

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE ESFERAS
Y PARABOLOIDES ELÍPTICOS**

TESIS

PRESENTADO POR:

ALEJANDRO TICONA CHOQUE

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO-PERÚ

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE ESFERAS Y
PARABOLOIDES ELÍPTICOS

TESIS PRESENTADO POR:
ALEJANDRO TICONA CHOQUE

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



APROBADO POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO
POR:

PRESIDENTE:

.....
MG. CELSO WILFREDO CALSIN VELASQUEZ

PRIMER MIEMBRO:

.....
LIC. ADOLFO CANAHUIRE CONDORI

SEGUNDO MIEMBRO:

.....
LIC. RAQUEL VERONICA ARI SUAZA

DIRECTOR/ASESOR:

.....
MG. JUAN CARLOS BENAVIDES HUANCA

TEMA: Algunas Caracterizaciones De Esferas Y Paraboloides Elípticos

AREA: Geometría Diferencial

LINEA DE INVESTIGACION: Matemática Pura

FECHA DE SUSTENTACIÓN 18 DE DICIEMBRE DEL 2017

DEDICATORIA

*A La Memoria De Mi Madre **Lucia Choque Calsin** y a Toda Mi Familia Por Sus Sabios Consejos, y a **Sucy Nancy Ari Flores** Que Llego En Un Momento Oportuno a Mi Vida, Por Su Constante Apoyo Que Hicieron Posible La Realización Del Presente Trabajo.*

*Atte: **Algebrando***

AGRADECIMIENTO

DE MANERA ESPECIAL A LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO Y A LA FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA POR HABER SIDO FORJADORA DE MI FORMACION PROFECIONAL.

A MIS JURADOS, EN ESPECIAL AL Mg. WILFREDO CALSIN Y AL LIC. DERLY PARI MENDOZA, AL DIRECTOR DE TESIS POR TODO EL APOYO BRINDADO, QUE HICIERON POSIBLE EL PRESENTE TRABAJO DE INVESTIGACION.

ÍNDICE GENERAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO	1
ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE ESFERAS Y PARABOLOIDES ELÍPTICOS .	1
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO	1
Índice general.....	4
Índice de figuras.....	1
RESUMEN	7
ABSTRACT	8
I Capítulo.....	9
1.1. Introducción	9
1.2. Planteamiento del problema de investigación.....	10
1.2.1. Planteamiento General	10
1.2.2. Planteamiento específico	11
1.3. Objetivos.....	11
1.3.1. Objetivo general	11
1.3.2. Objetivos específicos.....	11
Capítulo 2.....	12
2.1. Antecedentes de la investigación.....	12
2.2. Marco Teórico.....	13
2.2.1. Superficies	13
2.2.2. Aplicación de Gauss.....	32
2.2.3. El teorema de Gauss	50
2.2.4. Superficies de dimensión n.....	54
Capítulo 3.....	61
3.1. Materiales	61
3.2. Metodología de la investigación	62
3.2.1. Tipo de investigación	62
3.2.2. Método	62
3.2.3. Técnica.....	62
3.2.4. Estrategias.....	62

Capítulo 4.....	63
4.1. Esferas	63
4.2. Paraboloides elípticos	69
Capítulo 5 CONCLUSIONES.....	76
Capítulo 6.....	77
RECOMENDACIONES	77
7. BIBLIOGRAFÍA	78

Índice de figuras

Curvas coordenadas.....	16
Parametrizacion de la esfera.....	18
Plano tangente.....	24
Área de la esfera.....	30
Esfera unidad.....	35
Curva normal.....	37
Teorema de meusnier: C y C_n tiene la misma curvatura normal en p a lo largo de v	38
Secciones normales sobre una esfera.....	40
Superficie con punto elíptico.....	47
Superficie con punto hiperbólico.....	49

RESUMEN

En este trabajo se estudia la geometría diferencial euclidiana \mathbb{R}^3 introduciendo la definición de superficie, curvaturas; para obtener caracterizaciones de la esfera en el espacio tridimensional; considerando una esfera en \mathbb{R}^3 , y dos planos paralelos que intersectan a la esfera, el área de la superficie de la esfera entre esos planos sólo depende de la distancia que separa los planos y del radio de la esfera.

Para un paraboloides elíptico de rotación en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , el volumen de una región del paraboloides de rotación en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 depende solamente del paraboloides.

Palabras clave: Esfera, paraboloides elíptico, curvatura gaussiana

ABSTRACT

In this work it is studied the Euclidean differential geometry \mathbb{R}^3 introducing the definition of surface, curvatures; to obtain characterizations of the sphere in three-dimensional space; considering a sphere in \mathbb{R}^3 , and two parallel planes intersecting the sphere, the area of the surface of the sphere between those planes depends only on the distance separating the planes and the radius of the sphere.

For an elliptic paraboloid of rotation in the Euclidean space \mathbb{R}^3 , the volume of a region of the rotation paraboloid in the Euclidean space \mathbb{R}^3 depends only on the paraboloid.

Keywords: Sphere, elliptic paraboloid, Gaussian curvature.

Capítulo I

1.1. Introducción

La geometría es una rama de las matemática que fue planteado por Euclides en su obra “Los Elementos”. Gauss contribuye con la creación de la geometría diferencial, en el que se aborda el estudio de curvas y superficies con las caracterizaciones de curvatura y torsión. En el estudio de la geometría diferencial, se estudian dos tipos de curvaturas importantes: la extrínseca y la intrínseca. La curvatura extrínseca de una curva en el espacio euclidiano tridimensional fue la primera en ser estudiada, dando lugar a las fórmulas de Frenet, que describen completamente una curva en el espacio en términos de su curvatura, torsión, el punto inicial y la dirección. Luego estudiaron a las superficies. Las principales curvaturas que surgieron de este estudio fueron la curvatura media y la curvatura de Gauss. Inicialmente, la curvatura media fue la más estudiada, siendo Gauss el primero en reconocer la importancia de la curvatura que lleva su nombre. La curvatura de una superficie en el espacio se describe por dos números llamados las curvaturas principales. Aunque las curvaturas principales proporcionan mucha información sobre la geometría de S , no permiten discernir la geometría intrínseca de la misma. Aunque las curvaturas principales no son intrínsecas, Gauss (1827) hizo el descubrimiento sorprendente de que una combinación

particular de las mismas $K = k_1k_2$, si es intrínseca. En este trabajo se estudia las superficies con curvatura de Gauss o curvatura gaussiana que sean positivas, las esferas y los paraboloides elípticos cumplen con esta propiedad.

1.2. Planteamiento del problema de investigación

En la actualidad, la geometría diferencial es una rama de la topología que viene siendo muy investigada, debido a muchos problemas abiertos y múltiples aplicaciones; en este trabajo se establece caracterizaciones de esferas en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , con respecto a las propiedades de áreas sobre la superficie con ayuda de la curvatura gaussiana, y también con respecto a las propiedades de volúmenes establecer caracterizaciones de paraboloides elípticos en espacios euclidianos de dimensiones arbitrarias.

1.2.1. Planteamiento General

¿Es qué condiciones se puede establecer una caracterización de la esfera en el espacio tridimensional con respecto a una propiedad del área de una región de la superficie?

1.2.2. Planteamiento específico

- ¿Se puede interpretar la definición de la curvatura gaussiana en el espacio tridimensional, para que esta curvatura se aplique en la caracterización de la esfera?
- ¿Es posible caracterizar paraboloides elípticos con propiedades de volumen en espacios euclidianos de dimensiones arbitrarias?.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Establecer una caracterización de la esfera en el espacio tridimensional con respecto a una propiedad del área de una región de la superficie.

1.3.2. Objetivos específicos

- Interpretar la definición de la curvatura gaussiana en el espacio tridimensional, para que esta curvatura se aplique en la caracterización de la esfera.
- Caracterizar paraboloides elípticos con propiedades de volumen en espacios euclidianos de dimensiones arbitrarias.

Capítulo II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. Antecedentes de la investigación

Se considera como antecedentes de la investigación, los siguientes trabajos publicados que tienen relación con el trabajo propuesto.

- S. STEIN, ARCHIMEDES. What Did He Do Besides Cry Eureka?. 1999. Mathematical Association of America, Washington, DC. En este trabajo prueba una propiedad de área de la esfera.
- SOME CHARACTERIZATIONS OF SPHERES AND ELLIPTIC PARABOLOIDS. 2012. Dong-Soo Kim and Young Ho Kim. En este trabajo realiza una caracterización de la esfera con ayuda de la curvatura gaussiana.
- HANG HOUJUN; AGAO KEFEI; ALI WANGGEN. 2006. Elliptic paraboloid sphere intersection algorithm. School of Mathematics and Computer Sciencia Anhui Normal University. Wuhu. Anhui 241000.China. En este trabajo, obtiene el método para determinar si

un paraboloides elíptico y una esfera tienen curvas de intersección.

- S. N. KRUKOV. 1968. A priori estimates and certain properties of the solutions of elliptic and parabolic equations. American mathematical society translations. Series 2. Volumen 68. En este trabajo se establecen estimaciones a priori y se estudian ciertas propiedades cualitativas de soluciones generalizadas de ecuaciones elípticas.

2.2. Marco Teórico

2.2.1. Superficies

En esta sección se define una superficie en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , donde es obtenida mediante una deformación de una parte del plano, y que se cumple bajo ciertas condiciones como la diferenciabilidad y así tenga sentido de definir el plano tangente en cada punto de la superficie.

Definición 2.1 Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in S$, existen una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^3$ y una aplicación $X: U \rightarrow V \cap S$, de un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subseteq \mathbb{R}^3$ tales que satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. X es diferenciable.

Esto significa que si se escribe

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in U$$

las funciones $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en U .

2. X es un homeomorfismo.

Puesto que X es continua por la condición 1., esto significa que X tiene inversa $X^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ que es continua; es decir, X^{-1} es la restricción de una aplicación continua $F: W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida en un conjunto abierto W conteniendo $V \cap S$.

3. (Condición de Regularidad). Para cada $q \in U$, la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

La importancia de la condición 3 de la definición anterior, garantiza que para cada $p \in S$ el conjunto de vectores tangentes a las curvas parametrizadas de S , que pasan

por p , constituyen un plano, dicho plano será llamado plano tangente a la superficie S en el punto p .

La aplicación X se llama parametrización o sistema de coordenadas (locales) de una vecindad de p . La vecindad $V \cap S$ de p se llama vecindad coordenada.

La condición 3. de la definición anterior, nos permite calcular la matriz de la transformación lineal $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en las bases canónicas $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{R}^2 con coordenadas (u, v) y $\{f_1, f_2, f_3\}$ de \mathbb{R}^3 con coordenadas (x, y, z) donde $e_1=(1, 0)$, $e_2=(0, 1)$; $f_1=(1, 0, 0)$, $f_2=(0, 1, 0)$ y $f_3=(0, 0, 1)$.

Sea $q = (u_0, v_0) \in U$. El vector e_1 es tangente a la curva $u \mapsto (u, v_0)$, cuya imagen bajo X es la curva $u \mapsto (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$.

Esta curva imagen (llamada curva coordenada $v = v_0$) está en S y tiene en el punto

$X(q)$ como vector tangente (Figura 2.1).

$$\frac{\partial X}{\partial u}(q) = \frac{\partial X}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

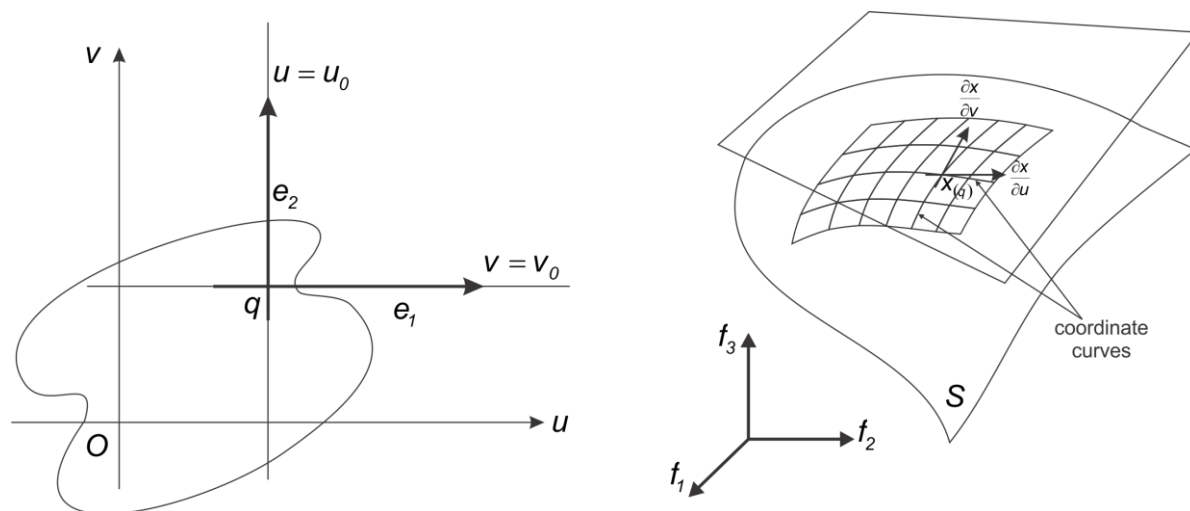


Figura 2.1: Curvas coordenadas

donde las derivadas son calculados en $q = (u_0, v_0)$ y el vector es indicado por sus componentes en la base $\{f_1, f_2, f_3\}$. Por definición de la diferencial

$$dX_q(e_1) = \frac{\partial X}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

La notación dX_q es la diferencial de X en q .

(A veces se denota como $X'(q)$ o $DX(q)$, y se dice que es la derivada de X en q).

Similarmente, usando la curva coordenada $u = u_0$

(imagen por X de la curva $v \mapsto (u_0, v)$), se obtiene

$$dX_q(e_2) = \frac{\partial X}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

Así, la matriz de la transformación lineal dX_q respecto a la bases referidas es

$$dX_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

La condición 3 de la definición anterior puede ser expresado exigiendo que las dos columnas de esta matriz sean linealmente independientes. Esto equivale a que

$\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \neq 0$ Todavía hay otra manera equivalente que consiste, en que uno

de los menores de orden 2 de la matriz dX_q ; es decir, uno de los determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \text{ o } \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}$$

Es diferente de cero en q

Ejemplo 1 Mostrar que la esfera unitaria

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una superficie regular.

Considerando la parametrización de la esfera, sea

$V = \{(\theta, \phi); 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ y sea $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$X(\theta, \phi) = (\text{sen } \theta \cos \phi, \text{sen } \theta \text{ sen } \phi, \cos \theta).$$

Para la demostración se verifica que X es una parametrización de S^2 . Habitualmente θ se denomina la colatitud (complemento de la latitud) y a ϕ la longitud (Figura 2.2).

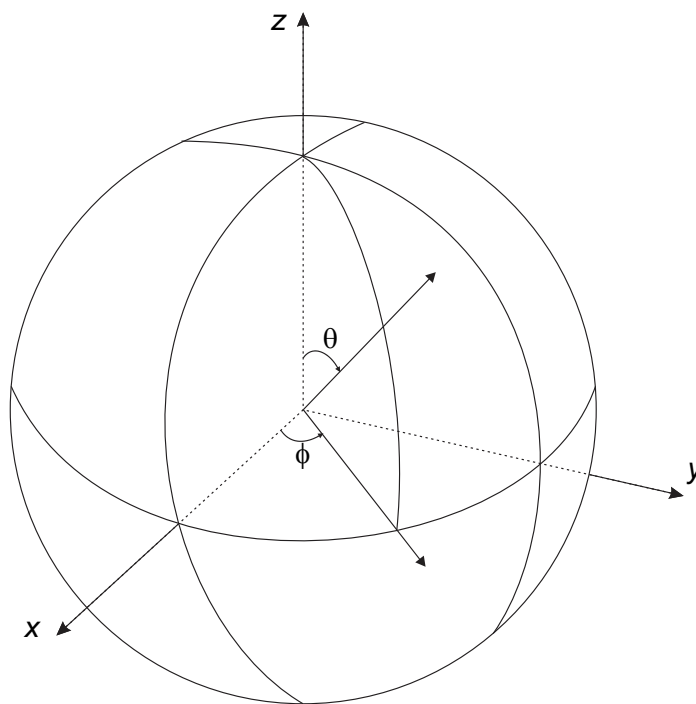


Figura 2.2: Parametrización de la esfera

Se verifican para X dada en la definición de superficie regular, la tres condiciones siguientes:

1. X es diferenciable, ya que las funciones coordenadas $x(\theta, \phi) = \sin \theta \cos \phi$, $y(\theta, \phi) = \sin \theta \sin \phi$, $z(\theta, \phi) = \cos \theta$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en V .

2. X es un homeomorfismo.

a) Por 1. X es continua.

b) X es inyectiva.

Sean $(\theta_1, \phi_1), (\theta_2, \phi_2) \in V$ tales que $X(\theta_1, \phi_1) = X(\theta_2, \phi_2)$,

entonces $(\theta_1, \phi_1) = (\theta_2, \phi_2)$.

De hecho, $X(\theta_1, \phi_1) = X(\theta_2, \phi_2)$ implica

$$(\sin \theta_1 \cos \phi_1, \sin \theta_1 \sin \phi_1, \cos \theta_1) = (\sin \theta_2 \cos \phi_2, \sin \theta_2 \sin \phi_2, \cos \theta_2),$$

de donde

$$\sin \theta_1 \sin \phi_1 = \sin \theta_2 \sin \phi_2 \quad (2.2)$$

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 \quad (2.3)$$

De (2.3): $\theta_1 = \theta_2 + 2n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Pero $(\theta_1, \phi_1), (\theta_2, \phi_2) \in V$ implica que $0 < \theta_1 < \pi$ y $0 < \theta_2 < \pi$, luego $0 < \theta_2 + 2n\pi < \pi$. De ahí, se deduce que $n = 0$.

$$\text{Así } \theta_1 = \theta_2 \quad (2.4)$$

De (2.4) en (2.2): $\sin \theta_1 \sin \phi_1 = \sin \theta_1 \sin \phi_2$, siendo $\sin \theta_1 \neq 0$ para

$0 < \theta_1 < \pi$, se tiene $\sin \phi_1 = \sin \phi_2$. De donde $\phi_1 = \phi_2 + 2n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Pero, el hecho que $(\theta_1, \phi_1), (\theta_2, \phi_2) \in V$ implica $0 < \phi_1 < 2\pi$, $0 < \phi_2 < 2\pi$; de modo que $0 < \phi_2 + 2n\pi < 2\pi$, luego $n = 0$.

$$\text{Así } \phi_1 = \phi_2 \quad (2.5)$$

Se obtiene el mismo resultado de (2.4) en (2.1), ya que \cos y \sin son funciones

periódicas de periodo 2π .

c) De b) se sigue que la aplicación X tiene inversa, $X^{-1} : X(V) \rightarrow V$.

d) Para completar la verificación de la condición 2. se puede demostrar que X^{-1} es continua. Sin embargo, no es necesario ya que la proposición 4 de “(M.P. Do Carmo, p. 64)” da este resultado porque S^2 es una superficie regular y X es inyectiva cuando se cumplan las condiciones 1 y 3 de la definición de superficie regular.

De a), b), c), y d), se concluye que X es un homeomorfismo.

3. Para cada $q \in V$, $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

Una manera equivalente de demostrar la inyectividad de dX_q , es mostrar que

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial X}{\partial \vartheta} \neq 0$$

En efecto:

$v = 0 \Leftrightarrow |v| = 0$, la cual es equivalente a

$$|v|^2 \neq 0 \Leftrightarrow |v| \neq 0$$

$$0 \Leftrightarrow v \neq 0 \quad \text{para } v \in \mathbb{R}^3 \quad (2.6)$$

Calculando el producto vectorial:

$$\begin{aligned} dX_q(e_1) \wedge dX_q(e_2) &= (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \wedge (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0) \\ &= (\sin^2 \theta \cos \phi, \sin^2 \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \theta). \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} [dX_q(e_1) \wedge dX_q(e_2)]^2 &= \left[\frac{\partial X}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial X}{\partial \phi} \right]^2 \\ &= (\sin^2 \theta \cos \phi)^2 + (\sin^2 \theta \sin \phi)^2 + (\cos \theta \sin \theta)^2 \\ &= \sin^4 \theta \cos^2 \phi + \sin^4 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &= \sin^4 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &= \sin^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \sin^2 \theta \\ &\neq 0 \text{ para } 0 < \theta < \pi \end{aligned}$$

De (2.7) $\frac{\partial X}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial X}{\partial \phi} \neq 0$ por lo tanto dX_q es inyectiva

Por lo tanto, X es una parametrización de la esfera S^2

En seguida se define el plano tangente, que está garantizada por la condición

3. de la definición de superficie regular.

Por un vector tangente a S , en $p \in S$, se entiende como el vector tangente $\alpha'(0)$ de una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\varrho, \varrho) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$

Proposición 2.2 Sea $X:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de una superficie regular S y sea $q \in U$. El subespacio vectorial de dimensión 2,

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide con el conjunto de los vectores tangentes a S en $X(q)$.

Demostración: Sea $A = \{w \in \mathbb{R}^3 / w = \alpha'(0) \text{ para alguna curva parametrizada } \alpha : \langle -e, e \rangle \rightarrow S \text{ con } \alpha(0) = X(q)\}$ entonces por demostrar que $A = dX_q(\mathbb{R}^2)$.

$$i) A \subseteq dX_q(\mathbb{R}^2)$$

Sea $w \in A$, entonces existe una curva parametrizada

$$\alpha : \langle -e, e \rangle \rightarrow S \text{ con } \alpha'(0) = w \text{ y } \alpha(0) = X(q)$$

Sea $\beta = X^{-1} \circ \alpha : (-\varrho, \varrho) \rightarrow U$ una curva parametrizada con $\beta(0) = 0$, luego $\alpha = X \circ \beta$ de modo que $\alpha(t) = X(\beta(t))$, $t \in (-\varrho, \varrho)$. Por la regla de la cadena $w = \alpha'(0) = dX_q(\beta'(0))$ con $\beta'(0) \in \mathbb{R}^2$, luego $w \in dX_q(\mathbb{R}^2)$.

$$ii) dX_q(\mathbb{R}^2) \subseteq A$$

Sea $w \in dX_q(\mathbb{R}^2)$, entonces existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $w = dX_q(v)$.

Sea $\gamma : (-\varrho, \varrho) \rightarrow U$ dada por $\gamma(t) = tv + q$, $t \in (-\varrho, \varrho)$, luego γ

es una curva parametrizada (diferenciable) tal que $\alpha'(0) = v$ y $\gamma(0) = q$.

$$\begin{aligned}
 w = dX_q(v) &= dX(\gamma(0))\gamma'(0) \\
 &= \left. \frac{d}{dt}(X \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} \\
 \text{sea } \alpha &= X \circ \gamma, \text{ luego} \\
 &= \left. \frac{d}{dt}\alpha(t) \right|_{t=0} \\
 &= \alpha'(0)
 \end{aligned}$$

De i) y ii), concluimos que $A = dX_q(\mathbb{R}^2)$ (Figura 2.3)

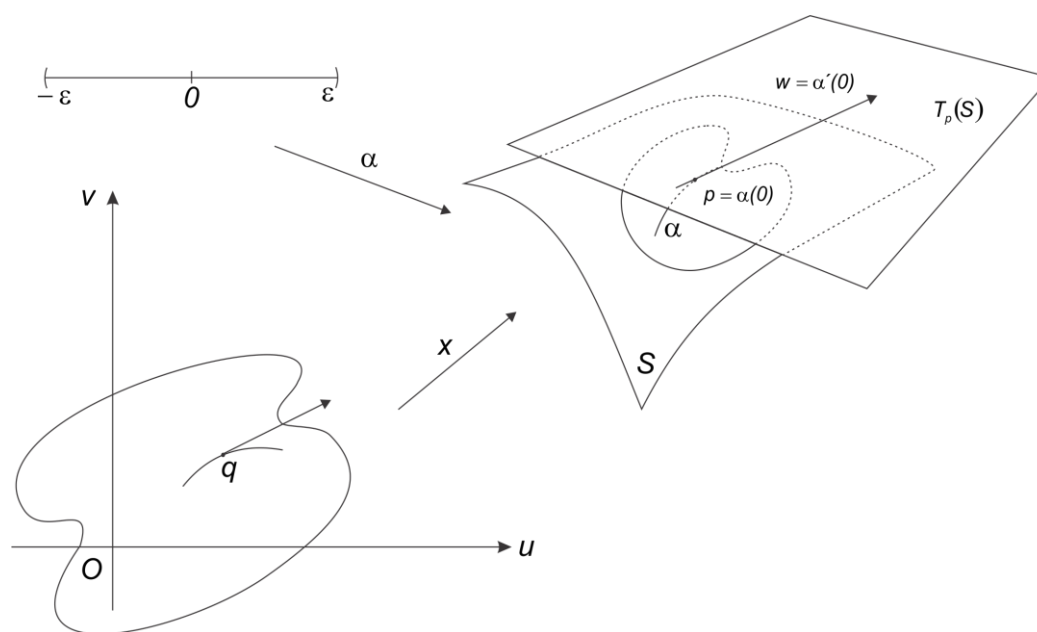


figura 2.3: Plano tangente

El plano $dX_q(\mathbb{R}^2)$, que pasa por $X(q) = p$, no depende de la parametrización de X . Este plano se llamará plano tangente a S en p y se denotará por $T_p(S)$. La elección de una parametrización X determina un base $\{(\partial X/\partial u(q)), (\partial X/\partial v(q))\}$, denominada base asociada a X . Algunas veces es conveniente escribir $\partial X/\partial u = X_u$ y $\partial X/\partial v = X_v$.

El producto interior de \mathbb{R}^3 induce una propiedad de norma de un elemento de \mathbb{R}^3 , así, si se toma un elemento de \mathbb{R}^3 que está en el plano tangente a una superficie regular, es decir, $w \in T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$, entonces el producto interior $(w, w)_p = |w|^2$, es una aplicación bilineal simétrica, que tiene una correspondencia con una forma cuadrática que se llama primera forma fundamental.

$$I_p(w) = (w, w)_p = |w|^2 \geq 0 \quad (2.8)$$

definición 2.3 La forma cuadrática I_p en $T_p(S)$, definida por la ecuación 2.8, se denomina la primera forma fundamental de la superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ en $p \in S$.

Geométricamente, la primera forma fundamental permite hacer mediciones sobre la superficie como son: longitudes de curva, ángulos entre vectores tangentes, áreas de regiones; sin referirnos al espacio ambiente \mathbb{R}^3 donde se halla la superficie.

La parametrización X en p de la superficie S posee una base asociada $\{X_u, X_v\}$, así es posible expresar la primera forma fundamental en dicha base. Como un vector tangente $w \in T_p(S)$ es el vector tangente de una curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\varrho, \varrho)$, con $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$, se tiene

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= (\alpha'(0), \alpha'(0))_p \\ &= (X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0), X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0))_p \\ &= (X_u(q), X_u(q))_p [u'(0)]^2 + 2(X_u(q), X_v(q))_p u'(0)v'(0) + (X_v(q), \\ &X_v(q))_p [v'(0)]^2 \\ &= E(u_0, v_0)[u'(0)]^2 + 2F(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + G(u_0, v_0)[v'(0)]^2 \end{aligned}$$

en donde los valores de las funciones involucradas se evalúan en $t = 0$, y

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u(q), X_u(q) \rangle_p;$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u(q), X_v(q) \rangle_p;$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v(q), X_v(q) \rangle_p;$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p(S)$.

Ejemplo 2 Calcular la primera forma fundamental de la esfera. Sea la esfera parametrizada por:

$$X(\theta, \phi) = (\text{sen } \theta \cos \phi, \text{sen } \theta \text{ sen } \phi, \cos \theta)$$

Primeramente se calculan las derivadas parciales de la parametrización X .

$$X_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \text{ sen } \phi, -\text{sen } \theta),$$

$$X_\phi = (-\text{sen } \theta \text{ sen } \phi, \text{sen } \theta \cos \phi, 0)$$

Seguidamente se calculan los coeficientes de la primera forma fundamental

$$E(\theta, \phi) = (X_\theta, X_\theta) = 1$$

$$F(\theta, \phi) = (X_\theta, X_\phi) = 0$$

$$G(\theta, \phi) = (X_\phi, X_\phi) = \text{sen}^2 \theta$$

Ejemplo 3 Calcular la primera forma fundamental del paraboloide elíptico. Sea el paraboloide elíptico parametrizada por:

$$X(u, v) = (au \cos v, bu \text{ sen } v, u^2)$$

Primeramente se calculan las derivadas parciales de la parametrización X .

$$X_u = (a \cos v, b \sin v, 2u),$$

$$X_v = (-a u \sin v, b u \cos v, 0)$$

Seguidamente se calculan los coeficientes de la primera forma fundamental

$$E(u, v) = a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + 4u^2$$

$$F(u, v) = -a^2 u \sin v \cos v + b^2 u \sin v \cos v$$

$$G(u, v) = a^2 u^2 \sin^2 v + b^2 u^2 \cos^2 v$$

La primera forma fundamental está relacionada con la longitud de arco. La longitud de arco s de una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ es dada por:

$$S(t) = \int_0^t |\alpha'(r)| dr = \int_0^t \sqrt{I(\alpha(r))} dr$$

En particular, si $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ está en una vecindad coordenada $X(U)$ para la parametrización $X(u, v)$, así es posible calcular la longitud de arco de α entre 0 y t por:

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dr$$

El ángulo es otra interpretación geométrica de la primera forma fundamental, así se puede definir al ángulo θ entre dos curvas parametrizadas regulares $\alpha : I \rightarrow S$ y $\beta : I \rightarrow S$ que se intersectan en $t = t_0$ mediante:

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}$$

En particular, el ángulo ϕ entre curvas coordenadas de una parametrización $X(u, v)$ es:

$$\cos \phi = \frac{X_u \cdot X_v}{|X_u| |X_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Se sigue que las curvas coordenadas de una parametrización son ortogonales si $F(u, v) = 0$ para todo $(u, v) \in U$ tal parametrización X se llama parametrización ortogonal.

Otra idea geométrica de la primera forma fundamental es el área de una región acotada. Considerando regiones acotadas R que estén contenidas en un entorno $X(U)$ de una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. En otras palabras, R es la imagen mediante X de una región acotada $Q \subset U$.

La función $|X_u \wedge X_v|$ definida en U , mide al área del paralelogramo generado por los vectores X_u y X_v .

Definición 2.4 Sea $R \subset S$ una región acotada de una superficie regular contenida en el entorno coordenado de una parametrización $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. El número positivo

$$\iint_Q |X_u \wedge X_v| dudv = A(R), \quad Q = X^{-1}(R)$$

se denomina área de R .

Es conveniente observar

$$\begin{aligned} |X_u \wedge X_v|^2 &= (X_u \wedge X_v)(X_u \wedge X_v) \\ &= \begin{vmatrix} X_u \cdot X_u & X_v \cdot X_u \\ X_u \cdot X_v & X_v \cdot X_v \end{vmatrix} \\ &= |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2 \end{aligned}$$

Lo que prueba que el integrando de $A(R)$ se puede escribir como:

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

Por lo tanto

$$A(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} dudv, \quad Q = X^{-1}(R)$$

Ejemplo 4 Calcular el área de la esfera unitaria S^2 .

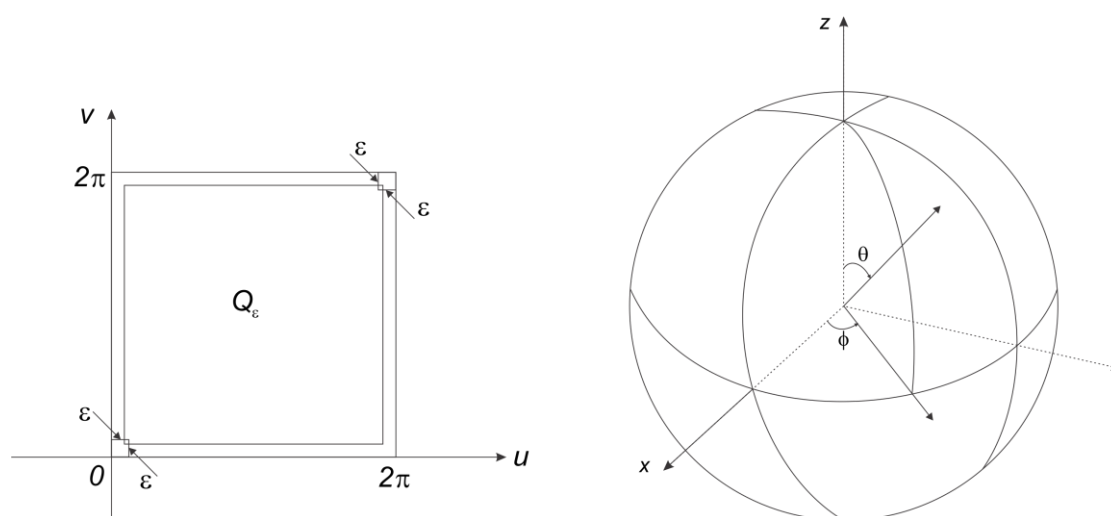


Figura 2.4: Área de la esfera

Sea la esfera S^2 parametrizada por

$$X(u, v) = (\cos u \sen v, \sen u \sen v, \cos v), \quad 0 < u < 2\pi; \quad 0 < v < \pi$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera son:

$$E = \sen^2 v, \quad F = 0, \quad G = 1$$

$$Q_\epsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 + \epsilon \leq u \leq 2\pi - \epsilon, \quad 0 + \epsilon \leq v \leq \pi - \epsilon\}$$

El área de $A(R_\epsilon)$ es:

$$\begin{aligned} A(R_\epsilon) &= \iint_{Q_\epsilon} \sqrt{EG - F^2} \\ &= \iint_{Q_\epsilon} \sqrt{\sen^2 v} \, du \, dv \\ &= \iint_{Q_\epsilon} \sen v \, du \, dv; \quad v > 0, \quad \sen v > 0 \\ &= \int_{0+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \sen v \, dv \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} du \\ &= \left[-\cos v \right]_{0+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \left[u \right]_{0+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \\ &= (-\cos(\pi - \epsilon) + \cos(0 + \epsilon))(2\pi - \epsilon - (0 + \epsilon)) \\ &= (2\pi - 2\epsilon)(\cos \epsilon - \cos(\pi - \epsilon)) \end{aligned}$$

Luego, si $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces en la última igualdad se tiene

$$A(S^2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(R_\varepsilon) = 2\pi(\cos 0 - \cos \pi) = 4\pi$$

Ejemplo 5 Mostrar que el área A de una región acotada R de la superficie

$z = f(x, y)$ es

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dX$$

donde Q es la proyección normal de R sobre el plano xy , $dX = dx dy$ y ∇f denota el vector gradiente de f .

En efecto:

Sea $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ una parametrización de la superficie $z = f(x, y)$.

Primera- mente, se calcula los coeficientes de la primera forma fundamental, para ello las derivadas parciales son:

$$X_x = (1, 0, f_x)$$

$$X_y = (0, 1, f_y)$$

Así, se tienen los coeficientes de la primera forma fundamental

$$E = (X_x, X_x) = 1 + f_x^2$$

$$F = (X_x, X_y) = f_x f_y$$

$$G = (X_y, X_y) = 1 + f_y^2$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 EG - F^2 &= (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - (f_x f_y)^2 \\
 &= 1 + f_x^2 + f_y^2 + f_x^2 f_y^2 - f_x^2 f_y^2 \\
 &= 1 + f_x^2 + f_y^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, dx dy \\
 &= \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy
 \end{aligned}$$

y de $\nabla f = (f_x, f_y)$, se tiene $|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2$. Así, se tiene el área A de la región

R como

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dX \quad (2.10)$$

2.2.2. Aplicación de Gauss

Iniciando con la revisión breve de la noción de orientación para superficies.

Dada una parametrización $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de una superficie regular S un punto $p \in S$, eligiendo un vector normal unitario en cada punto de $X(U)$ por:

$$\underline{X_u} \wedge \underline{X_v}$$

$$N(q) =$$

$$|\underline{X_u} \wedge \underline{X_v}|, \quad q \in X(U)$$

así, se tiene la aplicación $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada $q \in X(U)$ un

vector unitario $N(q)$. Más generalmente, si $V \subseteq S$ es un conjunto abierto en S y N

$: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable que asocia a cada $q \in V$ un vector

normal unitario en q , se dice que N es un campo diferenciable de vectores normales unitarios en V .

Resulta que de el hecho que no toda la superficie S admiten un campo diferenciable de vectores normales unitarios definida en toda la superficie $V = S$.

Por ejemplo, en la banda de Möbius no es posible definir tal campo diferenciable. Intuitivamente, no se puede, en la cinta de Möbius, hacer una elección consistente de lado; moviendo alrededor de la superficie se puede ir a l otro lado sin dejar la superficie.

Se dice que una superficie es orientable si existe un campo diferenciable de vectores normales unitarios definida en toda la superficie; la elección de tal campo N se llama orientación de S .

En lo que sigue, S va a denotar una superficie regular orientable en la que ha sido elegida una orientación.

Definición 2.5 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con una orientación N . La aplicación

$N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma valores en la esfera unidad

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

La aplicación así definida $N : S \rightarrow S^2$, se denomina la aplicación de Gauss de S . La aplicación $N : S \rightarrow S^2$ es una aplicación diferenciable entre superficies regulares,

si $p \in S$ se sabe que $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ es una transformación lineal pues $T_{N(p)}S^2 = T_p(S)$. Esta transformación lineal se conoce como la diferencial de la aplicación de Gauss.

Ejemplo 6 Sea la esfera unitaria dada por

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una curva parametrizada en S^2 , entonces

$$\begin{aligned} & [x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2 = 1 \\ & 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + 2z(t)z'(t) = 0 \\ & (x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = 0 \end{aligned}$$

lo cual demuestra que el vector (x, y, z) es normal a la esfera en el punto (x, y, z) .

Así $N = (x, y, z)$ y $N = (-x, -y, -z)$ son campos de vectores unitarios normales en S^2 .

Fijando una orientación en S^2 eligiendo $N = (-x, -y, -z)$ como campo normal,

N

apunta hacia el centro de la esfera. Restringiendo a la curva $\alpha(t)$, el vector normal

$$N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))$$

es una función vectorial de t , por lo tanto

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t));$$

es decir, $dN_p(v) = -v$ para todo $p \in S^2$ y todo $v \in T_p(S^2)$, con la elección de \bar{N}

como campo normal se obtiene $\bar{dN}_p(v) = v$ (Figura 2.5).

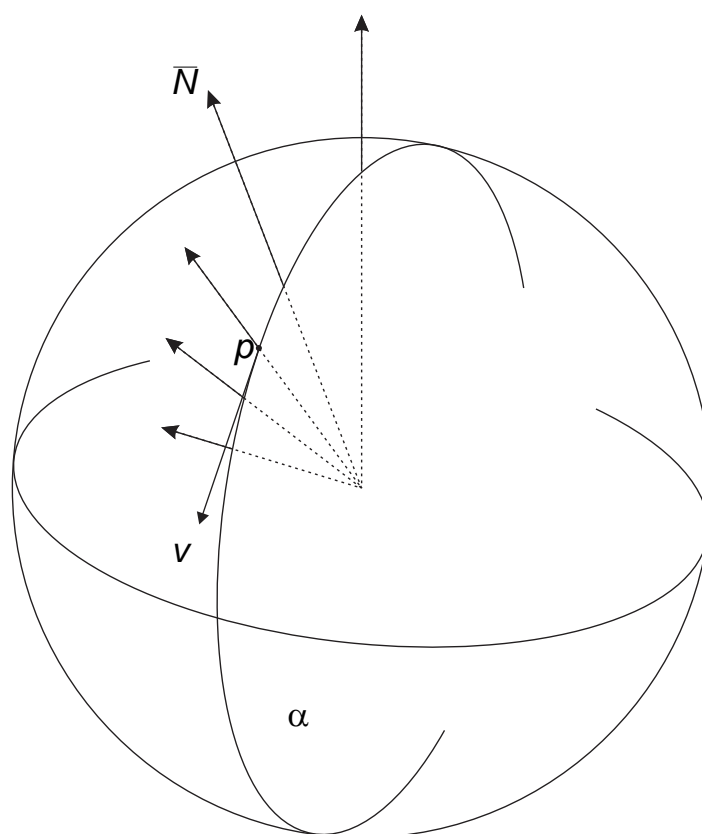


Figura 2.5: Esfera unidad $dN_p(v) = v$.

La aplicación $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ es una aplicación lineal autoadjunta, la cual permite asociar a dN_p una forma cuadrática Q en $T_p(S)$, dada por $Q(v) = (dN_p(v), v)$, $v \in T_p(S)$.

Definición 2.6 La forma cuadrática \mathbb{I}_p , definida en $T_p(S)$ por $\mathbb{I}_p(v) = -(dN_p(v), v)$ se denomina la segunda forma fundamental de S en p .

Definición 2.7 Sea C una curva regular en S que pasa por $p \in S$, k la curvatura de C en p , y $\cos \theta = (n, N)$, donde n es el vector normal a C y N es el vector normal a S en p . El número $k_n = k \cos \theta$ se denomina curvatura normal de $C \subseteq S$ en p .

k_n es la longitud de la proyección del vector normal a la superficie en p , con un signo dado por la orientación N de S en p (Figura 2.6).

Para una interpretación de la segunda forma fundamental \mathbb{I}_p , se considera una curva regular $C \subseteq S$ parametrizada por $\alpha(s)$, donde s es la longitud de arco de C , y con $\alpha(0) = p$. Si se denota por $N(s)$ la restricción del vector N a la curva

$\alpha(s)$, se tiene que $(N(s), \alpha'(s)) = 0$, de donde,

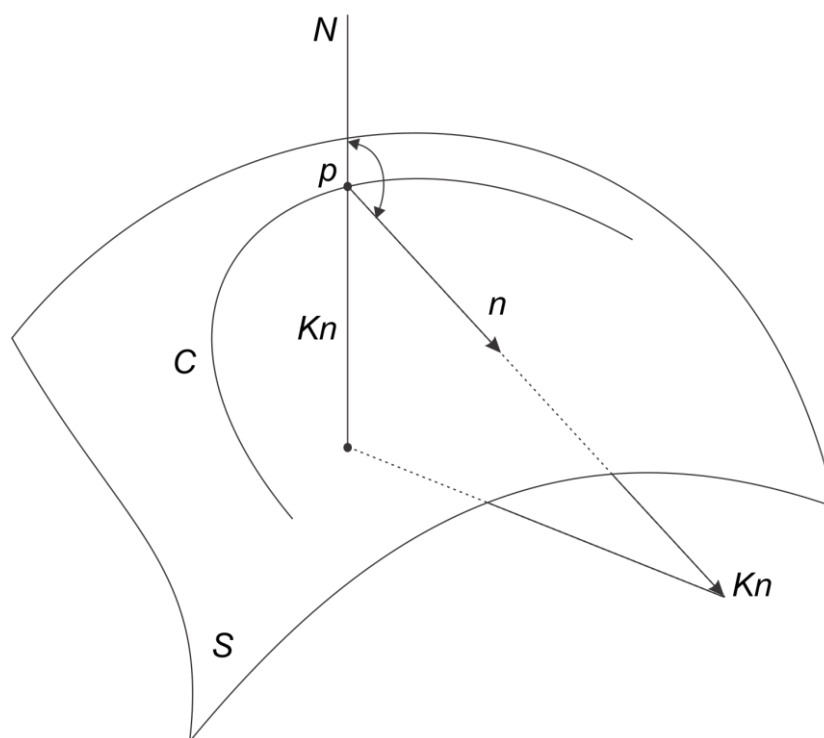


Figura 2.6: Curvatura normal

$$(N(s), \alpha''(s)) = -(N'(s), \alpha'(s)) = 0$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_p(\alpha'(0)) &= -(dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0)) \\ &= -(N'(0), \alpha'(0)) \\ &= (N(0), \alpha''(0)) \\ &= (N, k_n)(p) \\ &= k_n(p) \end{aligned}$$

En otros términos, el valor de la segunda forma fundamental \mathbb{I}_p para todo vector

unitario $v \in T_p(S)$ es igual a la curvatura normal de una curva regular en S que pasa por p y que es tangente a v .

Proposición 2.8 (Meusnier) Todas las curvas contenidas en S que tienen en un punto dado $p \in S$ la misma recta tangente, tienen en este punto la misma

Curvatura normal.

La proposición anterior permite hablar de la curvatura normal a lo largo de una dirección en p . Dado un vector unitario $v \in T_p(S)$, la intersección de S con el plano que contiene a v y a $N(p)$ se denomina la sección normal de S en p a lo largo de v (Figura 2.7).

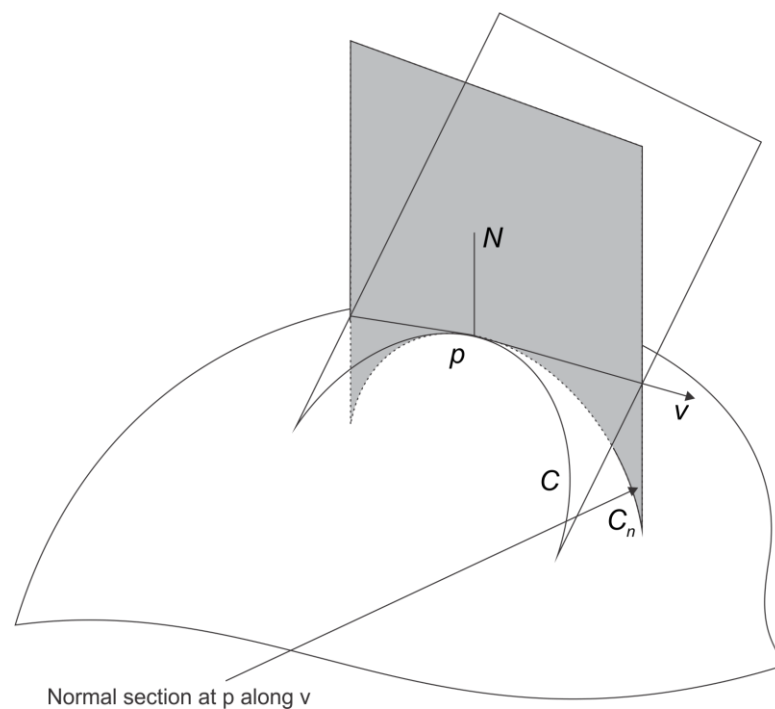


Figura 2.7: El teorema de Meusnier: C y C_n tienen la misma curvatura normal en p a lo largo de v

En la esfera S^2 , con la orientación \bar{N} , las secciones normales en un punto $p \in S^2$ son círculos de radio 1 (Figura 2.8). Por tanto las curvaturas normales son iguales a 1, y la segunda forma fundamental es $\mathbb{I}_p(v) = 1$ para todo $p \in S^2$ y todo $v \in T_p(S)$ con $|v| = 1$.

Volviendo a la aplicación lineal dN_p , para cada $p \in S$ existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p(S)$ tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$. Además, k_1 y k_2 ($k_1 \geq k_2$) son el máximo y el mínimo de la segunda forma fundamental \mathbb{I}_p restringido a la círculo unidad de $T_p(S)$; es decir, k_1 y k_2 son los valores extremos de

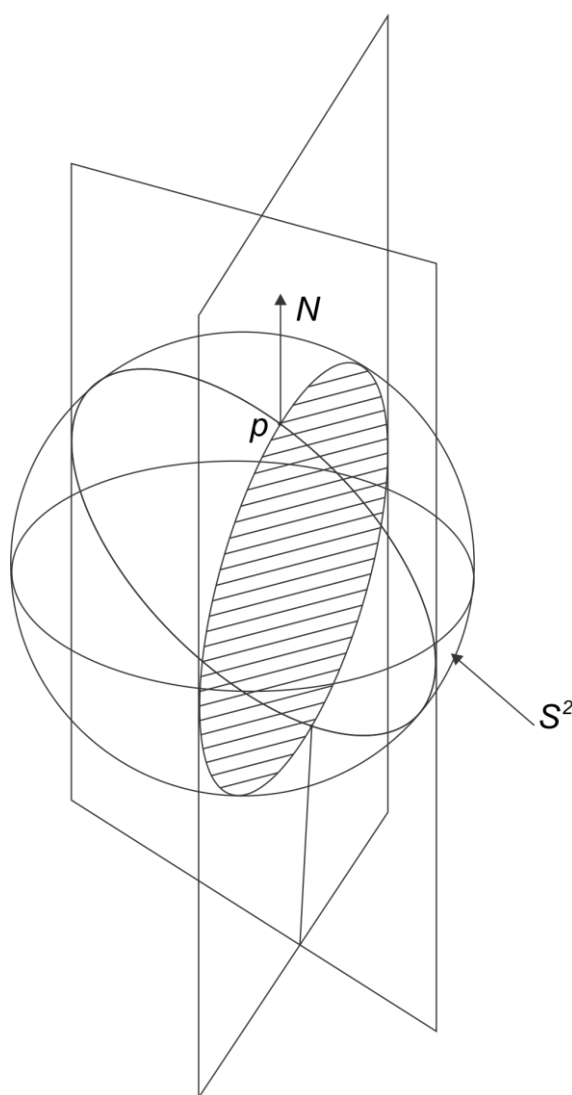


Figura 2.8: Secciones normales sobre una esfera

la curvatura normal en p .

Definición 2.9 La curvatura normal máxima k_1 y la curvatura normal mínima k_2 se llaman curvaturas principales en p , las direcciones correspondientes, es decir, las direcciones dadas por los autovectores e_1, e_2 de dN_p son llamadas direcciones principales de p .

Por ejemplo, en el plano todas las direcciones en todos los puntos del plano son direcciones principales. Lo mismo ocurre con una esfera. En ambos casos, esto viene del hecho que la segunda forma fundamental en cada punto, restringido a vectores unitarios, es constante.

Definición 2.10 Si una curva regular conexa $C \subseteq S$ tal que para todo $p \in C$ la recta tangente a C en p es una dirección principal en p . Se dice que C es una línea de curvatura de S .

Dada una aplicación lineal $A : V \rightarrow V$ de un espacio vectorial de dimensión 2 y dada una base $\{v_1, v_2\}$ de V . Si (a_{ij}) es la matriz de A en la base $\{v_1, v_2\}$ de V , entonces:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ y } \text{Traza}(A) = a_{11} + a_{22}$$

Se sabe que estos números no dependen de la elección de la base $\{v_1, v_2\}$ de V , por lo tanto, sólo dependen de A .

El determinante de dN_p es el producto $(-k_1)(-k_2) = k_1k_2$ de curvaturas principales

y la traza de dN_p es el opuesto $-(k_1 + k_2)$ de la suma de curvaturas principales.

Si se cambia la orientación de la superficie, el determinante no cambia (el hecho que

la dimensión es par es esencial aquí); la traza, sin embargo, cambia de signo.

Definición 2.11 Sea $p \in S$ y sea $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ la diferencial de la aplicación de Gauss. El determinante de dN_p es la curvatura gaussiana K de S en p . El opuesto de la mitad de la traza de dN_p se llama curvatura media H de S en p . En términos de curvaturas principales, se escribe

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Definición 2.12 Un punto de una superficie S se denomina

1. Elíptico si $\det(dN_p) > 0$.
2. Hiperbólico si $\det(dN_p) < 0$.
3. Parabólico si $\det(dN_p) = 0$ con $dN_p \neq 0$.
4. Plano si $dN_p = 0$.

Es claro que esta clasificación no depende de orientación. Los puntos de una esfera son puntos elípticos.

Para describir la aplicación de Gauss en coordenadas locales, se considera una parametrización $X(u, v)$ de una superficie S en un punto $p \in S$, y sea $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ una curva parametrizada en S , con $\alpha(0) = p$.

El vector tangente a $\alpha(t)$ en p es

$$\alpha' = X_u u' + X_v v' \text{ y}$$

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'$$

Como N_u y $N_v \in T_p(S)$, se escribe

$$N_u = a_{11} + a_{21} X_v$$

$$N_v = a_{12} X_u + \quad (2.11)$$

$$a_{22} X_v$$

por lo tanto

$$dN(\alpha') = (a_{11} X_u + a_{21} X_v) u' + (a_{12} X_u + a_{22} X_v) v'$$

$$= (a_{11} u' + a_{12} v') X_u + (a_{21} u' + a_{22} v') X_v$$

De donde:

$$dN = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Esto muestra que en la base $\{X_u, X_v\}$, dN está representado por la matriz (a_{ij}) ,

$i, j = 1, 2$.

Esta matriz no es necesariamente simétrica, a menos que $\{X_u, X_v\}$ sea una base ortonormal.

Por otro lado, la expresión de la segunda forma fundamental en la base $\{X_u, X_v\}$

es dado por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u \cdot X_u \rangle (u')^2 - \langle N_u \cdot X_v \rangle u' v' - \langle N_v \cdot X_u \rangle u' v' - \langle N_v \cdot X_v \rangle (v')^2 \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2 \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} \langle N, X_u \rangle &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \langle N, X_u \rangle &= 0 \\ \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle &= 0 \\ \langle N_v, X_u \rangle &= -\langle N, X_{uu} \rangle \end{aligned}$$

Así se obtienen

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle \\ f &= -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle \end{aligned}$$

A los e, f, y g se les denominan los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie S.

Ahora, se va obtener los valores de a_{ij} en términos de los coeficientes e, f, g.

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11} X_u + a_{21} X_v, X_v \rangle \\ -f &= a_{11} \langle N_u, X_v \rangle + a_{21} \langle X_v, X_v \rangle \\ -f &= a_{11} F + a_{21} G \end{aligned}$$

Así se obtienen

$$\begin{aligned} -f &= a_{11}F + a_{21}G \\ -f &= a_{12}E + a_{22}F \\ -e &= a_{11}E + a_{21}F \\ -g &= a_{12}F + a_{22}G \end{aligned}$$

Donde E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{X_u, X_v\}$. De las últimas ecuaciones, se obtiene matricialmente

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

De donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

donde $()^{-1}$ representa la matriz inversa de la matriz $()$.

De la última igualdad se

$$\text{tiene} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G & F \\ F & -E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ \frac{gF - fG}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

En la ecuación (2.12), aplicamos determinante

$$\begin{aligned} \det\left(-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\right) &= \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) \\ -eg + f^2 &= -K(EG - F^2) \\ K &= \frac{-eg + f^2}{EG - F^2} \end{aligned}$$

que es la curvatura de Gauss en relación a los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales.

La curvatura media es el opuesto de la mitad de la traza de la matriz (a_{ij})

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}(a_{11} \quad a_{22}) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{fF - eG + fF - gE}{EG - F^2}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la curvatura media en relación a los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales está dada por

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{fF - eG + fF - gE}{EG - F^2}\right)$$

Proposición 2.13 Sea $p \in S$ un punto elíptico de una superficie S . Entonces existe una vecindad V de p en S tal que todos los puntos de V pertenecen al mismo lado del plano tangente $T_p(S)$. Sea $p \in S$ un punto hiperbólico. Entonces en cada vecindad de p existen puntos de S que están en ambos lados de $T_p(S)$.

Demostración: Sea $X(u, v)$ una parametrización de S en p , con $X(0, 0) = p$.

La distancia d de un punto $q = X(u, v) \in S$ al plano tangente $T_p(S)$ (Figura 2.9) está dado por

$$\begin{aligned} d &= (q - p, N(p)) \\ &= (X(u, v) - X(0, 0), N(p)) \end{aligned}$$

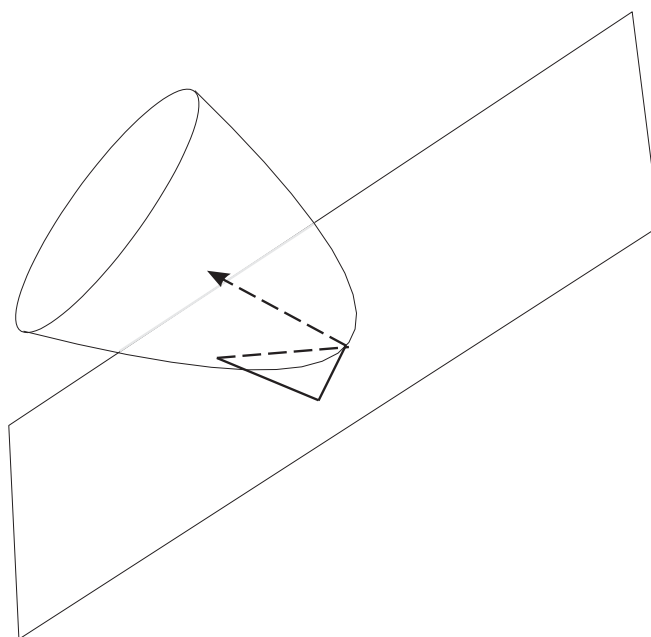


Figura 2.9: Superficie con punto elíptico.

Como $X(u, v)$ es diferenciable, se tiene de la fórmula de Taylor:

$$X(u, v) = X(0, 0) + X_u a + X_v b + \frac{1}{2} (X_{uu} a^2 + 2X_{uv} ab + X_{vv} b^2) + \bar{R}$$

donde las derivadas son tomadas en $(0, 0)$ y el resto \bar{R} satisface la condición:

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{\bar{R}}{a^2 + b^2} = 0$$

De esto se sigue que:

$$\begin{aligned}
 d &= \langle X(u,v) - X(0,0), N(p) \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \langle X_{uv} \cdot N(p) \rangle a^2 + 2 \langle X_{uv} \cdot N(p) \rangle ab + \langle X_{uv} \cdot N(p) \rangle b^2 \right\} + R \\
 &= \frac{1}{2} (ea^2 + 2fab + gb^2) + R \\
 &= \frac{1}{2} II_p(w) + R
 \end{aligned}$$

Luego:

$$d = \frac{1}{2} II_p(w) + R$$

donde $w = aX_u + bX_v \in T_p(S)$, $R = \overline{\langle R, N(p) \rangle}$ y

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{R}{|w|^2} = \left\langle \lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{\bar{R}}{a^2 + b^2}, N(p) \right\rangle = \langle 0, N(p) \rangle = 0$$

Para un punto elíptico p , $II_p(w) = k_1\xi^2 + k_2\eta^2$ tiene signo fijo. Por lo tanto, para todo $(a, b) \in T_p(S)$ suficientemente cerca a p , d tiene el mismo signo como $II_p(w)$. esto significa que todos los puntos $X(u, v)$ correspondientes a (a, b) en la superficie

están en el mismo lado de $T_p(S)$. Para un punto hiperbólico p , en cada vecindad de p existen punto (a, b) y $(a, b) \in T_p(S)$ tales que $II_p(w)$ tienen signos opuestos llamados curvaturas principales (aquí $w = aX_u + bX_v$). De modo que:

$$d = \frac{1}{2} II_p(w) + R = \frac{1}{2} |w|^2 II_p\left(\frac{w}{|w|}\right) + R \quad y$$

$$d = \frac{1}{2} II_p(\bar{w}) + R = \frac{1}{2} |\bar{w}|^2 II_p\left(\frac{\bar{w}}{|\bar{w}|}\right) + R$$

Tienen signos distintos. Por lo tanto, existen por lo menos dos puntos $X(u, v)$ de S en distintos lados del plano tangente $T_p(S)$.

Una superficie con puntos hiperbólicos se puede ver en (Figura 2.10).

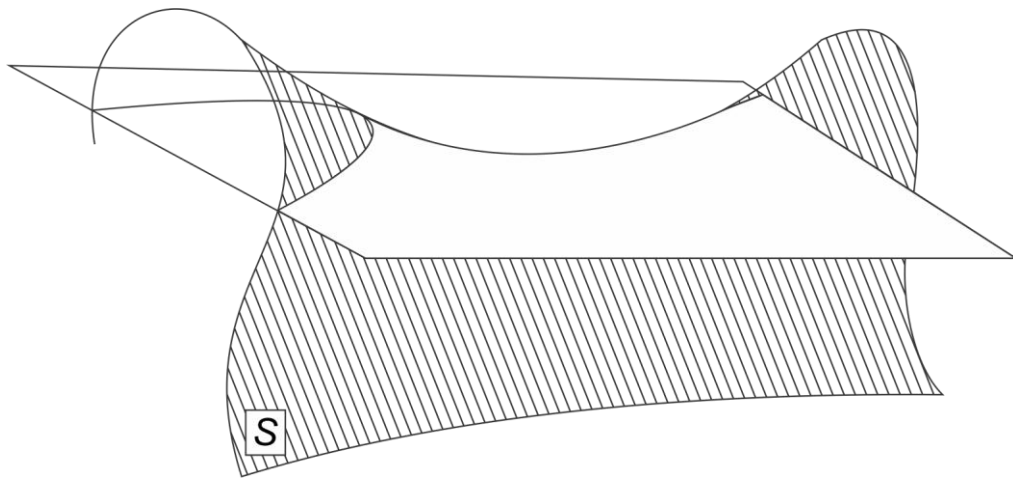


Figura 2.10: Superficie con punto hiperbólico

2.2.3. El teorema de Gauss

Como ya es habitual, se denota por S a una superficie regular, orientable y orientada. Sea $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización en la orientación de S . A cada punto de $X(U)$ se asigna un triedro natural definido por los vectores X_u, X_v y N . Al expresar las derivadas de los vectores X_u, X_v y N de la base $\{X_u, X_v, N\}$ de \mathbb{R}^3 , se obtienen

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + L_2 N \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N \\ N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v \\ N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v \end{aligned}$$

Donde los coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$, se denominan los símbolos de Christoffel de S en la parametrización X . Como $X_{uv} = X_{vu}$, se sigue que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ y $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ es decir, los símbolos de Christoffel son simétricos con respecto a los subíndices.

Efectuando el producto interior de las cuatro primeras relaciones con N , se tiene

Inmediatamente que $L_1 = e$, $L_2 = \bar{L}_2 = f$, $L_3 = g$, donde e, f, g son los coeficientes de la segunda forma fundamental de S .

Luego, las ecuaciones quedan del siguiente modo

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 + eN \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 + fN \\ X_{vu} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 + gN \\ N_u &= a_{11} X_u + a_{12} X_v \\ N_v &= a_{21} X_u + a_{22} X_v \end{aligned}$$

Para determinar los símbolos de Christoffel, se efectúa el producto interior de las cuatro primeras relaciones con X_u y X_v , obteniendo el sistema

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle X_{vu}, X_v \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle X_{vu}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones, se obtienen.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_u - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{GE_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_u - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{GE_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

Justamente, las expresiones de las derivadas de X_u , X_v y N con respecto a la base $\{X_u, X_v, N\}$, únicamente dependen de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de S . Un procedimiento para obtener relaciones entre estos coeficientes consiste en considerar las expresiones

$$\begin{aligned}(X_{uu})_v - (X_{uv})_u &= 0 \\ (X_{vv})_u - (X_{vu})_v &= 0 \\ N_{uv} - N_{vu} &= 0\end{aligned}$$

Al introducir valores, se puede escribir estas relaciones en la forma

$$\begin{aligned}A_1 X_u + B_1 X_v + C_1 N &= 0 \\ A_2 X_u + B_2 X_v + C_2 N &= 0 \\ A_3 X_u + B_3 X_v + C_3 N &= 0\end{aligned}$$

donde los A_i , B_i , C_i son funciones de E , F , G , e , f , g y de sus derivadas.

Como los vectores X_u , X_v , N son linealmente independientes, las últimas relaciones implican la existencia de nuevas relaciones

$$A_i = 0, \quad B_i = 0, \quad C_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Determinando las relaciones $A_1 = 0, B_1 = 0, C_1 = 0$. Se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 X_{uv} + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e N_v + (\Gamma_{11}^1)_v X_u + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + e_v N &= \Gamma_{12}^1 X_{uu} + \Gamma_{12}^2 X_{vu} + f N_u \\ &+ (\Gamma_{12}^2)_u X_u + (\Gamma_{12}^1)_u X_v + f_u N\end{aligned}$$

Usando las combinaciones lineales y la ecuación de los coeficientes de X_v , se tiene

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + ea_{22} + \left(\Gamma_{11}^2\right)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + fa_{21} + \left(\Gamma_{12}^2\right)_u$$

Introduciendo los valores de a_{ij} , se deduce que

$$\left(\Gamma_{12}^2\right)_u - \left(\Gamma_{11}^2\right)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^1 = -EK$$

Las ecuaciones precedentes prueban el siguiente teorema

Teorema 2.14 (Egregium de Gauss) La curvatura gaussiana K de una superficie es invariante por isometrías locales.

Por otro lado, se estudia las superficies convexas, que son superficies que están en un lado de cada plano tangente.

Definición 2.15 (Superficie Convexa) Una superficie regular se dice que es una superficie convexa si se encuentra en un lado de cada plano tangente.

Teorema 2.16 Sea S una superficie conexa y compacta en \mathbb{R}^3 . Si $K > 0$ en todo punto de la superficie, entonces la superficie es convexa.

Para la caracterización de la esfera, se debe demostrar que la esfera S^2 es una superficie convexa.

Ejemplo 7 La esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ es convexa.

En efecto. Las secciones normales en un punto $p \in S^2$ son las circunferencias de radio r , la curvatura de la circunferencia de radio r es constante e igual a $\frac{1}{r}$,

por lo tanto todas las curvaturas normales k_n de la esfera S^2 de radio r son iguales a

decir,

$$K_n = \frac{1}{r}$$

Así se tiene que las curvaturas principales son iguales a. Luego la curvatura gaussiana K de S^2 es:

$$\begin{aligned} K &= k_1 k_2 \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

Así, se tiene que $K > 0$, por lo tanto la esfera S^2 es una superficie convexa.

2.2.4. Superficies de dimensión n

Una superficie de dimensión n , o n -superficie, en \mathbb{R}^{n+1} es un subconjunto no vacío S de \mathbb{R}^{n+1} de la forma $S = f^{-1}$ donde $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, U abierto, es una función suave con la propiedad que $\nabla f(p) \neq 0$ para todo $p \in S$. Una 1-superficie

en \mathbb{R}^2 es

también llamado una curva plana. Una 2-superficie en \mathbb{R}^3 es usualmente llamado una superficie. Una n -superficie en \mathbb{R}^{n+1} es llamado también una hipersuperficie, especialmente cuando $n > 2$.

Cada n -superficie S tiene en cada punto $p \in S$ un espacio tangente que es un subespacio vectorial n dimensional del espacio \mathbb{R}^{n+1} de todos los vectores en p .

Una hipersuperficie en \mathbb{R}^{n+1} es una hipersuperficie S , es una hipersuperficie con un campo de vectores continuo N en S . La función $N : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ asociado con el campo vectorial N por $N(p) = (p, N(p))$, $p \in S$, realmente S aplica en la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, puesto que $\langle N(p), N(p) \rangle = 1$ para todo $p \in S$. Así, asociando a cada a cada hipersuperficie orientada es una aplicación suave $N : S \rightarrow S^n$, llamado la aplicación de Gauss.

La imagen de la aplicación de Gauss

$$N(S) = \{q \in S^n : q = N(p), \text{ para algún } p \in S\}$$

es llamada imagen esférica de la hipersuperficie orientada S .

Definición 2.17 Sea S una hipersuperficie orientada por la aplicación de

Gauss N . Se llama la aplicación de Weingarten en $p \in S$ a la aplicación lineal $L_p = -dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$, esto es, $L_p(v) = -\nabla_v N$, para $v \in T_p S$.

Sabiendo esto, se puede saber las curvaturas principales, , pero ahora se tiene L_p que es una forma cuadrática autoadjunta, y por lo tanto existe una base ortonormal que diagonaliza a L_p .

Definición 2.18 Sea S una hipersuperficie en \mathbb{R}^{n+1} , y sea $v \in T_p S$, $L_p(v) \cdot v$ es igual a la componente normal de la aceleración en p de toda curva parametrizada α en S pasando por p con velocidad v . Esta componente de aceleración es en α la curvatura de S en \mathbb{R}^{n+1} . Cuando $|v| = 1$, este número

$$k_n(v) = L_p(v) \cdot v$$

es llamado la curvatura normal de S en p en la dirección v .

Si $k_n(v) > 0$ entonces la superficie S se acerca hacia N en la dirección v , y si $k_n(v) < 0$ el se aleja de N en la dirección de v .

Ejemplo 8 Sea S^n la esfera unitaria de radio r , $x^2 + \dots + x^2 = r^2$, orientado por la aplicación normal

$$N(p) = (p, p/\|p\|) = (p, -p/r)$$

para $p \in S$. Haciendo $\tilde{N}(p) = (p, -p/r)$ para $p \in \mathbb{R}^{n+1}$, esto es,

$$\tilde{N}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(x_1, \dots, x_{n+1}, -\frac{x_1}{r}, \dots, -\frac{x_{n+1}}{r} \right)$$

Se tiene, para $p \in S$ y $v \in T_p S$,

$$\begin{aligned} L_p(v) &= -\nabla_v N \\ &= -(p, \nabla_v \tilde{N}_1, \dots, \nabla_v \tilde{N}_{n+1}) \\ &= -\left(p, \nabla_v \left(-\frac{x_1}{r} \right), \dots, \nabla_v \left(-\frac{x_{n+1}}{r} \right) \right) \\ &= \frac{1}{r} (p, \nabla_v (x_1, \dots, x_{n+1})) \end{aligned}$$

Pero, para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$,

$$\nabla_v x_i = \nabla x_i(p) \cdot v = (p, 0, \dots, 1, \dots, v_{n+1}) = v_i$$

Así, se tiene

$$L_p(v) = \frac{1}{r} (p, v_1, \dots, v_{n+1}) = \frac{1}{r} v$$

Así la aplicación de Weingarten de la esfera S^n de radio r está dado por $1/r$.

Por lo tanto $k_n(v) = 1/r$ tiene el mismo valor para todas las direcciones

tangentes v en todos los punto $p \in S^n$.

Definición 2.19 Sea S una hipersuperficie orientable en \mathbb{R}^{n+1} y sea $p \in S$, los autovalores $k_1(p), \dots, k_n(p)$ de la aplicación de Weingarten L_p son llamados las curvaturas principales de S en p y los autovectores de L_p son llamados direcciones principales de curvatura.

Si las curvaturas principales son ordenados tal que $k_1(p) \leq k_2(p) \leq \dots \leq k_n(p)$, entonces $k_n(p)$ es el máximo valor de curvatura normal $k_n(v)$ para $v \in T_p S$, y $k_1(p)$ es el mínimo valor de la curvatura normal $k_n(v)$ para $v \in T_p S$.

Lema 2.20 Sea V un espacio vectorial con producto interior y sea $L : V \rightarrow V$ una transformación lineal autoadjunta sobre V . Sea $S = \{v \in V : v \cdot v = 1\}$ y se define $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(v) = L(v) \cdot v$. Si f es fijo en $v_0 \in S$ (es decir, si $(f \circ \alpha)'(t_0) = 0$ para toda curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ con $\alpha(t_0) = v_0$). Entonces $L(v_0) = f(v_0)v_0$, (es decir, v_0 es un autovector de L con autovalor $f(v_0)$).

Asociando con cualquier transformación lineal autoadjunta $L : V \rightarrow V$, donde V es un espacio vectorial con producto interno, es una función real $\underline{\quad} : V \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$g(v) = L(v) \cdot v$$

Esta función g es la forma cuadrática asociada con L . La forma cuadrática asociada con la aplicación de Weingarten L_p en un punto p de una hipersuperficie orientada $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es llamada la segunda forma fundamental de S en p y es denotado por \mathbb{I}_p . Así, $\mathbb{I}_p(v) = L_p(v) \cdot v = \alpha''(t_0) \cdot N(p)$ donde $\alpha : I \rightarrow S$ es cualquier curva parametrizada en S con $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$. En particular, cuando $|v| = 1$, $\mathbb{I}_p(v)$ es igual a la curvatura normal de S en p en la dirección v .

La forma cuadrática asociada con una transformación lineal autoadjunta L contiene exactamente la misma información con L , ya que L puede ser recuperado de g por la fórmula

$$L(v) \cdot w = \frac{1}{2} [g(v+w) - g(v) - g(w)]$$

que es válido para todo v y w en V .

Definición 2.21 Una forma cuadrática g se dice

definida positiva si $g > 0$ para todo $v \neq 0$
definida negativa si $g(v) < 0$ para todo $v \neq 0$
definida semi positiva si $g \geq 0$ para todo v
definida semi negativa si $g \leq 0$ para todo v

El determinante y la traza de la aplicación de Weingarten tienen particular importancia en la geometría diferencial.

Definición 2.22 Sea S una hipersuperficie orientada en \mathbb{R}^{n+1} el determinante $K(p) = \det L_p$ es llamada la curvatura de Gauss-Kronecker de S en p . $1/n$ veces de la traza de L_p es llamada la curvatura media $H(p)$ de S en p

La curvatura de Gauss-Kronecker es igual al producto de las curvaturas principales en p , cuando $n = 2$, $K(p) = k_1(p)k_2(p)$ es llamada simplemente la curvatura de

Gauss en p .

La curvatura media es el valor promedio de las curvaturas principales en p .

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i(p)$$

Capítulo III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Materiales

Los materiales utilizados son:

- Libros
- Internet
- Papel
- Usb
- Lapicero
- Plumones
- Pizarra
- Mota

3.2. Metodología de la investigación

3.2.1. Tipo de investigación

El tipo de investigación es básicamente teórico a nivel explicativo, el cual se caracteriza porque los resultados sirven para profundizar los conocimientos del tema en cuestión.

3.2.2. Método

Los métodos son: deductivo, analítico y sintético; ya que la ejecución del trabajo de investigación consiste en la exploración, interpretación y análisis.

3.2.3. Técnica

Revisión de la teoría en los materiales de consulta para lograr los objetivos específicos de la tesis.

3.2.4. Estrategias

Revisión del material bibliográfico sobre el tema, sistematización de la información recopilada, redacción del borrador de tesis y del informe final.

Capítulo I V

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta parte se expone el resultado de la investigación, primeramente haciendo la caracterización de la esfera y luego del paraboloides elíptico.

4.1. Esferas

En esta sección se desarrolla el objetivo general del trabajo de investigación, que es demostrar el teorema (4.2), que es la caracterización de la esfera en el espacio tridimensional, esto es, que bajo las condiciones de que una superficie de \mathbb{R}^3 cerrada y convexa, y que se intersecta con dos planos paralelos, uno de ellos el plano tangente en un punto de la superficie, y que el área de la parte de de la superficie entre los planos paralelos, sólo depende de la distancia entre los planos; entonces esta propiedad es característica de una superficie llamada esfera.

Sea M una superficie cerrada convexa en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 , es decir, por la definición de superficie convexa tal superficie se encuentra en un lado de cada plano tangente en un punto de la superficie. Entonces por el teorema 2.16

la curvatura gaussiana K es no negativa. Para un punto fijado $p \in M$ y para un suficientemente pequeño $h > 0$, se considera un plano Φ paralelo al plano tangente Ψ de M en el punto p con distancia h que intersecta a M .

Según un sistema de coordenadas, y por la ecuación (2.10), se puede escribir la fórmula de área, denotando por $M_p(h)$ el área de la superficie entre los planos Φ y Ψ . y sea un sistema de coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con el origen p , el plano tangente de M en p es $z = 0$, y $M = \text{graf}(f)$ para una función no negativa convexa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, se tiene

$$M_p(h) = \iint_{f(x) \leq h} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dX$$

donde $X = (x, y)$, $dX = dx dy$ y ∇f denota el vector gradiente de f .

El siguiente lema es de mucha importancia en la demostración del teorema 4.2.

Lema 4.1 Si la curvatura gaussiana $K(p)$ de M en p es positivo, entonces

$$M'_p(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{K(p)}}$$

Demostración: Considerando la expansión de Taylor de $f(X)$ como sigue

$$f(X) = X^t A X + f_3(X)$$

donde A es una matriz simétrica de orden 2×2 y $f_3(X)$ es una función $O(|X|^3)$.

Entonces la matriz Hessiana de f en el origen está dado por

$$D^2f(0) = 2A$$

Por lo tanto

$$K(p) = \det D^2f(0) = 4 \det A = (4.1)$$

Puesto que, $K(p) > 0$ y f es no negativo, la matriz A es definida positiva. Así, existe una matriz no singular B satisfaciendo

$$A = B^t B$$

donde B^t denota la transpuesta de B , Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} f(X) &= X^t A X + f_3(X) \\ &= X^t B^t B X + f_3(X) \\ &= (B X)^t B X + f_3(X) \\ &= |B X|^2 + f_3(X) \end{aligned}$$

Para calcular $M'(0)$, se usa la descomposición de $M_p(h)$ como sigue

$$M'_p(h) = Q(h) + N(h)$$

$$Q(h) = \iint_{f(x) \leq h} 1 dX \dots\dots\dots(4.2)$$

$$N(h) = \iint_{f(x) \leq h} \left(\sqrt{1 + |\nabla f|^2} - 1 \right) dX$$

Y como $\left(\sqrt{1 + |\nabla f|^2} - 1 \right) \leq |\nabla f|^2$, entonces

$$\iint_{f(x) \leq h} \left(\sqrt{1 + |\nabla f|^2} - 1 \right) dX \leq \iint_{f(x) \leq h} |\nabla f|^2$$

Entonces se tiene

$$N(h) \leq \iint_{f(x) \leq h} |\nabla f|^2$$

Adema $h > 0$

$$\frac{N(h)}{h} \leq \frac{1}{h} \iint_{f(x) \leq h} |\nabla f|^2$$

Por lo tanto se tiene

$$\frac{N(h)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_{t=0}^h \left(\int_{f^{-1}(t)} 1 ds_t \right) dt$$

donde ds_t denota el elemento de línea de la curva $f^{-1}(t)$, que muestra que el

integrando no es más que la longitud $L(t)$ de $f^{-1}(t)$, con $L(0) = 0$

$$L(t) = \int_{t=0}^h \left(\int_{f^{-1}(t)} 1 ds_t \right)$$

Entonces, se tiene

$$\frac{N(h)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_{t=0}^h L(t) dt$$

Por el teorema fundamental del cálculo, se ve que

$$\begin{aligned} N'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(h)}{h} \\ &= L(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, sea $h = e^2$ y $X = eY$, y

$$\begin{aligned} |BX|^2 + f_3(X) &= f(X) \quad h = e^2 \\ |BeY|^2 + f_3(eY) &= e^2 \\ |BY|^2 + eg_3(Y) &= 1 \end{aligned}$$

donde $g_3(Y)$ es una función $O(|Y|^3)$.

De la ecuación (4.2) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{Q(h)}{h} &= \frac{1}{h} \iint_{|BY|^2 + eg_3(Y) < h} f(x) dx \\ &= \iint_{|BY|^2 < 1} f(x) dx \end{aligned}$$

Como $h \rightarrow 0$, entonces $h \rightarrow 0$, entonces de la ecuación anterior se sigue que

$$\begin{aligned} Q'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(h)}{h} \\ &= \iint_{|BY|^2 < 1} f(Y) dY \end{aligned}$$

Si $W = BY$, entonces se tiene

$$Q'(0) = \frac{1}{\det B} \iint_{|W| < 1} f(W) dW = \frac{\pi}{\det B}$$

de la curvatura gaussiana, ecuación (4.1), se tiene

$$\begin{aligned} K(p) &= 4 \det A \\ &= 4 \det(B^t B); \quad A = B^t B \\ &= 4(\det B)^2 \\ &= (2 \det B)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Así } \sqrt{K(p)} = 2 \det B$$

En la ecuación (4.3)

$$Q'(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{K(p)}}$$

Y como $N'(0) = 0$, se concluye que

$$M'_p \cdot (0) = \frac{2\pi}{\sqrt{K(p)}}$$

Lo cual completa la demostración.

El siguiente teorema representa el objetivo general del trabajo de investigación.

Teorema 4.2 Sea M una superficie cerrada y convexa en el espacio euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 . Si M satisface la condición: (C) para dos planos paralelos con una distancia h que intersecten M , el área de superficie de la región M entre los planos es una función no negativa $\varphi(h)$, que depende solo de h .

Entonces M es una esfera.

Demostración: Como M es cerrado y convexo, existe un punto $p \in M$, tal que la curvatura gaussiana en ese punto $K(p) > 0$. Por lo tanto, el conjunto $U = \{p \in M; K(p) > 0\}$ es no nulo. Juntamente con la condición C y el lema anterior, implica que para cada punto $p \in U$, se tiene que $K(p) = 4\pi^2/\varphi'(0)^2$, que es independiente de $p \in M$. Así, la continuidad de K , muestra que $U = M$, y por lo tanto, se tiene que $K = 4\pi^2/\varphi'(0)^2$ en M . Así, se completa la prueba del teorema.

4.2. Paraboloides elípticos

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema (4.4) que es una caracterización del paraboloides elíptico, para lo cual se hará el mismo tratamiento que en la sección anterior, pero en vez de usar superficies en \mathbb{R}^3 , se usarán hipersuperficies en \mathbb{R}^{n+1} , en este espacio la curvatura de Gauss se llama curvatura de Gauss-Kronecker.

Sea M una hipersuperficie convexa en el espacio $(n + 1)$ dimensional \mathbb{R}^{n+1} . Para un punto fijo $p \in M$ y para un suficientemente pequeño $t > 0$, considerando un hiperplano Φ paralelo al hiperplano tangente Ψ de M en p con distancia t que intersecta M .

Denotando por $S_p(t)$ (respectivamente, $R_p(t)$) el volumen de la región acotada por la hipersuperficie y el hiperplano Φ (respectivamente, de el cilindro con base $\Phi \cap M$ y altura t). Entonces $R_p(t)$ es $(n + 1)$ veces el volumen de el cono con la misma base y el vértice p .

Ahora se introduce un sistema de coordenadas $(x, z) = (x_1, \dots, x_n, z)$ de \mathbb{R}^{n+1} con el origen p , el plano tangente de M en p es $z = 0$. Además, asumiendo que M es localmente el gráfico de una función no negativa convexa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces

$$R_p(t) = t \int_{f(x) \leq t} dX$$

$$S_p(t) = \int_{f(x) \leq t} \{t - f(X)\} dX$$

Donde $dX = dx_1 \dots dx_n$

También

$$\begin{aligned} S_p(t) &= \int_{f(x) \leq t} \{t - f(X)\} dX \\ &= \int_{z=0} \left\{ \int_{f(x)}^t 1 dx \right\} dz \end{aligned}$$

Por lo tanto, junto con el teorema fundamental del cálculo, se muestra que

$$tS'_p = t \int_{f(x) \setminus I} IdX = R_p(t)$$

Lema 4.3 Si la curvatura de Gauss-Kronecker $K(p)$ de M en p es positiva, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{(n+2)/2}} R_p(t) = \frac{2^{n/2} \omega_n}{\sqrt{K(p)}}$$

donde ω_n denota el volumen de la esfera unitaria n dimensional.

Demostración: Considerando la expansión de Taylor de $f(X)$ como sigue

$$f(X) = X^t A X + f_3(X),$$

donde X denota la columna del vector $(x_1, \dots, x_n)^t$, A es una matriz simétrica de orden $n \times n$, y $f_3(X)$ es una función $O(|X|^3)$. Entonces la matriz Hessiana de f en el origen está dada por

$$D^2 f(0) = 2A$$

Por lo tanto

$$K(p) = \det D^2 f(0) = 2^n \det A. \quad (4.5)$$

Puesto que $K(p) > 0$ y f es no negativo, La matriz A es definida positiva.

Así, existe un matriz no singular B satisfaciendo

$$A = B^t B,$$

donde B^t denota la transpuesta de B . En consecuencia, se obtiene

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} + f_3(\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{X}^t \mathbf{B}^t \mathbf{B} \mathbf{X} + \\ &\quad f_3(\mathbf{X}) \\ &= (\mathbf{B} \mathbf{X})^t \mathbf{B} \mathbf{X} + f_3(\mathbf{X}) \\ &= |\mathbf{B} \mathbf{X}|^2 + f_3(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Ahora, sea $t = \varrho^2$ y $\mathbf{X} = \varrho \mathbf{y}$, se tiene

$$\begin{aligned} |\mathbf{B} \mathbf{X}|^2 + f_3(\mathbf{X}) &= f(\mathbf{X}) < t = \varrho^2 \\ |\mathbf{B} \varrho \mathbf{y}|^2 + f_3(\varrho \mathbf{y}) &< \varrho^2 \\ |\mathbf{B} \mathbf{y}|^2 + \varrho g_3(\mathbf{y}) &< 1 \end{aligned}$$

donde $g_3(\mathbf{y})$ es una función $O(|\mathbf{y}|^3)$.

Entonces la ecuación (4.4) da

$$\frac{1}{t^{(n+2)/2}} R_p(t) = \frac{1}{t^{n/2}} \iint_{f(x) \leq 1} 1 d\mathbf{X} = \int_{|\mathbf{B} \mathbf{y}|^2 + \varrho g_3(\mathbf{y}) \leq 1} 1 d\mathbf{y}$$

Como $\varrho \rightarrow 0$, entonces $t \rightarrow 0$, se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{(n+2)/2}} R_p(t) = \frac{1}{t^{n/2}} \iint_{f(x) < 1} 1 dX = \int_{|By|^2 + eg_3(y) < 1} 1 dy$$

Si $w = By$, entonces, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{(n+2)/2}} R_p(t) = \frac{1}{|\det B|} \iint_{|w| < 1} 1 dw = \frac{W_n}{|\det B|}$$

donde ω_n denota el volumen de la esfera unitaria n dimensional. Por lo tanto de la ecuación (4.5) se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{(n+2)/2}} R_p(t) = \frac{2^{n/2} W_n}{\sqrt{K(p)}}$$

En seguida se enuncia y demuestra la caracterización de los paraboloides elípticos, que es uno de los objetivos del trabajo de investigación

Teorema 4.4 Sea M hipersuperficie suave convexa en el espacio $(n + 1)$ dimensional \mathbb{R}^{n+1} . entonces M es un paraboloide elíptico si y sólo si, existe una línea L para que M satisface la condición:

(L) Para cualquier punto p en M y cualquier sección del hiperplano de M paralelo al plano tangente de M en p , si v denota el punto donde la línea junto con p paralelo a L se encuentra con el hiperplano. Entonces el volumen de la región de M

entre estos dos hiperplanos paralelos es $I p - \nu I^{(n+2)/2}$ para alguna constante que depende solamente de la hipersuperficie M .

Demostración: Asumiendo que la línea L es el eje z y la hipersuperficie convexa M está dada localmente por $z = f(X)$ para alguna función convexa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Para un punto fijo $p = (X, f(X))$ in M con curvatura de Gauss-Kronecker $K(p)$ positiva y $t > 0$, sea la región de M cortado por el hiperplano paralelo al hiperplano tangente de M en p con distancia $t > 0$. Entonces la hipótesis muestra que $S_p(t) = a I p - \nu I^{(n+2)/2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde a es una constante.

Si se escribe

$$N = \frac{1}{W} \left(-f_{x_1} \dots \dots \dots -f_{x_n} \right)$$

donde $W = \left(1 + f^2_{x_1 x_1} \dots \dots \dots + f^2_{x_n x_n} \right)^{1/2}$ entonces N es un vector unitario normal apuntando hacia arriba. Sea θ el ángulo entre N y \vec{p} , entonces se tiene $\cos \theta = 1/W$.

Por lo tanto, se obtiene $I p - \nu I = tW$, lo cual muestra que

$$S_p(t) = a W^{(n+2)/2} t^{(n+2)/2}$$

Así, de la ecuación (4.4) se tiene

$$R_p(t) = \frac{n+2}{2} a W^{(n+2)/2} t^{(n+2)/2}$$

Por lo tanto, por el lema 4.3, se muestra que

$$K(p) = \frac{2^{n+2} W_n^2}{(n+2)^2 a^2} \frac{1}{W^{n+2}}$$

puesto que la curvatura de Gauss-Kronecker $K(p)$ de M está dado por

$$K(p) = \frac{\det D^2 f(x)}{W^{n+2}}$$

se sigue de la ecuación (4.6) que el determinante $\det D^2 f(X)$ de la Hessiana de $f(X)$ es una constante positiva. La continuidad de $D^2 f(X)$ muestra que es una constante positiva sobre todo el espacio \mathbb{R}^n . Así, $f(X)$ es un polinomio cuadrático definido globalmente

Capítulo V

CONCLUSIONES

1. En el teorema 4.2, se logró demostrar una caracterización de la esfera en el espacio tridimensional, siendo M una superficie y dos planos paralelos intersectando a M con distancia h y que el área de la región entre los planos solamente dependiendo de h , tal superficie es una esfera.
2. La interpretación de la curvatura gaussiana se justificó detalladamente para una superficie en \mathbb{R}^3 , este hecho es debido al ejemplo 7 de la sección 2.2, y para una superficie n dimensional esta curvatura toma el nombre de curvatura de Gauss-Kronecker.
3. La caracterización del paraboloides elíptico se realizó en el teorema 4.4, demostrando que el volumen de la región de una hipersuperficie M entre dos hiperplanos paralelos está dado por $I_p - \nu I^{(n+2)/2}$, y esto resulta mediante el uso de la curvatura de Gauss-Kronecker.

Capítulo VI

RECOMENDACIONES

1. En la geometría diferencial local y global de dimensiones arbitrarias no es posible hacer un tratamiento geométrico de las hipersuperficies, pero en el espacio tridimensional las superficies se pueden caracterizar fácilmente por lo que sugiero a estudiantes interesados en el espacio R^n trabajos de investigación en forma analítica.
2. Durante el desarrollo del trabajo, surgieron algunas preguntas que podrían ser considerados como trabajos de investigación, por ejemplo la caracterización de la curvatura de Gauss-Kronecker de una hipersuperficie, la cual permite calcular dicha curvatura sin conocer las curvaturas principales.

. BIBLIOGRAFÍA

A. Pressley, 2001. Elementary Differential Geometry, Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag London.

B. O'Neill, 2006. Elementary Differential Geometry, Academic Press, Amsterdam.

Claudio Pita R., 1995. Cálculo Vectorial, Prentice-Hall.

Elon Lages Lima, 2003. Álgebra Linear, Sexta Edição. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA.

Elon Lages Lima, 2004. Análise Real, Volume 2, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA.

Elon Lages Lima, 1995. Curso de Análise Volume 2, Quarta Edição, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA.

Felipe Clímaco Ccolque Taipe, 2013. Geometría Diferencial I con Problemas Resueltos, Puno-Perú.

Felipe Clímaco Ccolque Taipe, 2012. Geometría Diferencial II con Problemas Resueltos, Puno-Perú.

Heinz Hopf, 1956. Differential Geometry in the Large, Seminar Lectures Stan-

ford University.

J. A. Thorpe, 1979. Elementary Topics in Differential Geometry, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, Heidelberg.

Keti Tenenblat, 1986. Introdução à Geometria Diferencial, Editora Universidade de Brasilia.

M.P. Do Carmo, 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall.

Paulo Ventura Araujo, 2001. Geometría Diferencial, Editorial Hozlo S.R.L. IMCA.

Richard Millman and George Parker, 1977. Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall.

S.S. Chern, 1989. Curves and Surfaces in Euclidean Space, Global Differential Geometry, MAA Studies in Mathematics, The Mathematical Association of America.

S. Stein, 1999. Archimedes. What Did He Do Besides Cry Eureka?, Mathematical Association of America. Washington. DC.