UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"LOS RESULTADOS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS FUNCIONAL COMO CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE LA CATEGORÍA DE BAIRE"

TESIS

PRESENTADA POR:

MIGUEL ANGEL RIVAS MAMANI

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO - PERÚ

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"LOS RESULTADOS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS FUNCIONAL COMO CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE LA CATEGORÍA DE BAIRE"

TESIS PRESENTADA POR:

MIGUEL ANGEL RIVAS MAMANI

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

APROBADO POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN PiLAr · FICA ·

PRESIDENTE: Lic. Veronica Alicia Ibañez Ulloa

PRIMER MIEMBRO: Lic. Fabiola Loayza Torreblanca

SEGUNDO MIEMBRO: Lic. Américo Bolívar Espinoza

DIRECTOR: Mg. Julio César Villalta Pacori

TEMA: Teorema de la Categoría de Baire

ÁREA: Análisis Funcional

LINEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Pura

Fecha de sustentación: 21 de Diciembre del 2017

DEDICATORIA

A Dios.

Por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

A mi madre Renilda.

Por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su amor.

A mi padre Roberto.

Por los ejemplos de perseverancia y constancia que lo caracterizan y que me ha infundado siempre, por el valor mostrado para salir adelante y por su amor.

Mi hermano Boris, por estar conmigo y apoyarme siempre.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento al director de esta tesis Mg. Julio Cesar Villalta Pacori, director de esta investigación, por la orientación, el seguimiento y la supervisión contínua de la misma, pero sobre todo por la motivación y el apoyo recibido a lo largo de estos años.

Asimismo, agradezco también a todos los profesores de la escuela profesional de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Nacional del Altiplano, por ser orientadores de mi vida profesional.

A mi familia, amistades y compañeros de estudios del pre-grado, por brindarme su apoyo desinteresado. Gracias a todos por su ayuda, paciencia palabras de ánimo y buenos consejos.

Índice general

Índice de figuras

RESUMEN

Este trabajo de investigación fue motivado con la idea de presentar una demostración mas detallada y comprensible del teorema de la Categoria de Baire y mostrar sus aplicaciones. Primeramente demostraremos el Teorema de la Categoría de Baire, el cual afirma que el complemento de cualquier unión numerable de subconjuntos nada densos de un espacio métrico completo X, es denso en X. Este teorema implica, en particular, que un espacio métrico completo no puede ser dado como una unión numerable de conjuntos nada densos. En otras palabras, si en un espacio métrico completo es igual a la unión numerable de conjuntos, entonces no todos aquellos conjuntos pueden ser nada densos, esto es, al menos uno de ellos tiene clausura con su interior distinto del vacío. Como una primera aplicación del Teorema de la Categoría de Baire, consideramos el Teorema de Banach-Steinhaus, también llamado el Principio de la Acotación Uniforme por obvias razones. Otra aplicación del Principio de la Acotación Uniforme, por consiguiente una aplicación del Teorema de la Categoría de Baire, es el estudio de la continuidad conjunta de las aplicaciones bilineales. Seguidamente pasamos a considerar el Teorema de la Aplicación Abierta como una consecuencia del Teorema de la Categoría de Baire. Como un corolario del Teorema de la Aplicación Abierta tenemos el Teorema de la Aplicación Inversa, el cual afirma que cualquier aplicación lineal acotada y biyectiva entre espacio de Banach tiene inversa acotada. Finalmente, probamos el Teorema del Gráfico Cerrado como una consecuencia del Teorema de la Categoría de Baire. Todos estos resultados desarrollan un papel importante en el estudio de los espacios de Banach. Finalizamos el trabajo de investigación considerando algunos ejemplos y consecuencias de los resultados tratados.

Palabras Clave: Baire, Banach-Steinhaus, Nada-denso, Abierto, Cerrado.

ABSTRACT

This research work was motivated with the idea of presenting a more detailed and understandable demonstration of the Baire Category Theorem, we will first demonstrate the Baire Category Theorem, which states that the complement of any countable union of non-dense subsets of a complete metric space X is dense in X.

This theorem implies, in particular, that a complete metric space can not be given as a denumerable union of non-dense sets. In other words, if in a complete metric space it is equal to the numerable union of sets, then not all those sets can be dense, that is, at least one of them has a closure with its interior different from the emptyset.

As a first application of Baire's Category Theorem, we consider the Banach-Steinhaus Theorem, also called the Principle of Uniform Dimension for obvious reasons.

Another application of the Principle of Uniform Dimension, consequently an application of Baire's Category Theorem, is the study of the joint continuity of bilinear applications.

Next we turn to consider the Open Application Theorem as a consequence of Baire's Category Theorem.

As a corollary of the Open Application Theorem we have the Reverse Application Theorem, which states that any bounded and bijective linear application between Banach space has a bounded inverse. Finally, we tested the Closed Graph Theorem as a consequence of the Baire Category Theorem.

All these results play an important role in the study of Banach spaces.

We finish the research work considering some examples and consequences of the results.

Key Words: Baire, Banach-Steinhaus, nowhere dense, open, closed.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Presentamos el Teorema de la Categoría de Baire que es una herramienta fundamental en el análisis funcional. Empezó a usarse los llamados métodos de categoría, que permitían discernir de forma provechosa entre subconjuntos grandes y pequeños de un espacio topológico. Dos años después, R. Baire observa que el mismo resultado es cierto en $\mathbb{R}^n$ y lo aprovecha en su estudio de las funciones que se obtienen como límites puntuales de sucesiones de funciones continuas (llamadas funciones de la primera clase de Baire). Una caracterización de las propiedades de continuidad que tienen tales funciones se conoce como el Gran Teorema de Baire y los métodos de categoría juegan un papel clave en su demostración. S. Banach observó que el mencionado resultado de Osgood y Baire no sólo es cierto en $\mathbb{R}^n$ sino también, con la misma demostración de Baire, en cualquier espacio métrico completo y en cualquier espacio topológico localmente compacto, dando así forma definitiva a lo que hoy día conocemos como Teorema de Baire, o con más propiedad, Teorema de la Categoría de Baire. Al mismo tiempo, Banach observó que usando este lema se podían simplificar y clarificar enormemente los resultados basados en el método de condensación de singularidades, dejando así establecida la utilidad de los métodos de categoría en el Análisis Funcional. En particular dio una demostración muy sencilla de un teorema probado previamente por H. Steinhaus, llamado Teorema de cierre de Steinhaus, que desde entonces ha quedado como una fácil consecuencia del Teorema de Banach-Steinhaus.

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las aplicaciones clásicas del Teorema de Categoría de Baire sustentan la idea de que dicho teorema es uno de los tantos resultados importantes en matemáticas. Que ello sea verdad no añade nada nuevo, sin embargo, dicho resultado va más allá del simple hecho de considerarlo como un teorema importante. Aunque su demostración es simple es amplio su campo de aplicaciones. Por ejemplo, su área de influencia en la demostración de un número significativo de resultados importantes e interesantes se hace notar en el Análisis Real, en Topología, en Ecuaciones Diferenciales, en la Teoría de Números, en el Análisis Convexo, en Probabilidades, en Análisis Armónico y principalmente en el Análisis Funcional. Constituye, de hecho, un método poderoso para probar, no sólo la existencia de ciertos objetos cuyas construcciones son, en muchas casos, tremendamente difíciles, sino la abundancia de tales objetos.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En la matemática actual, las soluciones de un problema de Cauchy son a menudo obtenido por medio de la aplicación de varios teoremas. Comparado con estas otras técnicas para probar la existencia o solución de dichos problemas, el teorema de la Categoría de Baire llega a una conclusión mucho más sólida: el conjunto de soluciones no solo es no vacío, sino que también es denso en todas partes.

1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

El Teorema de la Categoría de Baire

1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

El presente trabajo se basa en la prueba del Teorema de la Categoría de Baire, la finalidad es presentar la importancia que posee uno de los resultados más significativos estudiados por R. Baire, así como la importancia que pueden llegar a tener las numerosas aplicaciones de sus propiedades en distintas áreas de la matemática como por ejemplo el Análisis Funcional. Ente las aplicaciones que se estudiaran figuran los resultados fundamentales del Análisis Funcional: el Teorema de la Acotación Uniforme, el Teorema de la Aplicación Abierta y el Teorema del Gráfico Cerrado.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo General

Demostrar y aplicar el Teorema de la Categoría de Baire.

Objetivos Específicos

1. Usar el Teorema de la Categoría de Baire para probar el Principio de la Acotación Uniforme.

2. Usar el Teorema de la Categoría de Baire para probar el Teorema de la Aplicación Abierta, el Teorema de la Aplicación Inversa y el Teorema del Gráfico Cerrado.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

En este capítulo presentaremos un resumen de los resultados básicos necesarios para el desarrollo de los capítulos siguientes, abordaremos algunos conceptos a cerca de espacios métricos, sucesión de Cauchy, espacios métricos completos, aplicaciones continuas, espacios de Banach, operadores lineales acotadoss, diferenciabilidad, punto fijo de Banach, contracción. Tales conceptos son imprescindibles para el entendimiento de la demostración de los resultados que son consecuencia del Teorema de la Categoría de Baire.

2.1. ESPACIOS MÉTRICOS

Definición 2.1.1 (Espacio Métrico). Un espacio métrico es un par (X,d), donde X es un conjunto no vacío y d es una métrica sobre X, es decir, una función definida por:

$$\begin{aligned} d :& X\times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longrightarrow d(x,y) \end{aligned}$$

tal que para todo $x,y,z\in X$, tenemos:

(M1) $d(x,y)\geq 0$

(M2) $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$

(M3) $d(x,y)=d(y,x)$

(M4) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

De (M4) obtenemos por inducción la generalización de la *desigualdad triangular*

$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1}x_n) \tag{2.1}$$

Un **subespacio** (Y,d) de (X,d) se obtiene si tomamos un subconjunto $Y \subset X$ y restringimos d a $Y \times Y$, asi la métrica sobre Y es la restricción:

$$\overline{d} = d|_{Y\times Y}$$

$\overline{d}$ es llamada métrica **inducida** sobre Y por d.

Ejemplo 2.1.1.1 (El espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$). El espacio métrico $\mathbb{R}^n$, es obtenido tomando el conjunto de todas las $n-uplas$ ordenadas de números reales,

$$x = (\xi_1,\cdots,\eta_n) \qquad y = (\eta_1,\cdots,\eta_n)$$

y la *métrica Euclideana*, definida por:

$$d(x,y) = \sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2} \tag{2.2}$$

Ejemplo 2.1.1.2 (Espacio Métrico Discreto). Tomamos cualquier conjunto X y sobre el la llamada *métrica discreta* para X, definida por:

$$\begin{cases} d(x,y)=0; & x=y \\ d(x,y)=1; & x\neq y \end{cases} \tag{2.3}$$

El espacio (X,d) es llamado un *espacio métrico discreto*.

Ejemplo 2.1.1.3 (Espacio l^p). Sea $p \geq 1$ una número real fijo. Por definición cada elemento en el espacio l^p es una sucesión $x = (\xi_j) = (\xi_1,\xi_2,\cdots)$ de números reales tal que, la serie:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \tag{2.4}$$

y la métrica es definida por:

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p} \tag{2.5}$$

donde $y = (\eta_j)$ y $\sum |\eta_j|^p < \infty$.

Entonces l^p es un espacio métrico.

Definición 2.1.2 (Desigualdad de Holder). Sean $x = (\xi_j) \in l^p$ y $y = (\eta_j) \in l^q$, entonces:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q \right)^{1/q} \tag{2.6}$$

donde $p > 1$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

En particular, si $p = 2$, entonces $q = 2$ y la desigualdad (2.6) nos da la **Desigualdad de Cauchy-Schwarz** para sumas:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2} \tag{2.7}$$

Definición 2.1.3 (Desigualdad de Minkowski). Consideramos $x = (\xi_j) \in l^p$ y $y = (\eta_j) \in l^q$, entonces:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^p \right)^{1/p} \tag{2.8}$$

2.2. CONJUNTO ABIERTO, CONJUNTO CERRADO Y VECINDAD

Consideremos algunos importantes subconjuntos de un espacio métrico $X = (X, d)$.

Definición 2.2.1 (Bolas y Esfera). Dado un punto $x_o \in X$ y un número real $r > 0$, definimos tres tipos de conjuntos:

(a) $B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$ (bola abierta)

(b) $\bar{B}(x_o, r) = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$ (bola cerrada)

(c) $S(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) = r\}$ (esfera)

donde x_0 es el centro y r el radio.

De la Definición 2.2.1 se sigue:

$$S(x_0, r) = \bar{B}(x_o, r) - B(x_0, r) \tag{2.9}$$

Definición 2.2.2 (Conjunto abierto, Conjunto Cerrado). Un subconjunto M de un espacio métrico X es llamado *abierto* si contiene una bola abierta alrededor de cada uno de sus puntos.

Un subconjunto K de X es llamado *cerrado* si su complemento (en X) es abierto, es decir, $K^C = X - K$ es abierto.

Una bola abierta $B(x_0, \varepsilon)$ de radio ε es llamado una ε-*vecindad* de x_0

Definición 2.2.3 (Vecindad). Una vecindad de un punto $x_0 \in X$, es cualquier conjunto abierto que lo contenga.

El conjunto de todos los puntos interiores de M es denotado por $Int(M)$

Definición 2.2.4 (Espacio Topológico). Un espacio topológico es un par $(X, \mathscr{T})$ formado por un conjunto X y una topología $\mathscr{T}$ sobre X, donde $\mathscr{T}$ es una colección de subconjuntos de X tal que $\mathscr{T}$ satisface:

(T1) $\emptyset \in \mathscr{T}, X \in \mathscr{T}$.

(T2) La unión arbitraria de miembros de $\mathscr{T}$ pertenece a $\mathscr{T}$

(T3) La intersección finita de miembros de $\mathscr{T}$ pertenece a $\mathscr{T}$

De esta definición tenemos que:

Todo espacio métrico es un espacio topológico, donde la topología $\mathscr{T}$ está constituida por los conjuntos abiertos del espacio métrico.

Definición 2.2.5 (Aplicaciones Continuas). Sean (X,d) y $(Y,\bar{d})$ espacios métricos. Una aplicación $T : X \longrightarrow Y$ es llamada *continua en un punto* $x_0 \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$.

$$d(x,x_0) < \delta \implies \bar{d}(Tx,Tx_0) < \varepsilon$$

Diremos que T es *continua* si es continua para todo punto de X.

Teorema 2.2.6 (Aplicación Continua). *Sean X y Y espacios métricos. La aplicación $T : X \longrightarrow Y$ es continua si, y solamente si, la imagen inversa de cualquier subconjunto abierto de Y es un subconjunto abierto de X.*

Prueba.

($\Rightarrow$) Supongamos que T es continua. Sea $S \subset Y$ abierto y S_0 la imagen inversa de S. Si $S_0 \neq \varnothing$. Para cualquier $x_0 \in S_0$ sea $y_0 = Tx_0$. Puesto que S es abierto, entonces existe una ε-vecindad N de y_0

Como T es continua, x_0 tiene una δ vecindad N_0 que es aplicado en N. Ya que $N \subset S$, tenemos $N_0 \subset S_0$ asi que S_0 es abierto porque $x_0 \in S_0$ fue arbitrario.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, asumimos que la imagen inversa de todo conjunto abierto en Y es un abierto en X. Entonces para cada $x_0 \in X$ y cualquier ε-vecindad N de Tx_0, la imagen inversa N_0 de N es abierta, ya que N es abierto, y N_0 contiene x_0. Por tanto N_0 también contiene una δ-vecindad de x_0 que es contenido en N porque N_0 es aplicado en N. Consecuentemente, por definición, T es continua en x_0. Como $x_0 \in X$ fue elegido arbitrariamente, T es continua.

□

Definición 2.2.7 (Clausura). Sea M un subconjunto de un espacio métrico X. Entonces el punto x_0 de X (que puede o no ser un punto de M) es llamado *punto de acumulación* de M, si toda vecindad de x_0 contiene al menos un punto $y \in M$ distinto de x_0.

El conjunto formado por todos los puntos de M y los puntos de acumulación de M es llamado *clausura* de M y es denotado por $\overline{M}$.

Definición 2.2.8 (Conjunto Denso). Un subconjunto M de un espacio métrico X es llamado *denso* en X si

$$\overline{M} = X$$

Definición 2.2.9 (Espacio Separable). El espacio métrico X es llamado *separable* si tiene un subconjunto numerable que es denso en X.

Por tanto si M es denso en X, entonces cada bola en X, no importando que tan pequeña sea, contendrá puntos de M.

2.3. CONVERGENCIA, SUCESIÓN DE CAUCHY, COMPLETITUD

Definición 2.3.1 (Convergencia). Una sucesión (x_n) en un espacio métrico $X = (X,d)$ es llamada *convergente* si existe un $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$$

el punto x es llamado el *límite* de (x_n) y es denotado por:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \;\text{ ó }\; x_n \longrightarrow x$$

Por lo tanto si $x_n \longrightarrow x$, entonces:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \;/\; n > N \Longrightarrow d(x_n,x) < \varepsilon$$

Lema 2.3.2 (Acotación y Límite). *Sea X un espacio métrico, entonces:*

(a) *Una sucesión convergente en X es acotada y su limite es único.*

(b) *Si $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$ en X, entonces $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x,y)$.*

Prueba.

(a) Supongamos que $x_n \longrightarrow x$. Entonces, tomamos $\varepsilon = 1$, podemos encontrar un N tal que $d(x_n, x) < 1$ para todo $n > N$. Por la desigualdad triangular $(M4)$, para todo n tenemos $d(x_n, x) < 1 + a$, donde

$$a = \text{máx}\{d(x_1, x), \cdots, d(x_N, x)\}$$

Esto muestra que (x_n) es acotada. Asumiendo que $x_n \longrightarrow x$ y $x_n \longrightarrow z$ obtenemos de (M4)

$$0 \leq d(x,z) \leq d(x,x_n) + d(x_n,z) \longrightarrow 0+0$$

y la unicidad $x = z$ del límite se sigue de (M2).

(b) Por (2.1), tenemos:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x,y) + d(y, y_n)$$

Por lo tanto, obtenemos

$$d(x_n, y_n) - d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

y una desigualdad similar por intercambio x_n y x asi como y_n y y, multiplicando por -1, entonces

$$|d(x_n, y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \longrightarrow 0$$

cuando $n \longrightarrow 0$. □

Definición 2.3.3 (Sucesión de Cauchy). Una sucesión (x_n) en un espacio métrico $X = (X, d)$ se dice que es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \quad \text{para todo } \; m, n > N. \tag{2.10}$$

Definición 2.3.4 (Completitud). El espacio métrico X es llamado completo si cada sucesión de Cauchy en X converge (es decir, tiene un límite que es un elemento de X).

Ejemplo 2.3.4.1 . Los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son *espacios métricos completos*.

Teorema 2.3.5 (Sucesión Convergente). *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.*

Prueba.

Si $x_n \longrightarrow x$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } \; n > N$$

Entonces por la desigualdad triangular obtenemos para $m, n > N$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Esto muestra que (x_n) es de Cauchy. $\square$

Teorema 2.3.6 (Clausura, Conjunto cerrado). *Sea M un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X, d) y $\bar{M}$ su clausura, entonces:*

(a) *$x \in \bar{M}$ si, y solo si, existe una sucesión (x_n) en M tal que $x_n \longrightarrow x$.*

(b) *M es cerrado si, y solo si, el hecho que $x_n \in M$, $x_n \longrightarrow x$ implica que $x \in M$.*

Prueba.

(a) Sea $x \in \bar{M}$. Si $x \in M$, una sucesión de ese tipo es $(x, x, \cdots)$. Si $x \notin M$, este es un punto de acumulación de M. Por lo tanto para cada $n = 1, 2, \cdots$ la bola $B(x, 1/n)$ contiene $x_n \in M$, y $x_n \longrightarrow x$ porque $1/n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Recíprocamente, si (x_n) está en M y $x_n \longrightarrow x$, entonces $x \in M$ o toda vencindad de x contiene puntos $x_n \neq x$, asi que x es un punto de acumulación de M. Por lo tanto $x \in \bar{M}$, por la definición de clausura.

(b) M es cerrado si y solo si $M = \bar{M}$, asi que (b) se sigue fácilmente de (a). □

Teorema 2.3.7 (Subespacio Completo). *Un subespacio M de un espacio métrico completo X es completo si, y solo si, el conjunto M es cerrado en X.*

Teorema 2.3.8 (Aplicación Continua). *Una aplicación $T : X \longrightarrow Y$ de un espacio métrico (X,d) en un espacio métrico $(Y,\bar{d})$ es continua en un punto $x_0 \in X$ si y solo si*

$$x_n \longrightarrow x_0 \quad \textit{implica} \quad Tx_n \longrightarrow Tx_0$$

Prueba.

($\Rightarrow$) Asumimos que T es continua en x_0, entonces para un $\varepsilon > 0$ dado, existe un $\delta > 0$ tal que

$$d(x,x_0) < \delta \qquad \text{implica} \qquad \bar{d}(Tx,Tx_0) < \varepsilon$$

Sea $x_n \longrightarrow x_0$, entonces existe un N tal que para todo $n > N$ tenemos

$$d(x_n,x_0) < \delta$$

Por lo tanto para todo $n > N$,

$$\bar{d}(Tx_n,Tx_0) < \varepsilon$$

Por definición esto significa que $Tx_n \longrightarrow Tx_0$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, asumimos que

$$x_n \longrightarrow x_0 \qquad \text{implica} \qquad Tx_n \longrightarrow Tx_0$$

y probaremos entonces que T es continua en x_0. Supongamos que es falso. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe un $x \neq x_0$ que satisface

$$d(x,x_0) < \delta \qquad \text{pero} \qquad \bar{d}(Tx,Tx_0) \geq \varepsilon$$

En particular, para $\delta = 1/n$ existe un x_n que satisface

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \qquad \text{pero} \qquad \bar{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$$

Claramente $x_n \longrightarrow x_0$ pero (Tx_n) no converge a Tx_0. Esto contradice $Tx_n \longrightarrow Tx_0$ entonces queda probado el teorema. □

2.4. ESPACIO VECTORIAL

Definición 2.4.1 (Espacio Vectorial). Un espacio vectorial sobre un campo K es un conjunto no vacío X provisto de dos operaciones algebráicas llamadas *adición de vectores* y *multiplicación por escalares*, donde para todo $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in K$ cumplen los siguientes axiomas:

(V1) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(V2) Existe un vector nulo $0 \in X$, tal que: $x + 0 = x$

(V3) Para cada $x \in X$, existe $-x \in X$ tal que: $x + (-x) = 0$

(V4) $x + y = y + x$

(V5) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(V6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(V7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(V8) Existe $1 \in K$ tal que: $1.x = x$

La adición sobre X es una aplicación:

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

$$(x, y) \longrightarrow x + y$$

La multiplicación por escalares es una aplicación:

$$\cdot : K \times X \longrightarrow X$$

$$(\alpha, x) \longrightarrow \alpha . x$$

Ejemplo 2.4.1.1 (Espacio $\mathbb{R}^n$). Sea $\mathbb{R}^n = \{(\xi_1, \cdots, \xi_n) / \xi_1, \cdots, \xi_n \in \mathbb{R}\}$, se definen sobre $\mathbb{R}^n$ la adición y multiplicación por escalares mediante:

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \cdots, \xi_n + \eta_n)$$

$$\alpha x = (\alpha \xi_1 +, \cdots, \alpha \xi_n)$$

donde $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 2.4.1.2 (Espacio $C[a,b]$). El conjunto de todas las funciones reales continuas sobre $[a,b]$, forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones algebráicas definidas:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$$

donde $x, y \in C[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

Un **subespacio** de un espacio vectorial X es un subconjunto no vacío Y de X tal que para todo $y_1, y_2 \in Y$ y los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. Notar que Y es a su vez un espacio vectorial.

Una **combinación lineal** de vectores $x_1, \cdots, x_m$ de un espacio vectorial X es una expresión de la forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$$

donde los coeficientes $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ son cualquiera escalares en $\mathbb{R}$.

Para cualquier subconjunto no vacío $M \subset X$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de M es un subespacio de X denominado el espacio generado por M y es denotado por:

$$\text{span}M$$

2.5. ESPACIOS NORMADOS, ESPACIOS DE BANACH

Definición 2.5.1 (Espacio Normado). Un espacio normado es un par $(X, \|\cdot\|)$, formado por un espacio vectorial X y una aplicación $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ llamada norma, que satisface los siguientes axiomas

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdad Triangular)

donde x y y son vectores arbitrarios en X y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observación 2.5.1.1 . Una norma $\|\cdot\|$ sobre X define una métrica d en X, la cual es dada por

$$d(x,y) = \|x-y\| \tag{2.11}$$

y es llamada la *métrica inducida por la norma.*

Definición 2.5.2 (Espacios de Banach). Un *espacio de Banach* es un espacio normado completo X, completo en la métrica definida (inducida) por la norma.

Observación 2.5.2.1 . Notemos que (N4) implica

$$|\|y\| - \|x\|| \leq \|y-x\| \tag{2.12}$$

Ejemplo 2.5.2.2 (Espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$). El espacio $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach, con la norma definida por

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2} \tag{2.13}$$

donde $x = (\xi_j)$ En efecto, $\mathbb{R}^n$ es completo con respecto a la métrica inducida:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2}$$

donde $x = (\xi_j)$ y $y = (\eta_j)$

Ejemplo 2.5.2.3 (Espacio C$[a,b]$). El espacio de todas la funciones continuas definidas sobre $[a,b]$ es un espacio de Banach, con la norma definida por

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \tag{2.14}$$

donde $J = [a,b]$

Lema 2.5.3 (Invarianza de la traslación). *Una métrica d inducida por una norma sobre un espacio normado X satisface*

$$d(x+a, y+a) = d(x,y) \tag{2.15}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x,y) \tag{2.16}$$

para todo $x, y \in X$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prueba.

Tenemos

$$d(x+a, y+a) = \|x+a-(y+a)\| = \|x-y\| = d(x,y) \tag{2.17}$$

también,

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha|\, d(x,y)$$

□

2.6. PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS DE BANACH

Por definición, un **subespacio** Y de un espacio normado X es un subespacio de X considerado como un espacio vectorial, con la norma obtenida por la restricción de la norma de X sobre el subconjunto Y.

Por definición, un **subespacio** Y de un espacio de Banach X es un subespacio de X considerado como un espacio normado, donde Y no requiere ser completo.

Teorema 2.6.1 (Subespacio de un Espacio de Banach). *Un subespacio Y de un espacio de Banach X es completo si y solo si el conjunto Y es cerrado en X.*

Definición 2.6.2 (Convergencia de sucesiones). Una sucesión (x_n) en un espacio normado X es convergente en X, si X contiene un x tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

En este caso, escribimos $x_n \longrightarrow x$ y llamamos a x el límite de (x_n).

Definición 2.6.3 (Sucesiones de Cauchy). Una sucesión (x_n) en un espacio normado X es de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \text{ tal que si } m,n > N \implies \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

2.7. ESPACIOS NORMADOS DE DIMENSIÓN FINITA

Lema 2.7.1 (Combinación Lineal). *Sea $\{x_1, \cdots, x_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente en un espacio normado X de cualquier dimensión. Entonces existe un número $c > 0$ tal que para cualquier selección de escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tenemos*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c\,(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|) \tag{2.18}$$

Teorema 2.7.2 (Completitud). *Todo subespacio de dimensión finita Y de un espacio normado X es completo. En particular, todo espacio normado finito dimensional es completo.*

Prueba.

Consideremos una sucesión de Cauchy (y_m) arbitrario en Y y mostremos que es convergente en Y, el límite será denotado por y.

Sea $\dim Y = n$ y $\{e_1, \cdots, e_n\}$ una base en Y. Entonces cada y_m tiene una única representación de la forma

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n$$

Como (y_m) es una sucesión de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $\|y_m - y_r\| < \varepsilon$ donde $m, r > N$. Del Lema 2.7.1 tenemos para algún $c > 0$

$$\varepsilon > \|y_m - y_r\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right|$$

donde $m, r > N$.

Dividiendo por $c > 0$ tenemos

$$\left| \alpha_1^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right| < \frac{\varepsilon}{c}$$

Esto muestra que cada una de las n sucesiones

$$(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_j^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \cdots)$$

para $j = 1, \cdots, n$; es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto $\alpha_j^{(m)}$ converge a α_j que denota el límite. Usando estos n límites $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, definimos

$$y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Claramente, $y \in Y$ además

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^m - \alpha_j| \, \|e_j\|$$

En la derecha, $\alpha_j^{(m)} \longrightarrow \alpha_j$. Por lo tanto $\|y_m - y\| \longrightarrow 0$, es decir, $y_m \longrightarrow y$.

Esto muestra que (y_m) es convergente en Y. Como (y_m) fue una sucesión de Cauchy en Y, esto prueba que Y es completo. □

Teorema 2.7.3 (Cerradura). *Todo subespacio finito dimensional Y de un espacio normado X es cerrado en X.*

2.8. COMPACIDAD Y DIMENSIÓN FINITA

Definición 2.8.1 (Compacidad). Un espacio métrico X es llamado *compacto*, si cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente. Un subconjunto M de X es llamado *compacto* si M es compacto considerado como un subespacio de X, es decir, si toda sucesión en M tiene una subsucesión convergente en M.

Una propiedad general de conjuntos compactos es expresada en el siguiente resultado.

Lema 2.8.2 (Compacidad). *Un subconjunto compacto M de un espacio métrico es cerrado y acotado.*

Prueba.

Para cada $x \in \bar{M}$ existe una sucesión (x_n) en M tal que $x_n \longrightarrow x$. Como M es compacto, $x \in M$. Por lo tanto M es cerrado porque $x \in \bar{M}$ fue arbitrario.

Probaremos que M es acotada. Si M no fuera acotado, contendría un sucesión no acotada (y_n) tal que $d(y_n, b) > n$, donde b es cualquier elemento fijo. Esta sucesión puede contener una subsucesión convergente ya que una subsucesión convergente debe ser acotada. □

Teorema 2.8.3 (Compacidad). *En un espacio normado de dimensión finita X, cualquier subconjunto $M \subset X$ es compacto si y solo si M es cerrado y acotado.*

Lema 2.8.4 (F. Riesz). *Sean Y y Z subespacios de un espacio normado X de cualquier dimensión, y supongamos que Y es cerrado y es un subconjunto propio de Z. Entonces para cada número real $k \in (0,1)$ existe un $z \in Z$ tal que*

$$\|z\| = 1, \qquad \|z - y\| \geq k \text{ para todo } y \in Y$$

Teorema 2.8.5 (Aplicación Continua). *Sean X y Y espacios métricos y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Entonces la imagen de un subconjunto compacto M de X bajo T es compacto.*

2.9. OPERADORES LINEALES

Definición 2.9.1 (Operador Lineal). Sean X y Y espacios vectoriales sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$. Decimos que $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal, si para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$T(x+y) = Tx + Ty \tag{2.19}$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx \tag{2.20}$$

Claramente (2.19) y (2.20) es equivalente a

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \tag{2.21}$$

Definición 2.9.2 (Espacio Nulo). Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal El *espacio nulo* de T es el conjunto de todos los $x \in X$ tal que $Tx = 0$

Tomando $\alpha = 0$ en (2.20) obtenemos que:

$$T0 = 0$$

Ejemplo 2.9.2.1 (Operador Identidad). Sea X un espacio normado, entonces el *operador identidad* $I_X : X \longrightarrow X$ es definido por $Ix = x$ para todo $x \in X$. Entonces I_x es lineal.

Ejemplo 2.9.2.2 (Operador Cero). Sean X y Y espacios vectoriales El *operador cero* $0 : X \longrightarrow Y$ es definido por $0x = 0$ para todo $x \in X$. Entonces 0 es lineal.

Teorema 2.9.3 (Operador Inverso). *Sean los espacios vectoriales X y Y. Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal con rango $\mathscr{R}(T) \subset Y$, entonces*

(a) *La inversa $T^{-1} : \mathscr{R}(T) \longrightarrow X$ existe si, y solo si,*

$$Tx = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

(b) *Si T^{-1} existe, es un operador lineal.*

(c) *Si $dim X = n < \infty$ y T^{-1} existe, entonces $dim \mathscr{R}(T) = dim X$.*

2.10. OPERADORES LINEALES ACOTADOS Y CONTINUOS

Definición 2.10.1 (Operador Lineal Acotado). Sean X y Y espacios normados, y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. El operador T es llamado *acotado* si existe un número real c tal que para todo $x \in X$

$$\|Tx\| \leq c\,\|x\| \tag{2.22}$$

donde la norma de T es definido por

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{2.23}$$

Lema 2.10.2 (Norma). *Sea T un operador lineal acotado, entonces*

(a) *Una fórmula equivalente para la norma de T es*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} \|Tx\| \tag{2.24}$$

***(b)** La norma definida en* (2.23) *satisface (N1) a (N4)*

Prueba.

(a) Escribimos $\|x\| = a$ y sea $y = (1/a)$, donde $x \neq 0$. Entonces $\|y\| = \|x\|/a = 1$, y como T es lineal

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{1}{a}\|Tx\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \left\| T\left(\frac{1}{a}x\right)\right\| = \sup_{\substack{y\in X\\ \|y\|=1}} \|Ty\| \tag{2.25}$$

Escribiendo x en lugar de y, se completa la prueba.

(b) (N1) y (N2) se verifican. Además (N3) es obtenida de

$$\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha|\,\|Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

Finalmente, (N4) se sigue de

$$\sup_{\|x\|=1} \|(T_1+T_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1x+T_2x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\|$$

$\square$

Ejemplo 2.10.2.1 (Operador Identidad). El operador identidad $I : X \longrightarrow X$ sobre un espacio normado $X \neq \{0\}$ es acotado y tiene norma $\|I\| = 1$.

Ejemplo 2.10.2.2 (Operador Cero). El operador cero $0 : X \longrightarrow Y$ sobre un espacio normado X es acotado y tiene norma $\|0\| = 0$.

Teorema 2.10.3 (Dimensión Finita). *Si un espacio normado X es finito dimensional, entonces todo operador lineal sobre X es acotado.*

Prueba.

Sea $\dim X = n$ y $\{e_1, \cdots, e_n\}$ una base para X. Tomamos cualquier $x = \sum \xi_j e_j$ y consideramos cualquier operador lineal T sobre X. Como T es lineal,

$$\|Tx\| = \left\|\sum \xi_j Te_j\right\| \leq \sum |\xi_j|\,\|Te_j\| \leq \max_k \|Te_k\| \sum |\xi_j|$$

tomamos las sumas de 1 hasta n. Para la ultima suma aplicamos el Lema 2.7.1 con $\alpha_j = \xi_j$ y $x_j = e_j$, entonces obtenemos

$$\sum |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \left\|\sum \xi_j e_j\right\| = \frac{1}{c} \|x\|$$

Juntando

$$\|Tx\| \leq \gamma \|x\| \qquad \text{donde} \qquad \gamma = \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\|$$

Así vemos que T es acotada. $\square$

Teorema 2.10.4 (Continuidad y Acotación). *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal, donde X y Y son espacios normados entonces:*

(a) *T es continua si y solo si T es acotada.*

(b) *Si T es continua en un punto, es continua.*

Prueba.

(a) Para $T = 0$ la afirmación es trivial. Sea $T \neq 0$. Entonces $\|T\| \neq 0$. Asumimos que T es acotada y consideremos cualquier $x_0 \in X$. Sea cualquier $\varepsilon > 0$ dado. Entonces, ya que T es lineal, para cada $x \in X$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \qquad \text{donde} \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

obtenemos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \, \|x - x_0\| < \|T\| \, \delta = \varepsilon$$

Ya que $x_0 \in X$ fue arbitrario esto muestra que T es continua.

Recíprocamente, asumimos que T es continua en un punto arbitrario $x_0 \in X$. Entonces, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Longrightarrow \|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon, \text{ para todo } x \in X \tag{2.26}$$

Tomamos cualquier $y \neq 0$ en X y ponemos

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|} y \qquad \text{entonces} \qquad x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|} y$$

Por lo tanto $\|x - x_0\| = \delta$, ya que T es lineal, tenemos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{\|y\|} y\right) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\|$$

y (2.26) implica

$$\frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\| \leq \varepsilon \qquad \text{en consecuencia} \qquad \|Ty\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|y\|$$

Esto puede ser escrito $\|Ty\| \leq c\|y\|$, donde $c = \varepsilon/\delta$, y se muestra que T es acotada.

(b) Continuidad de T en un punto implica acotación de T por la segunda parte de la prueba de (a), que a su vez implica la continuidad de T por (a). □

Corolario 2.10.4.1 (Continuidad, Espacio Nulo). *Sea T un operador lineal acotado, entonces:*

(a) $x_n \longrightarrow x$ *implica* $Tx_n \longrightarrow Tx$*, donde* $x_n, x \in X$.

(b) *El espacio nulo* $\mathcal{N}(T)$ *es cerrado.*

Prueba.

(a) Se sigue del Teorema 2.10.4 y la definición de continuidad. También tenemos cuando $n \longrightarrow \infty$

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\| \|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

.

(b) Para cada $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ existe una sucesión (x_n) en $\mathcal{N}(T)$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Por lo tanto $Tx_n \longrightarrow Tx$ por la parte (a) de este corolario. También $Tx = 0$ puesto que $Tx_n = 0$, asi que $x \in \mathcal{N}(T)$. Ya que $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ fue arbitrario, $\mathcal{N}(T)$ es cerrado. □

2.11. FUNCIONALES LINEALES

Definición 2.11.1 (Funcional Lineal). Un *funcional lineal* es un operador lineal

$$f: \quad X \longrightarrow K$$

donde: X es un espacio vectorial, K es un campo de escalares.

Definición 2.11.2 (Funcional Lineal Acotado). Un *funcional lineal acotado* $f : X \longrightarrow K$ es un operador lineal acotado.

Así existe un número real c tal que para todo $x \in X$.

$$|f(x)| \leq c\,\|x\| \tag{2.27}$$

Además, la norma de f es

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{2.28}$$

o equivalentemente

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |f(x)| \tag{2.29}$$

esto implica,

$$|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| \tag{2.30}$$

Ejemplo 2.11.2.1 (Producto Punto). El *producto punto* con un factor fijo define un funcional $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de

$$f(x) = x \cdot a = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3$$

donde $a = (\alpha_j) \in \mathbb{R}^3$ es fijo y $x = (\xi_j)$.

f es lineal.

f es acotada, en efecto

$$|f(x)| = |x \cdot a| \leq \|x\|\,\|a\|$$

así que $\|f\| \leq \|a\|$.

Usando (2.30) y tomando $x = a$ tenemos

$$\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|$$

Por lo tanto la norma de f es $\|f\| = \|a\|$.

Definición 2.11.3 (Espacio Algebráico Dual). El conjunto de todos los funcionales lineales definidos sobre un espacio vectorial X es llamado *espacio algebráico dual* de X es denotado por

$$X^* = \{f/f : X \longrightarrow K, \text{ f es un funcional lineal}\}$$

Sus operaciones de espacio vectorial son definidas de manera natural

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \tag{2.31}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \tag{2.32}$$

Para todo $x \in X$

Definición 2.11.4 (Isomorfismo). Un *isomorfismo* T de un espacio métrico $X = (X, d)$ sobre un espacio métrico $\bar{X} = (\bar{X}, \bar{d})$ es una aplicación biyectiva que preserva la distancia, es decir, para todo $x, y \in X$.

$$\bar{d}(Tx, Ty) = d(x, y)$$

Un *isomorfismo* T de un espacio vectorial X sobre un espacio vectorial $\bar{X}$ sobre el mismo campo es una aplicación biyectiva que preserva las dos operaciones algebráicas de espacio vectorial, así, para todo $x, y \in X$ y un escalar α

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

Un *isomorfismo* de un espacio normado X sobre un espacio normado $\bar{X}$, es un operador lineal biyectivo $T : X \longrightarrow \bar{X}$ que preserva la norma, es decir, para todo $x \in X$

$$\|Tx\| = \|x\|$$

2.12. ESPACIO NORMADO DE OPERADORES, ESPACIO DUAL

Teorema 2.12.1 (Espacio $\mathbf{B}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$). *El espacio vectorial $B(X,Y)$ de todos los operadores lineales acotados, de un espacio normado X sobre un espacio normado Y es un espacio normado con la norma definida por:*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \tag{2.33}$$

Teorema 2.12.2 (Completitud). *Si Y es un espacio de Banach, entonces $\mathbf{B}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ es un espacio de Banach.*

Definición 2.12.3 (Espacio Dual X'). Sea X un espacio normado. Entonces el conjunto de todos los funcionales lineal acotados sobre X constituyen un espacio normado con norma definida por:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} |f(x)| \tag{2.34}$$

el cual es llamado el *espacio dual* de X y es denotado por X'.

Teorema 2.12.4 (Espacio Dual). *El espacio dual X' de un espacio normado X es un espacio de Banach.*

2.13. ESPACIOS DE HILBERT

Definición 2.13.1 (Producto Interno). Un *producto interno* sobre un espacio vectorial X es una aplicación de $X \times X$ en el campo escalar K de X, es decir

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle: \quad X \times X &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longrightarrow \langle x,y\rangle \end{aligned}$$

donde $\langle x,y\rangle$ es llamado *producto interno* de x y y, tal que para todos los vectores $x,y,z \in X$ y el escalar $\alpha \in K$, satisface los axiomas

(PI1) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

(PI2) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha \langle x,y\rangle$

(PI3) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

(PI4) $\langle x,x\rangle \geq 0$

$\langle x,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

Un producto interno sobre X define una norma sobre X dado por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \tag{2.35}$$

y una métrica sobre X definida por

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y,x-y\rangle} \tag{2.36}$$

Definición 2.13.2 (Espacio con Producto Interno). Un *espacio con producto interno* es un espacio vectorial X con un producto interno definido sobre X

Definición 2.13.3 (Espacio de Hilbert). Un *espacio de Hilbert* es un espacio con producto interno completo.

Por lo tanto los *espacios con producto interno* son *espacios normados*, y los *espacios de Hilbert* son *espacios de Banach.*

Definición 2.13.4 (Ortogonalidad). Un elemento x de un espacio con producto interno X es llamado *ortogonal* a un elemento $y \in X$ si

$$\langle x, y \rangle = 0$$

También decimos que x y y son *ortogonales*, y lo denotamos por $x \perp y$. Similarmente para subconjuntos $A, B \subset X$ escribimos $x \perp A$ si $x \perp a$ para todo $a \in A$ y $A \perp B$ si $a \perp b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.

Ejemplo 2.13.4.1 (Espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$). El espacio $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert con producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \eta_1 + \cdots + \xi_n \eta_n \tag{2.37}$$

donde $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ y $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$.

En efecto, por definición tenemos

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \right)^{1/2}$$

y de esto la métrica Euclideana definida por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2} = \left[(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2 \right]^{1/2}$$

y sabemos que el espacio $\mathbb{R}^n$ es completo con respecto a esta métrica.

2.14. PROPIEDADES DE ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Lema 2.14.1 (Continuidad del producto interno). *Si en un espacio con producto interno, $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$, entonces $\langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$.*

Prueba.

Sumando y restando un término, usando la desigualdad triangular para números y la desigualdad de Schwarz, obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

ya que $y_n - y \longrightarrow 0$ y $x_n - x \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. □

Definición 2.14.2 (Isomorfismo). Un *isomorfismo* T de un espacio con producto interno X sobre un espacio con producto interno $\bar{X}$ sobre el mismo campo es un operador lineal biyectivo $T : X \longrightarrow \bar{X}$ que preserva el producto interno, es decir, para todo $x, y \in X$

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$$

entonces $\bar{X}$ es llamado *isomorfo* con X.

2.15. CONJUNTOS ORTONORMALES Y SUCESIONES

Definición 2.15.1 (Conjuntos Ortonormales y Sucesiones). Un *conjunto ortogonal* M en un espacio con producto interno X es un subconjunto $M \subset X$ cuyos elementos son ortogonales dos a dos.

Un *conjunto ortonormal* $M \subset X$ es un conjunto ortogonal cuyos elementos tienen norma 1, es decir, para todo $x, y \in M$.

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \neq y \\ 1, & \text{si} \quad x = y \end{cases} \tag{2.38}$$

Si un conjunto ortogonal u ortonormal M es numerable, podemos disponer esta en una sucesión (x_n) y llamamos esta una sucesión ortogonal u ortonormal, respectivamente.

Más generalmente, un conjunto ordenado, o *familia*, (x_n), $\alpha \in I$, es llamado *ortogonal* si $x_\alpha \perp x_\beta$ para todo $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$. La familia es llamada *ortonormal* si es ortogonal y todos los x_α tienen norma 1, por tanto para todo $\alpha, \beta \in I$ tenemos

$$\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \alpha \neq \beta \\ 1, & \text{si} \quad \alpha = \beta \end{cases} \tag{2.39}$$

Aqui, $\delta_{\alpha\beta}$ es llamado delta de Kronecker.

Para elementos ortogonales $x, y \in X$ tenemos $\langle x, y \rangle = 0$, así se obtiene la *Relación Pitagórica*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \tag{2.40}$$

Mas generalmente, si $(x_1, \cdots, x_n)$ es un conjunto ortogonal, entonces:

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2 \tag{2.41}$$

Lema 2.15.2 (Independencia Lineal). *Un conjunto ortonormal es linealmente independiente.*

Prueba.

Sea $(e_1, \cdots, e_n)$ un conjunto ortonormal y consideramos la ecuación

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

Multiplicando por un e_j fijo resulta

$$\left\langle \sum_k \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_k \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = \alpha_j = 0$$

Asi se prueba la independencia lineal para cualquier conjunto ortonormal finito. □

Teorema 2.15.3 (Desigualdad de Bessel). *Sea (e_k) un sucesión ortonormal en un espacio con producto interno X, entonces para todo $x \in X$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \tag{2.42}$$

Las sucesiones son muy convenientes para trabajar. El proceso para obtener una sucesión ortonormal de una sucesión linealmente independiente x_j en un espacio con producto interno X, es dado por el *proceso de Gram-Schmidt*.

La resultante suceción ortonormal (e_j) tiene la propiedad que para todo n,

$$\operatorname{span}(e_1, \cdots, e_n) = \operatorname{span}(x_1, \cdots, x_n)$$

Dada una sucesión ortonormal (e_k) en un espacio de Hilbert H, podemos considerar la serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_l \tag{2.43}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ son escalares.

Una serie *converge* y tiene *suma* s si existe un $s \in H$ tal que la sucesión (s_n) de sumas parciales

$$s_n = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

converge a s, es decir

$$\|s_n - s\| \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando} \qquad n \longrightarrow \infty$$

Teorema 2.15.4 (Convergencia). *Sea (e_k) una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H, entonces*

(a) *La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ converge si y solo si la siguiente serie converge:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \tag{2.44}$$

(b) *Si la serie* (2.43) *converge entonces los coeficientes* α_k *son los coeficientes de Fourier* $\langle x, e_k \rangle$*, donde* x *denota la suma de* (2.43)*,es decir*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \tag{2.45}$$

(c) *Para cualquier* $x \in X$*, la serie* (2.43) *con* $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ *converge.*

Definición 2.15.5 (Conjunto Ortonormal Total). Un subconjunto M de un espacio con producto interno X es llamado *conjunto ortonormal total* si y solo si

$$\overline{\text{span} M} = X \tag{2.46}$$

Todos los *conjuntos ortonormales totales* en un espacio de Hilbert H tienen la misma *cardinalidad*. Este último es llamada la *dimensión de Hilbert* ó *dimensión ortogonal* de H.

Definición 2.15.6 (Isomorfismo). Un isomorfismo de un espacio de Hilbert H sobre un espacio de Hilbert $\bar{H}$ sobre el mismo campo es un operador lineal biyectivo $T : H \longrightarrow \bar{H}$ tal que para todo $x, y \in H$,

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \tag{2.47}$$

entonces H y $\bar{H}$ son llamados espacios de Hilbert *isomorfos*

Teorema 2.15.7 (Isomorfismo y dimensión de Hilbert). *Dos espacios de Hilbert* H *y* $\bar{H}$*, son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión de Hilbert.*

Prueba.

$(\Rightarrow)$ Si H es isomorfo con $\bar{H}$ y $T : H \longrightarrow \bar{H}$ es un isomorfismo, entonces (2.47) muestra que los elementos ortonormales en H tienen imagen ortonormal baje T. Ya que T es biyectiva, concluimos que T aplica cada conjunto ortonormal en H sobre un conjunto ortonormal en $\bar{H}$. Por lo tanto H y $\bar{H}$ tienen la misma dimensión de Hilbert.

$(\Leftarrow)$ Recíprocamente, supongamos que H y $\bar{H}$ tienen la misma dimensión de Hilbert. El caso $H=\{0\}$ y $\bar{H}=\{0\}$ es trivial. Sea $H\neq\{0\}$. Entonces $\bar{H}\neq\{0\}$, y cualquier conjunto ortonormal total M en H y $\bar{M}$ en $\bar{H}$ tienen la misma cardinalidad, asi que podemos ordenar ellos por el mismo conjunto de índices $\{k\}$ y escribimos $M=(e_k)$ y $\bar{M}=(\bar{e}_k)$. $\square$

2.16. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONALES EN ESPACIOS DE HILBERT

Teorema 2.16.1 (Riesz). *Toda funcional lineal acotada f sobre un espacio de Hilbert H puede ser representada en términos de el producto interno, denotado*

$$f(x)=\langle x,z\rangle \tag{2.48}$$

donde z depende de f, es únicamente determinda por f y tiene norma

$$\|z\|=\|f\| \tag{2.49}$$

Definición 2.16.2 (Forma Sesquilineal). Sea X y Y espacios vectoriales sobre el mismo campo K. Entonces una *forma sesquilineal* h sobre $X\times Y$ es una aplicación

$$\begin{aligned} h: \quad X\times Y &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longrightarrow h(x,y) \end{aligned}$$

tal que para todo $x,x_1,x_2\in X$ y $y,y_1,y_2\in Y$ y los escalares α,β

(a) $h(x_1+x_2,y)=h(x_1,y)+h(x_2,y)$

(b) $h(x,y_1+y_2)=h(x,y_1)+h(x,y_2)$

(c) $h(\alpha x,y)=\alpha h(x,y)$

(d) $h(x,\beta y)=\bar{\beta}h(x,y)$

Por lo tanto h se llama *lineal* si cumple el primer argumento y *conjugada lineal* si cumple la segunda. Si $(K = \mathbb{R})$ entonces (d) es simplificado

$$h(x, \beta y) = \beta h(x, y)$$

y h es llamada *bilineal* si es lineal con respecto a las dos variables.

Entonces una forma sesquilineal es una aplicación que es lineal en la primera variable y conjugada lineal en la segunda.

Teorema 2.16.3 (Representación de Riesz). *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y*

$$h : H_1 \longrightarrow H_2 \tag{2.50}$$

una forma sequilineal acotada. Entonces h tiene una representación

$$h(x, y) = \langle sx, y \rangle \tag{2.51}$$

donde $S : H_1 \longrightarrow H_2$ es un operador lineal acotado. S es únicamente determinado por h y tiene norma

$$\|S\| = \|h\| \tag{2.52}$$

2.17. TEOREMA DE LA CATEGORÍA DE BAIRE

Obtendremos los resultados de este trabajo de investigación a partir del Teorema de la Categoría de Baire. El Teorema de la Categoría de Baire tiene varias otras aplicaciones en Análisis Funcional y es la razón principal de porque las categorías se usan en numerosas pruebas. Antes de citar este teorema establecemos los conceptos necesarios para ello.

Definición 2.17.1 (Categoría). Un subconjunto M de un espacio métrico X es llamado

(a) *raro* (ó denso en ninguna parte) en X si su clausura $\bar{M}$ no tiene puntos interiores.

(b) de *primera categoría* en X si M es la unión de conjuntos numerables donde cada uno de ellos es raro en X.

(c) de *segunda categoría* en X si M no es de primera categoría en X.

Teorema 2.17.2 (Teorema de la Categoría de Baire). *Si un espacio métrico $X \neq \varnothing$ es completo, entonces es de segunda categoría en sí mismo.*

Es decir, si $X \neq \varnothing$ es completo y

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \qquad \textit{donde} \qquad A_k \textit{ es cerrado} \tag{2.53}$$

entonces al menos un A_k contiene un subconjunto abierto no vacío.

Prueba.

Esta prueba es por contradicción. Supongamos que el espacio métrico completo $X \neq \varnothing$ fuera de primera categoría en sí mismo. Entonces

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \tag{2.54}$$

con cada M_k raro en X. Construiremos una sucesión de Cauchy (p_k) cuyo límite es p que no está en M_k, de este modo se contradice la representación (2.54).

Puesto que, M_1 es raro en X, entonces, $\overline{M_1}$ no contiene ningún conjunto abierto. Pero X si contiene abiertos, por ejemplo X mismo. Esto implica $\overline{M_1} \neq X$. Por lo tanto el complemento $\overline{M_1}^C = X - \overline{M_1}$ de $\overline{M_1}$ no es vacío y es abierto. Podemos así escoger un punto p_1 en $\overline{M_1}^C$ y una bola abierta alrededor de el, es decir

$$B_1 = B(p_1, \varepsilon_1) \subset \overline{M_1}^C \qquad \text{con} \qquad \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$$

Puesto que, M_2 es raro en X, entonces $\overline{M_2}$ no contiene un conjunto abierto no vacío. Por lo tanto no contiene la bola abierta $B(p_1, \frac{1}{2}\varepsilon_1)$. Esto implica que $\overline{M_2}^C \cap B(p_1, \frac{1}{2}\varepsilon_1)$ es no vacía y es abierta, asi que podemos escoger una bola abierta en este conjunto, es decir

$$B_2 = B(p_2, \varepsilon_2) \subset \overline{M_2}^C \cap B(p_1, \frac{1}{2}\varepsilon_1) \qquad \text{con} \qquad \varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1$$

Por inducción obtenemos una sucesión de bolas

$$B_k = B(p_k, \varepsilon_k) \qquad \text{con} \qquad \varepsilon_k < 2^{-k}$$

tal que $B_k \cap M_k = \varnothing$ y

$$B_{k+1} \subset B(p_k, \frac{1}{2}\varepsilon_k) \subset B_k \qquad \text{para} \qquad k = 1, 2, \cdots$$

Como $\varepsilon_k < 2^{-k}$, la sucesión (p_k) de los centros es de Cauchy y converge, es decir, $p_k \longrightarrow p \in X$ porque X es completo por hipótesis. También, para cada m y $n > m$ tenemos $B_n \subset B(p_m, \frac{1}{2}\varepsilon_m)$, asi que

$$\begin{aligned} d(p_m, p) &\leq d(p_m, p_n) + d(p_n, p) \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon_m + d(p_n, p) \longrightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_m \end{aligned}$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. Por consiguiente $p \in B_m$ para cada m. Como $B_m \subset \overline{M_m}^C$, se sigue que $p \notin M_m$ para cada m, asi que $p \notin \cup M_m = X$. Esto contradice el hecho que $p \in X$. Luego, X es de segunda categoría en si mismo. $\square$

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. MATERIALES

Los recursos materiales necesarios de acuerdo al tiempo se tiene resumido en la siguiente tabla:

Actividades	Ma	Ab	Ma	Ju	Ju	Ag	Se	Oc	No
Revisión de la bibliografía	×	×	×	×					
Redacción del proyecto			×	×					
Presentación del proyecto				×					
Revisión y aprobación del proyecto					×	×			
Redacción del borrador de tesis							×	×	
Sustentación									×

3.2. PRESUPUESTO

Los recursos utilizados para el desarrollo de este proyecto de investigación se ha estimado aproximadamente de la siguiente manera.

Descripción	Unidades	Costo Unitario (S/.)	Cantidad	Costo Total (S/.)
Bibliografía	Uno	30.00	10	300.00
Papel Bond	Millar	20.00	4	80.00
Fotocopias	Uno	0.10	1000	100.00
Memoria USB	16 GB	40.00	1	40.00
Impresión	Uno	0.10	1000	100.00
Uso de internet	Hora	1.00	200	200.00
Otros				300.00
Costo total				1120.00

3.3. MÉTODOS

El método que se utiliza es deductivo-analítico, ya que la ejecución del proyecto consistirá en la exploración, interpretación y análisis para obtener el resultado final.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo obtenemos los resultados fundamentales que se derivan del Teorema de la Categoría de Baire.

Estos son:

- el Teorema de la Acotación Uniforme
- el Teorema de la Aplicación Abierta
- el Teorema del Gráfico Cerrado

Inicialmente establecemos el teorema de la acotación uniforme, conocido también como el Teorema de Banach-Steinhaus. Este teorema establece que si X es un espacio de Banach y una sucesión de operadores $T_n \in B(X,Y)$ es acotada en cada punto $x \in X$, entonces la sucesión es uniformemente acotada. En otros términos, acotación puntual implica acotación uniforme.

4.1. TEOREMA DE LA ACOTACIÓN UNIFORME

Teorema 4.1.1 (Teorema de la Acotación Uniforme [Banach-Steinhaus]). *Sea (T_n) una sucesión de operadores lineales acotados $T_n : X \longrightarrow Y$ de un espacio de Banach X en un espacio normado Y tal que $(\|T_n x\|)$ es acotado para todo $x \in X$, es decir*

$$\|T_n x\| \leq c_x \qquad para \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{4.1}$$

donde c_x es un número real. Entonces la sucesión de las normas $\|T_n\|$ es acotada, es decir, existe un c tal que

$$\|T_n\| \leq c \qquad para \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{4.2}$$

Prueba.

Para todo $k \in \mathbb{N}$, sea $A_k \subset X$ el conjunto de todos los x tal que

$$\|T_n x\| \leq k, \text{ para todo } n$$

A_k es cerrado. En efecto, para cualquier $x \in \bar{A_k}$ existe una sucesión (x_j) en A_k convergiendo para x. Esto significa que para cada n fijo tenemos $\|T_n x_j\| \leq k$ y obtenemos $\|T_n x\| \leq k$ porque T_n es continua y también lo es la norma. Por lo tanto $x \in A_k$, y A_k es cerrado.

Por (4.1), cada $x \in X$ pertenece a algún A_k. De donde

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Como X es completo, el teorema de la categoría de Baire implica que algún A_k contiene una bola abierta, por decir,

$$B_0 = B(x_0, r) \subset A_{k_0} \tag{4.3}$$

Sea $x \in X$ arbitrario, $x \neq 0$. Definamos

$$z = x_0 + \gamma x \qquad \text{donde} \qquad \gamma = \frac{r}{2\|x\|} \tag{4.4}$$

Entonces $\|z - x_0\| < r$, por lo tanto $z \in B_0$. Por (4.3) y de la definición de A_{k_0} tenemos $\|T_n z\| \leq k_0$ para todo n. También $\|T_n x_o\| \leq k_0$ ya que $x_o \in B_0$. De (4.4) obtenemos

$$x = \frac{1}{\gamma}(z - x_0)$$

Luego, n

$$\|T_n x\| = \frac{1}{\gamma}\|T_n(z - x_0)\| \leq \frac{1}{\gamma}(\|T_n z\| + \|T_n x_0\|) \leq \frac{4}{r}\|x\| k_0$$

Por lo tanto, para todo n,

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| \leq \frac{4}{r} k_0$$

que es de la forma (4.2) con $c = 4k_0/r$. $\square$

A continuación veremos algunas aplicaciones del Teorema de la Acotación Uniforme

4.1.2. ESPACIO DE POLINOMIOS

El espacio normado X de todos los polinomios con norma definida por:

$$\|x\| = \max_j |\alpha_j| \qquad (\alpha_0, \alpha_1, \cdots \text{son los coeficientes de } x) \tag{4.5}$$

no es completo.

Prueba.

Construiremos una sucesión de operadores lineales acotados sobre X que satisface (4.1) pero no (4.2), asi que X no será completo.

Podemos escribir un polinomio $x \neq 0$ de grado N_x en la forma

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^j \qquad (\alpha_j = 0 \ \text{para} \ j > N_x)$$

Como una sucesión de operadores sobre X tomamos la sucesión de funcionales $T_n = f_n$ definido por

$$T_n 0 = f_n(0) = 0, \qquad T_n x = f_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \tag{4.6}$$

f_n es lineal, f_n es acotada ya que $|\alpha_j| \leq \|x\|$ por (4.5), así que $|f_n(x) \leq n \|x\||$. Además, para cada $x \in X$ fijo, la sucesión $(|f_n(x)|)$ satisface (4.1) porque un polinomio x de grado N_x tiene $N_x + 1$ coeficientes, así que por (4.6) obtenemos:

$$|f_n(x)| \leq (N_x + 1) \max_j |\alpha_j| = c_x$$

que es de la forma (4.1).

Ahora mostraremos que (f_n) no satisface (4.2), es decir, no existe un c tal que $\|T_n\| = \|f_n\| \leq c$ para todo n. Esto haremos haciendo una elección particular. Para f_n escogemos x definido por:

$$x(t) = 1 + t + \cdots + t^n$$

entonces $\|x\| = 1$ por (4.5) y

$$f_n(x) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n = n\|x\|$$

Por lo tanto, $\|f_n\| \geq |f_n(x)| / \|x\| = n$, asi que $(\|f_n\|)$ no es acotada. $\square$

4.1.3. SERIES DE FOURIER

Una *serie de Fourier* de una función periódica x de periodo 2π es de la forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m sen\, mt) \tag{4.7}$$

con los coeficientes de Fourier de x dado por las fórmulas de Euler

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos mt\,dt, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t) sen\, mt\,dt \tag{4.8}$$

Es conocido que la serie (4.7) puede converger incluso en puntos donde x es discontinua. Esto muestra que la continuidad no es necesaria para la convergencia. En efecto, usando el Teorema de la Acotación Uniforme, mostraremos el siguiente resultado.

Existe una función real continua cuya serie de Fourier diverge en un punto t_0 dado.

Prueba.

Sea X el espacio normado de todas las funciones continuas de periodo 2π con norma:

$$\|x\| = \text{máx}\,|x(t)| \tag{4.9}$$

X es un espacio de Banach, con $a = 0$ y $b = 2\pi$. Podemos tomar $t_0 = 0$ sin restringir la generalidad. Para probar nuestra afirmación aplicaremos el Teorema de la Acotación Uniforme para $T_n = f_n$ donde $f_n(x)$ es el valor en $t = 0$ de las $n-sumas$ parciales de la serie de Fourier de x. Ya que para $t = 0$ los términos seno son ceros, y los cosenos son unos, vemos de (4.7) y (4.8) que,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{n} a_m \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos mt\right]dt \end{aligned}$$

Queremos determinar la función representada por la suma bajo el signo de la integral. Para este propósito calculamos

$$\begin{aligned} 2sen\frac{1}{2}t\sum_{m=1}^{n}\cos mt &= \sum_{m=1}^{n} 2sen\frac{1}{2}t\cos mt \\ &= \sum_{m=1}^{n}\left[-sen\,(m-\frac{1}{2}t) + sen\,(m+\frac{1}{2}t)\right] \\ &= -sen\frac{1}{2}t + sen\,(n+\frac{1}{2})t \end{aligned}$$

donde la última expresión se sigue observando que la mayoría de los términos se eliminan en pares. Dividiendo esto por $sen\frac{1}{2}t$ y sumando 1 en ambos lados, tenemos:

$$1 + 2\sum_{m=1}^{n}\cos mt = \frac{sen\,(n+\frac{1}{2})t}{sen\,\frac{1}{2}t}$$

Consecuentemente, la fórmula para $f_n(x)$ puede ser denotado por:

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)q_n(t)dt, \qquad q_n(t) = \frac{sen\,(n+\frac{1}{2})t}{sen\,\frac{1}{2}t} \tag{4.10}$$

Usando esto, podemos mostrar que el funcional lineal f_n es acotado. En efecto, por (4.9) y (4.10),

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{2\pi}\max|x(t)|\int_0^{2\pi}|q_n(t)|\,dt = \frac{\|x\|}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|\,dt$$

de esto vemos que f_n es acotado. Además, tomando el supremo sobre todos los x de norma 1, obtenemos

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q_n(t)|\,dt$$

El signo de igualdad se mantiene como probaremos ahora. Para esto, escribiremos primero

$$|q_n(t)| = y(t)q_n(t)$$

donde $y(t) = +1$ en cada t en que $q_n(t) \geq 0$ y en otra parte $y(t) = -1$.

y no es continua, pero para cualquier $\varepsilon > 0$ dado puede ser modificado a un x continuo de norma 1 talq ue para este x tenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} [x(t) - y(t)]\,q_n(t)dt\right| < \varepsilon$$

Escribiendo esto como dos integrales y usando (4.10), obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} x(t)q_n(t)dt - \int_0^{2\pi} y(t)q_n(t)dt\right| = \left|f_n(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q_n(t)|\,dt\right| < \varepsilon$$

Ya que $\varepsilon > 0$ fue arbitrario y $\|x\| = 1$, esto prueba la fórmula deseada

$$\|f_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q_n(t)|\,dt \tag{4.11}$$

Finalmente mostraremos que la sucesión $(\|f_n\|)$ no es acotada. Reemplazando en (4.11) la expresión para q_n de (4.10), usando el hecho que $\left|sen\,\frac{1}{2}t\right| < \frac{1}{2}t$ para $t \in \langle 0, 2\pi]$ y colocando $(n+\frac{1}{2})t = v$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\|f_n\| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{sen\,(n+\frac{1}{2}t)}{sen\,\frac{1}{2}t}\right|dt \\
&> \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|sen\,(n+\frac{1}{2}t)\right|}{t}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{(2\pi+1)\pi}\frac{|sen\,v|}{v}dv \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|sen\,v|}{v}dv \\
&\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|sen\,v|\,dv \\
&= \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\longrightarrow\infty \qquad \text{cuando} \qquad n\longrightarrow\infty
\end{aligned}
$$

ya que las series armónicas divergen.

Por lo tanto $(\|f_n\|)$ no es acotada, asi que (4.2) con $T_n = f_n$ no se mantiene. Ya que X es completo, esto implica que (4.1) no se cumple para todo x. Aquí debe existir un $x \in X$ tal que $(|f_n(x)|)$ no es acotada. Pero por definición de los $f_n's$ esto significa que la serie de Fourier de ese x diverge en $t = 0$. □

4.2. TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA

Existen aplicaciones tales que la imagen de cada conjunto abierto es un conjunto abierto (aplicaciones abiertas).

Considerando la importancia de los conjuntos abiertos, es de entender que las aplicaciones abiertas son de interés general.

Como en el teorema de la acotación uniforme necesitamos nuevamente la completitud y el presente teorema muestra otra razón por la cual los Espacios de Banach son más satisfactorios que los espacios normados imcompletos. Este teorema también ofrece condiciones bajo las cuales la inversa de un operador lineal acotado es acotado.

Definición 4.2.1 (Aplicación Abierta). Sea X y Y espacios métricos. Entonces $T : X \longrightarrow Y$, es llamado una aplicación abierta si para cada conjunto abierto en X su imagen es un conjunto abierto en Y.

Teorema 4.2.2 (Teorema de la Aplicación Abierta). *Un operador lineal acotado T de un espacio de Banach X sobre un espacio de Banach Y es una aplicación abierta. De ello, si T es biyectiva, T^{-1} es continua y así acotada.*

La prueba se seguirá fácilmente del resultado:

Lema 4.2.3 (Bola unitaria abierta). *Un operador lineal acotado T de una espacio de Banach X sobre un espacio de Banach Y tiene la propiedad de que la imagen $T(B_0)$ de la bola unitaria abierta $B_0 = B(0,1) \subset X$ contiene una bola abierta de centro $0 \in Y$.*

Prueba.

Procediendo paso a paso, probaremos:

(a) La clausura de la imagen de la bola abierta $B_1 = B(0, \frac{1}{2})$ contiene una bola abierta B^*.

(b) $\overline{T(B_n)}$ contiene una bola abierta V_n alrededor de $0 \in Y$, donde $B_n = B(0, 2^{-n}) \subset X$.

(c) $T(B_0)$ contiene una bola abierta alrededor de $0 \in Y$.

Los detalles son como siguen.

(a) Siendo $A \subset X$, definimos

$$\alpha A = \{x \in X \ / \ x = \alpha a, \ a \in A\}, \qquad \alpha \text{ escalar} \tag{4.12}$$

$$A + w = \{x \in X \ / \ x = a + w, \ a \in A\}, \qquad w \in X \tag{4.13}$$

definiciones similares para subconjuntos de Y.

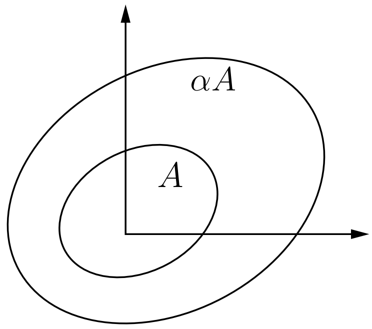


Figura 4.13: Ilustración de la fórmula (4.12).

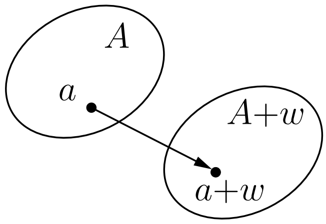


Figura 4.13: Ilustración de la fórmula (4.13).

Consideremos la bola abierta $B_1 = B(0, \frac{1}{2}) \subset X$. Cualquier $x \in X$ fijo, está en kB_1 con k real y suficientemente grando ($k > 2\|x\|$). Por consiguiente

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1$$

Ya que T es sobreyectiva y lineal,

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(B_1)} \tag{4.14}$$

Teniendo en cuenta que tomando la clausura no se aumentan mas puntos a la unión, ya que la unión es todo el espacio Y. Como Y es completo, es de segunda categoría en sí mismo, por el Teorema de la Categoría de Baire. Por lo tanto, observando que (4.14) es similar a (2.53), concluimos que la $\overline{kT(B_1)}$ debe contener alguna bola abierta. Esto implica que $\overline{T(B_1)}$ también contiene una bola abierta, es decir, $B^* = B(y_0, \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)}$. Resulta que

$$B^* - y_0 = B(0, \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)} - y_0 \tag{4.15}$$

(b) Probemos que $B^* - y_0 \subset \overline{T(B_0)}$, donde B_0 es dado en el teorema. Esto realizaremos mostrando que

$$\overline{T(B_1)} - y_0 \subset \overline{T(B_0)} \tag{4.16}$$

Sea $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$. Entonces $y + y_0 \in \overline{T(B_1)}$, recordemos que también $y_0 \in \overline{T(B_1)}$. Por (2.3.6)(a) existen

$$u_n = Tw_n \in T(B_1) \quad \text{tal que} \quad u_n \longrightarrow y + y_0$$

$$v_n = Tz_n \in T(B_1) \quad \text{tal que} \quad v_n \longrightarrow y_0$$

Ya que $w_n, z_n \in B_1$ y B_1 tiene radio $1/2$, se sigue que

$$\|w_n - z_n\| \leq \|w_n\| + \|z_n\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

asi que $w_n - z_n \in B_0$, de

$$T(w_n - z_n) = Tw_n - Tz_n = u_n - v_n \quad \longrightarrow \quad y$$

vemos que $y \in \overline{T(B_0)}$. Como $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$ fue arbitrario, esto prueba (4.16). De (4.15) tenemos

$$B^* - y_0 = B(0, \varepsilon) \subset \overline{T(B_0)} \tag{4.17}$$

Sea $B_n = B(0, 2^{-n}) \subset X$. Como T es lineal, $\overline{T(B_n)} = 2^{-n}\overline{T(B_0)}$. De (4.17) obtenemos

$$V_n = B(0, \frac{\varepsilon}{2^n}) \subset \overline{T(B_n)} \tag{4.18}$$

(c) Finalmente probaremos que

$$V_1 = B(0, \frac{1}{2}\varepsilon) \subset T(B_0)$$

mostrando que para cada $y \in V_1$ está en $T(B_0)$, así que $y \in V_1$. De (4.18) con $n = 1$ tenemos $V_1 \subset \overline{T(B_1)}$. Por lo tanto $y \in \overline{T(B_1)}$. Por (2.3.6)(a) debe existir un $v \in T(B_1)$ cerca de y, es decir, $\|y - v\| < \varepsilon/4$. Ahora $v \in T(B_1)$ implica $v = Tx_1$ para algún $x_1 \in B_1$. Por consiguiente

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

De esto y (4.18) con $n = 2$ observamos que $y - Tx_1 \in V_2 \subset \overline{T(B_2)}$. Como antes concluimos que existe un $x_2 \in B_2$ tal que

$$\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{\varepsilon}{8}$$

Por lo tanto $y - Tx_1 - Tx_2 \in V_3 \subset \overline{T(B_3)}$, y así sucesivamente. En el paso n podemos elegir un $x_n \in B_n$ tal que

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{4.19}$$

Sea $z_n = x_1 + \cdots + x_n$. Ya que $x_k \in B_k$, tenemos $\|x_k\| < 1/2^k$. Esto resulta para $n > m$

$$\|z_n - z_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0$$

cuando $m \longrightarrow \infty$. Por consiguiente (z_n) es de Cauchy, (z_n) converge, es decir, $z_n \longrightarrow x$ porque X es completo. También $x \in B_0$ ya que B_0 tiene radio 1 y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \tag{4.20}$$

Ya que T es continua, $Tz_n \longrightarrow Tx$, y (4.19) muestra que $Tx = y$. Por lo tanto $y \in T(B_0)$.

□

Prueba.

(Prueba del Teorema de la Aplicación Abierta)

Probaremos que para cada conjunto abierto $A \subset X$ la imagen $T(A)$ es abierto en Y. La prueba se realizara mostrando que para cada $y = Tx \in T(A)$ contiene una bola abierta alrededor de $y = Tx$.

Sea $y = Tx \in T(A)$. Ya que A es abierto, este contiene una bola abierta con centro x. Por consiguiente $A - x$ contiene una bola abierto con centro 0; sea r el radio de la bola y consideramos $k = 1/r$, así que $r = 1/k$. Entonces $k(A - x)$ contiene la bola abierta unitaria $B(0,1)$. El Lema 4.2.3 implica que $T(k(A - x)) = k[T(A) - Tx]$ contiene una bola abierta alrededor de 0 y también $T(A) - Tx$. Por lo tanto $T(A)$ contiene una bola abierta alrededor $Tx = y$. Ya que $y \in T(A)$ fue arbitraria, $T(A)$ es abierta.

Finalmente, si $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ existe, esta es continua por el Teorema 2.2.6 porque T es abierta. Ya que T^{-1} es lineal por el Teorema 2.9.3, y es acotado por el Teorema 2.10.4. □

4.3. TEOREMA DEL GRÁFICO CERRADO

No todos los operadores lineales de importancia práctica son acotados. Prácticamente todos los operadores que el analista probablemente usará se llaman operadores lineales cerrados. Se define los operadores lineales cerrado sobre espacios normados y se hace una conexión con el importante Teorema del gráfico cerrado el cual establece suficientes condiciones bajo la cual un operador lineal cerrado sobre un espacio de Banach es acotado.

Definición 4.3.1 (Operador Lineal Cerrado). Sea X y Y espacios normados, $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es llamado *operador lineal cerrado* si su gráfica

$$\mathscr{G}(T) = \{(x,y)/x \in X, y- = Tx\}$$

es cerrado en el espacio normado $X \times Y$, donde se definen las operaciones algebráicas de espacio vectorial en $X \times Y$,

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

y la norma sobre $X \times Y$ es definido por:

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\| \tag{4.21}$$

Teorema 4.3.2 (Teorema del Gráfico Cerrado). *Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal cerrado, donde $\mathscr{D}(T) \subset X$. Entonces si $\mathscr{D}(T)$ es cerrado en X, el operador T es acotado.*

Prueba.

Primero mostraremos que $X \times Y$ con norma definida por (4.21) es completo. Sea (z_n) una sucesión de Cauchy en $X \times Y$, donde $z_n = (x_n, y_n)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \varepsilon \tag{4.22}$$

Por lo tanto (x_n) y (y_n) son sucesiones de Cauchy en X y Y, respectivamente, y convergen, es decir, $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$, porque X y Y son completos. Esto implica que $z_n \longrightarrow z = (x,y)$ ya que de (4.22) con $m \longrightarrow \infty$ tenemos $\|z_n - z\| \leq \varepsilon$ para $n > N$. Como la sucesión de Cauchy (z_n) fue arbitraria, $X \times Y$ es completo.

Por hipótesis, $\mathscr{G}(T)$ es cerrado en $X \times Y$ y $\mathscr{D}(T)$ es cerrado en X. Por lo tanto $\mathscr{G}(T)$ y $\mathscr{D}(T)$ son completos por el Teorema 2.3.7. Consideremos la aplicación

$$P : \mathscr{G}(T) \longrightarrow \mathscr{D}(T)$$

$$(x, Tx) \longrightarrow x$$

P es lineal y acotada

$$\|P(x,Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x,Tx)\|$$

P es biyectiva, en efecto la aplicación inversa es

$$P^{-1} : \mathscr{D}(T) \longrightarrow \mathscr{G}(T)$$

$$x \longrightarrow (x, Tx)$$

Como $\mathscr{G}(T)$ y $\mathscr{D}(T)$ son completos, podemos aplicar el Teorema de la aplicación abierta 4.2.2. y concluimos que P^{-1} es acotada, es decir, $\|(x,Tx)\| \leq b\|x\|$ para algún b y para todo $x \in \mathscr{D}(T)$. Por consiguiente T es acotada, ya que

$$\|Tx\| \leq \|Tx\| + \|x\| = \|(x,Tx)\| \leq b\|x\|$$

para todo $x \in \mathscr{D}(T)$.

$\square$

A continuación probamos el siguiente criterio que resulta ser muy útil, el cual expresa una propiedad que posteriormente es tomada como una definición de cerradura de un operador lineal

Teorema 4.3.3 (Operador Lineal Cerrado). *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal, donde X y Y son espacios normados. Entonces T es cerrado si y solo si tiene la siguiente propiedad. Si $x_n \longrightarrow x$, donde $x_n \in X$, y $Tx_n \longrightarrow y$, entonces $x \in X$ y $Tx = y$.*

Prueba.

Por definición, $\mathscr{G}(T)$ es cerrado si, y solo si, $z = (x, y) \in \mathscr{G}(T)$ implica $z \in \mathscr{G}(T)$. Del Teorema 2.3.6 (a) observamos que $z \in \overline{\mathscr{G}(T)}$ si, y solo si, existen $z_n = (x_n, Tx_n) \in \mathscr{G}(T)$ tal que $z_n \longrightarrow z$, por tanto

$$x_n \longrightarrow x, \qquad Tx_n \longrightarrow y \tag{4.23}$$

y $z = (x, y) \in \mathscr{G}(T)$ si, y solo si, $x \in X$, $y = Tx$. □

Lema 4.3.4 (Operador Cerrado). *Sea $T : \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado con $\mathscr{D}(T) \subset X$, donde X y Y son espacios normados, entonces:*

(a) *Si $\mathscr{D}(T)$ es un subconjunto cerrado de X, entonces X es cerrado.*

(b) *Si T es cerrado y Y es completo, entonces $\mathscr{D}(T)$ es subconjunto cerrado de X.*

Prueba.

(a) Si la sucesión (x_n) está en $\mathscr{D}(T)$ y converge, es decir, $x_n \longrightarrow x$, y es tal que (Tx_n) también converge, entonces $x \in \overline{\mathscr{D}(T)} = \mathscr{D}(T)$ ya que $\mathscr{D}(T)$ es cerrado, y $Tx_n \longrightarrow Tx$ porque T es continua. Por lo tanto T es cerrado por el Teorema 4.3.3.

(b) Para $x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$ existe una sucesión (x_n) en $(\mathscr{D}(T))$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como T es acotada,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\|\,\|x_n - x_m\|$$

Esto muestra que $T(x_n)$ es una sucesión de Cauchy. (Tx_n) converge, es decir, $Tx_n \longrightarrow y \in Y$ porque Y es completo. Ya que T es cerrado, $x \in \mathscr{D}(T)$ por el Teorema 4.3.3 además $Tx = y$. Por consiguiente $\mathscr{D}(T)$ es cerrado porque $x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$ fue arbitrario. □

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

1. En el presente trabajo de investigación se amplió en forma detallada y comprensible el Teorema de la Categoría de Baire su demostración y sus aplicaciones.

2. Usando el Teorema de la Categoría de Baire, se probaron tres resultados fundamentales de los espacios de Banach

    - Teorema de la Acotación Uniforme.
    - Teorema de la Aplicación Abierta.
    - Teorema del Gráfico Cerrado.

3. Durante el proceso de investigación se han consultado libros, que exponen los conceptos de forma rigurosa, pero también cabe destacar que se han consultado foros matemáticos que han proporcionado ideas y demostraciones expuestas en el trabajo, que previamente han sido analizadas para comprobar su veracidad.

CAPÍTULO VI

RECOMENDACIONES

1. Se sugiere continuar con el estudio de estos 3 resultados fundamentales de los Espacios de Banach y considerar las diversas aplicaciones que estos tienen, por ejemplo, el Teorema de la Acotación Uniforme sirve para demostrar convergencia débil y fuerte.

2. Se dejó como trabajo a futuro el estudio de Series de Dirichlet como otra de las aplicaciones del Teorema de la Categoría de Baire, de igual forma un estudio más riguroso del Teorema de la Aplicación Abierta pues se vio sólo una pequeña parte de las numerosas propiedades que este puede poseer.

CAPÍTULO VII

REFERENCIAS

[1] **Kreyszig Erwin**, Introductory functional analysis with applications, Wiley (1978).

[2] **Muscat Joseph**, Functional Analysis, Springer (2014).

[3] **Krantz Steven G.** , A Guide to Functional Analysis, Washington University in St.Louis (2013).

[4] **Adam Bowers - Kalton Nigel J.**, An Introductory Course in Functional Analysis, Springer (2014).

[5] **Gently Done**, Functional Analysis, King's College London.

[6] **Lages Lima Elon**, Elementos de Topología General, Rio de Janeiro (1970).

[7] **Lages Lima Elon**, Curso de Analise Vol. 1, Rio de Janeiro, IMPA (1989).

[8] **Conway John B.**, A Course in Functional Analysis, Springer New York (1985).

[9] **MacCluer Barbara**, Elementary Functional Analysis, Springer New York (2009).

[10] **Irribarren Ignacio**, Topología de Espacios Métricos, Limusa-Wiley (1973).

ANEXOS

ANEXO 1: APLICACIONES

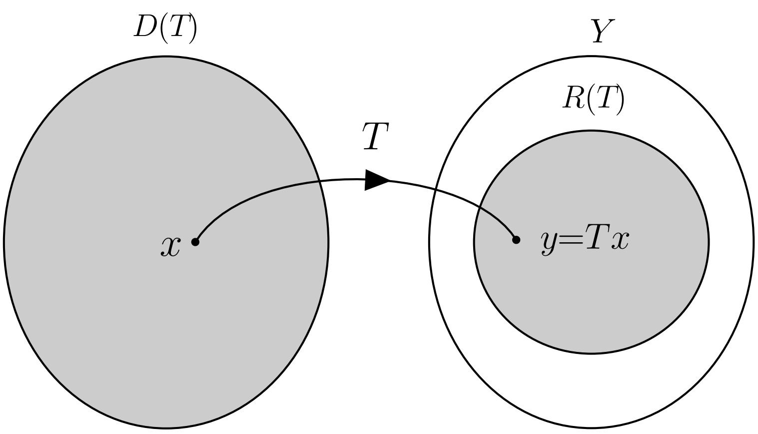
Sean X y Y dos conjuntos y $A \subset X$ cualquier subconjunto. Una **aplicación** (o transformación, funcional, operador) T de A sobre Y es obtenida asociando para cada $x \in A$ un único $y \in Y$, denotado por $y = Tx$ y llamado la **imagen** de x con respecto a T. El conjunto A es llamado el **dominio** de T y es denotado por $\mathscr{D}(T)$

$$T : \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$$

$$x \longrightarrow Tx$$

El **rango** $\mathscr{R}(T)$ es el conjunto de todas las imágenes

$$\mathscr{R}(T) = \{y \in Y \mid y = Tx, \text{ para algún } x \in \mathscr{D}(T)\}$$



Definición 1.1 (Aplicación Inyectiva). La aplicación T es **inyectiva**, si para todo $x_1, x_2 \in \mathscr{D}(T)$,

$$x_1 \neq x_2 \qquad \text{implica} \qquad Tx_1 \neq Tx_2$$

es decir, puntos diferentes en $\mathscr{D}(T)$ tienen diferentes imágenes, por tanto la imagen inversa de cualquier punto en $\mathscr{R}(T)$ es un único punto.

Definición 1.2 (Aplicación Sobreyectiva). La aplicación $T : \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ es **sobreyectiva**, si $\mathscr{R}(T) = Y$.

Claramente,

$$\mathscr{D}(T) \longrightarrow \mathscr{R}(T)$$

$$x \longrightarrow Tx$$

es sobreyectiva.

Definición 1.3 (Aplicación Biyectiva). La aplicación T es **biyectiva** si T es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Definición 1.4 (Aplicación Inversa). La aplicación $T : \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ tiene **inversa** si, y solo si, es biyectiva y es denotado por:

$$T^{-1} : Y \longrightarrow \mathscr{D}(T)$$

$$T^{-1}y \longrightarrow x$$