Construcción del Grado Topológico para el estudio de existencia de soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales ordinarias

Lucio Elías Flores Bustinza
Universidad Nacional del Altiplano
lucbus06@ hotmail.com
Puno - Perú

7 de diciembre de 2016

Resumen

Para la construcción del grado topológico finito dimensional denominado Grado de Brouwer para funciones de clase C^1, es necesario definir una aplicación $\mathbf{deg} : \{(f, \Omega)\} \to \mathbb{Z}$, donde $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, es una aplicación continua definida en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con Ω **abierto y acotado**, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, tal que $\mathbf{y} \notin f(\partial\Omega)$, asociaremos a (f, Ω) un **número entero**, que se denotará por $\mathbf{deg}(f, \Omega)$; además esta aplicación tiene que cumplir la propiedades de normalización, aditividad e invariancia homotópica; para finalmente poder definir la aplicación **deg**, de la siguiente manera:

$$\mathbf{deg}(f, \Omega) = \sum_{x \in g^{-1}(0) \cap \Omega} sgn\ \det Dg(x)$$

Como el resultado de la aplicación $\mathbf{deg} : (f, \Omega) \to \mathbb{Z}$ es un valor entero, nos permite saber, según lo obtenido si la aplicación f estudiada tiene o no tiene solución mediante el siguiente criterio: si $\mathbf{deg} = 0$ la ecuación diferencial no tiene solución, pero si $\mathbf{deg} \neq 0$ la ecuación diferencial tiene solución.

Finalmente para el caso en que f sea una aplicación diferencial, y la ecuación

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t) f_i(x(t)), \qquad 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

es una ecuación diferencial ordinaria periódica, se establecerá un teorema que indique que si $\mathbf{deg}(h, U) = (-1)^n$, *donde* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es definido por* $h_i(x) = x_i f_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, $x \in \mathbb{R}^n$. *En particular, existe un equilibrio de (1) en* $Int\ \mathbb{R}^n_+$ *(es decir un cero de* h*).*

Este teorema garantiza que la ecuación (1) siempre tiene solución debido a la definición del grado **deg**.

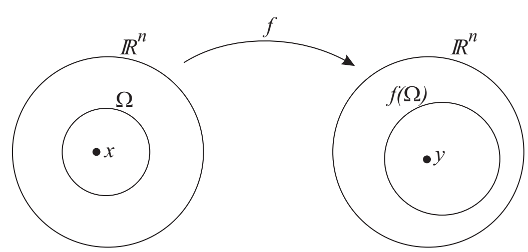
Palabras Clave: Espacio topológico, Grado topológico, Ecuación diferencial ordinaria, Soluciones periódicas.

1. Introducción

1.1. Grado Topológico en Espacios de Dimension Finita

Dada una función continua f definida sobre un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \Omega \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{x} & \mapsto & f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \end{array}$$



donde $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{y} \in f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\mathbb{R}^n$ esta provista de la Topología euclidiana, la interrogante sería que dado un elemento "$\mathbf{y}$", una función continua f, hallar $\mathbf{x}$ en la clausura de Ω tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

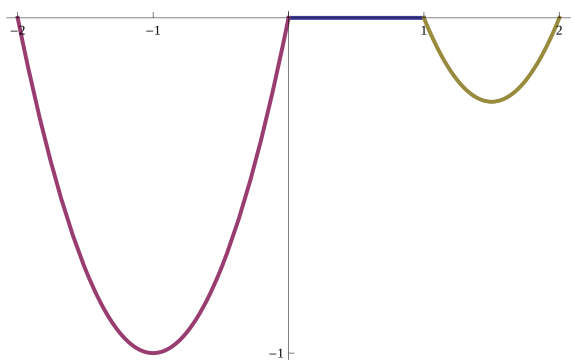
En la ecuación $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, se desea saber si existe o no solución a la misma; en caso afirmativo, nos gustaría saber si ella es única o si hay varias soluciones. Podemos preguntar, además, cómo están distribuidas en $\overline{\Omega}$.

Observación: Supongamos que la ecuación $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ esta resuelta, entonces, será interesante averiguar cómo cambia el resultado de la ecuación, para $\tilde{f}$ y $\tilde{\mathbf{y}}$ "cercanos", en algún sentido, a f e $\mathbf{y}$ con $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{y}}$, respectivamente.

Considerando los siguiente ejemplo:

Ejemplo 1 *Sean $\mathbb{R}^n$ con $n = 1$. Sean $x \in \mathbb{R}$, $y = 0$ y $\Omega = \langle -2, 2\rangle$; se define $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ como*

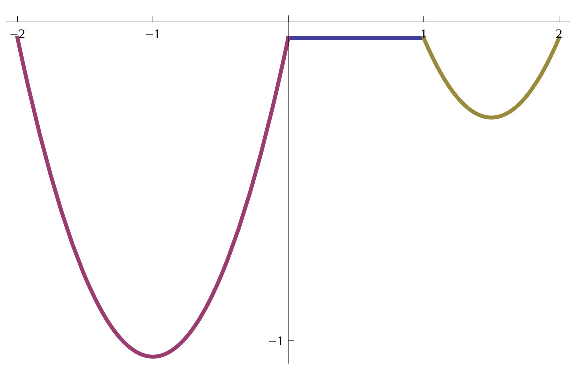
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } \ x \in \{-2, 2\} \cup [0, 1] \\ x^2 + 2x & \text{, si } x \in \langle -2, 0\rangle \\ x^2 - 3x + 2 & \text{, si } x \in \langle 1, 2\rangle \end{cases}$$



De donde

$$f^{-1}\{0\} = \{-2, 2\} \cup [0, 1] \tag{2}$$

Definamos ahora $\tilde{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = f(x) - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Resulta que:



$$\tilde{f}^{-1}\{0\} = \emptyset \tag{3}$$

Se ve que, a pesar de que f y $\tilde{f}$ están *próximas* una de la otra, o que una es una *deformación continua* de la otra.

Cuando se defina una función $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, continua en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con Ω **abierto y acotado**, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, tal que $\mathbf{y} \notin f(\partial\Omega)$, diremos que la terna $(f, \Omega, \mathbf{y})$ es admisible y asociaremos a dicha terna un **número entero**, que se denotará por $\mathbf{deg}(f, \Omega, \mathbf{y})$. De esta forma obtenemos la aplicación

$$\mathbf{deg} : \{(f, \Omega, y)\} \to \mathbb{Z}$$

1.2. Axiomas y Propiedades Básicas

El principal propósito de esta sección es la formulación fundamental axiomática del grado topológico y derivar algunas propiedades usuales.

Sea el subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por ∂D la frontera de D, y por $\bar{D}$ la clausura de D. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío abierto y acotado. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua. Diremos que f es Ω-admisible si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Llamaremos al par (f, Ω) admisible. Denotaremos por M al conjunto de todos los pares (f, Ω) admisibles. El objetivo es definir la función de valor entero $\mathbf{deg} : M \to \mathbb{Z}$ llamado grado topológico de Brouwer, que satisface las siguientes propiedades:

P-1) **Normalización.-** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y no vacío, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \notin \partial\Omega$ entonces

$$\mathbf{deg}(Id - x_0, \Omega) = \begin{cases} 1 & , \ si \ x_0 \in \Omega \\ 0 & , \ si \ x_0 \notin \Omega \end{cases}$$

donde $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la aplicación identidad y x_0 denota la aplicación constante con valor x_0.

P-2) **Aditividad.-** Si $(f, \Omega) \in M$, entonces $\mathbf{deg}(f, \Omega) = \mathbf{deg}(f, \Omega_1) + \mathbf{deg}(f, \Omega_2)$ siempre que Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos disjuntos abiertos y no vacíos de Ω tal que $f^{-1}(0) \cap \Omega \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$.

P-3) **Invariancia Homotópica.-** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y no vacío y $h : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua, tal que $h(t, x) \neq 0$ para $x \in \Omega$ y $t \in [0, 1]$. Entonces $\mathbf{deg}(h(t, \cdot)\Omega)$, es independiente de $t \in [0, 1]$.

Note que la propiedad P-1) es una normalización simple, mientras que P-2) es una formulación abstracta del propósito que el $\mathbf{deg}(f, \Omega)$ puede darnos información de la ubicación de ceros de f en Ω en el sentido que si Ω_1 y Ω_2 son subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y f tiene ceros en una cantidad finita en $\Omega_1 \cup \Omega_2$ pero no tiene ceros en $\bar{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, entonces el número de ceros de f en Ω es, en algún sentido, la suma del número de ceros de f en Ω_1 y Ω_2.

La propiedad P-3) refleja el propósito que para un f complicado, el entero $\mathbf{deg}(f, \Omega)$ puede ser calculado por $\mathbf{deg}(g, \Omega)$ con un g simple, al menos que si f puede ser continuamente deformado en g por lo que en ningún momento de la deformación obtendremos ceros en la frontera de Ω. Sean $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

dos aplicaciones Ω-admisibles. Si existe una aplicación continua $h : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $h(t,x) \neq 0$ para $(t,x) \in [0,1] \times \partial\Omega$, $h(0,x) = f(x)$ y $h(1,x) = g(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, entonces podremos decir que f y g son Ω-homotópicas, h es una homotopía $\Omega-$admisible (entre f y g), y lo denotaremos por $f \overset{\Omega}{\sim} g$. Se prueba que $\overset{\Omega}{\sim}$ es una relación de equivalencia. La propiedad P-3) dice que **deg** es constante en cada clase de equivalencia de la relación $\overset{\Omega}{\sim}$.

Para una aplicación continua $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ definido solo en $\overline{\Omega}$, podemos aplicar el teorema de extensión de Tietze (sea X un espacio normal de Hausdorff y $A \subset X$ subconjunto cerrado. entonces cada función continua $f : A \to \mathbb{R}$ tiene una extensión continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$) para obtener una aplicación continua $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\widehat{f}|_{\bar{\Omega}} = f$. Si asumimos que $f(x) \neq 0$ para $x \in \partial\Omega$, entonces podemos definir $\mathbf{deg}(f,\Omega) = \mathbf{deg}(\widehat{f},\Omega)$. Se puede aplicar la invariancia homotópica para mostrar que la definición antes dada de $\mathbf{deg}(f,\Omega)$ es independiente de la elección de la extensión $\widehat{f}$ de f. Así, en lo que sigue siempre asumimos que la aplicación considerada es definida en todo el espacio.

Como $P1) - P3)$ involucran sólo conceptos topológicos tales como conjuntos abiertos, aplicaciones continuas y acotadas, y el grupo $\mathbb{Z}$ de los enteros, no es sorprendente que el grado topológico antes mencionado puede ser construido usando varias técnicas en la topología algebraica. El enfoque en la construcción del grado topológico es analítica con el fin de adaptarse mejor a las inclinaciones de los analistas y matemáticos aplicados.

El tratamiento es elemental en el sentido de que sólo algunas herramientas analíticas básicas tales como el teorema de aproximación de Weierstrass y el lema de Sard serán empleadas. Antes de construir el grado topológico, obtenemos algunas propiedades útiles de las propiedades fundamentales P1)-P3).

Proposición 1 *Asumiendo que* **deg** $: M \to \mathbb{Z}$ *es una función que satisface las propiedades P1)-P3). Entonces también satisface:*

P-4) **Existencia:** *Para cada* $(f,\Omega) \in M$, *si* $\mathbf{deg}(f,\Omega) \neq 0$, *entonces* $f^{-1}(0) \cap \Omega \neq \emptyset$, *esto es, existe una solución* $x \in \Omega$ *de la ecuación* $f(x) = 0$.

P-5) **Escisión:** *Para cada* $(f,\Omega) \in M$, $\mathbf{deg}(f,\Omega) = \mathbf{deg}(f,\Omega_1)$ *siempre que* Ω_1 *es un subconjunto abierto de* Ω *tal que* $f^{-1}(0) \cap \Omega \subset \Omega_1$.

Demostración: P-4).- Sean Ω_1, Ω_2, Ω_3 y Ω_4 subconjuntos abiertos disjuntos y no vacíos de Ω, y asumamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(0) \cap \bar{\Omega} = \emptyset$. Entonces por la propiedad de aditividad, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{deg}(f,\Omega) &= \mathbf{deg}(f,\Omega_1) + \mathbf{deg}(f,\Omega_2) \\ \mathbf{deg}(f,\Omega) &= \mathbf{deg}(f,\Omega_3) + \mathbf{deg}(f,\Omega_4) \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la propiedad de aditividad también se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{deg}(f,\Omega) &= \mathbf{deg}(f,\Omega_1 \cup \Omega_2) + \mathbf{deg}(f,\Omega_3 \cup \Omega_4) \\ &= \mathbf{deg}(f,\Omega_1) + \mathbf{deg}(f,\Omega_2) + \\ &\quad\ \mathbf{deg}(f,\Omega_3) + \mathbf{deg}(f,\Omega_4) \end{aligned}$$

Colocando las cuatro igualdades anteriores juntas se obtiene:

$$\mathbf{deg}(f,\Omega) = 2\,\mathbf{deg}(f,\Omega)$$

de donde se deduce que $\mathbf{deg}(f,\Omega) = 0$ ■

Demostración: P-5).- Asumamos que $\Omega_1 \subset \Omega$ y $f^{-1}(0) \cap \Omega \subset \Omega_1$. Si $\Omega_1 \neq \Omega$, entonces consideramos Ω_2 como el interior de $\Omega - \Omega_1$, el cual es evidentemente no vacío. De la propiedad de aditividad y P-4) obtenemos que

$$\mathbf{deg}(f,\Omega) = \mathbf{deg}(f,\Omega_1) + \mathbf{deg}(f,\Omega_2) = \mathbf{deg}(f,\Omega_1)$$

■

Sea Ω un subconjunto abierto, acotado y no vacío de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)$ al espacio de todas la aplicaciones continuas $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$; $C(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)$ provista con la norma del supremo $||f||_\infty := \sup\{|f(x)|;\ x \in \bar{\Omega}\}$ es un espacio de Banach. Sea $C(\bar{\Omega},\partial\Omega)$ el subconjunto de $C(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)$ de todas las aplicaciones $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ que satisfacen $f(x) \neq 0$ para $x \in \partial\Omega$. Entonces obtenemos una función bien definida **deg** $: C(\bar{\Omega},\partial\Omega) \to \mathbb{Z}$

Proposición 2 *Asumiendo que* **deg** $: M \to \mathbb{Z}$ *satisface las propiedades (P1)-P3)), entonces tenemos:*

P-6) **Continuidad:** *Para cada conjunto no vacío, abierto y acotado* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, *la aplicación asociada al grado topológico* **deg** $: C(\bar{\Omega},\partial\Omega) \to \mathbb{Z}$ *es continua. Mas precisamente, si* $||f-g||_\infty <$ $\text{mín}\{|f(x)|;\ x \in \partial\Omega\}$ *entonces* $\mathbf{deg}(f,\Omega) = \mathbf{deg}(g,\Omega)$

P-7) **Dependencia de Valores Acotados:** *Sea* Ω *un conjunto abierto, acotado y no vacío en* $\mathbb{R}^n$. *Entonces para cada* $f, g \in C(\bar{\Omega},\partial\Omega)$ *que satisface* $f(x) = g(x)$ *para* $x \in \partial\Omega$, *tenemos que* $\mathbf{deg}(f,\Omega) = \mathbf{deg}(g,\Omega)$.

Demostración: P6).- Sea $f \in C(\bar{\Omega},\partial\Omega)$. Como $\partial\Omega$ es compacto, $\text{mín}\{|f(x)|;\ x \in \partial\Omega\} = \varepsilon > 0$. Supongamos que para cada $x \in \partial\Omega$, tenemos

$$\begin{aligned} |g(x)| &\geq |f(x)| - |f(x) - g(x)| \geq |f(x)| - ||f-g||_\infty \\ &\geq \text{mín}\{|f(y)|;\ y \in \partial\Omega\} - ||f-g||_\infty \\ &= \varepsilon - ||f-g||_\infty > 0 \end{aligned}$$

Consecuentemente, $g \in C(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$ y $\mathbf{deg}(g,\Omega)$ esta bien definido. Definamos la siguiente homotopía, $h : [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, que llamaremos *homotopía lineal* por:

$$h(t,x) = tg(x) + (1-t)f(x), \qquad t \in [0,1), \quad x \in \bar{x}$$

Puesto que para cada $x \in \partial\Omega$ y $t \in [0,1]$

$$|h(t,x)| \geq |f(x)| - t|f(x) - g(x)| \geq \varepsilon - t||f-g||_\infty > 0$$

la homotopía h es Ω-admisible. Por lo tanto, P-3) implica $\mathbf{deg}(f,\Omega) = \mathbf{deg}(g,\Omega)$. ■

Demostración: P-7).- Notamos que $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$ garantiza que la homotopía lineal $h : [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ definida anteriormente es Ω-admisible y por lo tanto $\mathbf{deg}(f,\Omega) = \mathbf{deg}(g,\Omega)$ ■

Ahora se presenta el teorema del punto fijo de Brouwer, asumiendo que el grado topológico existe.

Teorema 1 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacio, acotado y convexo. Entonces cada aplicación continua $F : \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$ tiene un punto fijo. Es decir, existe $x \in \bar{\Omega}$ tal que $F(x) = x$.*

Demostración: Podemos asumir que $F(x) \neq x$ para todo $x \in \partial\Omega$; de lo contrario el resultado es trivial. También podemos asumir sin perdida de generalidad que $0 \in \Omega$. Definamos la homotopía

$$h : [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$$

de la siguiente manera

$$h(t,x) = x - tF(x), \; x \in \bar{\Omega}, \; t \in [0,1]$$

Evidentemente, h es continua y para $x \in \partial\Omega$ el punto $tF(x)$ pertenece al segmento que une $f(x)$ a 0.

Si $t = 1$, entonces por la hipótesis $h(1,x) = x - F(x) \neq 0$. Si $t \in [0,1)$, entonces por la hipótesis de que Ω es convexo y $0 \in \Omega$, $tF(x) \in \Omega$ y consecuentemente para todo $x \in \partial\Omega$, tenemos $tF(x) \neq x$, es decir, $h(t,x) \neq 0$. Esto muestra que h es una homotopía $\Omega-$admisible. Por lo tanto, la invariancia homotópica implica que

$$\mathbf{deg}(h(t,\cdot),\Omega)$$

no depende de $t \in [0,1]$. En particular

$$\mathbf{deg}(Id - F,\Omega) = \mathbf{deg}(Id,\Omega) = 1$$

Aplicando la propiedad de existencia podemos concluir que existe $x \in \Omega$ tal que
$x - F(x) = 0$, es decir, x es un punto fijo de F. ■

2. Cálculo del Grado Topológico

En esta sección asumimos que el grado topológico $\mathbf{deg} : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$ existe y satisface los axiomas (P1) - P3)). Lo que se quiere es dar una fórmula de calculo del grado topológico cuando f es lineal o una aplicación diferenciable que satisface una cierta condición de regularidad. El cálculo del grado topológico para aplicaciones en general se dará en el capítulo de análisis de resultados.

Se utilizará la siguiente notación:

$$\begin{aligned} GL^+(n,\mathbb{R}) &= \{A \in GL(n,\mathbb{R}); \det A > 0\} \\ GL^-(n,\mathbb{R}) &= \{A \in GL(n,\mathbb{R}); \det A < 0\} \end{aligned}$$

Notemos que $GL(n,\mathbb{R})$ puede ser considerado como un subconjunto de $\mathbb{R}^{n\times n}$, y de ello $GL(n,\mathbb{R})$ es un espacio topológico con la topología inducida de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

***Lema* 1** *Los conjuntos $GL^+(n,\mathbb{R})$ y $GL^-(n,\mathbb{R})$ son componentes abiertos y conexos de $GL(n,\mathbb{R})$.*

***Lema* 2** *Sea Ω un abierto, vecindad acotada de cero en $\mathbb{R}^n$ y $T \in GL(n,\mathbb{R})$. Entonces $\mathbf{deg}(T,\Omega) = sgn \det T$. Aquí y en lo que sigue, usaremos $sgn \det T$ para denotar un número real con valor absoluto 1 y sgn determinado por el sgn del $\det T$.*

Para establecer el siguiente resultado, recordemos que cero es un valor regular de una C^1 aplicación $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$, donde Ω es un subconjunto abierto, no vacío y acotado de $\mathbb{R}^n$. Si $g^{-1}(0) = \emptyset$, o bien para cada $x \in g^{-1}(0)$ se tiene que $\det Dg(x) \neq 0$.

Teorema 2 *Sea Ω un subconjunto no vacío, abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y f una C^1-aplicación $\Omega-$admisible tal que zero es un valor regular de $f|_\Omega$. Entonces*

$$\mathbf{deg}(f,\Omega) = \sum_{x\in f^{-1}(0)\cap\Omega} sgn \det Df(x)$$

donde $\sum$ se define como cero sobre un conjunto vacío.

Demostración: Sea $B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \; |x - x_0| < \delta\}$ que denota la bola de radio $\delta > 0$ y centro en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. El conjunto $f^{-1}(0) \cap \Omega$ es finito. Por consiguiente, se puede encontrar $\delta > 0$ tal que para cada $x \in f^{-1}(0) \cap \Omega$, $B_{2\delta}(x) \cap f^{-1}(0) = \{x\}$ y $B_{2\delta}(x) \subseteq \Omega$. Consecuentemente, por la propiedad de aditividad, se tiene

$$\mathbf{deg}(f,\Omega) = \sum_{x\in f^{-1}(0)\cap\Omega} \mathbf{deg}(f, B_\delta(x))$$

Para cada $x \in f^{-1}(0) \cap \Omega$, se define
$g_x(v) = Df(x)(v-x)$. Sea $h_x(t,v) = tf(v) + (1 -$

$t)Df(x)(v-x)$ que denota la homotopía lineal. Note que

$$\begin{aligned} h_x(t,v) &= t[f(v)-Df(x)(v-x)]+Df(x)(v-x) \\ &= t\cdot o(|v-x|)+Df(x)(v-x) \end{aligned}$$

De ello se deduce que si $\delta > 0$ es suficientemente pequeño, entonces $|h_x(t,v)| > 0$ para todo $t \in [0,1]$ y para todo v tal que $|v-x| = \delta$. Consecuentemente, h_x es una homotopía $B_\delta(x)$-admisible entre f y g_x. Por la propiedad de homotopía, se tiene

$$\mathbf{deg}(f,\Omega) = \sum_{x\in f^{-1}(0)\cap\Omega} \mathbf{deg}(g, B_\delta(x))$$

Sea $R > 0$ tal que $\Omega \subseteq B_R(0)$. Entonces por la propiedad de escisión y la propiedad de homotopía implica que

$$\begin{aligned} \mathbf{deg}(g_x, B_\delta(x)) &= \mathbf{deg}(g_x, B_R(0)) \\ &= \mathbf{deg}(Df(x), B_R(0)) \\ &= sgn \det Df(x) \end{aligned}$$

a partir de la cual la conclusión del teorema se sigue. ■

Observación.- La existencia de ceros de f en Ω no necesariamente implica la no trivialidad de $\mathbf{deg}(f,\Omega)$. Por ejemplo, consideremos la aplicación $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2-1$. Sea $\Omega = (-2,2)$. Claramente, f tiene dos cero ± 1 en Ω y ceros es un valor regular de $f|_\Omega$. Pero, ya que $sgn\ f'(1) > 0$ y $sgn\ f'(-1) < 0$, se tiene $\mathbf{deg}(f,\Omega) = sgn\ f'(1) + sgn\ f'(-1) = 0$.

3. Construcción del Grado Topológico

Se presenta una construcción analítica del grado.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, abierto y acotado y sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una aplicación Ω-admisible. Definamos $\mathbf{deg}(f,\Omega)$ como sigue: Sea $\varepsilon = \text{mín}\{|f(x)|;\ x\in\partial\Omega\}$. Por el teorema de Weierstrass , existe $\widetilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^n)$ tal que $\text{máx}\left\{|f(x)-\widetilde{g}(x)|;\ x\in\bar{\Omega}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por el teorema de Sard , existe un valor regular $y_0 \in \mathbb{R}^n$ de la aplicación $\widetilde{g}|_\Omega$ tal que $|y_0| < \frac{\varepsilon}{3}$. Definamos $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ por $g(x) = \widetilde{g}(x) - y_0$. Es claro que $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^n)$, $\text{máx}\left\{|\widetilde{g}(x)-g(x)|;\ x\in\bar{\Omega}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$ y 0 es un valor regular de $g|_\Omega$. Definamos

$$\mathbf{deg}(f,\Omega) = \sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega} sgn\ \det Dg(x) \qquad (4)$$

Notar que el lado derecho de (4) está bien definida. En efecto,
$\text{máx}\left\{|f(x)-g(x)|;\ x\in\bar{\Omega}\right\} < \varepsilon$. Por consiguiente, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es Ω- admisible. En lo que sigue, llamaremos a g una *aproximación regular* de f.

Con el fin de probar que la fórmula (4) no depende de la aproximación regular g, observemos que si g' es otra aproximación regular de f, entonces la homotopía

$$h(t,x) = tg(x)+(1-t)g'(x), \quad t\in[0,1],\ x\in\mathbb{R}^n$$

es una homotopía $\Omega-$admisible bien definida entre g y g'. En efecto, puesto que

$$\text{máx}\left\{|f(x)-g(x)|;\ x\in\bar{\Omega}\right\} < \varepsilon$$

y

$$\text{máx}\left\{|f(x)-g'(x)|;\ x\in\bar{\Omega}\right\} < \varepsilon$$

Tenemos que para cada $t\in[0,1]$,

$$\begin{aligned} \text{mín}\{|h(t,x)|;\ x\in\partial\Omega\} &\geq \text{mín}\{|f(x)|;\ x\in\partial\Omega\} - \\ &\quad - \text{máx}\{|f(x)-(t\ g(x)+ \\ &\quad +(1-t)g'(x))|;\ x\in\partial\Omega\} \\ &\geq \varepsilon t - \text{máx}\{|f(x)-g(x)|; \\ &\quad x\in\partial\Omega\} - (1-t) \\ &\quad \text{máx}\{|f(x)-g'(x)|;\ x\in\partial\Omega\} \\ &> \varepsilon - t\varepsilon - (1-t)\varepsilon = 0 \end{aligned}$$

para mostrar que la fórmula (4) no depende de la aproximación regular, sólo se necesita el siguiente resultado.

***Lema* 3** *Sea $h:[0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una homotopía $\Omega-$admisible de clase C^1 entre $g_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ y $g_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Supongamos que ambas aplicaciones $g_1|_\Omega$ y $g_2|_\Omega$ tiene al cero como un valor regular. Entonces*

$$\sum_{x\in g_1^{-1}(0)\cap\Omega} sgn \det Dg_1(x) = \sum_{x\in g_2^{-1}(0)\cap\Omega} sgn \det Dg_2(x)$$

Teorema 3 *El grado definido por la fórmula (4) satisface las propiedades (P1) - P3)).*

Demostración:

P1) Es una consecuencia trivial de la definición.

P2) A fin de probar la aditividad, consideremos una aplicación $\Omega-$admisible $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tal que existen dos subconjuntos, disjuntos, no vacíos y abiertos Ω_1 y Ω_2 de Ω satisfaciendo $f^{-1}(0)\cap\Omega \subseteq \Omega_1\cup\Omega_2$. Sea $\varepsilon = \text{mín}\left\{|f(x)|;\ x\in\bar{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)\right\} > 0$ y sea $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una aproximación regular de f tal que $\text{máx}\left\{|f(x)-f(x)|;\ x\in\bar{\Omega}\right\} < \varepsilon$. Entonces se verifica que $g^{-1}(0)\cap\bar{\Omega} \subseteq \Omega_1\cup\Omega_2$ y, por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mathbf{deg}(f,\Omega) &= \sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega} sgn \det Dg(x)\\ &= \sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega_1} sgn \det Dg(x) + \\ & \sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega_2} sgn \det Dg(x)\\ &= \mathbf{deg}(f,\Omega_1)+\mathbf{deg}(f,\Omega_2)\end{aligned}$$

Finalmente, probemos la propiedad homotópica

P3) Se prueba que si f_1 y f_2 son $\Omega-$homotópicas y si g_1 y g_2 son dos aproximaciones regulares de f_1 y f_2, respectivamente, entonces g_1 y g_2 son también $\Omega-$homotópicas. Aplicando el teorema de Weirerstrass, podemos asumir que la homotopía $\Omega-$admisible entre g_1 y g_2 es de clase C^1. Entonces, por el lema 3 obtenemos $\mathbf{deg}(g_1,\Omega)=\mathbf{deg}(g_2,\Omega)$ de lo cual se sigue que $\mathbf{deg}(f_1,\Omega)=\mathbf{deg}(f_2,\Omega)$.

■

4. Análisis de resultados

4.1. Existencia de Equilibrio en Ecuaciones Diferenciales

En este capítulo se describe como la aplicación **deg** definida en la sección 2.4 se puede aplicar a las ecuaciones diferenciales ordinarias (en particular a las ecuaciones periódicas), y así establecer la existencia de soluciones de este tipo de ecuaciones.

La aplicación **deg**, construida en la sección 2.4, en donde se pudo definir de la siguiente manera:

$$\mathbf{deg}(f,\Omega)=\sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega} sgn\ \det Dg(x) \qquad (5)$$

donde además, dicha aplicación tuvo que cumplir ciertas propiedades contempladas en la sección 2.2.2. que son las propiedades de:

P-1) Normalización:

$$\mathbf{deg}(Id-x_0,\Omega)=\begin{cases}1 & ,\ si\ x_0\in\Omega\\ 0 & ,\ si\ x_0\notin\Omega\end{cases}$$

P-2) Aditividad:

$$\mathbf{deg}(f,\Omega)=\mathbf{deg}(f,\Omega_1)+\mathbf{deg}(f,\Omega_2)$$

P-3) Invariancia Homotópica:
Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y no vacío y $h:[0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una aplicación continua, tal que $h(t,x)\neq 0$ para $x\in\Omega$ y $t\in[0,1]$. Entonces $\mathbf{deg}(h(t,\ \cdot\ )\Omega)$, es independiente de $t\in[0,1]$.

Ahora se va ha a establecer la existencia de ceros (o equilibro) del siguiente sistema

$$\dot{x}_i(t)=x_i(t)f_i(x(t)), \qquad 1\leq i\leq n \qquad (6)$$

donde $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, $1\leq i\leq n$. (Este sistema incluye muchos modelos importantes en la teoría ecológica). Claramente, si (6) tiene una única solución, denotada por $\varphi(t,x)$, satisfaciendo $\varphi(0,x)=x$. Esta solución satisface $\varphi(t,x)\in\mathbb{R}^n_+$ para todo $t\geq 0$, siempre que $\varphi(t,x)$ existe. Por otra parte, si $x_i>0$, entonces $\varphi_i(t,x)>0$ para $t\geq 0$.

Diremos que el sistema (6) es permanente si:

(H1) Para cualquier $x\in\mathbb{R}^n_+$, $\varphi(t,x)$ es definido para todo $t\geq 0$.

(H2) Existe $\delta>0$ tal que si $x_i>0$ para algún $1\leq i\leq n$, entonces $\lim_{t\to\infty}\inf\varphi_i(t,x)>\delta$.

(H3) Existe $D>0$ tal que si $x\in Int\ \mathbb{R}^n_+$, entonces el $\lim_{t\to\infty}\varphi_i(t,x)\leq D$ para todo $1\leq i\leq n$.

$(H1)$ asegura que $\varphi:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}^n_+$ es una aplicación continua. (H2) esta relacionado con la importante cuestión de la extinción en la teoría ecológica y (H3) es la suposición común de disipatividad. Bajo estos supuestos, para cada $x\in Int\ \mathbb{R}^n_+$, el denominado conjunto $\omega-$límite de x definido por $\omega(x):=\{y, \text{existe } t_n\to\infty \quad \text{para cada } \varphi(t_n,x)\to y \text{ como } n\to\infty\}$ es no vacío, compacto y conexo, e invariante en el sentido de que si $y\in\omega(x)$, entonces $\varphi(t,y)$ existe y $\varphi(t,y)\in\omega(x)$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Por otra parte, $\omega(x)\subseteq Int\ \mathbb{R}^n_+$.

Note que si x es un equilibrio, entonces $\omega(x)=\{x\}$, y si x es un punto periódico, es decir, $\varphi(p,x)=x$ para algún $p>0$, entonces $\omega(x)=\bigcup_{0\leq t\leq p}\{\varphi(t,x)\}$.

Teorema 4 *si (6) es permanente, entonces para algún conjunto U abierto y acotado, tal que*

$$\bigcup_{x\in Int\ \mathbb{R}^n_+}\omega(x)\subseteq U\subseteq\bar{U}\subseteq Int\ \mathbb{R}^n_+$$

$\mathbf{deg}(h,U)=(-1)^n$, *donde $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es definido por $h_i(x)=x_if_i(x)$, $1\leq i\leq n$, $x\in\mathbb{R}^n$. En particular, existe un equilibrio de (6) en $Int\ \mathbb{R}^n_+$ (i.e. un cero de h).*

Demostración: Sea $K\subseteq Int\ \mathbb{R}^n_+$ es un conjunto compacto que contiene $\bigcup_{x\in Int\ \mathbb{R}^n_+}\omega(x)$. Definiendo $\tau(x)=\text{ínf}\{t\geq 0;\ \varphi(s,x)\in Int\ K \text{ para todo } s\geq t\}$. Esto puede se fácilmente de mostrar que τ es bien definido, acotado localmente, y le máximo valor de $\tau(x)$ a través de $x\in K$ puede ser alcanzando. Sea $T=\text{máx}_{x\in K}\tau(x)$, $K^+=\{\varphi(t,x);\ x\in K,\ 0\leq t\leq T\}$. Entonces K^+ es compacto y $\varphi(t,x)\in K$ para todo $t \geq 0$ y $y \in K^+$.

Ahora, asumiendo que U es in conjunto convexo, abierto y acotado tal que $\bar{U} \subseteq Int\ \mathbb{R}^n_+$ y $K^+ \subseteq U$. Definiendo $s = \max_{x\in\bar{U}} \tau(x)$. Una vez más, dicho valor máximo se puede alcanzado. Considerando la siguiente homotopía $H : [0,s]\times\bar{U} \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$H(t,x) = \begin{cases} h(x) & \text{, si } t = 0 \\ \frac{\varphi(t,x)-x}{t} & \text{, si } i \in (0,s] \end{cases}$$

Claramente, $H(t,x) \neq 0$ para $t \in [0,s]$ y $x \in \partial U$. Ya que ∂U no contiene puntos de equilibrios o periódicas, $\mathbf{deg}(h,U) = \mathbf{deg}(H(s,\cdot),U)$. Por otra parte, si $x \in \partial U$, entonces la definición de s implica que $\varphi(s,x) \in K^+ \subseteq U$. Esto implica que no existe $\theta \in [0,1]$ de modo que $\frac{\theta x_0+(1-\theta)\varphi(s,x)-x}{s} = 0$, donde $x_0 \in U$. Consecuentemente, $H(s,\cdot)$ es U-homotópico a $-Id + x_0$. Esto asegura $\mathbf{deg}(H(x,\cdot),U) = \mathbf{deg}(-Id + x_0,U) = (-1)^n$. ■

5. Conclusiones

1. El objetivo de este trabajo fue de construir el Grado topológico, el cual se logró, como se muestra en la sección anterio, con la ecuación:

   $$\mathbf{deg}(f,\Omega) = \sum_{x\in g^{-1}(0)\cap\Omega} sgn\ \det Dg(x)$$

   donde se probo que que dicha aplicación **deg**, cumple con las propiedades básicas, con la cual se podrá determinar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Como resultado de la aplicación **deg** es un valor entero, de se concluye que si $\mathbf{deg} = 0$ la ecuación no tiene solución (o soluciones) y si $\mathbf{deg} \neq 0$ la ecuación si tiene solución (o soluciones).
2. Se desarrollo la teoría de Grado Topológico en dimensión finita, llamado en este caso Grado Topológico de Brouwer, donde se muestra que la aplicación $\mathbf{deg} : M \to \mathbb{Z}$, que cumple con la propiedades de normalización, aditividad e invariancia homotópica,
3. Se mostró mediante el teorema 4, que el grado topológico te permite determinar la existencia de soluciones periódicas de una ecuación diferencial ordinaria de la forma (6).

Referencias

[1] Apostol, Tom M. (2001) ***Calculus, Volumen 1***. EDITORIAL REVERTÉ S.A.

[2] Cañada A. y Villegas S. (2007) ***El Teorema de Bolzano en varias Variables***. Artículo matemático de la Gaseta de la RSME (revista de la sociedad matemática española).

[3] Cid Araújo, José Ángel, (2010) ***Grado Topológico y Ecuaciones Diferenciales***. `http://www4.ujaen.es/~angelcid/`

[4] Cushing J.M. (1980) ***Two Species Competition in a periodic enviroment***. Journal of Mathematical Biology,(10), pp 385-400 - Springer.

[5] Déboli, Alberto Fernando, (2005) ***Elementos de la Teoría de Grado: Aplicaciones a la Topología y al Análisis,*** Universidad de Buenos Aires.

[6] Deimling Klaus, (1985) ***Nonlinear Functional Analysis,*** Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo.

[7] Fonseca Irene and Gangbo Wilfrid, (1995) ***Degree Theory in Analysis and Applications,*** CLARENDON PRESS OXFORD, Ney York.

[8] Manton Nicholas, Sutcliffe Paul, (2004) ***Topological Solitons,*** Cambridge University Press, London.

[9] Nagumo Mitio, (1952) ***A Note on the Theory of Degree of Mapping in Euclidean Spaces,*** Osaka Matematical Journal, Vol 4, No. 1.

[10] N. G. Lloyd, (1978) ***Degree Theory,*** Cambridge University Press, London.

[11] Ortega Rafael, (1994) ***Aplicaciones del Grado Topológico en la teoria de estabilidad de soluciones periódicas,*** Departamento de Matemática Aplicada - Universidad de Granada.

[12] Varona Malumbres, Juan Luis, (2007) ***Metodos Clásicos de Resolución de E.D.O.,*** Servicio de Publicaciones, Universidad de la Rioja, España.

[13] Willard Stephen. (1970) ***General Topology***. Addison-Wesley Publishing Company Inc.