^2 =	-0.907668121	kg/cm^2
	σ_{4y}		-32751.34281		-3.275134281	
	σ_{4xy}		-7842.826576		-0.784282658	

Los esfuerzos reflejan:

- Compresión en ambas direcciones (σ_{4x} , σ_{4y}).
- Un esfuerzo cortante negativo (σ_{4xy}), que es consistente con la deformación cortante negativa.
- Muestra esfuerzos negativos en todas las direcciones, indicando una alta compresión.

ELEMENTO "5":

$\varepsilon_5 =$	ε_{5x}	=	1.24908E-05
	ε_{5y}		-2.11632E-05
	ε_{5xy}		-4.41911E-05

Este elemento muestra:

- ε_{5x} positiva, indicando expansión en la dirección x.
- ε_{5y} negativa, indicando compresión en la dirección y.
- ε_{5xy} negativa, indicando deformación cortante negativa.
- El elemento 5 muestra expansión horizontal, compresión vertical y cortante negativa.

$\sigma_5 =$	σ_{5x}	=	10647.02393	kg/m^2	=	1.064702393	kg/cm^2
	σ_{5y}		-28445.30344			-2.844530344	
	σ_{5xy}		-25666.08357			-2.566608357	

Los esfuerzos muestran:

- Un esfuerzo positivo en la dirección x (σ_{5x}) , consistente con la expansión.
- Un esfuerzo negativo en la dirección y (σ_{5y}), consistente con la compresión.
- Un esfuerzo cortante negativo (σ_{5xy}), consistente con la deformación cortante negativa.
- Presenta esfuerzos positivos en horizontal y negativos en vertical y cortante.

ELEMENTO “6”:

$\varepsilon_6 =$	ε_{6x}	=	1.75586E-06
	ε_{6y}		-3.09775E-05
	ε_{6xy}		-1.37425E-05

Este elemento muestra:

- ε_{6x} positiva, indicando expansión en la dirección x.
- ε_{6y} negativa, indicando compresión en la dirección y.
- ε_{6xy} negativa, indicando deformación cortante negativa.
- El elemento 6 muestra una ligera expansión horizontal y compresión vertical y cortante.

$\sigma_6 =$	σ_{6x}	=	-10974.17481	kg/m^2	=	-1.097417481	kg/cm^2
	σ_{6y}		-48997.15266			-4.899715266	
	σ_{6xy}		-7981.631433			-0.798163143	

Los esfuerzos muestran:

- Compresión en ambas direcciones (σ_{6x} , σ_{6y}).
- Un esfuerzo cortante negativo (σ_{6xy}), consistente con la deformación cortante negativa.
- El elemento 6 presenta esfuerzos negativos en todas las direcciones, con alta compresión.

ELEMENTO “7”:

$\varepsilon_7 =$	ε_{7x}	=	6.29846E-06
	ε_{7y}		-4.61039E-05
	ε_{7xy}		-4.1724E-05

Este elemento muestra:

- ε_{7x} positiva, indicando expansión en la dirección x.
- ε_{7y} negativa, indicando compresión en la dirección y.
- ε_{7xy} negativa, indicando deformación cortante negativa.
- Muestra ligera expansión horizontal y compresión vertical y cortante.

$\sigma_7 =$	σ_{7x}	=	-10410.97114	kg/m^2	=	-1.041097114	kg/cm^2
	σ_{7y}		-71281.35679			-7.128135679	
	σ_{7xy}		-24233.21328			-2.423321328	

Los esfuerzos reflejan:

- Compresión en ambas direcciones (σ_{7x} , σ_{7y}).
- Un esfuerzo cortante negativo (σ_{7xy}), consistente con la deformación cortante negativa.
- El elemento 7 muestra esfuerzos negativos en todas las direcciones, con alta compresión.

ELEMENTO “8”:

$\varepsilon_8 =$	ε_{8x}	=	1.74435E-05
	ε_{8y}		-4.91072E-05
	ε_{8xy}		-5.57692E-06

Este elemento muestra:

- ε_{8x} positiva, indicando expansión en la dirección x.
- ε_{8y} negativa, indicando compresión en la dirección y.
- ε_{8xy} negativa, indicando deformación cortante negativa.
- El elemento 8 muestra expansión horizontal y compresión vertical y cortante.

$\sigma_8 =$	σ_{8x}	=	6160.997158	kg/m^2	=	0.616099716	kg/cm^2
	σ_{8y}		-71143.99362			-7.114399362	
	σ_{8xy}		-3239.06422			-0.323906422	

Los esfuerzos muestran:

- Un esfuerzo positivo en la dirección x (σ_{8x}), consistente con la expansión.
- Un esfuerzo negativo en la dirección y (σ_{8y}), consistente con la compresión.

- Un esfuerzo cortante negativo (σ_{8xy}), consistente con la deformación cortante negativa.
- Presenta esfuerzos negativos en vertical y cortante, con expansión horizontal.

ELEMENTO “9”:

ε_9 =	ε_{9x}	=	1.80489E-06
	ε_{9y}		-5.63896E-05
	ε_{9xy}		5.42313E-07

Este elemento muestra:

- ε_{9x} positiva, indicando expansión en la dirección x.
- ε_{9y} negativa, indicando compresión en la dirección y.
- ε_{9xy} positiva, indicando deformación cortante positiva.
- El elemento 9 muestra una pequeña expansión horizontal y compresión vertical, con una pequeña deformación cortante positiva.

σ_9 =	σ_{9x}	=	-22212.60362	kg/m^2	=	-2.221260362	kg/cm^2
	σ_{9y}		-89811.13416			-8.981113416	
	σ_{9xy}		314.9741636			0.031497416	

Los esfuerzos muestran:

- Compresión en ambas direcciones (σ_{9x} , σ_{9y}).
- Un esfuerzo cortante positivo (σ_{9xy}), consistente con la deformación cortante positiva.
- El elemento 9 muestra esfuerzos negativos en horizontal y vertical, con un pequeño esfuerzo cortante positivo.

ELEMENTO “10”:

ε_{10} =	ε_{10x}	=	1.39383E-05
	ε_{10y}		-9.03005E-05
	ε_{10xy}		2.23197E-05

Este elemento muestra:

- ε_{10x} positiva, indicando expansión en la dirección x.
- ε_{10y} negativa, indicando compresión en la dirección y.
- ε_{10xy} positiva, indicando deformación cortante positiva.

- Presenta expansión horizontal, compresión vertical y deformación cortante positiva.

σ_{10} =	σ_{10x}	=	-17816.95726	kg/m^2	=	-1.781695726	kg/cm^2
	σ_{10y}		-138900.3607			-13.89003607	
	σ_{10xy}		12963.25735			1.296325735	

Los esfuerzos reflejan:

- Compresión en ambas direcciones (σ_{10x} y σ_{10y}).
- Un esfuerzo cortante positivo (σ_{10xy}), consistente con la deformación cortante positiva.
- Muestra esfuerzos negativos en horizontal y vertical, y positivo en cortante.

ELEMENTO “11”:

ε_{11} =	ε_{11x}	=	6.09605E-06
	ε_{11y}		-6.92695E-05
	ε_{11xy}		2.47474E-05

Este elemento muestra:

- ε_{11x} positiva, indicando expansión en la dirección x.
- ε_{11y} negativa, indicando compresión en la dirección y.
- ε_{11xy} positiva, indicando deformación cortante positiva.
- El elemento 11 muestra expansión horizontal, compresión vertical y cortante positiva.

σ_{11} =	σ_{11x}	=	-21052.94589	kg/m^2	=	-2.105294589	kg/cm^2
	σ_{11y}		-108597.2717			-10.85972717	
	σ_{11xy}		14373.21914			1.437321914	

Los esfuerzos muestran:

- Compresión en ambas direcciones (σ_{11x} y σ_{11y}).
- Un esfuerzo cortante positivo (σ_{11xy}), consistente con la deformación cortante positiva.
- Presenta esfuerzos negativos en horizontal y vertical, y positivo en cortante.

ELEMENTO “12”:

ε_{12} =	ε_{12x}	=	0
	ε_{12y}		0
	ε_{12xy}		0

- Al igual que los Elementos 1 y 3, este elemento no muestra deformaciones.

$\sigma_{12} =$	σ_{12x}	=	0	kg/m^2 =	0	kg/cm^2
	σ_{12y}		0		0	
	σ_{12xy}		0		0	

- La ausencia de deformaciones lleva a la ausencia de esfuerzos en este elemento.

ELEMENTO “13”:

$\varepsilon_{13} =$	ε_{13x}	=	4.59673E-06
	ε_{13y}		-2.08348E-05
	ε_{13xy}		-1.0423E-05

Este elemento muestra:

- ε_{13x} positiva, indicando expansión en la dirección x.
- ε_{13y} negativa, indicando compresión en la dirección y.
- ε_{13xy} negativa, indicando deformación cortante negativa.
- Muestra expansión horizontal y compresión vertical y cortante.

$\sigma_{13} =$	σ_{13x}	=	-1892.059096	kg/m^2 =	-0.18920591	kg/cm^2
	σ_{13y}		-31433.27216		-3.143327216	
	σ_{13xy}		-6053.645019		-0.605364502	

Los esfuerzos reflejan:

- Compresión en ambas direcciones (σ_{13x} y σ_{13y}).
- Un esfuerzo cortante negativo (σ_{13xy}), consistente con la deformación cortante negativa.
- El elemento 13 muestra esfuerzos negativos en todas las direcciones.

ELEMENTO “14”:

$\varepsilon_{14} =$	ε_{14x}	=	1.2433E-05
	ε_{14y}		-2.7642E-05
	ε_{14xy}		-4.16637E-05

Este elemento muestra:

- ε_{14x} positiva, indicando expansión en la dirección x.
- ε_{14y} negativa, indicando compresión en la dirección y.
- ε_{14xy} negativa, indicando deformación cortante negativa.
- Presenta expansión horizontal y compresión vertical y cortante.

σ_{14} =	σ_{14x}	=	7668.940506	kg/m^2	=	0.766894051	kg/cm^2
	σ_{14y}		-38882.02021			-3.888202021	
	σ_{14xy}		-24198.21083			-2.419821083	

Los esfuerzos muestran:

- Un esfuerzo positivo en la dirección x (σ_{14x}), consistente con la expansión.
- Un esfuerzo negativo en la dirección y (σ_{14y}), consistente con la compresión.
- Un esfuerzo cortante negativo (σ_{14xy}), consistente con la deformación cortante negativa.
- El elemento 14 muestra esfuerzos positivos en horizontal y negativos en vertical y cortante.

Interpretación general:

Los elementos 10, 11, 7 son los que presentan las mayores deformaciones y esfuerzos, indicando que estos elementos están sometidos a las mayores tensiones y podrían ser más propensos a sufrir fallas o deformaciones en la estructura del talud. Los elementos 1, 3 y 12 tienen las menores deformaciones y esfuerzos, sugiriendo que están en regiones más estables del talud o zonas con menos cargas aplicadas.

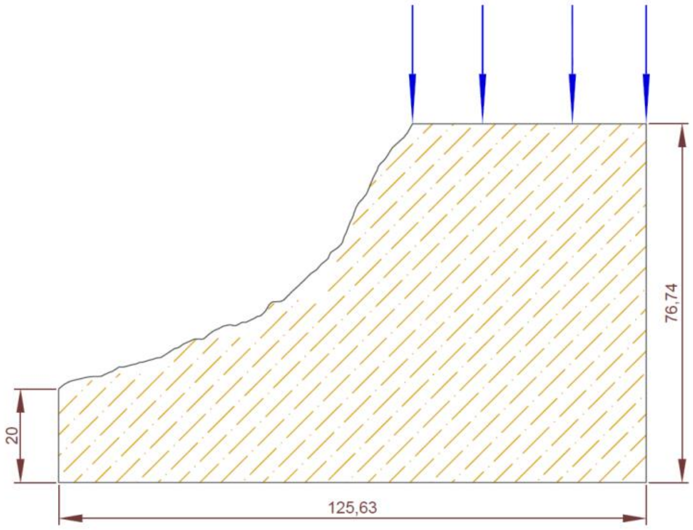
Finalmente, el análisis muestra que las áreas más vulnerables del talud corresponden a los elementos 10, 11 y 7, con los mayores esfuerzos y deformaciones. Estas zonas requerirían mayor atención en términos refuerzo. Por otro lado, los elementos con deformaciones y esfuerzos nulos o bajos son 1, 3, 12, se encuentran en zonas más seguras o menos críticas del talud.

5.3.2 Aplicación y análisis del talud progresiva 2+540

En la Figura 48 se muestra la sección transversal del talud en la Progresiva 2+540 de la vía Articulación Juliaca. Similar a la figura anterior, esta imagen ilustra tanto la geometría del talud como la ubicación y aplicación de las fuerzas. Esta representación es crucial para entender cómo las cargas se distribuyen y afectan el talud.

Figura 48

Sección transversal prog 2+540



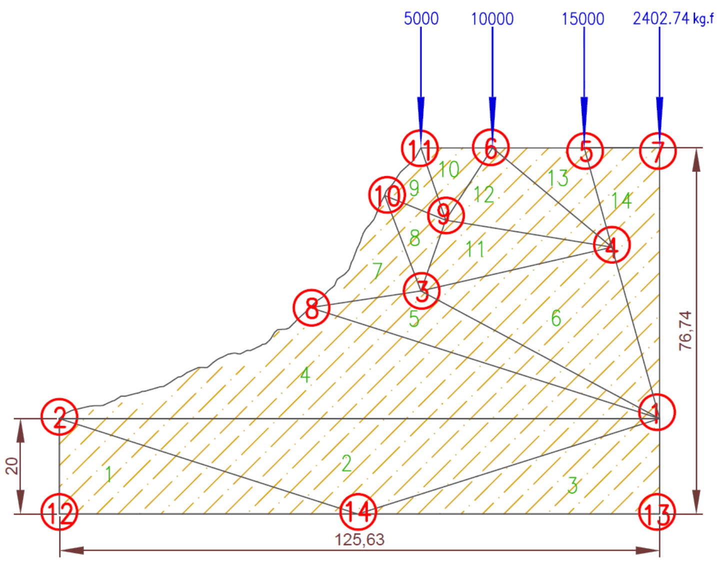
***Fuente**: Elaboración propia*

5.3.2.1 Discretización y numeración de elementos y nodos

Al igual que en el análisis del talud en la Progresiva 2+520, se procederá a discretizar. La Figura 49 ilustra esta discretización, que comprende 14 elementos triangulares y 13 nodos, cada uno con sus coordenadas específicas. La disposición de los nodos y elementos es fundamental para asegurar que el modelo represente fielmente las características del talud y las condiciones de carga.

Figura 49

Discretización de la sección del talud prog 2+540



Fuente*: Elaboración propia*

La Tabla 39 y 40 muestra la numeración de los nodos y las coordenadas de los nodos.

Tabla 39

Numeración de nodos en sentido antihorario prog 2+540

N° Elemento	Nodo i	Nodo j	Nodo k
1	12	14	2
2	2	14	1
3	14	13	1
4	2	1	8
5	8	1	3
6	3	1	4
7	8	3	10
8	3	9	10
9	10	9	11
10	9	6	11
11	3	4	9
12	9	4	6
13	6	4	5
14	1	7	5

Fuente*: Elaboración propia*

Tabla 40

Coordenadas de los nodos prog 2+540

Nodo	Desfase - X	Cota - Y
1	125.733	3898.294
2	0	3898.294
3	75.733	3925.037
4	115.733	3934.208
5	109.933	3955.037
6	90.733	3955.037
7	125.733	3955.037
8	52.546	3921.555
9	80.914	3939.868
10	68.135	3945.037
11	75.733	3955.037
12	0	3878.294
13	125.733	3878.294
14	62.5	3878.294

Fuente: *Elaboración propia*

5.3.2.2 Deducción de la matriz constitutiva

La matriz constitutiva o matriz de propiedades elásticos del macizo rocoso y para un estado de deformación plano es.

$$[D] = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{(1-v)} & 0 \\ \frac{v}{(1-v)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2(1-v)} \end{bmatrix}$$

Además: se tiene la ecuación anterior en su forma reducida:

$$[D] = d_1\begin{bmatrix} 1 & d_2 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

Entones para el desarrollo de la matriz D se requieren los siguientes datos:

E(kg/m2)	**1475651726**
v	0.2174
d1	1678372145
d2	0.277791975
d3	0.361104012

$$D = \begin{pmatrix} 1678372145 & 466238313.7 & 0 \\ 466238313.7 & 1678372145 & 0 \\ 0 & 0 & 606066915.6 \end{pmatrix}$$

5.3.2.3 Deducción de la matriz de deformación y de rigidez del elemento

A partir del capítulo II del ítem 6.4.3 se desarrolló la matriz de deformación del elemento, denotado por [B], esto está definido a partir de las coordenadas o nodos de cada elemento, finalmente quedó expresado por:

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

De aquí se realizaron cambios de variable donde:

$$\begin{array}{lll} a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 & b_1 = y_2 - y_3 & c_1 = x_3 - x_2 \\ a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 & b_2 = y_3 - y_1 & c_2 = x_1 - x_3 \\ a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 & b_3 = y_1 - y_2 & c_3 = x_2 - x_1 \end{array}$$

Además:

$$2A = a_1 + a_2 + a_3$$

A: Área del elemento triangular

Para la deducción de la matriz de rigidez se usará el teorema de trabajos virtuales, esto quedó expresado en su forma matricial como sigue:

$$[K_e] = [B]^t[D][B]V$$

Aplicamos estos desarrollos a cada elemento del talud discretizado.

ELEMENTO “1”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 12	X1	0	Y1	3878.294
NODO 14	X2	62.5	Y2	3878.294
NODO 2	X3	0	Y3	3898.294

a1	243643.375	b1	-20	c1	-62.5
a2	0	b2	20	c2	0
a3	-242393.375	b3	0	c3	62.5

2A = a1 + a2 + a3 = 1250

$$B_1 = \begin{pmatrix} -0.016 & 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.05 \end{pmatrix}$$

-0.05	-0.016	0	0.016	0.05	0

- Estos valores negativos en la matriz B_1 sugieren que hay deformaciones en la dirección negativa del eje horizontal y vertical, lo cual puede indicar compresión. Los valores positivos reflejan tensión en las respectivas direcciones.

Volumen(m3) = 625

		u12	v12	u14	v14	u2	v2
K_1	u12	1215519099	536152614.6	-268539543.2	-303033457.8	-946979556	-233119156.8
	v12	536152614.6	2719427183	-233119156.8	-96970706.5	-303033458	-2622456476
	u14	-268539543.2	-233119156.8	268539543.2	0	0	233119156.8
	v14	-303033457.8	-96970706.5	0	96970706.5	303033457.8	0
	u2	-946979555.6	-303033457.8	0	303033457.8	946979555.6	0
	v2	-233119156.8	-2622456476	233119156.8	0	0	2622456476

- Valores de la diagonal de K_1 como 1215519099y 268539543.2 indican una alta rigidez.
- Los valores fuera de diagonal K_1 como -268539543.2 y -233119156.8 reflejan la interacción entre los nodos del elemento.

ELEMENTO “2”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 2	X1	0	Y1	3898.294
NODO 14	X2	62.5	Y2	3878.294
NODO 1	X3	125.733	Y3	3898.294

a1	-243986.1645	b1	-20	c1	63.233
a2	490144.1995	b2	0	c2	-125.733
a3	-243643.375	b3	20	c3	62.5

2A = a1 + a2 + a3 = 2514.66

$$B_2 = \begin{pmatrix} -0.007953361 & 0 & 0 & 0 & 0.007953361 & 0 \\ 0 & 0.025145745 & 0 & -0.05 & 0 & 0.024854255 \\ 0.025145745 & -0.007953361 & -0.05 & 0 & 0.024854255 & 0.007953361 \end{pmatrix}$$

- Los valores negativos, como −0.05, indican que hay compresión en ciertas direcciones, mientras que los valores positivos, como 0.025145745, sugieren que hay tensión en las respectivas direcciones.

Volumen(m3) = 1257.33

		u2	v2	u14	v14	u1	v1
K_2	u2	615322600.5	-269639142.3	-958085731.9	233119156.8	342763131.3	36519985.48
	v2	-269639142.3	1382542884	303033457.8	-2653212646	-33394315.5	1270669762
	u14	-958085731.9	303033457.8	1905065287	0	-946979556	-303033457.8
	v14	233119156.8	-2653212646	0	5275669122	-233119157	-2622456476
	u1	342763131.3	-33394315.47	-946979555.6	-233119156.8	604216424.3	266513472.3
	v1	36519985.48	1270669762	-303033457.8	-2622456476	266513472.3	1351786714

- Los términos en la diagonal indican que el elemento tiene una capacidad considerable para resistir deformaciones en direcciones específicas, mientras que los valores fuera de la diagonal reflejan la importancia de las interacciones entre los nodos para mantener la estabilidad estructural del sistema.

ELEMENTO “3”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 14	X1	62.5	Y1	3878.294
NODO 13	X2	125.733	Y2	3878.294
NODO 1	X3	125.733	Y3	3898.294

a1	2514.66	b1	-20	c1	0
a2	243986.1645	b2	20	c2	-63.233
a3	-245236.1645	b3	0	c3	63.233

2A = a1 + a2 + a3 = 1264.66

$$B_3 = \begin{pmatrix} -0.015814527 & 0 & 0.015814527 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.05 & 0 & 0.05 \\ 0 & -0.015814527 & -0.05 & 0.015814527 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los valores negativos en la matriz B_3 sugieren que el elemento experimenta compresión en algunas direcciones, mientras que los valores positivos reflejan que hay tensión en otras. Esto muestra que el elemento está sometido a una variedad de fuerzas, que pueden causar tanto estiramientos como compresiones en diferentes partes del mismo.

Volumen(m3) = 632.33

K_3		u14	v14	u13	v13	u1	v1
	u14	265426619.8	0	-265426619.8	233119156.8	0	-233119156.8
	v14	0	95846617.37	303033457.8	-95846617.37	-303033458	0
	u13	-265426619.8	303033457.8	1223512352	-536152614.6	-958085732	233119156.8
	v13	233119156.8	-95846617.37	-536152614.6	2749059263	303033457.8	-2653212646
	u1	0	-303033457.8	-958085731.9	303033457.8	958085731.9	0
	v1	-233119156.8	0	233119156.8	-2653212646	0	2653212646

- Los términos en la diagonal de la matriz K_3 demuestran que el elemento tiene una notable capacidad para resistir deformaciones en diferentes direcciones. Los valores fuera de la diagonal resaltan la importancia de las interacciones entre nodos para la estabilidad general del sistema estructural.

ELEMENTO “4”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 2	X1	0	Y1	3898.294
NODO 1	X2	125.733	Y2	3898.294
NODO 8	X3	52.546	Y3	3921.555

a1	288229.1183	b1	-23.261	c1	-73.187
a2	204839.7565	b2	23.261	c2	-52.546
a3	-490144.1995	b3	0	c3	125.733

2A = a1 + a2 + a3 = 2924.675313

$$B_4 = \begin{pmatrix} -0.007953361 & 0 & 0.007953361 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.025023974 & 0 & -0.017966439 & 0 & 0.042990413 \\ -0.025023974 & -0.007953361 & -0.017966439 & 0.007953361 & 0.042990413 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los valores negativos, como -0.025023974, sugieren que hay compresión en algunas direcciones, mientras que los valores positivos, como 0.042990413, indican tensión en otras.

Volumen(m3) = 1462.337656

K_4		u2	v2	u1	v1	u8	v8
	u2	710236507.3	312085144	243209590.3	-78965987.13	-953446098	-233119156.8
	v2	312085144	1592972363	-9051686.183	1047391812	-303033458	-2640364175
	u1	243209590.3	-9051686.183	441335187.4	-224067470.7	-684544778	233119156.8
	v1	-78965987.13	1047391812	-224067470.7	848307915.6	303033457.8	-1895699728
	u8	-953446097.6	-303033457.8	-684544777.7	303033457.8	1637990875	0
	v8	-233119156.8	-2640364175	233119156.8	-1895699728	0	4536063903

- Los términos en la diagonal de la matriz K_4 indican que el elemento tiene una alta capacidad para resistir deformaciones en diferentes direcciones. Los términos fuera de la diagonal reflejan cómo las cargas se distribuyen entre los nodos, mostrando la importancia de las interacciones nodales en el comportamiento global del talud.

ELEMENTO “5”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 8	X1	52.546	Y1	3921.555
NODO 1	X2	125.733	Y2	3898.294
NODO 3	X3	75.733	Y3	3925.037

a1	198277.1776	b1	-26.743	c1	-50
a2	90746.13061	b2	3.482	c2	-23.187
a3	-288229.1183	b3	23.261	c3	73.187

2A = a1 + a2 + a3 = 794.189941

$$B_5 = \begin{pmatrix} -0.033673305 & 0 & 0.004384342 & 0 & 0.029288963 & 0 \\ 0 & -0.062957232 & 0 & -0.029195787 & 0 & 0.092153018 \\ -0.062957232 & -0.033673305 & -0.029195787 & 0.004384342 & 0.092153018 & 0.029288963 \end{pmatrix}$$

- Los valores negativos en la matriz B_5 sugieren que el elemento experimenta compresión en ciertas áreas, mientras que los valores positivos indican tensión en otras.

Volumen(m3) 397.0949705

K_5		u8	v8	u1	v1	u3	v3
	u8	1709615577	902701522.2	343970065.1	115585346.1	-2053585642	-1018286868
	v8	902701522.2	2914530856	185499647.1	1189504064	-1088201169	-4104034920
	u1	343970065.1	185499647.1	217953596.1	-54505129.39	-561923661	-130994517.7
	v1	115585346.1	1189504064	-54505129.39	572723864.6	-61080216.7	-1762227929
	u3	-2053585642	-1088201169	-561923661.1	-61080216.73	2615509303	1149281386
	v3	-1018286868	-4104034920	-130994517.7	-1762227929	1149281386	5866262848

- Presenta una considerable rigidez, especialmente en las direcciones de los desplazamientos $u8, v8, u1$, y $v1$.

ELEMENTO “6”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 3	X1	75.733	Y1	3925.037
NODO 1	X2	125.733	Y2	3898.294
NODO 4	X3	115.733	Y3	3934.208

a1	43498.51496	b1	-35.914	c1	-10
a2	156306.9327	b2	9.171	c2	-40
a3	-198277.1776	b3	26.743	c3	50

2A = a1 + a2 + a3 = 1528.27

$$B_6 = \begin{pmatrix} -0.023499774 & 0 & 0.006000903 & 0 & 0.017498871 & 0 \\ 0 & -0.006543346 & 0 & -0.026173386 & 0 & 0.032716732 \\ -0.006543346 & -0.023499774 & -0.026173386 & 0.006000903 & 0.032716732 & 0.017498871 \end{pmatrix}$$

- Al igual que las demás matrices con valores negativos y positivos reflejan tanto compresión como tensión en distintas áreas.

Volumen(m3) = 764.135

		u3	v3	u1	v1	u4	v4
K_6	u3	728077147.4	125994654.1	-101544270.8	200945158.6	-626532877	-326939812.7
	v3	125994654.1	310662269.5	270859459.6	154334717.7	-396854114	-464996987.2
	u1	-101544270.8	270859459.6	363440463.9	-128695993	-261896193	-142163466.6
	v1	200945158.6	154334717.7	-128695993	895250854.9	-72249165.7	-1049585573
	u4	-626532876.7	-396854113.7	-261896193.1	-72249165.65	888429069.7	469103279.3
	v4	-326939812.7	-464996987.2	-142163466.6	-1049585573	469103279.3	1514582560

- Tiene una significativa rigidez y está preparado para manejar tanto compresión como tensión.

ELEMENTO “7”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 8	X1	52.546	Y1	3921.555
NODO 3	X2	75.733	Y2	3925.037
NODO 10	X3	68.135	Y3	3945.037

a1	31337.09113	b1	-20	c1	-7.598

a2	59899.23572	b2	23.482	c2	-15.589
a3	-90746.13061	b3	-3.482	c3	23.187

2A = a1 + a2 + a3 = 490.196236

$$B_7 = \begin{pmatrix} -0.040799987 & 0 & 0.047903265 & 0 & -0.00710328 & 0 \\ 0 & -0.015499915 & 0 & -0.03180155 & 0 & 0.047301465 \\ -0.015499915 & -0.040799987 & -0.03180155 & 0.047903265 & 0.047301465 & -0.007103278 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 245.098118

K_7		u8	v8	u3	v3	u10	v10
	u8	720463366.6	166206399.3	-730773628.1	37976223.46	10310261.51	-204182622.7
	v8	166206399.3	346104784.8	107890524.4	-87554838.9	-274096924	-258549945.9
	u3	-730773628.1	107890524.4	1094200745	-400379466.8	-363427117	292488942.4
	v3	37976223.46	-87554838.9	-400379466.8	756901720.5	362403243.3	-669346881.6
	u10	10310261.51	-274096923.7	-363427117.3	362403243.3	353116855.8	-88306319.62
	v10	-204182622.7	-258549945.9	292488942.4	-669346881.6	-88306319.6	927896827.5

- Muestra una buena rigidez en varias direcciones y está diseñado para manejar tanto compresión como tensión. Aunque su volumen es menor, su rigidez sugiere que puede soportar fuerzas significativas. La interacción entre nodos es importante para entender cómo se distribuyen las cargas en el elemento y cómo esto afecta al comportamiento del talud.

ELEMENTO “8”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR	
NODO 3	X1	75.733	Y1	3925.037	
NODO 9	X2	80.914	Y2	3939.868	
NODO 10	X3	68.135	Y3	3945.037	
a1	50765.81764	b1	-5.169	c1	-12.779
a2	-31337.09113	b2	20	c2	7.598
a3	-19212.42057	b3	-14.831	c3	5.181

2A = a1 + a2 + a3 = 216.305938

$$B_8 = \begin{pmatrix} -0.023896709 & 0 & 0.092461632 & 0 & -0.06856492 & 0 \\ 0 & -0.05907836 & 0 & 0.035126174 & 0 & 0.023952186 \\ -0.05907836 & -0.023896709 & 0.035126174 & 0.092461632 & 0.023952186 & -0.068564923 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 108.152969

K_8		u3	v3	u9	v9	u10	v10

	u3	332436869.3	163728162.9	-537100566.7	-400381183.1	204663697.4	236653020.2
	v3	163728162.9	670985221.3	-330466882.1	-521521688.3	166738719.3	-149463533
	u9	-537100566.7	-330466882.1	1632726470	376659799.9	-1095625903	-46192917.76
	v9	-400381183.1	-521521688.3	376659799.9	784348614.4	23721383.19	-262826926.1
	u10	204663697.4	166738719.3	-1095625903	23721383.19	890962205.5	-190460102.5
	v10	236653020.2	-149463533	-46192917.76	-262826926.1	-190460102	412290459.1

- Los valores de la matriz B_8 como -0.023896709 y 0.092461632 indican variaciones en las deformaciones en diferentes direcciones.
- La alta rigidez en la matriz K_8 indica que el elemento es fuerte y puede soportar grandes cargas.

ELEMENTO “9”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 10	X1	68.135	Y1	3945.037
NODO 9	X2	80.914	Y2	3939.868
NODO 11	X3	75.733	Y3	3955.037

a1	21639.84057	b1	-15.169	c1	-5.181
a2	29293.04113	b2	10	c2	-7.598
a3	-50765.81764	b3	5.169	c3	12.779

2A = a1 + a2 + a3 = 167.064062

$$B_9 = \begin{pmatrix} -0.090797505 & 0 & 0.059857278 & 0 & 0.030940227 & 0 \\ 0 & -0.031012056 & 0 & -0.04547956 & 0 & 0.076491616 \\ -0.031012056 & -0.090797505 & -0.04547956 & 0.059857278 & 0.076491616 & 0.030940227 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 83.532031

		u10	v10	u9	v9	u11	v11
K_9	**u10**	1204506582	252217917.3	-690556363.6	66847209.24	-513950219	-319065126.6
	v10	252217917.3	552205140	136761510.2	-77409740.85	-388979428	-474795399.2
	u9	-690556363.6	136761510.2	607028271.4	-243839849.1	83528092.23	107078338.9
	v9	66847209.24	-77409740.85	-243839849.1	471371427.7	176992639.8	-393961686.9
	u11	-513950218.8	-388979427.5	83528092.23	176992639.8	430422126.6	211986787.7
	v11	-319065126.6	-474795399.2	107078338.9	-393961686.9	211986787.7	868757086

- La alta rigidez en la matriz K_9 sugiere que el elemento es fuerte y puede soportar grandes fuerzas. La matriz también muestra cómo se distribuyen las cargas entre nodos.

ELEMENTO “10”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 9	X1	80.914	Y1	3939.868
NODO 6	X2	90.733	Y2	3955.037
NODO 11	X3	75.733	Y3	3955.037

a1	59325.555	b1	0	c1	-15
a2	-21639.84057	b2	15.169	c2	5.181
a3	-37458.17943	b3	-15.169	c3	9.819

2A = a1 + a2 + a3 227.535

$$B_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.066666667 & 0 & -0.06666667 & 0 \\ 0 & -0.065923924 & 0 & 0.022770123 & 0 & 0.043153801 \\ -0.065923924 & 0 & 0.022770123 & 0.066666667 & 0.043153801 & -0.066666667 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 113.7675

K_{10}		**u9**	**v9**	**u6**	**v6**	**u11**	**v11**
	u9	299657318.7	0	-103501637.9	-303033457.8	-196155681	303033457.8
	v9	0	829836580.3	-233119156.8	-286625554.8	233119156.8	-543211025.5
	u6	-103501637.9	-233119156.8	884390367.9	185187113.1	-780888730	47932043.75
	v6	-303033457.8	-286625554.8	185187113.1	405448101.4	117846344.7	-118822546.6
	u11	-196155680.8	233119156.8	-780888730	117846344.7	977044410.9	-350965501.5
	v11	303033457.8	-543211025.5	47932043.75	-118822546.6	-350965502	662033572

- La alta rigidez en la matriz K_{10} sugiere que el elemento es fuerte y capaz de resistir cargas significativas. La matriz también muestra cómo las deformaciones y las cargas se distribuyen entre los nodos.

ELEMENTO “11”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 3	X1	75.733	Y1	3925.037
NODO 4	X2	115.733	Y2	3934.208
NODO 9	X3	80.914	Y3	3939.868

a1	137640.2371	b1	-5.66	c1	-34.819
a2	19212.42057	b2	14.831	c2	-5.181

a3	-156306.9327	b3	-9.171	c3	40

2A = a1 + a2 + a3 = 545.725049

$$B_{11} = \begin{pmatrix} -0.010371523 & 0 & 0.027176689 & 0 & -0.01680517 & 0 \\ 0 & -0.063803192 & 0 & -0.009493792 & 0 & 0.073296984 \\ -0.063803192 & -0.010371523 & -0.009493792 & 0.027176689 & 0.073296984 & -0.016805166 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 272.8625245

		u3	v3	u4	v4	u9	v9
K_{11}	u3	722470609.8	193618684.4	-28911598.29	-274223371.2	-693559011	80604686.79
	v3	193618684.4	1882093930	-204309070.3	230792362.9	10690385.84	-2112886293
	u4	-28911598.29	-204309070.3	353145628.8	-75491589.02	-324234031	279800659.3
	v4	-274223371.2	230792362.9	-75491589.02	163417227.5	349714960.3	-394209590.4
	u9	-693559011.5	10690385.84	-324234030.5	349714960.3	1017793042	-360405346.1
	v9	80604686.79	-2112886293	279800659.3	-394209590.4	-360405346	2507095884

- Tiene una alta capacidad de carga debido a su elevada rigidez, como se refleja en la matriz K_{11}. A pesar de su volumen moderado, el elemento muestra una significativa capacidad para resistir deformaciones y cargas, y su matriz de deformaciones indica cómo se distribuyen las tensiones en el elemento.

ELEMENTO “12”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 9	X1	80.914	Y1	3939.868
NODO 4	X2	115.733	Y2	3934.208
NODO 6	X3	90.733	Y3	3955.037

a1	100765.8027	b1	-20.829	c1	-25
a2	37458.17943	b2	15.169	c2	-9.819
a3	-137640.2371	b3	5.66	c3	34.819

2A = a1 + a2 + a3 = 583.744951

$$B_{12} = \begin{pmatrix} -0.038167572 & 0 & 0.027796049 & 0 & 0.010371523 & 0 \\ 0 & -0.045810615 & 0 & -0.017992577 & 0 & 0.063803192 \\ -0.045810615 & -0.038167572 & -0.017992577 & 0.027796049 & 0.063803192 & 0.010371523 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 291.8724755

		u9	v9	u4	v4	u6	v6
K_{12}	u9	1014200236	511591085.6	-349549617.7	-123212860.8	-664650618	-388378224.8
	v9	511591085.6	1202000029	-48427728.15	202032570.4	-463163357	-1404032600
	u4	-349549617.7	-48427728.15	407369609.3	-146331812.2	-57819991.7	194759540.4
	v4	-123212860.8	202032570.4	-146331812.2	276028760.4	269544673	-478061330.8
	u6	-664650618.1	-463163357.5	-57819991.69	269544673	722470609.8	193618684.4
	v6	-388378224.8	-1404032600	194759540.4	-478061330.8	193618684.4	1882093930

- Tiene una alta capacidad de carga debido a su elevada rigidez, como se refleja en la matriz K_{12}. A pesar de su gran volumen, el elemento muestra una significativa capacidad para resistir deformaciones y cargas, y su matriz de deformaciones indica cómo se distribuyen las tensiones en el elemento.

ELEMENTO “13”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 6	X1	90.733	Y1	3955.037
NODO 4	X2	115.733	Y2	3934.208
NODO 5	X3	109.933	Y3	3955.037

a1	25229.00906	b1	-20.829	c1	-5.8
a2	75936.7104	b2	0	c2	-19.2
a3	-100765.8027	b3	20.829	c3	25

2A = a1 + a2 + a3 = 399.9168

$$B_{13} = \begin{pmatrix} -0.038167572 & 0 & 0 & 0 & 0.038167572 & 0 \\ 0 & -0.010628063 & 0 & -0.035182552 & 0 & 0.045810615 \\ -0.010628063 & -0.038167572 & -0.035182552 & 0 & 0.045810615 & 0.038167572 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 199.9584

		u6	v6	u4	v4	u5	v5
K_{13}	u6	685826330.4	118689131.9	61836644.52	170833769.5	-747662975	-289522901.4
	v6	118689131.9	292639030.2	222068184.3	171243305	-340757316	-463882335.2
	u4	61836644.52	222068184.3	204700616.3	0	-266537261	-222068184.3
	v4	170833769.5	171243305	0	566874389.1	-170833769	-738117694.1
	u5	-747662974.9	-340757316.1	-266537260.9	-170833769.5	1014200236	511591085.6
	v5	-289522901.4	-463882335.2	-222068184.3	-738117694.1	511591085.6	1202000029

- La matriz B_{13} de deformaciones muestra que el elemento experimenta compresión en algunas áreas y expansión en otras
- El elemento presenta una alta rigidez, lo que sugiere que tiene una gran capacidad para soportar cargas. La matriz K_{13} muestra cómo se distribuyen las fuerzas entre los nodos y cómo cada nodo afecta a los demás.

ELEMENTO "14":

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 1	X1	125.733	Y1	3898.294
NODO 7	X2	125.733	Y2	3955.037
NODO 5	X3	109.933	Y3	3955.037

a1	62489.5846	b1	0	c1	-15.8
a2	-68727.51282	b2	56.743	c2	15.8
a3	7134.467619	b3	-56.743	c3	0

2A = a1 + a2 + a3 = 896.5394

$$B_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.103977269 & 0 & -0.10397727 & 0 \\ 0 & -0.028952309 & 0 & 0.028952309 & 0 & 0 \\ -0.028952309 & 0 & 0.028952309 & 0.103977269 & 0 & -0.103977269 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 448.2697

K_{14}		u1	v1	u7	v7	u5	v5
	u1	138621587.1	0	-138621587.1	-497835741.5	0	497835741.5
	v1	0	383882710.7	-382977672.4	-383882710.7	382977672.4	0
	u7	-138621587.1	-382977672.4	5089804437	880813413.9	-4951182850	-497835741.5
	v7	-497835741.5	-383882710.7	880813413.9	2171774703	-382977672	-1787891992
	u5	0	382977672.4	-4951182850	-382977672.4	4951182850	0
	v5	497835741.5	0	-497835741.5	-1787891992	0	1787891992

- Tiene una alta capacidad de carga y una matriz de rigidez que refleja una sólida resistencia a las fuerzas aplicadas. La matriz de deformaciones muestra que el elemento puede experimentar variaciones significativas en las tensiones a lo largo de sus nodos. Su gran volumen también indica que es un elemento robusto en la estructura.

En general:

- Los elementos 11 y 12 destacan por su alta rigidez y capacidad de carga, lo que los convierte en los más robustos dentro del análisis. Su capacidad para soportar cargas significativas sin deformarse excesivamente y su habilidad para distribuir tensiones de manera efectiva subraya su importancia en la estabilidad estructural de los taludes. Por otro lado, aunque el Elemento 13 y el Elemento 14 son funcionales y poseen buenas propiedades estructurales, presentan menor rigidez y capacidad de carga en comparación con los elementos más robustos. Esta información es fundamental para la planificación y diseño de estructuras geotécnicas, donde la selección de elementos con la adecuada rigidez y capacidad de carga es crucial para garantizar la estabilidad y seguridad de los taludes evaluados.

5.3.2.4 Ensamblaje de las matrices de rigidez (matriz global)

Esta matriz se presentará en el Anexo 10 de forma más visible.

		u1	v1	u2	v2	u3	v3	u4	v4	u5	v5	u6	v6	u7	v7	u8	v8	u9	v9	u10	v10	u11	v11	u12	v12	u13	v13	u14	v14
	u1	2723652991	-140755121	585972721.6	-42446001.7	-663467932	139864941.9	-261896193	-142163467	0	497835741.5	0	0	-138621587	-497835742	-340574713	418618803.9	0	0	0	0	0	0	0	0	-9.58E+08	303033458	-9.47E+08	-5.36E+08
	v1	-140755121	6705164706	-42446001.7	2318061574	139864941.9	-1607893211	-72249165.7	-1049585573	382977672.4	0	0	0	-382977672	-383882711	418618803.9	-706195664	0	0	0	0	0	0	0	0	233119157	-2.65E+09	-5.36E+08	-2.62E+09
	u2	585972721.6	-42446001.7	2272538663	42446001.66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-953446098	-233119157	0	0	0	0	0	0	-9.47E+08	-3.03E+08	0	0	-9.58E+08	536152615
	v2	-42446001.7	2318061574	42446001.66	5597971724	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-303033458	-2640364175	0	0	0	0	0	0	-2.33E+08	-2.62E+09	0	0	536152615	-2.65E+09
	u3	-663467932	139864941.9	0	0	5492694675	1232243421	-655444475	-601163184	0	0	0	0	0	0	-2784359270	-980310645	-1230659578	-319776496	-1.59E+08	529141963	0	0	0	0	0	0	0	0
	v3	139864941.9	-1607893211	0	0	1232243421	9486905990	-601163184	-234204624	0	0	0	0	0	0	-980310645	-4191589759	-319776496	-2634407982	529141963	-8.19E+08	0	0	0	0	0	0	0	0
	u4	-261896193	-72249165.7	0	0	-655444475	-601163184	1853644924	247279878.1	-266537261	-222068184	4016652.829	416827724.6	0	0	0	0	-673783648	231372931.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v4	-142163467	-1049585573	0	0	-601163184	-234204624	247279878.1	2520902937	-170833769	-738117694	440378442.5	-306818026	0	0	0	0	226502099.5	-192177020	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u5	0	382977672.4	0	0	0	0	-266537261	-170833769	5965383085	511591085.6	-747662975	-340757316	-4951182850	-382977672	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v5	497835741.5	0	0	0	0	0	-222068184	-738117694	511591085.6	2989892022	-289522901	-463882335	-497835742	-1787891992	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u6	0	0	0	0	0	0	4016652.829	440378442.5	-747662975	-289522901	2292687308	497494929.4	0	0	0	0	-768152256	-696282514	0	0	-7.81E+08	47932044	0	0	0	0	0	0
	v6	0	0	0	0	0	0	416827724.6	-306818026	-340757316	-463882335	497494929.4	2580181062	0	0	0	0	-691411683	-1690658154	0	0	117846345	-1.19E+08	0	0	0	0	0	0
	u7	-138621587	-382977672	0	0	0	0	0	0	-4951182850	-497835742	0	0	5089804437	880813413.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K	v7	-497835742	-383882711	0	0	0	0	0	0	-382977672	-1787891992	0	0	880813413.9	2171774703	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u8	-340574713	418618803.9	-953446098	-303033458	-2784359270	-980310645	0	0	0	0	0	0	0	0	4068069819	1068907921	0	0	10310262	-2.04E+08	0	0	0	0	0	0	0	0
	v8	418618803.9	-706195664	-233119157	-2640364175	-980310645	-4191589759	0	0	0	0	0	0	0	0	1068907921	7796699544	0	0	-2.74E+08	-2.59E+08	0	0	0	0	0	0	0	0
	u9	0	0	0	0	-1230659578	-319776496	-673783648	226502099.5	0	0	-768152256	-691411683	0	0	0	0	4571405337	284005690.3	-1.79E+09	90568592	-1.13E+08	410111797	0	0	0	0	0	0
	v9	0	0	0	0	-319776496	-2634407982	231372931.2	-192177020	0	0	-696282514	-1690658154	0	0	0	0	284005690.3	5794652535	90568592	-3.4E+08	410111797	-9.37E+08	0	0	0	0	0	0
	u10	0	0	0	0	-158763420	529141962.6	0	0	0	0	0	0	0	0	10310261.51	-274096924	-1786182266	90568592.43	2.449E+09	-26548505	-5.14E+08	-3.19E+08	0	0	0	0	0	0
	v10	0	0	0	0	529141962.6	-818810415	0	0	0	0	0	0	0	0	-204182623	-258549946	90568592.43	-340236667	-26548505	1.892E+09	-3.89E+08	-4.75E+08	0	0	0	0	0	0
	u11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-780888730	117846344.7	0	0	0	0	-112627589	410111796.7	-5.14E+08	-3.89E+08	1.407E+09	-1.39E+08	0	0	0	0	0	0
	v11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47932043.75	-118822547	0	0	0	0	410111796.7	-937172712	-3.19E+08	-4.75E+08	-1.39E+08	1.531E+09	0	0	0	0	0	0
	u12	0	0	-946979556	-233119157	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.216E+09	536152615	0	0	-2.69E+08	-3.03E+08
	v12	0	0	-303033458	-2622456476	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	536152615	2.719E+09	0	0	-2.33E+08	-96970706
	u13	-958085732	233119156.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.224E+09	-5.36E+08	-2.65E+08	303033458
	v13	303033457.8	-2653212646	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5.36E+08	2.749E+09	233119157	-95846617
	u14	-946979556	-536152615	-958085732	536152614.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.69E+08	-2.33E+08	-2.65E+08	233119157	2439031450	0
	v14	-536152615	-2622456476	536152614.6	-2653212646	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3.03E+08	-96970706	303033458	-95846617	0	5.468E+09

Luego eliminamos las restricciones.

		u1	v1	u2	v2	u3	v3	u4	v4	u5	v5	u6	v6	u7	v7	u8	v8	u9	v9	u10	v10	u11	v11	u12	v12	u13	v13	u14	v14
	u1	2723652991	-140755121	585972721.6	-42446001.7	-663467932	139864941.9	-261896193	-142163467	0	497835741.5	0	0	-138621587	-497835742	-340574713	418618803.9	0	0	0	0	0	0	0	0	-9.58E+08	303033458	-9.47E+08	-5.36E+08
	v1	-140755121	6705164706	-42446001.7	2318061574	139864941.9	-1607893211	-72249165.7	-1049585573	382977672.4	0	0	0	-382977672	-383882711	418618803.9	-706195664	0	0	0	0	0	0	0	0	233119157	-2.65E+09	-5.36E+08	-2.62E+09
	u2	585972721.6	-42446001.7	2272538663	42446001.66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-953446098	-233119157	0	0	0	0	0	0	-9.47E+08	-3.03E+08	0	0	-9.58E+08	536152615
	v2	-42446001.7	2318061574	42446001.66	5597971724	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-303033458	-2640364175	0	0	0	0	0	0	-2.33E+08	-2.62E+09	0	0	536152615	-2.65E+09
	u3	-663467932	139864941.9	0	0	5492694675	1232243421	-655444475	-601163184	0	0	0	0	0	0	-2784359270	-980310645	-1230659578	-319776496	-1.59E+08	529141963	0	0	0	0	0	0	0	0
	v3	139864941.9	-1607893211	0	0	1232243421	9486905990	-601163184	-234204624	0	0	0	0	0	0	-980310645	-4191589759	-319776496	-2634407982	529141963	-8.19E+08	0	0	0	0	0	0	0	0
	u4	-261896193	-72249165.7	0	0	-655444475	-601163184	1853644924	247279878.1	-266537261	-222068184	4016652.829	416827724.6	0	0	0	0	-673783648	231372931.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v4	-142163467	-1049585573	0	0	-601163184	-234204624	247279878.1	2520902937	-170833769	-738117694	440378442.5	-306818026	0	0	0	0	226502099.5	-192177020	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u5	0	382977672.4	0	0	0	0	-266537261	-170833769	5965383085	511591085.6	-747662975	-340757316	-4951182850	-382977672	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v5	497835741.5	0	0	0	0	0	-222068184	-738117694	511591085.6	2989892022	-289522901	-463882335	-497835742	-1787891992	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u6	0	0	0	0	0	0	4016652.829	440378442.5	-747662975	-289522901	2292687308	497494929.4	0	0	0	0	-768152256	-696282514	0	0	-7.81E+08	47932044	0	0	0	0	0	0
	v6	0	0	0	0	0	0	416827724.6	-306818026	-340757316	-463882335	497494929.4	2580181062	0	0	0	0	-691411683	-1690658154	0	0	117846345	-1.19E+08	0	0	0	0	0	0
	u7	-138621587	-382977672	0	0	0	0	0	0	-4951182850	-497835742	0	0	5089804437	880813413.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K	v7	-497835742	-383882711	0	0	0	0	0	0	-382977672	-1787891992	0	0	880813413.9	2171774703	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u8	-340574713	418618803.9	-953446098	-303033458	-2784359270	-980310645	0	0	0	0	0	0	0	0	4068069819	1068907921	0	0	10310262	-2.04E+08	0	0	0	0	0	0	0	0
	v8	418618803.9	-706195664	-233119157	-2640364175	-980310645	-4191589759	0	0	0	0	0	0	0	0	1068907921	7796699544	0	0	-2.74E+08	-2.59E+08	0	0	0	0	0	0	0	0
	u9	0	0	0	0	-1230659578	-319776496	-673783648	226502099.5	0	0	-768152256	-691411683	0	0	0	0	4571405337	284005690.3	-1.79E+09	90568592	-1.13E+08	410111797	0	0	0	0	0	0
	v9	0	0	0	0	-319776496	-2634407982	231372931.2	-192177020	0	0	-696282514	-1690658154	0	0	0	0	284005690.3	5794652535	90568592	-3.4E+08	410111797	-9.37E+08	0	0	0	0	0	0
	u10	0	0	0	0	-158763420	529141962.6	0	0	0	0	0	0	0	0	10310261.51	-274096924	-1786182266	90568592.43	2.449E+09	-26548505	-5.14E+08	-3.19E+08	0	0	0	0	0	0
	v10	0	0	0	0	529141962.6	-818810415	0	0	0	0	0	0	0	0	-204182623	-258549946	90568592.43	-340236667	-26548505	1.892E+09	-3.89E+08	-4.75E+08	0	0	0	0	0	0
	u11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-780888730	117846344.7	0	0	0	0	-112627589	410111796.7	-5.14E+08	-3.89E+08	1.407E+09	-1.39E+08	0	0	0	0	0	0
	v11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47932043.75	-118822547	0	0	0	0	410111796.7	-937172712	-3.19E+08	-4.75E+08	-1.39E+08	1.531E+09	0	0	0	0	0	0
	u12	0	0	-946979556	-233119157	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.216E+09	536152615	0	0	-2.69E+08	-3.03E+08
	v12	0	0	-303033458	-2622456476	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	536152615	2.719E+09	0	0	-2.33E+08	-96970706
	u13	-958085732	233119156.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.224E+09	-5.36E+08	-2.65E+08	303033458
	v13	303033457.8	-2653212646	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5.36E+08	2.749E+09	233119157	-95846617
	u14	-946979556	-536152615	-958085732	536152614.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.69E+08	-2.33E+08	-2.65E+08	233119157	2439031450	0
	v14	-536152615	-2622456476	536152614.6	-2653212646	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3.03E+08	-96970706	303033458	-95846617	0	5.468E+09

Finalmente, sin considerar los puntos de apoyo, la matriz de rigidez global quedará expresada como sigue.

		u3	v3	u4	v4	u5	v5	u6	v6	u7	v7	u8	v8	u9	v9	u10	v10	u11	v11
	u3	5492694675	1232243421	-655444474.9	-601163183.9	0	0	0	0	0	0	-2784359270	-980310644.9	-1230659578	-319776496.3	-158763420	529141962.6	0	0
	v3	1232243421	9486905990	-601163183.9	-234204624.3	0	0	0	0	0	0	-980310644.9	-4191589759	-319776496.3	-2634407982	529141962.6	-818810414.6	0	0
	u4	-655444474.9	-601163184	1853644924	247279878.1	-266537260.9	-222068184.3	4016652.829	416827724.6	0	0	0	0	-673783648.2	231372931.2	0	0	0	0
	v4	-601163183.9	-234204624	247279878.1	2520902937	-170833769.5	-738117694.1	440378442.5	-306818025.8	0	0	0	0	226502099.5	-192177020	0	0	0	0
	u5	0	0	-266537260.9	-170833769.5	5965383085	511591085.6	-747662974.9	-340757316.1	-4951182850	-382977672.4	0	0	0	0	0	0	0	0
	v5	0	0	-222068184.3	-738117694.1	511591085.6	2989892022	-289522901.4	-463882335.2	-497835741.5	-1787891992	0	0	0	0	0	0	0	0
	u6	0	0	4016652.829	440378442.5	-747662974.9	-289522901.4	2292687308	497494929.4	0	0	0	0	-768152255.9	-696282514.3	0	0	-780888730	47932043.75
	v6	0	0	416827724.6	-306818025.8	-340757316.1	-463882335.2	497494929.4	2580181062	0	0	0	0	-691411682.6	-1690658154	0	0	117846344.7	-118822547
Kred	u7	0	0	0	0	-4951182850	-497835741.5	0	0	5089804437	880813413.9	0	0	0	0	0	0	0	0
	v7	0	0	0	0	-382977672.4	-1787891992	0	0	880813413.9	2171774703	0	0	0	0	0	0	0	0
	u8	-2784359270	-980310645	0	0	0	0	0	0	0	0	4068069819	1068907921	0	0	10310261.51	-204182622.7	0	0
	v8	-980310644.9	-4191589759	0	0	0	0	0	0	0	0	1068907921	7796699544	0	0	-274096923.7	-258549945.9	0	0
	u9	-1230659578	-319776496	-673783648.2	226502099.5	0	0	-768152255.9	-691411682.6	0	0	0	0	4571405337	284005690.3	-1786182266	90568592.43	-112627589	410111796.7
	v9	-319776496.3	-2634407982	231372931.2	-192177020	0	0	-696282514.3	-1690658154	0	0	0	0	284005690.3	5794652535	90568592.43	-340236667	410111796.7	-937172712
	u10	-158763420	529141962.6	0	0	0	0	0	0	0	0	10310261.51	-274096923.7	-1786182266	90568592.43	2448585644	-26548504.75	-513950219	-319065127
	v10	529141962.6	-818810415	0	0	0	0	0	0	0	0	-204182622.7	-258549945.9	90568592.43	-340236667	-26548504.75	1892392427	-388979428	-474795399
	u11	0	0	0	0	0	0	-780888730	117846344.7	0	0	0	0	-112627588.6	410111796.7	-513950218.8	-388979427.5	1407466537	-138978714
	v11	0	0	0	0	0	0	47932043.75	-118822546.6	0	0	0	0	410111796.7	-937172712.3	-319065126.6	-474795399.2	-138978714	1530790658

5.3.2.5 Determinación de desplazamientos nodales

La ecuación $[\delta] = [K]^{-1}[F]$ obtenido en el capítulo IV, nos permite determinar los desplazamientos nodales de cada elemento triangular. Para ello es necesario contar con datos como la fuerza vertical aplicada sobre la plataforma superior del talud y la inversa de la matriz de rigidez global.

		u3	v3	u4	v4	u5	v5	u6	v6	u7	v7	u8	v8	u9	v9	u10	v10	u11	v11
	u3	5.76832E-10	-2.4719E-12	4.64221E-10	1.19163E-12	4.77985E-10	3.80683E-11	5.09948E-10	2.08835E-11	4.82549E-10	-8.008E-11	3.8171E-10	3.67471E-11	5.3515E-10	6.37869E-12	5.36543E-10	-2.9621E-11	5.09396E-10	-4.92E-12
	v3	-2.47188E-12	2.64403E-10	4.96396E-11	6.79718E-11	1.27357E-10	8.03261E-11	1.07884E-10	1.78851E-10	1.25203E-10	3.78074E-11	3.62705E-11	1.46448E-10	4.12892E-11	2.29615E-10	3.19532E-11	2.55193E-10	8.65494E-11	2.33686E-10
	u4	4.64221E-10	4.96396E-11	1.1881E-09	-2.04813E-10	8.94019E-10	-5.0837E-11	9.03484E-10	-1.49693E-10	9.08416E-10	-2.52626E-10	3.12858E-10	7.22743E-11	7.71663E-10	-5.12021E-11	7.78936E-10	8.22431E-11	8.96778E-10	-8.7099E-12
	v4	1.19163E-12	6.79718E-11	-2.04813E-10	6.41057E-10	-2.63179E-10	3.78318E-10	-3.52987E-10	2.854E-10	-2.84868E-10	3.80571E-10	1.1538E-11	2.8798E-11	-1.82149E-10	1.57173E-10	-2.05648E-10	2.76617E-11	-3.3636E-10	1.13407E-10
	u5	4.77985E-10	1.27357E-10	8.94019E-10	-2.63179E-10	2.55967E-09	-3.67749E-10	1.70926E-09	8.33286E-11	2.61156E-09	-9.10544E-10	3.37464E-10	1.32192E-10	1.0088E-09	1.57484E-10	1.09709E-09	3.41394E-10	1.49579E-09	2.49451E-10
	v5	3.80683E-11	8.03261E-11	-5.0837E-11	3.78318E-10	-3.67749E-10	1.01968E-09	-1.49415E-10	3.34519E-10	-4.21637E-10	9.45593E-10	3.77603E-11	4.32594E-11	-3.47184E-11	1.73373E-10	-5.39967E-11	7.12823E-11	-1.5007E-10	1.43317E-10
	u6	5.09948E-10	1.07884E-10	9.03484E-10	-3.52987E-10	1.70926E-09	-1.49415E-10	2.085E-09	-8.55872E-11	1.7393E-09	-5.26999E-10	3.5649E-10	1.30008E-10	1.13465E-09	1.11747E-10	1.261E-09	3.74945E-10	1.80958E-09	2.35919E-10
	v6	2.08835E-11	1.78851E-10	-1.49693E-10	2.854E-10	8.33286E-11	3.34519E-10	-8.55872E-11	8.34415E-10	6.83774E-11	2.62352E-10	4.242E-11	1.00559E-10	2.72565E-11	4.12787E-10	8.64394E-13	2.2817E-10	-1.3539E-10	3.71519E-10
K^(-1)red	u7	4.82549E-10	1.25203E-10	9.08416E-10	-2.84868E-10	2.61156E-09	-4.21637E-10	1.7393E-09	6.83774E-11	2.87804E-09	-1.05383E-09	3.40163E-10	1.31882E-10	1.02396E-09	1.51264E-10	1.11435E-09	3.42536E-10	1.523E-09	2.45904E-10
	v7	-8.008E-11	3.78074E-11	-2.52626E-10	3.80571E-10	-9.10544E-10	9.45593E-10	-5.26999E-10	2.62352E-10	-1.05383E-09	1.50574E-09	-4.73658E-11	5.43615E-12	-2.65977E-10	1.0915E-10	-3.02939E-10	-2.00385E-11	-4.7746E-10	6.22413E-11
	u8	3.8171E-10	3.62705E-11	3.12858E-10	1.1538E-11	3.37464E-10	3.77603E-11	3.5649E-10	4.242E-11	3.40163E-10	-4.73658E-11	5.14301E-10	1.10411E-11	3.58041E-10	4.18119E-11	3.568E-10	4.56449E-11	3.57835E-10	4.28193E-11
	v8	3.67471E-11	1.46448E-10	7.22743E-11	2.8798E-11	1.32192E-10	4.32594E-11	1.30008E-10	1.00559E-10	1.31882E-10	5.43615E-12	1.10411E-11	2.19188E-10	8.41379E-11	1.30206E-10	9.98504E-11	1.68259E-10	1.29854E-10	1.45697E-10
	u9	5.3515E-10	4.12892E-11	7.71663E-10	-1.82149E-10	1.0088E-09	-3.47184E-11	1.13465E-09	2.72565E-11	1.02396E-09	-2.65977E-10	3.58041E-10	8.41379E-11	1.14022E-09	1.62115E-11	1.11731E-09	1.3451E-10	1.164E-09	5.13203E-11
	v9	6.37869E-12	2.29615E-10	-5.12021E-11	1.57173E-10	1.57484E-10	1.73373E-10	1.11747E-10	4.12787E-10	1.51264E-10	1.0915E-10	4.18119E-11	1.30206E-10	1.62115E-11	5.06329E-10	2.45944E-11	3.26525E-10	2.41419E-11	4.42775E-10
	u10	5.36543E-10	3.19532E-11	7.78936E-10	-2.05648E-10	1.09709E-09	-5.39967E-11	1.261E-09	8.64394E-13	1.11435E-09	-3.02939E-10	3.568E-10	9.98504E-11	1.11731E-09	2.45944E-11	1.59578E-09	2.42042E-10	1.45272E-09	2.15875E-10
	v10	-2.9621E-11	2.55193E-10	8.22431E-11	2.76617E-11	3.41394E-10	7.12823E-11	3.74945E-10	2.2817E-10	3.42536E-10	-2.00385E-11	4.56449E-11	1.68259E-10	1.3451E-10	3.26525E-10	2.42042E-10	9.81195E-10	5.20567E-10	5.71879E-10
	u11	5.09396E-10	8.65494E-11	8.96778E-10	-3.36365E-10	1.49579E-09	-1.50069E-10	1.80958E-09	-1.35389E-10	1.523E-09	-4.77457E-10	3.57835E-10	1.29854E-10	1.164E-09	2.41419E-11	1.45272E-09	5.20567E-10	2.51873E-09	3.2869E-10
	v11	-4.91999E-12	2.33686E-10	-8.70992E-12	1.13407E-10	2.49451E-10	1.43317E-10	2.35919E-10	3.71519E-10	2.45904E-10	6.22413E-11	4.28193E-11	1.45697E-10	5.13203E-11	4.42775E-10	2.15875E-10	5.71879E-10	3.2869E-10	1.18425E-09

Luego las fuerzas verticales aplicadas a los nodos, matricialmente se representarán como sigue:

$$F = \begin{Bmatrix} F_{1x} = R \\ F_{1y} = R \\ F_{2x} = R \\ F_{2y} = R \\ F_{3x} = 0 \\ F_{3y} = 0 \\ F_{4x} = 0 \\ F_{4y} = 0 \\ F_{5x} = 0 \\ F_{5y} = -15000 \\ F_{6x} = 0 \\ F_{6y} = -10000 \\ F_{7x} = 0 \\ F_{7y} = -2402.74 \\ F_{8x} = 0 \\ F_{8y} = 0 \\ F_{9x} = 0 \\ F_{9y} = 0 \\ F_{10x} = 0 \\ F_{10y} = 0 \\ F_{11x} = 0 \\ F_{11y} = -5000 \\ F_{12x} = R \\ F_{12y} = R \\ F_{13x} = R \\ F_{13y} = R \\ F_{14x} = R \\ F_{14y} = R \end{Bmatrix} Kgf \quad \Rightarrow \quad [F_{red}] = \begin{pmatrix} F_{3x} = 0 \\ F_{3y} = 0 \\ F_{4x} = 0 \\ F_{4y} = 0 \\ F_{5x} = 0 \\ F_{5y} = -15000 \\ F_{6x} = 0 \\ F_{6y} = -10000 \\ F_{7x} = 0 \\ F_{7y} = -2402.74 \\ F_{8x} = 0 \\ F_{8y} = 0 \\ F_{9x} = 0 \\ F_{9y} = 0 \\ F_{10x} = 0 \\ F_{10y} = 0 \\ F_{11x} = 0 \\ F_{11y} = -5000 \end{pmatrix} Kgf$$

Reemplazando en $[\delta] = [K]_{red}^{-1}[F]_{red}$ se obtiene los desplazamientos nodales:

$$\delta = \begin{Bmatrix} u3 \\ v3 \\ u4 \\ v4 \\ u5 \\ v5 \\ u6 \\ v6 \\ u7 \\ v7 \\ u8 \\ v8 \\ u9 \\ v9 \\ u10 \\ v10 \\ u11 \\ v11 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -5.62847E-07 \\ -4.25267E-06 \\ 2.91003E-06 \\ -1.00102E-05 \\ 5.62349E-06 \\ -2.16289E-05 \\ 3.18375E-06 \\ -1.58499E-05 \\ 6.94335E-06 \\ -2.07365E-05 \\ -1.09089E-06 \\ -2.39603E-06 \\ 6.30682E-07 \\ -9.2046E-06 \\ 4.49814E-07 \\ -6.16219E-06 \\ 3.10867E-06 \\ -1.19357E-05 \end{pmatrix} \text{m} \quad \Rightarrow \quad \delta = \begin{pmatrix} -5.62847E-05 \\ -0.000425267 \\ 0.000291003 \\ -0.001001023 \\ 0.000562349 \\ -0.002162892 \\ 0.000318375 \\ -0.001584988 \\ 0.000694335 \\ -0.002073652 \\ -0.000109089 \\ -0.000239603 \\ 6.30682E-05 \\ -0.00092046 \\ 4.49814E-05 \\ -0.000616219 \\ 0.000310867 \\ -0.001193572 \end{pmatrix} \text{cm}$$

Interpretando estos resultados llegamos a la siguiente conclusión:

- En el análisis de desplazamientos nodales bajo cargas verticales, se observó que los nodos $v5$ y $v7$ experimentan los desplazamientos más significativos, alcanzando -0.002162892 cm y -0.002073652 cm respectivamente, indicando áreas con mayores deformaciones bajo las cargas aplicadas. En contraste, los nodos $u3$ y $u10$ mostraron los desplazamientos más pequeños, -5.62847E-07 cm y 4.49814E-07 cm, lo que sugiere que estas ubicaciones sufren menores deformaciones. La alta deformación en los nodos $v5$ y $v7$ señala posibles zonas de debilidad estructural, sugiriendo la necesidad de monitoreo y posible reforzamiento para prevenir fallas. Los resultados también muestran que las áreas con cargas negativas significativas $(F_{5y}, F_{6y}, F_{7y}$ y $F_{11y})$ presentan mayores desplazamientos, consistente con la expectativa de que mayores cargas inducen mayores deformaciones. Al comparar estos desplazamientos con las matrices de rigidez, se confirma que los elementos más rígidos, como los Elementos 11 y 12, exhiben menores deformaciones, destacando la importancia de la rigidez estructural en la reducción de deformaciones.

5.3.2.6 Determinación de esfuerzos y deformaciones

Para su determinación de estos parámetros se aplica las ecuaciones de deformación unitaria $[\varepsilon] = [B][\delta]$ y la ecuación de esfuerzos $[\sigma] = [D][\varepsilon]$ presentados en el capítulo II.

ELEMENTO "1":
$[\varepsilon_1] = [B_1][\delta]$.

$$\varepsilon_1 \quad \begin{pmatrix} -0.016 & 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.05 \\ -0.05 & -0.016 & 0 & 0.016 & 0.05 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ε_1 =	ε_{1x}	=	0
	ε_{1y}		0
	ε_{1xy}		0

- No hay deformaciones en ninguna dirección, indicando que este elemento no está experimentando cambios de longitud ni distorsiones angulares.

Luego: σ_1
$[\sigma_1] = [D][\varepsilon_1]$.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1678372145 & 466238314 & 0 \\ 466238314 & 1678372145 & 0 \\ 0 & 0 & 606066915.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 =$	σ_{1x}	=	0	kg/m^2	=	0	kg/cm^2
	σ_{1y}		0			0	
	σ_{1xy}		0			0	

- Al no haber deformaciones, tampoco hay esfuerzos generados

ELEMENTO “2”:

$\varepsilon_2 =$	ε_{2x}	=	0
	ε_{2y}		0
	ε_{2xy}		0

$\sigma_2 =$	σ_{2x}	=	0	kg/m^2	=	0	kg/cm^2
	σ_{2y}		0			0	
	σ_{2xy}		0			0	

ELEMENTO “3”:

$\varepsilon_3 =$	ε_{3x}	=	0
	ε_{3y}		0
	ε_{3xy}		0

$\sigma_3 =$	σ_{3x}	=	0	kg/m^2	=	0	kg/cm^2
	σ_{3y}		0			0	
	σ_{3xy}		0			0	

- Similar al Elemento 1, los elementos 2 y 3, tanto las deformaciones como los esfuerzos son nulos, indicando que estos elementos también están en un estado de equilibrio sin cambios en su geometría ni fuerzas internas actuando sobre ellos.

ELEMENTO “4”:

$\varepsilon_4 =$	ε_{4x}	=	0
	ε_{4y}		-1.03006E-05
	ε_{4xy}		-4.68979E-06

- Existe una pequeña deformación en la dirección vertical, lo que indica una contracción. También hay una leve deformación cortante.

$\sigma_4 =$	σ_{4x}	=	-4802.545307	kg/m^2	=	-0.480254531	kg/cm^2
	σ_{4y}		-17288.27947			-1.728827947	
	σ_{4xy}		-2842.328504			-0.28423285	

- Los esfuerzos muestran una ligera compresión en la dirección y y un esfuerzo cortante, lo que sugiere que este elemento está siendo comprimido verticalmente y experimenta alguna distorsión angular

ELEMENTO “5”:

ε_5 =	ε_{5x}	=	2.02487E-06
	ε_{5y}		-2.4105E-05
	ε_{5xy}		-2.70628E-06

- Hay una pequeña deformación en la dirección horizontal (elongación) y una mayor deformación en la dirección vertical (compresión).

σ_5 =	σ_{5x}	=	-7840.159002	kg/m^2	=	-0.7840159	kg/cm^2
	σ_{5y}		-39513.00695			-3.951300695	
	σ_{5xy}		-1640.18389			-0.164018389	

- Los esfuerzos son más significativos en la dirección vertical, lo que indica una mayor compresión en esa dirección.

ELEMENTO “6”:

ε_6 =	ε_{6x}	=	6.4149E-06
	ε_{6y}		-2.99675E-05
	ε_{6xy}		2.36587E-06

- Este elemento está experimentando elongación en la dirección x y compresión en la dirección y, junto con una ligera deformación cortante.

σ_6 =	σ_{6x}	=	-3205.418377	kg/m^2	=	-0.320541838	kg/cm^2
	σ_{6y}		-47305.76965			-4.730576965	
	σ_{6xy}		1433.876994			0.143387699	

- La compresión es más significativa en la dirección y, mientras que en x hay una pequeña tensión de tracción.

ELEMENTO “7”:

ε_7 =	ε_{7x}	=	1.4351E-06
	ε_{7y}		-1.19101E-05
	ε_{7xy}		-6.10235E-07

- Existe una ligera elongación en x y compresión en y, con muy poca deformación cortante.

σ_7 =	σ_{7x}	=	-3144.292794	kg/m^2	=	-0.314429279	kg/cm^2
	σ_{7y}		-19320.4261			-1.93204261	
	σ_{7xy}		-369.8430143			-0.036984301	

- Hay una leve compresión en la dirección vertical, pero el elemento no está sometido a grandes tensiones

ELEMENTO “8”:

$\varepsilon_8 =$	ε_{8x}	=	4.09227E-06
	ε_{8y}		-2.19679E-05
	ε_{8xy}		-2.60758E-05

- Existe una deformación notable en la dirección vertical y una mayor deformación cortante comparada con los elementos anteriores

$\sigma_8 =$	σ_{8x}	=	-3373.934842	kg/m^2	=	-0.337393484	kg/cm^2
	σ_{8y}		-34962.36854			-3.496236854	
	σ_{8xy}		-15803.6616			-1.58036616	

- Este elemento presenta esfuerzos significativos, tanto cortantes como de compresión, especialmente en la dirección y.

ELEMENTO “9”:

$\varepsilon_9 =$	ε_{9x}	=	9.30921E-06
	ε_{9y}		-3.0326E-05
	ε_{9xy}		-1.6559E-05

- Las deformaciones indican que el elemento está sometido a un estiramiento moderado en la dirección horizontal y una mayor compresión en la dirección vertical, con deformaciones cortantes que sugieren cambios angulares importantes.

$\sigma_9 =$	σ_{9x}	=	1485.186467	kg/m^2	=	0.148518647	kg/cm^2
	σ_{9y}		-46557.94096			-4.655794096	
	σ_{9xy}		-10035.87321			-1.003587321	

- Esto sugiere que el elemento está experimentando una combinación de compresión vertical fuerte y esfuerzo cortante negativo, lo cual podría ser indicativo de una zona de alta carga o potencial deformación estructural.

ELEMENTO “10”:

$\varepsilon_{10} =$	ε_{10x}	=	5.00481E-07
	ε_{10y}		-2.69172E-05
	ε_{10xy}		-9.58757E-06

- La elongación en la dirección horizontal es pequeña comparada con la compresión vertical, sugiriendo que el elemento está sometido a una carga vertical fuerte con cambios angulares considerables.

$\sigma_{10} =$	σ_{10x}	=	-11709.85831	kg/m^2	=	-1.170985831	kg/cm^2
	σ_{10y}		-44943.81094			-4.494381094	

	σ_{10xy}		-5810.708406		-0.581070841	

- Esto indica que el elemento está bajo una presión considerable, con mayores esfuerzos en la dirección vertical y esfuerzos cortantes negativos que podrían señalar áreas de potencial debilidad.

ELEMENTO "11":

$\varepsilon_{11} =$	ε_{11x}	=	7.43238E-06
	ε_{11y}		-3.083E-05
	ε_{11xy}		-1.87419E-06

- Las deformaciones indican que el elemento está experimentando un estiramiento en la dirección horizontal y una compresión vertical, con cambios angulares mínimos.

$\sigma_{11} =$	σ_{11x}	=	-1899.839653	kg/m^2 =	-0.189983965	kg/cm^2
	σ_{11y}		-48278.97182		-4.827897182	
	σ_{11xy}		-1135.88267		-0.113588267	

- Los esfuerzos revelan una compresión en ambas direcciones, con un esfuerzo cortante negativo. La combinación de alta compresión vertical y esfuerzos cortantes negativos sugiere que el elemento podría estar en una región sometida a cargas verticales intensas.

ELEMENTO "12":

$\varepsilon_{12} =$	ε_{12x}	=	8.98359E-06
	ε_{12y}		-4.09495E-05
	ε_{12xy}		3.05674E-06

- El elemento 12 presenta una elongación horizontal y una compresión vertical significativa, con una deformación cortante positiva. Las deformaciones sugieren que el elemento está sometido a una carga significativa en la dirección vertical y está experimentando cambios angulares positivos.

$\sigma_{12} =$	σ_{12x}	=	-4014.422089	kg/m^2 =	-0.401442209	kg/cm^2
	σ_{12y}		-64540.03416		-6.454003416	
	σ_{12xy}		1852.586324		0.185258632	

- Los esfuerzos muestran una compresión notable en ambas direcciones, con un esfuerzo cortante positivo. Esto indica que el elemento está bajo una presión considerable y está en una región con posible deformación y carga significativa.

ELEMENTO "13":

$\varepsilon_{13} =$	ε_{13x}	=	9.31191E-06
	ε_{13y}		-4.70195E-05
	ε_{13xy}		-9.91756E-06

- Muestra una elongación horizontal y una compresión vertical considerable, con deformaciones cortantes negativas. Las deformaciones sugieren que el elemento está experimentando una combinación de estiramiento horizontal y una alta compresión vertical, junto con deformaciones cortantes que podrían indicar cambios significativos en la geometría.

σ_{13} =	σ_{13x}	=	-6293.459805	kg/m^2	=	-0.629345981	kg/cm^2
	σ_{13y}		-74574.72686			-7.457472686	
	σ_{13xy}		-6010.702161			-0.601070216	

- Los esfuerzos reflejan alta compresión en ambas direcciones y esfuerzos cortantes negativos. Esto sugiere que el elemento está en una zona de alta carga, con una combinación de compresión significativa y esfuerzos cortantes que pueden indicar áreas potenciales de fallo.

ELEMENTO “14”:

ε_{14} =	ε_{14x}	=	1.37235E-05
	ε_{14y}		-6.0037E-05
	ε_{14xy}		2.93816E-05

- El elemento 14 presenta una elongación horizontal considerable y una compresión vertical significativa, con una deformación cortante positiva importante. Las deformaciones indican que el elemento está sometido a una alta carga en la dirección vertical y está experimentando cambios angulares positivos notables.

σ_{14} =	σ_{14x}	=	-4958.391843	kg/m^2	=	-0.495839184	kg/cm^2
	σ_{14y}		-94366.00717			-9.436600717	
	σ_{14xy}		17807.21698			1.780721698	

- Esto sugiere que el elemento está en una región de alta deformación y carga, con una combinación de compresión vertical y esfuerzos cortantes positivos que podrían indicar áreas críticas para el análisis de estabilidad.

En general:

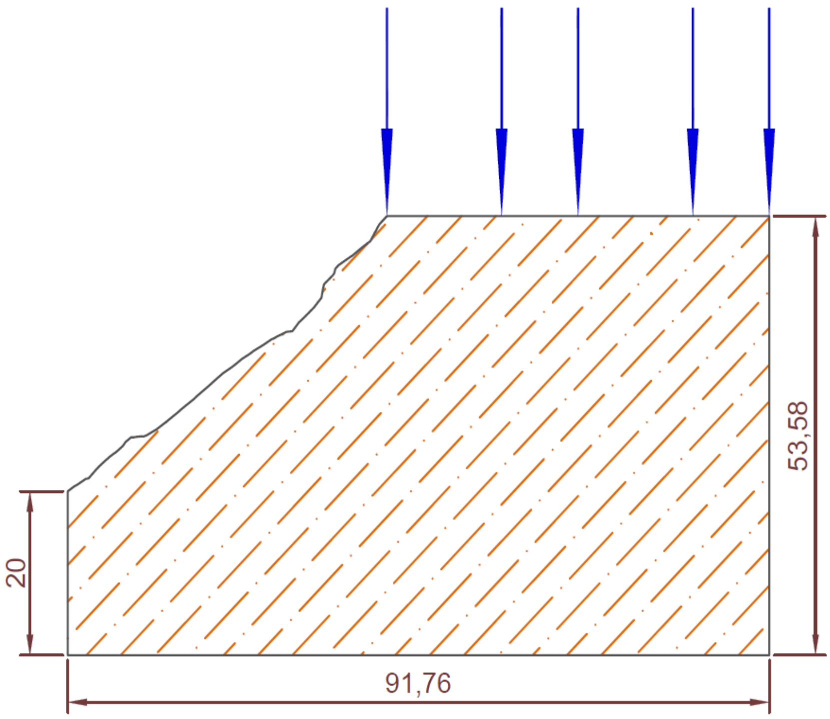
- Los Elementos 13 y 14 muestran las mayores deformaciones y esfuerzos, indicando que están sometidos a las condiciones de carga más severas y podrían ser críticos en términos de estabilidad y posibles fallos estructurales. Los elementos con menores deformaciones y esfuerzos, como los Elementos 1, 2 y 3, están menos afectados por las cargas aplicadas. Este análisis es fundamental para identificar áreas que requieren refuerzo adicional para prevenir fallos estructurales.

5.3.3 Aplicación y análisis del talud progresiva 2+560

En la siguiente Figura 50 se presenta la sección transversal del talud situado en la Progresiva 2+560 de la vía Articulación Juliaca. Al igual que en el caso del talud examinado previamente, esta sección transversal muestra de manera detallada la configuración del talud y las características del terreno circundante. La representación gráfica incluye la visualización de las fuerzas que actúan sobre el talud, proporcionando una perspectiva clara de cómo estas fuerzas interactúan con la estructura del talud en esta ubicación específica.

Figura 50

Sección transversal prog 2+560



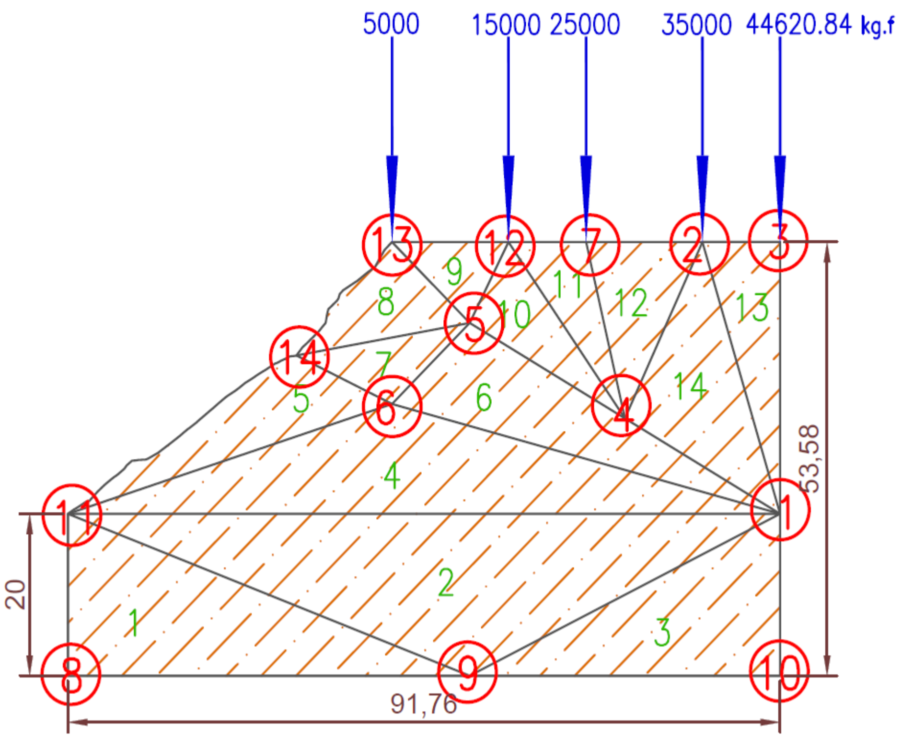
Fuente: Elaboración propia

5.3.3.1 Discretización y numeración de elementos y nodos

Al igual que el anterior, procederemos a la división en elementos triangulares de tres nodos. En la Figura 51 se presenta la discretización del talud conformado por 14 elementos triangules y 13 nodos que tienen sus respectivas coordenadas.

Figura 51

Discretización de la sección del talud prog 2+560



Fuente*: Elaboración propia*

Seguidamente en la Tabla 41 se muestra la lectura de los nodos que se realizan en sentido antihorario, así mismo en la Tabla 42 se presenta las coordenadas de cada nodo.

Tabla 41

Numeración de nodos en sentido antihorario prog 2+560

N° Elemento	Nodo i	Nodo j	Nodo K
1	8	9	11
2	11	9	1
3	9	10	1
4	11	1	6
5	11	6	14
6	6	1	5
7	14	6	5
8	14	5	13
9	13	5	12
10	5	4	12
11	4	7	12
12	4	2	7
13	1	3	2
14	1	2	4

Fuente: *Elaboración propia*

Tabla 42

Coordenadas de los nodos prog 2+260

Nodo	Desfase - X	Cota - Y
1	91.763	3897.425
2	81.763	3931.001
3	91.763	3931.001
4	71.763	3909.213
5	51.763	3921.001
6	41.762	3911.001
7	66.763	3931.001
8	0	3877.425
9	51.763	3877.425
10	91.763	3877.425
11	0	3897.425
12	56.763	3931.001
13	41.762	3931
14	29.431	3917

Fuente: *Elaboración propia*

5.3.3.2 Deducción de la matriz constitutiva

La matriz constitutiva o matriz de propiedades elásticos del macizo rocoso para un estado de deformación plano es.

$$[D] = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{(1-v)} & 0 \\ \frac{v}{(1-v)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2(1-v)} \end{bmatrix}$$

Además: se tiene la ecuación anterior en su forma reducida:

$$[D] = d_1 \begin{bmatrix} 1 & d_2 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

Entones para el desarrollo de la matriz D se requieren los siguientes datos:

E(kg/m2)	1546363947
v	0.2158
d1	1754778664
d2	0.275184902
d3	0.362407549

$$D = \begin{pmatrix} 1754778664 & 482888594.4 & 0 \\ 482888594.4 & 1754778664 & 0 \\ 0 & 0 & 635945034.9 \end{pmatrix}$$

D representa la matriz de las propiedades elásticas del macizo rocoso, este está en función del Módulo de elasticidad y el coeficiente de poisson. Siendo además este valor igual para todos los elementos del talud de la progresiva 2+560, ya que la litología es uniforme e isótropo.

5.3.3.3 Deducción de la matriz de deformación y de rigidez del elemento

A partir del capítulo IV del ítem 6.4.3 se desarrolló la matriz de deformación del elemento, denotado por [B], esto está definido a partir de las coordenadas o nodos de cada elemento, finalmente quedó expresado por:

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

De aquí se realizaron cambios de variable donde:

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \qquad b_1 = y_2 - y_3 \qquad c_1 = x_3 - x_2$$
$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \qquad b_2 = y_3 - y_1 \qquad c_2 = x_1 - x_3$$
$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \qquad b_3 = y_1 - y_2 \qquad c_3 = x_2 - x_1$$

Además:

$$2A = a_1 + a_2 + a_3$$

A: Área del elemento triangular

Para la deducción de la matriz de rigidez se usará el teorema de trabajos virtuales, esto quedó expresado en su forma matricial como sigue:

$$[K_e] = [B]^t[D][B]V$$

Aplicamos estos desarrollos a cada elemento del talud discretizado.

ELEMENTO “1”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 8	X1	0	Y1	3877.425
NODO 9	X2	51.763	Y2	3877.425
NODO 11	X3	0	Y3	3897.425

a1	201742.4103	b1	-20	c1	-51.763
a2	0	b2	20	c2	0
a3	-200707.1503	b3	0	c3	51.763

2A = a1 + a2 + a3 = 1035.26

$$B_1 = \begin{pmatrix} -0.019318818 & 0 & 0.019318818 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.05 \\ -0.05 & -0.019318818 & 0 & 0.019318818 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}$$

- −0.019318818 y −0.05-0.05−0.05 indican cómo las deformaciones están distribuidas en los nodos del elemento, con áreas que experimentan compresión y expansión.
- La variación de valores en las direcciones x e y muestra cómo las tensiones afectan a cada nodo.
- La matriz de deformaciones muestra que el elemento experimenta compresión en algunas áreas y expansión en otras. Las variaciones en los valores reflejan cómo las tensiones se distribuyen y afectan a cada nodo, indicando zonas de mayor y menor deformación.

Volumen(m3) = 517.63

K_1		u8	v8	u9	v9	u11	v11
	u8	1161963076	559416814.7	-339002504.5	-317972517.5	-822960571	-241444297.2
	v8	559416814.7	2393672267	-241444297.2	-122857066.8	-317972517	-2270815200
	u9	-339002504.5	-241444297.2	339002504.5	0	0	241444297.2
	v9	-317972517.5	-122857066.8	0	122857066.8	317972517.5	0
	u11	-822960571.1	-317972517.5	0	317972517.5	822960571.1	0
	v11	-241444297.2	-2270815200	241444297.2	0	0	2270815200

- El elemento presenta una alta rigidez, sugiriendo que tiene una gran capacidad para soportar cargas. La matriz K_1 muestra cómo se distribuyen las fuerzas entre los nodos y cómo cada nodo afecta a los demás, destacando la resistencia del elemento a deformaciones bajo cargas.

ELEMENTO “2”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 11	X1	0	Y1	3897.425
NODO 9	X2	51.763	Y2	3877.425
NODO 1	X3	91.763	Y3	3897.425

a1	-154061.74	b1	-20	c1	40
a2	357639.4103	b2	0	c2	-91.763
a3	-201742.4103	b3	20	c3	51.763

2A = a1 + a2 + a3 = 1835.26

$$B_2 = \begin{pmatrix} -0.010897638 & 0 & 0 & 0 & 0.010897638 & 0 \\ 0 & 0.021795277 & 0 & -0.05 & 0 & 0.028204723 \\ 0.021795277 & -0.010897638 & -0.05 & 0 & 0.028204723 & 0.010897638 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 917.63

K_2		u11	v11	u9	v9	u1	v1
	u11	468441398.4	-243852888.3	-635945034.9	241444297.2	167503636.5	2408591.064
	v11	-243852888.3	834220730.8	317972517.5	-1754778664	-74119629.2	920557933.5
	u9	-635945034.9	317972517.5	1458905606	0	-822960571	-317972517.5
	v9	241444297.2	-1754778664	0	4025593864	-241444297	-2270815200
	u1	167503636.5	-74119629.18	-822960571.1	-241444297.2	655456934.5	315563926.4
	v1	2408591.064	920557933.5	-317972517.5	-2270815200	315563926.4	1350257266

- Tiene una alta capacidad de carga y una matriz de rigidez que muestra una notable resistencia a las fuerzas aplicadas. La distribución de tensiones en la matriz de deformaciones refleja tanto compresión como expansión en diferentes áreas del elemento, lo que es crucial para entender su comportamiento estructural en el contexto del análisis del talud.

ELEMENTO “3”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 9	X1	51.763	Y1	3877.425
NODO 10	X2	91.763	Y2	3877.425
NODO 1	X3	91.763	Y3	3897.425

a1	1835.26	b1	-20	c1	0
a2	154061.74	b2	20	c2	-40
a3	-155097	b3	0	c3	40

2A = a1 + a2 + a3 = 800

$$B_3 = \begin{pmatrix} -0.025 & 0 & 0.025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.05 & 0 & 0.05 \\ 0 & -0.025 & -0.05 & 0.025 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}$$

- −0.025 y 0.0250.0250.025 indican cómo las deformaciones están distribuidas en los nodos del elemento, con áreas que experimentan compresión y expansión.

Volumen(m3) = 400

		u9	v9	u10	v10	u1	v1
K_3	u9	438694666.1	0	-438694666.1	241444297.2	0	-241444297.2
	v9	0	158986258.7	317972517.5	-158986258.7	-317972517	0
	u10	-438694666.1	317972517.5	1074639701	-559416814.7	-635945035	241444297.2
	v10	241444297.2	-158986258.7	-559416814.7	1913764923	317972517.5	-1754778664
	u1	0	-317972517.5	-635945034.9	317972517.5	635945034.9	0
	v1	-241444297.2	0	241444297.2	-1754778664	0	1754778664

- El elemento presenta una buena rigidez, sugiriendo que tiene una capacidad significativa para soportar cargas. La matriz K_3 muestra cómo se distribuyen las fuerzas entre los nodos y cómo las interacciones entre ellos influyen en la capacidad del elemento para resistir las cargas.

ELEMENTO “4”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 11	X1	0	Y1	3897.425
NODO 1	X2	91.763	Y2	3897.425
NODO 6	X3	41.762	Y3	3911.001

a1	196120.9219	b1	-13.576	c1	-50.001
a2	162764.2629	b2	13.576	c2	-41.762
a3	-357639.4103	b3	0	c3	91.763

2A = a1 + a2 + a3 = 1245.774488

$$B_4 = \begin{pmatrix} -0.010897638 & 0 & 0.010897638 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.040136478 & 0 & -0.033522921 & 0 & 0.073659399 \\ -0.040136478 & -0.010897638 & -0.033522921 & 0.010897638 & 0.073659399 & 0 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 622.887244

K_4		u11	v11	u1	v1	u6	v6
	u11	767934146.1	304822206.7	403172501.3	-63377909.45	-1171106647	-241444297.2
	v11	304822206.7	1807843955	13150310.79	1423619215	-317972517	-3231463170
	u1	403172501.3	13150310.79	574963052.2	-254594608	-978135553	241444297.2
	v1	-63377909.45	1423619215	-254594608	1275374103	317972517.5	-2698993318
	u6	-1171106647	-317972517.5	-978135553.5	317972517.5	2149242201	0
	v6	-241444297.2	-3231463170	241444297.2	-2698993318	0	5930456488

- Tiene una buena capacidad de carga, respaldada por una matriz de rigidez que indica una alta resistencia estructural. La matriz de deformaciones muestra cómo las tensiones están distribuidas en el elemento, afectando tanto a la compresión como a la expansión en diferentes áreas. Estos resultados sugieren que el elemento es robusto y adecuado para soportar cargas significativas en el contexto del análisis del talud.

ELEMENTO “5”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR	
NODO 11	X1	0	Y1	3897.425	
NODO 6	X2	41.762	Y2	3911.001	
NODO 14	X3	29.431	Y3	3917	
a1	48477.08357	b1	-5.999	c1	-12.331
a2	114705.1152	b2	19.575	c2	-29.431
a3	-162764.2629	b3	-13.576	c3	41.762

2A = a1 + a2 + a3 = 417.935894

$$\begin{pmatrix} -0.014353876 & 0 & 0.046837327 & 0 & -0.03248345 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_5 = \begin{matrix} 0 & -0.029504525 & 0 & -0.070419891 & 0 & 0.099924416 \\ -0.029504525 & -0.014353876 & -0.070419891 & 0.046837327 & 0.099924416 & -0.032483451 \end{matrix}$$

- Valores como -0.014353876 y 0.046837327indican cómo las deformaciones están distribuidas en los nodos del elemento, reflejando áreas con compresión y expansión.

Volumen(m3) = 208.967947

		u11	v11	u6	v6	u14	v14
K_5	u11	191235887.8	99015458.77	29584365.51	-81647485.66	-220820253	-17367973.11
	v11	99015458.77	346592311.6	-5119265.414	672535981.8	-93896193.4	-1019128293
	u6	29584365.51	-5119265.414	1463433107	-771138939.4	-1493017472	776258204.8
	v6	-81647485.66	672535981.8	-771138939.4	2109943922	852786425.1	-2782479904
	u14	-220820253.3	-93896193.36	-1493017472	852786425.1	1713837725	-758890231.7
	v14	-17367973.11	-1019128293	776258204.8	-2782479904	-758890232	3801608198

- Muestra una buena capacidad de carga con una matriz de rigidez que sugiere que el elemento puede resistir las cargas aplicadas. La matriz K_5 evidencia cómo las fuerzas se distribuyen entre los nodos y cómo estas interacciones afectan la estructura general del elemento.

ELEMENTO “6”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 6	X1	41.762	Y1	3911.001
NODO 1	X2	91.763	Y2	3897.425
NODO 5	X3	51.763	Y3	3921.001

a1	158060.4045	b1	-23.576	c1	-40
a2	38696.301	b2	10	c2	-10.001
a3	-196120.9219	b3	13.576	c3	50.001

2A = a1 + a2 + a3 635.783576

$$B_6 = \begin{pmatrix} -0.037081801 & 0 & 0.015728623 & 0 & 0.021353178 & 0 \\ 0 & -0.062914491 & 0 & -0.015730196 & 0 & 0.078644686 \\ -0.062914491 & -0.037081801 & -0.015730196 & 0.015728623 & 0.078644686 & 0.021353178 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 317.891788

		u6	v6	u1	v1	u5	v5
K_6	u6	1567252485	829767318.3	-125280969.9	-110509943.7	-1441971515	-719257374.7
	v6	829767318.3	2486004591	-33981723.44	434150296	-795785595	-2920154887
	u1	-125280969.9	-33981723.44	188023958.5	-87997359.08	-62742988.6	121979082.5
	v1	-110509943.7	434150296	-87997359.08	188041557.1	198507302.8	-622191853.1
	u5	-1441971515	-795785594.9	-62742988.61	198507302.8	1504714503	597278292.1
	v5	-719257374.7	-2920154887	121979082.5	-622191853.1	597278292.1	3542346740

- Exhibe una buena capacidad de carga y una considerable rigidez, evidenciada por su matriz de rigidez. Las deformaciones registradas sugieren una distribución significativa de tensiones en diferentes áreas del elemento, con algunas zonas experimentando mayor compresión y otras expansiones. Estos resultados sugieren que el Elemento 6 es robusto y puede manejar las cargas aplicadas de manera efectiva, con interacciones notables entre los nodos que contribuyen a su capacidad estructural general.

ELEMENTO “7”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 14	X1	29.431	Y1	3917
NODO 6	X2	41.762	Y2	3911.001
NODO 5	X3	51.763	Y3	3921.001

a1	-38696.301	b1	-10	c1	10.001
a2	87356.69057	b2	4.001	c2	-22.332
a3	-48477.08357	b3	5.999	c3	12.331

2A = a1 + a2 + a3 = 183.305999

$$B_7 = \begin{pmatrix} -0.054553588 & 0 & 0.021826891 & 0 & 0.032726698 & 0 \\ 0 & 0.054559044 & 0 & -0.121829073 & 0 & 0.06727003 \\ 0.054559044 & -0.054553588 & -0.121829073 & 0.021826891 & 0.06727003 & 0.032726698 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 91.6529995

		u14	v14	u6	v6	u5	v5
K_7	u14	652147476.8	-305212464.1	-578928520.2	363559804.1	-73218956.6	-58347340.01
	v14	-305212464.1	652208516.2	440088024.3	-1138425698	-134875560	486217182.2
	u6	-578928520.2	440088024.3	941725526.9	-272681081.9	-362797007	-167406942.5
	v6	363559804.1	-1138425698	-272681081.9	2414869978	-90878722.2	-1276444280
	u5	-73218956.61	-134875560.3	-362797006.7	-90878722.24	436015963.3	225754282.5
	v5	-58347340.01	486217182.2	-167406942.5	-1276444280	225754282.5	790227097.9

- La rigidez registrada sugiere una distribución significativa de tensiones en diferentes áreas del elemento

ELEMENTO “8”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 14	X1	29.431	Y1	3917
NODO 5	X2	51.763	Y2	3921.001
NODO 13	X3	41.762	Y3	3931

a1	39731.50924	b1	-9.999	c1	-10.001
a2	47888.493	b2	14	c2	-12.331
a3	-87356.69057	b3	-4.001	c3	22.332

2A = a1 + a2 + a3 = 263.311669

$$B_8 = \begin{pmatrix} -0.03797401 & 0 & 0.053168931 & 0 & -0.01519492 & 0 \\ 0 & -0.037981606 & 0 & -0.046830435 & 0 & 0.084812041 \\ -0.037981606 & -0.03797401 & -0.046830435 & 0.053168931 & 0.084812041 & -0.015194921 \end{pmatrix}$$

- La variabilidad en los valores de B_8 refleja la distribución de tensiones en el elemento.

Volumen(m3) = 131.6558345

K_8		u14	v14	u5	v5	u13	v13
	u14	453929741.4	212454241.5	-317529076.2	-56021387.41	-136400665	-156432854.1
	v14	212454241.5	454014723.1	20506832.83	241880646.8	-232961074	-695895369.9
	u5	-317529076.2	20506832.83	836716289.5	-366768258.9	-519187213	346261426.1
	v5	-56021387.41	241880646.8	-366768258.9	743350215	422789646.3	-985230861.8
	u13	-136400665.2	-232961074.3	-519187213.4	422789646.3	655587878.6	-189828572
	v13	-156432854.1	-695895369.9	346261426.1	-985230861.8	-189828572	1681126232

- Tiene una alta rigidez, lo que indica que puede soportar bien las cargas. La matriz K_8 muestra que hay interacciones significativas entre nodos, lo que puede afectar la distribución de las fuerzas en el elemento. La alta rigidez en general sugiere que el elemento es resistente a las deformaciones bajo las condiciones de carga dadas.

ELEMENTO “9”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 13	X1	41.762	Y1	3931
NODO 5	X2	51.763	Y2	3921.001
NODO 12	X3	56.763	Y3	3931.001

a1	-19087.375	b1	-10	c1	5

a2	58968.88924	b2	0.001	c2	-15.001
a3	-39731.50924	b3	9.999	c3	10.001

2A = a1 + a2 + a3 = 150.005

$$B_9 = \begin{pmatrix} -0.066664445 & 0 & 6.66644E-06 & 0 & 0.066657778 & 0 \\ 0 & 0.033332222 & 0 & -0.100003333 & 0 & 0.066671111 \\ 0.033332222 & -0.066664445 & -0.100003333 & 6.66644E-06 & 0.066671111 & 0.066657778 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 75.0025

K_9

	u13	v13	u5	v5	u12	v12
u13	637900377.6	-186466056	-159050048.8	241462943.8	-478850329	-54996887.8
v13	-186466056	358201293.6	317991164.1	-438730486.2	-131525108	80529192.58
u5	-159050048.8	317991164.1	477006478.4	-55943.54614	-317956430	-317935220.5
v5	241462943.8	-438730486.2	-55943.54614	1316215610	-241407000	-877485124
u12	-478850328.9	-131525108	-317956429.7	-241407000.3	796806758.6	372932108.3
v12	-54996887.8	80529192.58	-317935220.5	-877485124	372932108.3	796955931.4

- El elemento 9 tiene una buena capacidad de carga y alta rigidez, como se refleja en su matriz de rigidez. La matriz de deformaciones muestra que el elemento experimenta tanto compresión como expansión en diferentes áreas. Aunque el volumen del elemento es relativamente pequeño, su alta rigidez sugiere que es eficaz en la distribución de fuerzas y puede manejar las cargas aplicadas de manera efectiva.

ELEMENTO “10”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 5	X1	51.763	Y1	3921.001
NODO 4	X2	71.763	Y2	3909.213
NODO 12	X3	56.763	Y3	3931.001

a1	60201.76724	b1	-21.788	c1	-15
a2	19087.375	b2	10	c2	-5
a3	-79030.20224	b3	11.788	c3	20

2A = a1 + a2 + a3 = 258.94

$$B_{10} = \begin{pmatrix} -0.084143045 & 0 & 0.038618985 & 0 & 0.04552406 & 0 \\ 0 & -0.057928478 & 0 & -0.019309493 & 0 & 0.07723797 \end{pmatrix}$$

-0.057928478 -0.084143045 -0.019309493 0.038618985 0.07723797 0.04552406

Volumen(m3) = 129.47

K_{10}		u5	v5	u4	v4	u12	v12
	u5	1884820417	706065510.8	-646163778.8	-82617347.19	-1238656639	-623448163.6
	v5	706065510.8	1345329194	-6089126.94	-13422616.03	-699976384	-1331906578
	u4	-646163778.8	-6089126.94	369538295.2	-108020548.1	276625483.6	114109675.1
	v4	-82617347.19	-13422616.03	-108020548.1	207507473	190637895.3	-194084856.9
	u12	-1238656639	-699976383.9	276625483.6	190637895.3	962031155	509338488.6
	v12	-623448163.6	-1331906578	114109675.1	-194084856.9	509338488.6	1525991435

- Muestra una buena capacidad de carga y alta rigidez. La matriz de deformaciones sugiere que el elemento experimenta tanto compresión como expansión en diferentes áreas. Aunque su volumen es intermedio, la alta rigidez indica que el elemento es efectivo en la distribución y manejo de las fuerzas aplicadas. Su comportamiento en términos de rigidez y deformaciones es clave para entender su desempeño en el sistema global.

ELEMENTO “11”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 4	X1	71.763	Y1	3909.213
NODO 7	X2	66.763	Y2	3931.001
NODO 12	X3	56.763	Y3	3931.001

a1	39310.01	b1	0	c1	-10
a2	-60201.76724	b2	21.788	c2	15
a3	21109.63724	b3	-21.788	c3	-5

2A = a1 + a2 + a3 = 217.88

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.045896824 & 0 & 0.068845236 & 0 & -0.022948412 \\ -0.045896824 & 0 & 0.068845236 & 0.1 & -0.02294841 & -0.1 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 108.94

K_{11}		u4	v4	u7	v7	u12	v12

	u4	145939286.5	0	-218908929.8	-317972517.5	72969643.26	317972517.5
	v4	0	402693837	-241444297.2	-604040755.5	241444297.2	201346918.5
	u7	-218908929.8	-241444297.2	2240019271	839125222	-2021110342	-597680924.8
	v7	-317972517.5	-604040755.5	839125222	1598859654	-521152705	-994818898.8
	u12	72969643.26	241444297.2	-2021110342	-521152704.5	1948140698	279708407.3
	v12	317972517.5	201346918.5	-597680924.8	-994818898.8	279708407.3	793471980.3

- Muestra una buena capacidad de carga, con una alta rigidez en varias direcciones. La alta rigidez sugiere que el elemento es capaz de soportar cargas importantes sin experimentar grandes deformaciones. Las interacciones entre nodos, representadas por los términos fuera de la diagonal, reflejan cómo las fuerzas se distribuyen a través del elemento, afectando su capacidad de carga general.

ELEMENTO “12”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 4	X1	71.763	Y1	3909.213
NODO 2	X2	81.763	Y2	3931.001
NODO 7	X3	66.763	Y3	3931.001

a1	58965.015	b1	0	c1	-15
a2	-21109.63724	b2	21.788	c2	5
a3	-37528.55776	b3	-21.788	c3	10

2A = a1 + a2 + a3 = 326.82

$$B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.068845236 & 0 & 0.022948412 & 0 & 0.045896824 \\ -0.068845236 & 0 & 0.022948412 & 0.1 & 0.045896824 & -0.1 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 163.41

K_{12}		u4	v4	u2	v2	u7	v7
	u4	328363394.7	0	-109454464.9	-476958776.2	-218908930	476958776.2
	v4	0	906061133.3	-362166445.8	-302020377.8	362166445.8	-604040755.5
	u2	-109454464.9	-362166445.8	1948140698	279708407.3	-1838686234	82458038.48
	v2	-476958776.2	-302020377.8	279708407.3	793471980.3	197250368.9	-491451602.5
	u7	-218908929.8	362166445.8	-1838686234	197250368.9	2057595163	-559416814.7
	v7	476958776.2	-604040755.5	82458038.48	-491451602.5	-559416815	1095492358

- Tiene una alta rigidez en varias direcciones, lo que sugiere que puede soportar grandes cargas. Los términos fuera de la diagonal indican cómo las fuerzas se transfieren entre los nodos, afectando la capacidad general del elemento para soportar las cargas aplicadas.

ELEMENTO “13”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 1	X1	91.763	Y1	3897.425
NODO 3	X2	91.763	Y2	3931.001
NODO 2	X3	81.763	Y3	3931.001

a1	39310.01	b1	0	c1	-10
a2	-42055.28449	b2	33.576	c2	10
a3	3081.034488	b3	-33.576	c3	0

2A = a1 + a2 + a3 = 335.76

$$B_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.154103176 & 0 & -0.15410318 & 0 \\ 0 & -0.045896824 & 0 & 0.045896824 & 0 & 0 \\ -0.045896824 & 0 & 0.045896824 & 0.154103176 & 0 & -0.154103176 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 167.88

		u1	v1	u3	v3	u2	v2
K_{13}	u1	145939286.5	0	-145939286.5	-490005748.4	0	490005748.4
	v1	0	402693837	-372073330.4	-402693837	372073330.4	0
	u3	-145939286.5	-372073330.4	4685699302	862079078.8	-4539760016	-490005748.4
	v3	-490005748.4	-402693837	862079078.8	2047937138	-372073330	-1645243301
	u2	0	372073330.4	-4539760016	-372073330.4	4539760016	0
	v2	490005748.4	0	-490005748.4	-1645243301	0	1645243301

- Tiene una alta rigidez en varias direcciones, lo que le permite soportar grandes cargas.

ELEMENTO “14”:

NODO	Xi	VALOR	Yi	VALOR
NODO 1	X1	91.763	Y1	3897.425

NODO 2	X2	81.763	Y2	3931.001
NODO 4	X3	71.763	Y3	3909.213

a1	37528.55776	b1	21.788	c1	-10
a2	-79030.20224	b2	11.788	c2	20
a3	42055.28449	b3	-33.576	c3	-10

2A = a1 + a2 + a3 = 553.64

$$B_{14} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.054103176 & 0 & -0.15410318 & 0 \\ 0 & -0.045896824 & 0 & 0.091793648 & 0 & -0.045896824 \\ -0.045896824 & 0.1 & 0.091793648 & 0.054103176 & -0.04589682 & -0.154103176 \end{pmatrix}$$

Volumen(m3) = 276.82

K_{14}		u1	v1	u2	v2	u4	v4
	u1	2057595163	-559416814.7	742387971.7	310855363.5	-2799983135	248561451.2
	v1	-559416814.7	1095492358	505316001.7	-430561670.5	54100812.96	-664930687.6
	u2	742387971.7	505316001.7	1143328196	605324528.3	-1885716167	-1110640530
	v2	310855363.5	-430561670.5	605324528.3	1813568121	-916179892	-1383006450
	u4	-2799983135	54100812.96	-1885716167	-916179891.8	4685699302	862079078.8
	v4	248561451.2	-664930687.6	-1110640530	-1383006450	862079078.8	2047937138

- El elemento 14 muestra una alta rigidez y una capacidad significativa para soportar cargas, gracias a su gran volumen. La matriz de deformaciones indica que el elemento está sometido a fuerzas que causan tanto compresión como expansión. Esta combinación de rigidez y volumen hace que el Elemento 14 sea crucial para la estabilidad y resistencia de la estructura en la que se encuentra.

En general:

- El elemento 14 tiene la mayor deformación, mientras que el Elemento 9 muestra las menores deformaciones. El elemento 12 también tiene una deformación considerable.
- El Elemento 10 y el Elemento 14 presentan la mayor rigidez, lo que indica que son los elementos más fuertes y resistentes. Por otro lado, el Elemento 13 y el Elemento

11 muestran menor rigidez, lo que sugiere que son menos capaces de resistir cargas sin deformarse.

5.3.3.4 Ensamblaje de las matrices de rigidez (matriz global)

Esta matriz se presentará en el Anexo 10 de forma más visible.

		u1	v1	u2	v2	u3	v3	u4	v4	u5	v5	u6	v6	u7	v7	u8	v8	u9	v9	u10	v10	u11	v11	u12	v12	u13	v13	u14	v14
	u1	4257923430	-586444855.4	742387971.7	800861111.9	-145939286.5	-490005748	-2799983135	248561451.2	-62742988.61	121979082.5	-1103416523	207462573.8	0	0	0	0	-822960571.1	-559416814.7	-6.36E+08	3.18E+08	5.71E+08	-60969318	0	0	0	0	0	0
	v1	-586444855.4	6066637786	877389332.1	-430561670.5	-372073330.4	-402693837	54100812.96	-664930687.6	198507302.8	-622191853.1	207462573.8	-2264843022	0	0	0	0	-559416814.7	-2270815200	2.41E+08	-1.75E+09	-60969318	2.34E+09	0	0	0	0	0	0
	u2	742387971.7	877389332.1	7631228910	885032935.6	-4539760016	-372073330	-1995170632	-1472806976	0	0	0	0	-1838686234	82458038.48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v2	800861111.9	-430561670.5	885032935.6	4252283402	-490005748.4	-1645243301	-1393138668	-1685026828	0	0	0	0	197250368.9	-491451602.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u3	-145939286.5	-372073330.4	-4539760016	-490005748.4	4685699302	862079078.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v3	-490005748.4	-402693837	-372073330.4	-1645243301	862079078.8	2047937138	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u4	-2799983135	54100812.96	-1995170632	-1393138668	0	0	5529540279	754058530.7	-646163778.8	-6089126.94	0	0	-437817859.5	158986258.7	0	0	0	0	0	0	0	0	3.5E+08	4.32E+08	0	0	0	0
	v4	248561451.2	-664930687.6	-1472806976	-1685026828	0	0	754058530.7	3564199581	-82617347.19	-13422616.03	0	0	120722148.6	-1208081511	0	0	0	0	0	0	0	0	4.32E+08	7262062	0	0	0	0
	u5	-62742988.61	198507302.8	0	0	0	0	-646163778.8	-82617347.19	5139273652	1162273883	-1804768521	-886664317	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.56E+09	-9.41E+08	-6.78E+08	6.64E+08	-390748033	-1.14E+08
	v5	121979082.5	-622191853.1	0	0	0	0	-6089126.94	-13422616.03	1162273883	7737468857	-886664317.1	-4196599167	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9.41E+08	-2.21E+09	6.64E+08	-1.42E+09	-114368727	7.28E+08
	u6	-1103416523	207462573.8	0	0	0	0	0	0	-1804768521	-886664317.1	6121653319	-214052703	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.14E+09	-3.23E+08	0	0	0	0	-2.072E+09	1.22E+09
	v6	207462573.8	-2264843022	0	0	0	0	0	0	-886664317.1	-4196599167	-214052702.9	12941274980	0	0	0	0	0	0	0	0	-3.23E+08	-2.56E+09	0	0	0	0	1.216E+09	-3.92E+09
	u7	0	0	-1838686234	197250368.9	0	0	-437817859.5	120722148.6	0	0	0	0	4297614435	279708407.3	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.02E+09	-5.98E+08	0	0	0	0
K	v7	0	0	82458038.48	-491451602.5	0	0	158986258.7	-1208081511	0	0	0	0	279708407.3	2694352012	0	0	0	0	0	0	0	0	-5.21E+08	-9.95E+08	0	0	0	0
	u8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1161963076	559416814.7	-339002504.5	-317972517.5	0	0	-8.23E+08	-2.41E+08	0	0	0	0	0	0
	v8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	559416814.7	2393672267	-241444297.2	-122857066.8	0	0	-3.18E+08	-2.27E+09	0	0	0	0	0	0
	u9	-822960571.1	-559416814.7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-339002504.5	-241444297.2	2236602777	0	-4.39E+08	2.41E+08	-6.36E+08	5.59E+08	0	0	0	0	0	0
	v9	-559416814.7	-2270815200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-317972517.5	-122857066.8	0	4307437190	3.18E+08	-1.59E+08	5.59E+08	-1.75E+09	0	0	0	0	0	0
	u10	-635945034.9	241444297.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-438694666.1	317972517.5	1.07E+09	-5.59E+08	0	0	0	0	0	0	0	0
	v10	317972517.5	-1754778664	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	241444297.2	-158986258.7	-5.59E+08	1.91E+09	0	0	0	0	0	0	0	0
	u11	570676137.8	-60969318.39	0	0	0	0	0	0	0	0	-1141522282	-323091783	0	0	-822960571.1	-317972517.5	-635945034.9	559416814.7	0	0	2.25E+09	1.6E+08	0	0	0	0	-220820253	-17367973
	v11	-60969318.39	2344177148	0	0	0	0	0	0	0	0	-323091782.9	-2558927188	0	0	-241444297.2	-2270815200	559416814.7	-1754778664	0	0	1.6E+08	5.26E+09	0	0	0	0	-93896193	-1.02E+09
	u12	0	0	0	0	0	0	349595126.9	432082192.5	-1556613068	-941383384.1	0	0	-2021110342	-521152704.5	0	0	0	0	0	0	0	0	3.71E+09	1.16E+09	-4.79E+08	-1.32E+08	0	0
	v12	0	0	0	0	0	0	432082192.5	7262061.581	-941383384.1	-2209391702	0	0	-597680924.8	-994818898.8	0	0	0	0	0	0	0	0	1.16E+09	3.12E+09	-54996888	80529193	0	0
	u13	0	0	0	0	0	0	0	0	-678237262.1	664252590.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4.79E+08	-54996888	1.29E+09	-3.76E+08	-136400665	-2.33E+08
	v13	0	0	0	0	0	0	0	0	664252590.1	-1423961348	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.32E+08	80529193	-3.76E+08	2.04E+09	-156432854	-6.96E+08
	u14	0	0	0	0	0	0	0	0	-390748032.8	-114368727.4	-2071945992	1216346229	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.21E+08	-93896193	0	0	-1.36E+08	-1.56E+08	2.82E+09	-8.52E+08
	v14	0	0	0	0	0	0	0	0	-114368727.4	728097829	1216346229	-3920905603	0	0	0	0	0	0	0	0	-17367973	-1.02E+09	0	0	-2.33E+08	-6.96E+08	-851648454	4.91E+09

Luego eliminamos las restricciones.

		u1	v1	u2	v2	u3	v3	u4	v4	u5	v5	u6	v6	u7	v7	u8	v8	u9	v9	u10	v10	u11	v11	u12	v12	u13	v13	u14	v14
	u1	4257923430	-586444855.4	742387971.7	800861111.9	-145939286.5	-490005748	-2799983135	248561451.2	-62742988.61	121979082.5	-1103416523	207462573.8	0	0	0	0	-822960571.1	-559416814.7	-6.36E+08	3.18E+08	5.71E+08	-60969318	0	0	0	0	0	0
	v1	-586444855.4	6066637786	877389332.1	-430561670.5	-372073330.4	-402693837	54100812.96	-664930687.6	198507302.8	-622191853.1	207462573.8	-2264843022	0	0	0	0	-559416814.7	-2270815200	2.41E+08	-1.75E+09	-60969318	2.34E+09	0	0	0	0	0	0
	u2	742387971.7	877389332.1	7631228910	885032935.6	-4539760016	-372073330	-1995170632	-1472806976	0	0	0	0	-1838686234	82458038.48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v2	800861111.9	-430561670.5	885032935.6	4252283402	-490005748.4	-1645243301	-1393138668	-1685026828	0	0	0	0	197250368.9	-491451602.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u3	-145939286.5	-372073330.4	-4539760016	-490005748.4	4685699302	862079078.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v3	-490005748.4	-402693837	-372073330.4	-1645243301	862079078.8	2047937138	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u4	-2799983135	54100812.96	-1995170632	-1393138668	0	0	5529540279	754058530.7	-646163778.8	-6089126.94	0	0	-437817859.5	158986258.7	0	0	0	0	0	0	0	0	3.5E+08	4.32E+08	0	0	0	0
	v4	248561451.2	-664930687.6	-1472806976	-1685026828	0	0	754058530.7	3564199581	-82617347.19	-13422616.03	0	0	120722148.6	-1208081511	0	0	0	0	0	0	0	0	4.32E+08	7262062	0	0	0	0
	u5	-62742988.61	198507302.8	0	0	0	0	-646163778.8	-82617347.19	5139273652	1162273883	-1804768521	-886664317	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.56E+09	-9.41E+08	-6.78E+08	6.64E+08	-390748033	-1.14E+08
	v5	121979082.5	-622191853.1	0	0	0	0	-6089126.94	-13422616.03	1162273883	7737468857	-886664317.1	-4196599167	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9.41E+08	-2.21E+09	6.64E+08	-1.42E+09	-114368727	7.28E+08
	u6	-1103416523	207462573.8	0	0	0	0	0	0	-1804768521	-886664317.1	6121653319	-214052703	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.14E+09	-3.23E+08	0	0	0	0	-2.072E+09	1.22E+09
	v6	207462573.8	-2264843022	0	0	0	0	0	0	-886664317.1	-4196599167	-214052702.9	12941274980	0	0	0	0	0	0	0	0	-3.23E+08	-2.56E+09	0	0	0	0	1.216E+09	-3.92E+09
	u7	0	0	-1838686234	197250368.9	0	0	-437817859.5	120722148.6	0	0	0	0	4297614435	279708407.3	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.02E+09	-5.98E+08	0	0	0	0
K	v7	0	0	82458038.48	-491451602.5	0	0	158986258.7	-1208081511	0	0	0	0	279708407.3	2694352012	0	0	0	0	0	0	0	0	-5.21E+08	-9.95E+08	0	0	0	0
	u8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1161963076	559416814.7	-339002504.5	-317972517.5	0	0	-8.23E+08	-2.41E+08	0	0	0	0	0	0
	v8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	559416814.7	2393672267	-241444297.2	-122857066.8	0	0	-3.18E+08	-2.27E+09	0	0	0	0	0	0
	u9	-822960571.1	-559416814.7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-339002504.5	-241444297.2	2236602777	0	-4.39E+08	2.41E+08	-6.36E+08	5.59E+08	0	0	0	0	0	0
	v9	-559416814.7	-2270815200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-317972517.5	-122857066.8	0	4307437190	3.18E+08	-1.59E+08	5.59E+08	-1.75E+09	0	0	0	0	0	0
	u10	-635945034.9	241444297.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-438694666.1	317972517.5	1.07E+09	-5.59E+08	0	0	0	0	0	0	0	0
	v10	317972517.5	-1754778664	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	241444297.2	-158986258.7	-5.59E+08	1.91E+09	0	0	0	0	0	0	0	0
	u11	570676137.8	-60969318.39	0	0	0	0	0	0	0	0	-1141522282	-323091783	0	0	-822960571.1	-317972517.5	-635945034.9	559416814.7	0	0	2.25E+09	1.6E+08	0	0	0	0	-220820253	-17367973
	v11	-60969318.39	2344177148	0	0	0	0	0	0	0	0	-323091782.9	-2558927188	0	0	-241444297.2	-2270815200	559416814.7	-1754778664	0	0	1.6E+08	5.26E+09	0	0	0	0	-93896193	-1.02E+09
	u12	0	0	0	0	0	0	349595126.9	432082192.5	-1556613068	-941383384.1	0	0	-2021110342	-521152704.5	0	0	0	0	0	0	0	0	3.71E+09	1.16E+09	-4.79E+08	-1.32E+08	0	0
	v12	0	0	0	0	0	0	432082192.5	7262061.581	-941383384.1	-2209391702	0	0	-597680924.8	-994818898.8	0	0	0	0	0	0	0	0	1.16E+09	3.12E+09	-54996888	80529193	0	0
	u13	0	0	0	0	0	0	0	0	-678237262.1	664252590.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4.79E+08	-54996888	1.29E+09	-3.76E+08	-136400665	-2.33E+08
	v13	0	0	0	0	0	0	0	0	664252590.1	-1423961348	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.32E+08	80529193	-3.76E+08	2.04E+09	-156432854	-6.96E+08
	u14	0	0	0	0	0	0	0	0	-390748032.8	-114368727.4	-2071945992	1216346229	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.21E+08	-93896193	0	0	-1.36E+08	-1.56E+08	2.82E+09	-8.52E+08
	v14	0	0	0	0	0	0	0	0	-114368727.4	728097829	1216346229	-3920905603	0	0	0	0	0	0	0	0	-17367973	-1.02E+09	0	0	-2.33E+08	-6.96E+08	-851648454	4.91E+09

Finalmente, sin considerar los puntos de apoyo, la matriz de rigidez global quedará expresada como sigue.

		u2	v2	u3	v3	u4	v4	u5	v5	u6	v6	u7	v7	u12	v12	u13	v13	u14	v14
	u2	7631228910	885032935.6	-4539760016	-372073330.4	-1995170632	-1472806976	0	0	0	0	-1838686234	82458038.48	0	0	0	0	0	0
	v2	885032935.6	4252283402	-490005748.4	-1645243301	-1393138668	-1685026828	0	0	0	0	197250368.9	-491451603	0	0	0	0	0	0
	u3	-4539760016	-490005748.4	4685699302	862079078.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v3	-372073330.4	-1645243301	862079078.8	2047937138	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u4	-1995170632	-1393138668	0	0	5529540279	754058530.7	-646163778.8	-6089126.94	0	0	-437817859.5	158986258.7	349595126.9	432082192.5	0	0	0	0
	v4	-1472806976	-1685026828	0	0	754058530.7	3564199581	-82617347.19	-13422616.03	0	0	120722148.6	-1208081511	432082192.5	7262061.581	0	0	0	0
	u5	0	0	0	0	-646163778.8	-82617347.2	5139273652	1162273883	-1804768521	-886664317.1	0	0	-1556613068	-941383384.1	-678237262.1	664252590.1	-390748032.8	-114368727.4
	v5	0	0	0	0	-6089126.94	-13422616	1162273883	7737468857	-886664317.1	-4196599167	0	0	-941383384.1	-2209391702	664252590.1	-1423961348	-114368727.4	728097829
Kred	u6	0	0	0	0	0	0	-1804768521	-886664317.1	6121653319	-214052702.9	0	0	0	0	0	0	-2071945992	1216346229
	v6	0	0	0	0	0	0	-886664317.1	-4196599167	-214052702.9	12941274980	0	0	0	0	0	0	1216346229	-3920905603
	u7	-1838686234	197250368.9	0	0	-437817859.5	120722148.6	0	0	0	0	4297614435	279708407.3	-2021110342	-597680924.8	0	0	0	0
	v7	82458038.48	-491451602.5	0	0	158986258.7	-1208081511	0	0	0	0	279708407.3	2694352012	-521152704.5	-994818898.8	0	0	0	0
	u12	0	0	0	0	349595126.9	432082192.5	-1556613068	-941383384.1	0	0	-2021110342	-521152705	3706978612	1161979004	-478850328.9	-131525108	0	0
	v12	0	0	0	0	432082192.5	7262061.581	-941383384.1	-2209391702	0	0	-597680924.8	-994818899	1161979004	3116419347	-54996887.8	80529192.58	0	0
	u13	0	0	0	0	0	0	-678237262.1	664252590.1	0	0	0	0	-478850328.9	-54996887.8	1293488256	-376294628	-136400665.2	-232961074.3
	v13	0	0	0	0	0	0	664252590.1	-1423961348	0	0	0	0	-131525108	80529192.58	-376294628	2039327525	-156432854.1	-695895369.9
	u14	0	0	0	0	0	0	-390748032.8	-114368727.4	-2071945992	1216346229	0	0	0	0	-136400665.2	-156432854.1	2819914944	-851648454.3
	v14	0	0	0	0	0	0	-114368727.4	728097829	1216346229	-3920905603	0	0	0	0	-232961074.3	-695895369.9	-851648454.3	4907831437

5.3.3.5 Determinación de desplazamientos nodales

La ecuación $[\delta] = [K]^{-1}[F]$ obtenido en el capítulo II, nos permite determinar los desplazamientos nodales de cada elemento triangular. Para ello es necesario contar con datos como la fuerza vertical aplicada sobre la plataforma superior del talud y la inversa de la matriz de rigidez global.

K^(-1)red	u2	v2	u3	v3	u4	v4	u5	v5	u6
u2	1.56201E-09	1.92565E-10	1.57479E-09	-2.24417E-10	6.04361E-10	5.99666E-10	5.13806E-10	9.50472E-11	2.48337E-10
v2	1.92565E-10	7.58637E-10	1.59704E-10	5.77221E-10	1.70427E-10	5.49817E-10	7.28972E-11	6.81199E-11	4.24104E-11
u3	1.57479E-09	1.59704E-10	1.82061E-09	-3.51975E-10	6.04809E-10	5.82271E-10	5.17561E-10	9.31817E-11	2.49815E-10
v3	-2.24417E-10	5.77221E-10	-3.51975E-10	1.05941E-09	-7.87768E-12	3.05546E-10	-6.59547E-11	3.27687E-11	-2.59703E-11
u4	6.04361E-10	1.70427E-10	6.04809E-10	-7.87768E-12	4.48674E-10	2.26277E-10	2.4441E-10	1.36051E-11	1.13642E-10
v4	5.99666E-10	5.49817E-10	5.82271E-10	3.05546E-10	2.26277E-10	9.13164E-10	1.78458E-10	1.14452E-10	9.71064E-11
u5	5.13806E-10	7.28972E-11	5.17561E-10	-6.59547E-11	2.4441E-10	1.78458E-10	6.25986E-10	1.14816E-12	2.85658E-10
v5	9.50472E-11	6.81199E-11	9.31817E-11	3.27687E-11	1.36051E-11	1.14452E-10	1.14816E-12	3.33814E-10	4.62878E-11
u6	2.48337E-10	4.24104E-11	2.49815E-10	-2.59703E-11	1.13642E-10	9.71064E-11	2.85658E-10	4.62878E-11	3.64405E-10
v6	6.81962E-11	2.91362E-11	6.77827E-11	7.26395E-12	1.94281E-11	5.35044E-11	3.26115E-11	1.31161E-10	6.30271E-12
u7	1.06716E-09	4.74393E-11	1.07983E-09	-2.22559E-10	4.3564E-10	3.03172E-10	5.01958E-10	9.14716E-11	2.42693E-10
v7	3.19309E-10	4.35264E-10	3.0337E-10	2.79986E-10	1.13472E-10	5.83064E-10	1.57546E-10	1.63692E-10	9.43501E-11
u12	7.67006E-10	-1.38244E-12	7.77775E-10	-1.89164E-10	3.17378E-10	1.53423E-10	5.55235E-10	5.98698E-11	2.63139E-10
v12	1.65759E-10	1.93666E-10	1.58998E-10	1.1877E-10	2.63695E-11	2.8936E-10	1.05882E-10	2.75109E-10	8.57941E-11
u13	5.85903E-10	2.67843E-11	5.92825E-10	-1.21584E-10	2.64223E-10	1.41204E-10	5.73942E-10	-4.77142E-11	2.63588E-10
v13	1.0025E-10	2.97483E-11	1.00255E-10	-8.99586E-14	1.8125E-11	6.74751E-11	-2.37112E-11	2.46697E-10	2.05049E-11
u14	2.86959E-10	3.9445E-11	2.89116E-10	-3.78791E-11	1.32103E-10	1.00146E-10	3.24095E-10	2.7041E-11	3.15764E-10
v14	8.26295E-11	1.66934E-11	8.30004E-11	-6.5158E-12	2.90692E-11	3.95057E-11	4.9795E-11	8.12253E-11	-1.52751E-11

	v6	u7	v7	u12	v12	u13	v13	u14	v14
u2	6.81962E-11	1.06716E-09	3.19309E-10	7.67006E-10	1.65759E-10	5.85903E-10	1.0025E-10	2.86959E-10	8.26295E-11
v2	2.91362E-11	4.74393E-11	4.35264E-10	-1.38244E-12	1.93666E-10	2.67843E-11	2.97483E-11	3.9445E-11	1.66934E-11
u3	6.77827E-11	1.07983E-09	3.0337E-10	7.77775E-10	1.58998E-10	5.92825E-10	1.00255E-10	2.89116E-10	8.30004E-11
v3	7.26395E-12	-2.22559E-10	2.79986E-10	-1.89164E-10	1.1877E-10	-1.21584E-10	-8.99586E-14	-3.78791E-11	-6.5158E-12
u4	1.94281E-11	4.3564E-10	1.13472E-10	3.17378E-10	2.63695E-11	2.64223E-10	1.8125E-11	1.32103E-10	2.90692E-11
v4	5.35044E-11	3.03172E-10	5.83064E-10	1.53423E-10	2.8936E-10	1.41204E-10	6.74751E-11	1.00146E-10	3.95057E-11
u5	3.26115E-11	5.01958E-10	1.57546E-10	5.55235E-10	1.05882E-10	5.73942E-10	-2.37112E-11	3.24095E-10	4.9795E-11
v5	1.31161E-10	9.14716E-11	1.63692E-10	5.98698E-11	2.75109E-10	-4.77142E-11	2.46697E-10	2.7041E-11	8.12253E-11
u6	6.30271E-12	2.42693E-10	9.43501E-11	2.63139E-10	8.57941E-11	2.63588E-10	2.05049E-11	3.15764E-10	-1.52751E-11
v6	1.61556E-10	6.75082E-11	7.15841E-11	6.056E-11	1.10522E-10	3.69733E-11	1.30322E-10	-7.62599E-12	1.27719E-10
u7	6.75082E-11	1.12323E-09	1.771E-10	8.39548E-10	1.22132E-10	6.10847E-10	1.13701E-10	2.84408E-10	8.63815E-11
v7	7.15841E-11	1.771E-10	8.51641E-10	1.38327E-10	4.00209E-10	1.14851E-10	1.01179E-10	9.29181E-11	4.91146E-11
u12	6.056E-11	8.39548E-10	1.38327E-10	1.04999E-09	-1.06938E-11	7.34325E-10	1.21114E-10	3.17309E-10	9.43144E-11
v12	1.10522E-10	1.22132E-10	4.00209E-10	-1.06938E-11	6.94752E-10	4.20537E-12	1.57123E-10	6.91932E-11	6.31737E-11
u13	3.69733E-11	6.10847E-10	1.14851E-10	7.34325E-10	4.20537E-12	1.49022E-09	1.81515E-10	3.81995E-10	1.47425E-10
v13	1.30322E-10	1.13701E-10	1.01179E-10	1.21114E-10	1.57123E-10	1.81515E-10	7.77447E-10	7.60505E-11	1.93932E-10
u14	-7.62599E-12	2.84408E-10	9.29181E-11	3.17309E-10	6.91932E-11	3.81995E-10	7.60505E-11	6.78507E-10	6.5846E-11
v14	1.27719E-10	8.63815E-11	4.91146E-11	9.43144E-11	6.31737E-11	1.47425E-10	1.93932E-10	6.5846E-11	3.4461E-10

Luego las fuerzas verticales aplicadas a los nodos, matricialmente se representarán como sigue:

$$F = \begin{Bmatrix} F_{1x} = R \\ F_{1y} = R \\ F_{2x} = 0 \\ F_{2y} = -35000 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{3y} = -44620.84 \\ F_{4x} = 0 \\ F_{4y} = 0 \\ F_{5x} = 0 \\ F_{5y} = 0 \\ F_{6x} = 0 \\ F_{6y} = 0 \\ F_{7x} = 0 \\ F_{7y} = -25000 \\ F_{8x} = R \\ F_{8y} = R \\ F_{9x} = R \\ F_{9y} = R \\ F_{10x} = R \\ F_{10y} = R \\ F_{11x} = R \\ F_{11y} = R \\ F_{12x} = 0 \\ F_{12y} = -15000 \\ F_{13x} = 0 \\ F_{13y} = -5000 \\ F_{14x} = 0 \\ F_{14y} = 0 \end{Bmatrix} Kgf \quad \Rightarrow \quad [F_{red}] = \begin{pmatrix} F_{2x} = 0 \\ F_{2y} = -35000 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{3y} = -44620.84 \\ F_{4x} = 0 \\ F_{4y} = 0 \\ F_{5x} = 0 \\ F_{5y} = 0 \\ F_{6x} = 0 \\ F_{6y} = 0 \\ F_{7x} = 0 \\ F_{7y} = -25000 \\ F_{12x} = 0 \\ F_{12y} = -15000 \\ F_{13x} = 0 \\ F_{13y} = -5000 \\ F_{14x} = 0 \\ F_{14y} = 0 \end{pmatrix} Kgf$$

Reemplazando en $[\delta] = [K]_{red}{}^{-1}[F]_{red}$ se obtiene los desplazamientos nodales

$$\delta = \begin{pmatrix} u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \\ u4 \\ v4 \\ u5 \\ v5 \\ u6 \\ v6 \\ u7 \\ v7 \\ u12 \\ v12 \\ u13 \\ v13 \\ u14 \\ v14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.69649E-06 \\ -6.62437E-05 \\ -3.54712E-07 \\ -7.62551E-05 \\ -8.93641E-06 \\ -5.21317E-05 \\ -5.01678E-06 \\ -1.32988E-05 \\ -4.07373E-06 \\ -5.44294E-06 \\ 1.44242E-06 \\ -5.55275E-05 \\ 4.58569E-06 \\ -3.329E-05 \\ 6.45796E-07 \\ -9.81074E-06 \\ -3.43148E-06 \\ -3.43866E-06 \end{pmatrix} \text{m} \quad \Rightarrow \quad \delta = \begin{pmatrix} -0.000769649 \\ -0.00662437 \\ -3.54712E-05 \\ -0.007625513 \\ -0.000893641 \\ -0.005213171 \\ -0.000501678 \\ -0.001329877 \\ -0.000407373 \\ -0.000544294 \\ 0.000144242 \\ -0.005552752 \\ 0.000458569 \\ -0.003329003 \\ 6.45796E-05 \\ -0.000981074 \\ -0.000343148 \\ -0.000343866 \end{pmatrix} \text{cm}$$

Interpretando estos valores concluimos indicando lo siguiente:

- Los desplazamientos nodales y la rigidez de los elementos del talud bajo las fuerzas aplicadas, se observa que los nodos con mayores desplazamientos son el Nodo 2 y el Nodo 4, con desplazamientos de -0.000769649 cm y -0.000893641 cm en dirección horizontal, y -0.00662437 cm y -0.005213171 cm en dirección vertical, respectivamente. Estos nodos experimentan los mayores efectos debido a las fuerzas verticales aplicadas, como en el Nodo 2 con una fuerza de -35000 kgf y el Nodo 4 con una fuerza de 0 kgf. Por otro lado, los nodos con menores desplazamientos son el Nodo 6 y el Nodo 7, con desplazamientos de -0.000407373 cm y 0.000144242 cm en dirección horizontal, y -0.000544294 cm y -0.005552752 cm en dirección vertical, respectivamente. Los elementos con mayor rigidez, como el Elemento 10 y el Elemento 14, muestran menores desplazamientos bajo carga, lo que indica una mayor estabilidad. En contraste, los elementos con menor rigidez, como el Elemento 13 y el Elemento 11, presentan desplazamientos más significativos, reflejando una menor capacidad para resistir las fuerzas aplicadas. Estos resultados destacan la importancia de la rigidez en la minimización de los desplazamientos y la estabilidad del talud bajo diferentes condiciones de carga.

5.3.3.6 Determinación de esfuerzos y deformaciones

Para su determinación de estos parámetros se aplica las ecuaciones de deformación unitaria $[\varepsilon] = [B][\delta]$ y la ecuación de esfuerzos $[\sigma] = [D][\varepsilon]$ presentados en el capítulo II.

ELEMENTO “1”:

$[\varepsilon_1] = [B_1][\delta]$.

ε_1 =	ε_{1x}	=	0
	ε_{1y}		0

	ε_{1xy}		0

Luego: σ_1

$[\sigma_1] = [D][\varepsilon_1].$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1678372145 & 466238314 & 0 \\ 466238314 & 1678372145 & 0 \\ 0 & 0 & 606066915.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 =$	σ_{1x}	=	0	kg/m^2	=	0	kg/cm^2
	σ_{1y}		0			0	
	σ_{1xy}		0			0	

- El elemento 1 está en equilibrio total y no presenta deformaciones ni esfuerzos, indicando que podría ser una región de referencia o que no está sometido a fuerzas internas en el modelo.

ELEMENTO "2":

$\varepsilon_2 =$	ε_{2x}	=	0
	ε_{2y}		0
	ε_{2xy}		0

$\sigma_2 =$	σ_{2x}	=	0	kg/m^2	=	0	kg/cm^2
	σ_{2y}		0			0	
	σ_{2xy}		0			0	

- El elemento 2 también se encuentra en un estado de equilibrio sin la influencia de cargas internas, lo que puede indicar que no está sometido a esfuerzos significativos o que es una región no activa del modelo.

ELEMENTO "3":

$\varepsilon_3 =$	ε_{3x}	=	0
	ε_{3y}		0
	ε_{3xy}		0

$\sigma_3 =$	σ_{3x}	=	0	kg/m^2	=	0	kg/cm^2
	σ_{3y}		0			0	
	σ_{3xy}		0			0	

- El elemento 3 sigue el mismo patrón que los anteriores, mostrando que no está sujeto a deformaciones o esfuerzos internos, posiblemente reflejando un área inactiva o no afectada en el análisis.

ELEMENTO "4":

$\varepsilon_4 =$	ε_{4x}	=	0
	ε_{4y}		-4.00924E-05
	ε_{4xy}		-3.00069E-05

- El elemento presenta deformaciones negativas en ε_{4y} y ε_{4xy} , indicando compresión en la dirección vertical y una deformación cortante negativa.

$\sigma_4 =$	σ_{4x}	=	-19360.15596	kg/m^2	=	-1.936015596	kg/cm^2
	σ_{4y}		-70353.26368			-7.035326368	
	σ_{4xy}		-19082.72955			-1.908272955	

- Los esfuerzos son negativos, indican compresión en las direcciones ε_{4x} y ε_{4y}, así como una compresión cortante.

ELEMENTO "5":

$\varepsilon_5 =$	ε_{5x}	=	-7.93365E-06
	ε_{5y}		3.96853E-06
	ε_{5xy}		-1.9925E-05

- El elemento presenta una ligera compresión horizontal y una ligera elongación vertical, con compresión en el componente cortante.

$\sigma_5 =$	σ_{5x}	=	-12005.44743	kg/m^2	=	-1.200544743	kg/cm^2
	σ_{5y}		3132.824762			0.313282476	
	σ_{5xy}		-12671.20431			-1.267120431	

- El elemento está sometido a compresión horizontal y tensión vertical, con una compresión en el componente cortante.

ELEMENTO "6":

$\varepsilon_6 =$	ε_{6x}	=	4.39372E-06
	ε_{6y}		-7.03438E-05
	ε_{6xy}		-2.20383E-05

- El elemento muestra alta compresión vertical y ligera elongación horizontal, con compresión cortante significativa.

$\sigma_6 =$	σ_{6x}	=	-26258.20877	kg/m^2	=	-2.625820877	kg/cm^2
	σ_{6y}		-121316.1234			-12.13161234	
	σ_{6xy}		-14015.15585			-1.401515585	

- Los esfuerzos son negativos en todas las direcciones, indicando compresión en la dirección horizontal, vertical y cortante.

ELEMENTO “7”:

$\varepsilon_7 =$	ε_{7x}	=	-6.59001E-06
	ε_{7y}		-4.1911E-05
	ε_{7xy}		-3.94834E-05

- El elemento presenta compresión en las direcciones horizontal y vertical, con una compresión cortante significativa.

$\sigma_7 =$	σ_{7x}	=	-31802.36236	kg/m^2	=	-3.180236236	kg/cm^2
	σ_{7y}		-76726.82689			-7.672682689	
	σ_{7xy}		-25109.27899			-2.510927899	

- Los esfuerzos son negativos, indicando compresión en las direcciones horizontal, vertical y cortante.

ELEMENTO “8”:

$\varepsilon_8 =$	ε_{8x}	=	-1.46243E-05
	ε_{8y}		-7.86757E-06
	ε_{8xy}		-7.3861E-07

- El elemento experimenta alta compresión horizontal y ligera compresión vertical, con una pequeña compresión cortante.

$\sigma_8 =$	σ_{8x}	=	-29461.49916	kg/m^2	=	-2.946149916	kg/cm^2
	σ_{8y}		-20867.73544			-2.086773544	
	σ_{8xy}		-469.715599			-0.04697156	

- El elemento está sometido a alta compresión horizontal y ligera compresión vertical, con una compresión cortante menor.

ELEMENTO “9”:

$\varepsilon_9 =$	ε_{9x}	=	2.62587E-05
	ε_{9y}		-0.000121658
	ε_{9xy}		-7.36147E-05

- El elemento muestra elongación horizontal y alta compresión vertical, con compresión cortante significativa.

$\sigma_9 =$	σ_{9x}	=	-12668.87504	kg/m^2	=	-1.266887504	kg/cm^2
	σ_{9y}		-200802.0207			-20.08020207	
	σ_{9xy}		-46814.90395			-4.681490395	

- El elemento está sometido a compresión significativa en horizontal y vertical, con una alta compresión cortante.

ELEMENTO “10”:

$\varepsilon_{10} =$	ε_{10x}	=	2.85771E-05
	ε_{10y}		-7.9424E-05
	ε_{10xy}		-0.000159241

- El elemento presenta elongación horizontal y compresión vertical, con compresión cortante moderada.

$\sigma_{10} =$	σ_{10x}	=	11793.59251	kg/m^2	=	1.179359251	kg/cm^2
	σ_{10y}		-125571.9305			-12.55719305	
	σ_{10xy}		-101268.5436			-10.12685436	

- El elemento muestra compresión en horizontal y vertical, con una compresión cortante significativa.

ELEMENTO “11”:

$\varepsilon_{11} =$	ε_{11x}	=	-3.14327E-05
	ε_{11y}		-6.66172E-05
	ε_{11xy}		-0.000181953

- El elemento está sometido a compresión horizontal y vertical, con una compresión cortante considerable.

$\sigma_{11} =$	σ_{11x}	=	-87326.0727	kg/m^2	=	-8.73260727	kg/cm^2

	σ_{11y}		-132076.9394		-13.20769394	
	σ_{11xy}		-115711.8936		-11.57118936	

- Los esfuerzos indican alta compresión en todas las direcciones y una compresión cortante significativa.

ELEMENTO “12”:

$\varepsilon_{12} =$	ε_{12x}	=	-9.13891E-05
	ε_{12y}		-4.79705E-05
	ε_{12xy}		-5.66809E-05

- El elemento experimenta alta compresión horizontal y ligera compresión vertical, con una compresión cortante.

$\sigma_{12} =$	σ_{12x}	=	-183532.1319	kg/m^2 =	-18.35321319	kg/cm^2
	σ_{12y}		-128308.3704		-12.83083704	
	σ_{12xy}		-36045.92134		-3.604592134	

- Los esfuerzos son negativos, indicando alta compresión horizontal y ligera compresión vertical, junto con una compresión cortante.

ELEMENTO “13”:

$\varepsilon_{13} =$	ε_{13x}	=	0.000113139
	ε_{13y}		-0.000349987
	ε_{13xy}		-0.000155907

- El elemento muestra alta compresión en todas las direcciones, con una compresión cortante significativa.

$\sigma_{13} =$	σ_{13x}	=	29529.57279	kg/m^2 =	2.952957279	kg/cm^2
	σ_{13y}		-559515.8178		-55.95158178	
	σ_{13xy}		-99148.49361		-9.914849361	

- Los esfuerzos indican alta compresión en todas las direcciones, incluyendo cortante.

ELEMENTO “14”:

$\varepsilon_{14} =$	ε_{14x}	=	9.60724E-05
	ε_{14y}		-0.000368807
	ε_{14xy}		0.000415333

- El elemento presenta alta compresión en las direcciones horizontal y vertical, con una compresión cortante significativa.

$\sigma_{14} =$	σ_{14x}	=	-9506.896779	kg/m^2 =	-0.950689678	kg/cm^2
	σ_{14y}		-600782.6024		-60.07826024	
	σ_{14xy}		264128.9966		26.41289966	

- Los esfuerzos son negativos, indicando alta compresión en las direcciones horizontal y vertical, con una compresión cortante significativa.

En general:

- El Elemento 14 presenta las mayores deformaciones y esfuerzos, indicando una alta respuesta a las cargas aplicadas y una posible zona crítica en el talud. En contraste, los elementos 1, 2 y 3 muestran la menor deformación y esfuerzo, sugiriendo que estos elementos están menos afectados por las cargas y podrían estar en una región más estable del talud. Estos resultados son cruciales para evaluar la estabilidad general del talud y para diseñar posibles refuerzos en las áreas críticas identificadas.

- A pesar de que los elementos 10 y 14 son más rígidos, los esfuerzos altos en el elemento 14 pueden estar relacionados con la concentración de cargas y la rigidez.

- Elementos 4 y 5, que son menos rígidos, experimentan mayores deformaciones, como se esperaba. La relación entre rigidez, deformación y esfuerzo es compleja y a menudo influida por la distribución de cargas y las condiciones específicas de cada elemento.

VI CONCLUSIONES

- Se logró desarrollar el método de los elementos finitos (MEF) para elementos triangulares bidimensionales matricialmente de manera exitosa. A través de la formulación matricial y la implementación del MEF para elementos triangulares en dos dimensiones, se ha logrado establecer un modelo matemático fiable para la solución de problemas de estabilidad de taludes.

- Se concluye que la clasificación geomecánica del macizo rocoso, complementada con ensayos de laboratorio, permitió caracterizar los taludes de las progresivas 2+520, 2+540 y 2+560 como macizos rocosos de clase II y calidad buena. Los resultados obtenidos incluyen valores de RMR entre 61.4, 61.8 y 62.3, GSI entre 63.6, 63.4 y 64.2, resistencia a la compresión simple de 95.04 MPa, 105.97 MPa y 106.13 MPa, módulo de elasticidad E de 13.86329 GPa, 14.47120 GPa y 15.16465 GPa y coeficiente de poisson v de 0.2170, 0.2174 y 0.2158 respectivamente.

- Se ha logrado determinar los desplazamientos nodales, deformaciones y esfuerzos que actúan sobre la estructura. En 2+520, los desplazamientos verticales alcanzan hasta -0.006930944 cm en los nodos $v12$ y $v13$, indicando áreas de alta deformación vertical, mientras que los horizontales permanecen en el rango de micrómetros. En 2+540, los nodos $v5$ y $v7$ muestran los desplazamientos verticales de hasta -0.002162892 cm. En 2+560, los nodos $v2$ y $v4$ tienen los desplazamientos verticales de hasta -0.00662437 cm. Las deformaciones y esfuerzos muestran que los elementos 10, 11 y 7 son los más críticos en 2+520, con mayores deformaciones y esfuerzos. En 2+540, los elementos 13 y 14 enfrentan las mayores deformaciones. En 2+560, el elemento 14 también presenta las mayores deformaciones, mientras que los elementos 1, 2, 3 y 12 de los tres taludes muestran estabilidad.

VII RECOMENDACIONES

- Implementar el MEF para simular situaciones específicas como el comportamiento de estructuras bajo cargas dinámicas, condiciones de vibración o impacto, y la interacción entre diferentes materiales en obras de infraestructura.
- Realizar la clasificación RMR de manera detallada, ya que es un dato clave junto con parámetros como el GSI y UCS, estos proporcionan los valores necesarios para calcular el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson del macizo rocoso. Estos parámetros son fundamentales para aplicar correctamente el análisis matricial, en particular a través del método de los elementos finitos, simulando de manera precisa el comportamiento mecánico de la roca bajo distintas cargas, y permitiendo predecir desplazamientos y esfuerzos en el talud para diseñar medidas de estabilización adecuadas.
- El análisis matricial, aunque tiene un enfoque común en la resolución de problemas estructurales, puede adaptarse según el tipo de estructura que se esté estudiando. Para cuerpos como los pórticos o estructuras planas, el planteamiento varía, ya que cada tipo de estructura responde de manera distinta a las cargas aplicadas. En el caso de pórticos, el análisis matricial se centra en la rigidez y las fuerzas internas de los miembros, mientras que, en estructuras planas o tridimensionales, se busca entender la distribución de esfuerzos y deformaciones de manera más compleja. Esto hace que la versatilidad del análisis matricial lo convierta en una herramienta poderosa para diversos tipos de estructuras.

VIII REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alejandro, O. B. (2020). Primeros Pasos En El Método Del Elemento Finito; Teoría e Implementación En Una Dimensión. *ResearchGate*, 47.

Ascama, A. A. (s.f.). *Elasticidad. Física II*

Ayres, J. F. (1985). *Matrices.* México: Schaum.

Barton, N. (1974). *Rock Slope Performance As Revealed By A Physical Joint Mode - In Advances in Rock Mechanics.* Washington: National Academy.

Beltran, F. (1998). *Teoría General del Método de Los Elementos Finitos.* Madrid.

Bieniawski, Z. (1989). *Engieneering Rock Mass Classifications.* Canadá.

Brown. (1981). *Rock Characterization, Testing And Monitoring.* ISRM Suggested Methods.

Budhu, M. (2007). *Soil Mechanics And Foundations.* University of Arizona: Library of Congress Cataloging-in-Publication Data.

Canale, S. C. (2007). *Métods Numéricos Para Ingenieros* . México: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES S.A. DE C.V.

Canet, J. M. (2012). *Resistencia De materiales Y Estructuras.* Barcelona España: CIMNE.

Davis, J. R.-D. (1976). *Applied Finite Element Analysis An Apple II Implementatión.* USA: Jhon Wiley and Sons.

Dias, J. S. (1998). *Deslizamientos - Análisis Geotécnico.* Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Días, S. C. (2019). *Metodología De La Investigación Científica. Pautas Metodológicas Para Diseñar y Elaborar El Proyecto De Investigación* San Marcos E.I.R.LTDA.

Elena Blanco, M. C. (2015). *Análisis Matricial De Estructuras.* Barcelona, España: CIMNE.

Falconí, R. A. (2003). *Análisis Matricial de Estructuras.* Escuela Politécnica del Ejército: CEINCI-ESPE.

Flores, G. &. (2002). *Geotechnical Guidelines For A Transition From Open Pit To Underground Mining.* Australia.

Frank, S. (1985). *Appplied Finite Element Analysis For Engineers.* New York - Florida Institute of Tecnology: CBS International.

Friedland, S. (2001). *Algebra Matricial y Aplicaciones.* Estados Unidos: wspc.

García, G. R. (2008). *Problemas Resueltos De Métodos De Los Elementos Finitos.* España: UNIVERSIDAD DE GRANADA.

Giudici, J. M. (2015). *Compendio de Cálculo Estructural II.* FCEF- UNC.

Griffiths, P. L. (1999). Slope Stability Analysis by Finite Elements. *Geotechnique*, 17.

Hamdhan, I. N. (s.f.). Slope Stability Analysis Whit The Finite Element Method. *Itenas Library*, 19.

Hoek, B. &. (1997). *Criterios de Roptura de Macizos Rocosos.* University of Minnesota.

Iñeguez, J. B. (2016). *Análisis Dinámico de Estabilidad de Taludes Por Medio de Elementos Fintos.* Cuenca - Ecuador: MASKANA.

Jair, E. B. (2004). *Estabilidad De Taludes En Suelos.* México: FES - Aragón.

José Luis Blanco Claraco, A. G. (2012). *Análisis Estático De estructuras Por El Método Matricial.* Departamento de Ingeniería Civil, Universidasd de Málaga: PUBLIDISA.

Kardestuncer, H. (s.f.). *Introduction to Structural Analysis With Matricex.* USA.

Lizarza, J. T. (2000). *Método De Los Elementos Finitos Para Análisis Estructural.* España - San Sebastián: TECNUN - UNICOPIA C.B.

Lizarza, J. T. (2011). *Método de los Elementos Finitos Para Análisis Estructural.* España- Universidad de Navarra: UNICOPIA C.B.

Lopez, M. V. (1971). *El Método De Los Elementos Finitos Aplicados Al Análisis Estructural.* Madrid: Noelia - Madrid.

Matteis, Á. F. (2003). *Geología y Geotecnia - Estabilidad De Taludes.* Rosario.

Mayori, A. M. (s.f.). *Resistencia De Materiales Aplicada.* La Paz - Bolivia: YUCATAN HERMOSA.

Melo, I. A. (2016). *Modelamiento Numérico Mediante Elementos Finitos de Muros Mecanicamente Estabilizados.* Chile.

Monge, P. R. (2004). *Mecánica De Rocas - Fundamentos e Ingeniería De Taludes.* Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

Naranjo, C. L. (1999). *Aplicación Del Método De Elementos Finitos A Problemas de Termofluidos.* San Nicolas De Los Garza: Universidad Autónoma De Nuevo León.

Navarra, E. O. (1995). *Cálculo De Estructuras Por El Método De Elementos Finitos: Análisis Estático Lineal.* Centro Internacional De Métodos Numéricos En Ingeniería: Second Edition - ISBN 9788487867002.

Naveros, H. L. (2013). *Física II.* Perú: MOSHERA.

Orosco, A. M. (Abril 2009). *Confiabilidad En Estabilidad De Taludes.* México: Tesis Para Obtener el Grado de Master En Ingeniería Civil - Geotecnia.

Ospina, H. A. (2009). *Métodos Numéricos.* Medellín - Colombia: Textos Académicos - Instituto Tecnológico Metropolitano.

Panca, A. J. (2016). *Análisis Matriccial De Estructuras - Introducción Al Método De Los Elementos Finitos.* Lima - Perú: MACRO.

Priest, D. S. (1985). *Hemispherical Projection Methods in Rock Mechanics.* London: Unwin Hyman.

RamíreZ, L. A. (2004). *Mecánica de Rocas - Fundamentos e Ingeniería de Taludes.* Madrid: ResearchGate.

Ramos, E. E. (2002). *Vectores y Matrices.* Lima - Perú: EER.

Ricaldoni, J. (2013). *Elastecidad.* Instituto De Estructuras Y Transporte.

Rodríguez, D. F. (2018). *Método Del Elemento Finito y AutoFEM.* México: Universidad Nacional Autonoma De México.

Rojas, R. (2023). *Metodología de la investigación: Guía para el proyecto de tesis.* Lima: Inudi Perú.

Ruiz, E. B. (2014). *Mecánica Y Resistencia De Materiales.* Barcelona - España: CIMNE.

Salih, A. A. (s.f.). *Finite Element Method.* India - Indian Institute Of Space Science and Tenhnology: Thiruvananthapuram.

Segerlind, L. J. (1937). *Applied Finite Element Analysis.* New York - Michigan State University: wiley And Sons Inc.

Taylor, O. C.-R. (1994). *Método De Los Elementos Finitos - Mecánica De Suelos Y Fluidos-Dinámica y No Linealidad.* BARCELONA-ESPAÑA: CIMNE.

Timoshenko, S. (1957). *Resistencia de Materiales.* Madrid: ESPASA - CALPE - S.A.

Vallejo, L. I. (2002). *Geología General.* Madrid: Pearson.

Viscarra, D. G. (2020). Slope Stability Analysis by Finite Element, A Case Study In La Paz Bolivia. *Investigación & Desarrollo*, 13.

Wyllie, D. C. (2004). *Rock Slope Engineering.* Taylor and Francis Group.

ANEXOS

ANEXO 1: CONTENIDO

ANEXO 2: PLANOS

ANEXO 3: PANEL FOTOGRÁFICO

ANEXO 4: DATOS DE MAPEO LINEAL

ANEXO 5: CLASIFICACIÓN GEOMECÁNICA

ANEXO 6: DIAGRAMAS ESTEREOGRÁFICOS

ANEXO 7: LEVANTAMIENTO FOTOGRAMÉTRICO

ANEXO 8: ENSAYOS DE LABORATORIO

ANEXO 9: CRITERIOS DE RESISTENCIA

ANEXO 10: MATRICES DE RIGIDEZ GLOBAL

Universidad Nacional del Altiplano Puno | VRI Vicerrectorado de Investigación | Repositorio Institucional

DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo YEVET SACACHIPANA CHIPANA,
identificado con DNI 46279003 en mi condición de egresado de:

☒ **Escuela Profesional,** ☐ **Programa de Segunda Especialidad,** ☐ **Programa de Maestría o Doctorado**

INGENIERÍA GEOLÓGICA,

informo que he elaborado el/la ☒ **Tesis** o ☐ **Trabajo de Investigación** denominada:
"ANÁLISIS MATRICIAL PARA LA ESTABILIDAD DE TALUDES MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y SU APLICACIÓN EN LA PROGRESIVA 1+960 AL 2+640 DE LA VÍA ARTICULACIÓN - JULIACA"

Es un tema original.

Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y **no existe plagio/copia** de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como suyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno 02 de DICIEMBRE del 2024

FIRMA (obligatoria)

Huella

Universidad Nacional del Altiplano Puno | Vicerrectorado de Investigación | Repositorio Institucional

AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo YEVET SACACHIPANA CHIPANA,
identificado con DNI 46279003 en mi condición de egresado de:

☒ **Escuela Profesional,** ☐ **Programa de Segunda Especialidad,** ☐ **Programa de Maestría o Doctorado**

INGENIERÍA GEOLÓGICA,

informo que he elaborado el/la ☒ **Tesis** o ☐ **Trabajo de Investigación** denominada:

"ANÁLISIS MATRICIAL PARA LA ESTABILIDAD DE TALUDES MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y SU APLICACIÓN EN LA PROGRESIVA 1+960 AL 2+640 DE LA VÍA ARTICULACIÓN - JULIACA"

para la obtención de ☐**Grado,** ☒ **Título Profesional** o ☐ **Segunda Especialidad.**

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los "Contenidos") que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia:

Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno 02 de DICIEMBRE del 2024

FIRMA (obligatoria)

Huella