UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

TESIS

PRESENTADA POR:

ADELINA MAMANI FLORES

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO – PERÚ

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES"

TESIS PRESENTADA POR:

Bach. ADELINA MAMANI FLORES

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

FECHA DE SUSTENTACIÓN 29 DE DICIEMBRE DEL 2017

APROBADO POR EL JURADO CONFORMADO POR:

PRESIDENTE : ....

M. Sc. MARTIN CONDORI CONCHA

PRIMER MIEMBRO : ....

Lic. NOEMÍ GIOVANNA ALARCÓN CÁRDENAS

SEGUNDO MIEMBRO : ....

Lic. RAQUEL VERÓNICA ARI SUAÑA

DIRECTOR DE TESIS : ....

Lic. BLANCA JACQUELINE QUISPE AUCCA

ÁREA: Matemáticas
TEMA: Transformada de Laplace
LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Aplicada

DEDICATORIA

A mi querido papá Teodoro Mamani Mamani quien con todas sus enseñanzas y consejos, me llevo alcanzar mis metas, por darme apoyo en cada momento de mi avance, y a mi mamita Ceferina Flores Callata, quien con todo su amor me impulso a seguir adelante y superar los obstáculos que se presentan en la vida.

A todos mis hermanos César Orlando, René, Yaneth y Rosmary Benilda quienes siempre estuvieron pendientes y que me apoyaron en forma incondicional de mis avances en el ámbito personal y profesional.

ADELINA MAMANI FLORES

AGRADECIMIENTO

A Dios, por su bendición, gran amor, quien guía mi camino en el día a día del transcurrir de mi vida y por permitirme alcanzar esta meta.

A la Universidad Nacional del Altiplano, Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura, Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas, por compartir sus conocimientos y experiencias.

A los Miembros de Jurado de Tesis, por sus valiosos aportes y sugerencias en la realización y conclusión del presente trabajo de investigación.

Al Asesor de Tesis, por las orientaciones realizadas, aportación y haberme brindado su apoyo durante la ejecución del presente trabajo de investigación.

Agradecimiento especial a mis compañeros y amigos(as) Luz Marina, María Eugenia, Edwin Rene, por haber compartido conocimientos y experiencias durante los años de estudio.

INDICE GENERAL

ÍNDICE DE GRAFICOS

RESUMEN

El presente trabajo de investigación denominado "APLICACIÓN DE TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA LA RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COFICIENTES CONSTANTES", presenta la solución de problemas con condiciones iniciales derivados de circuitos eléctricos, debido a que la Transformada de Laplace en pregrado de las escuelas profesionales de ingenierías no se desarrolla con profundidad, menos aún las aplicaciones relacionada a la formación profesional en el área de ingenierías. En ese entender es necesario profundizar la teoría de la transformada de Laplace y buscar las aplicaciones para cada área de la ingeniería como por ejemplo en ingeniería Mecánica Eléctrica e ingeniería Electrónica. El OBJETIVO de la investigación es aplicar la transformada de Laplace para la resolución de problemas de circuitos eléctricos (red eléctrica) en ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con condiciones iniciales. El MÉTODO es deductivo y aplicativo; porque se han analizado las definiciones y teoremas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, las definiciones, propiedades y teoremas de la Transformada de Laplace y sus inversas, además los conceptos básicos de circuitos eléctricos o redes, para aplicarlos en la resolución de circuitos eléctricos con ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes y condiciones iniciales. Finalmente se concluye que con la aplicación de la teoría de transformada de Laplace se puede encontrar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de problemas de circuitos eléctricos, convirtiéndose así en problemas algebraicos simples, que pueden ser resueltos de manera sencilla.

Palabras Claves: Ecuaciones diferenciales lineales, Aplicación, Transformada de Laplace, Problemas, Circuitos eléctricos.

ABSTRACT

This research work called "LAPLACE TRANSFORMATION APPLICATION FOR THE RESOLUTION OF ELECTRICAL CIRCUITS IN LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COFICIENTS", presents the solution of problems with initial conditions derived from electrical circuits, because the Laplace Transform in undergraduate The professional engineering schools do not develop in depth, much less the applications related to professional training in the area of engineering. In this understanding, it is necessary to deepen the theory of the Laplace transform and look for the applications for each area of engineering such as, for example, Electrical Mechanical Engineering and Electronic Engineering. The OBJECTIVE of the research is to apply the Laplace transform for solving electrical circuit problems (electrical network) in linear differential equations of constant coefficients with initial conditions. The METHOD is deductive and applicative; because we have analyzed the definitions and theorems of linear differential equations of constant coefficients, the definitions, properties and theorems of the Laplace Transformation and its inverses, as well as the basic concepts of electrical circuits or networks, to apply them in the resolution of electrical circuits with linear differential equations of constant coefficients and initial conditions. Finally, it is concluded that with the application of the Laplace transform theory one can find the solution of the system of linear differential equations of electrical circuit problems, thus becoming simple algebraic problems, which can be solved in a simple way.

Keywords: Linear differential equations, Application, Laplace transform, Problems, Electrical circuits.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Por el desarrollo poco profundo de la Transformada de Laplace en el área de ingenierías, el presente trabajo de investigación estudia la teoría de la Transformada de Laplace y lo aplica a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, en el contexto de los circuitos eléctricos, estas ecuaciones surgen de manera natural.

Consideremos por ejemplo el típico circuito LRC en el Grafico N° 01

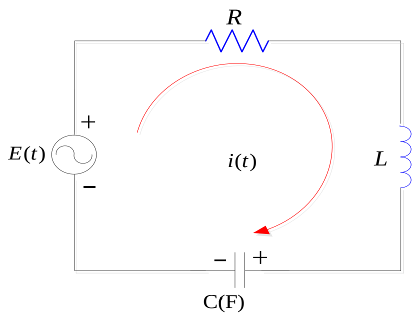


Gráfico N° 01: Circuito Eléctrico RLC
Fuente: José Salvador Cánovas Peña.

Donde la inductancia L, la resistencia R y la capacidad de condensador C se consideran constantes. Se tiene entonces que la carga $q(t)$ que circula por el circuito está dada por la ecuación

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \int_0^t \frac{i(t)ds}{C} = V(t)$$

O equivalentemente con la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = \frac{dV(t)}{dt}$$

En el caso en que $V(t)$ sea una función derivable.

De forma similar, si tenemos un circuito con varias ramas y más elementos en el Grafico N° 02, como por Ejemplo

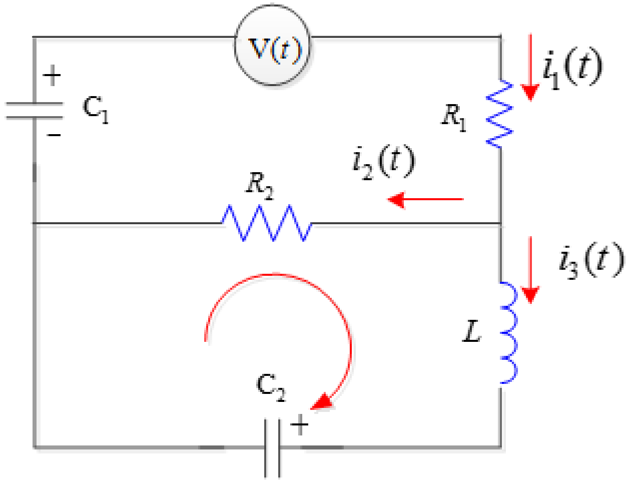


Gráfico N° 02: Circuito Eléctrico de varias Ramas
Fuente: José Salvador Cánovas Peña

Se deduce a partir de las leyes de Kirchhoff que las intensidades que circulan por los hilos eléctricos del circuito vienen dadas por:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0 \\ R_1 \dfrac{di_1(t)}{dt} + R_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} + \dfrac{i_1(t)}{C} = \dfrac{dV(t)}{dt} \\ L \dfrac{d^2 i_1(t)}{dt^2} - R_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} + \dfrac{i_3(t)}{C} = 0 \end{cases}$$

Si suponemos que los elementos del circuito son constantes, el voltaje $V(t)$, que supondremos una función derivable, tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

La Transformada de Laplace es una herramienta que permite resolver la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes con condiciones iniciales que es el modelo matemático del circuito eléctrico propuesto, transformándolo a expresiones algebraicas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, OBJETIVOS Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN

1.1.1. Descripción del Problema

La Transformada de Laplace es un caso especial de lo que se denomina Transformada Integral. Su utilidad para resolver problemas físicos hace que sea, junto con la Transformada de Fourier, una de las herramientas más útiles para estos efectos.

La Transformada de Laplace en el siglo XX se ha convertido en una herramienta útil y poderosa para resolver problemas con condiciones iniciales en la economía, medio ambiente, electrónica, química y otras áreas.

La Transformada de Laplace en pregrado de las escuelas profesionales de ingenierías no se desarrolla con profundidad, tampoco las aplicaciones relacionadas a la formación profesional en área de ingenierías. En ese entender es necesario profundizar la teoría de la Transformada de Laplace y buscar aplicaciones para cada área de ingenierías. En particular para ingeniería Mecánica Eléctrica e ingeniería Electrónica.

¿Es posible aplicar la teoría de la transformada de Laplace en la resolución de problemas de circuitos eléctricos con condiciones iniciales?

El objetivo de este trabajo es presentar la aplicación de la Transformada de Laplace en la resolución de circuitos eléctricos con condiciones iniciales cuyo comportamiento se describe a través de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

Por tanto, en este trabajo analizaremos las definiciones, propiedades y teoremas de Transformada de Laplace, conceptos básicos de circuitos eléctricos y ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, como una herramienta fundamental para la aplicación de la Transformada de Laplace en resolución de circuitos eléctricos con condiciones iniciales.

La metodología usada en este trabajo es el método deductivo, basada en la investigación bibliográfica y documental y el resultado logrado es la aplicación de la Transformada de Laplace para resolución de circuitos eléctricos con condiciones iniciales.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1. Problema General

En la presente investigación se plantea, responder la siguiente interrogante:

¿Es posible aplicar la teoría de Transformada de Laplace para la resolución de circuitos eléctricos con condiciones iniciales en ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes?

1.2.2. Problema Específico

- ¿Es posible analizar la teoría de la Transformada de Laplace y la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con condiciones iniciales, para resolver problemas de circuitos eléctricos mediante la Transformada de Laplace?
- ¿Es posible analizar conceptos básicos de circuitos eléctricos, para aplicar la teoría de la Transformada de Laplace en circuitos eléctricos?

1.3. HIPÓTESIS

1.3.1. Hipótesis General

- Con la aplicación de la teoría de la Transformada de Laplace y conceptos básicos de circuitos eléctricos es posible determinar la solución de problemas de circuitos eléctricos de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

1.3.2. Hipótesis Específicos

- Analizando la teoría de la Transformada de Laplace es posible aplicar en la solución de problemas de circuitos eléctricos de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con condiciones iniciales, mediante la Transformada de Laplace.
- Analizando los conceptos básicos de circuitos eléctricos es posible aplicar en la solución de problemas de circuitos eléctricos de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con condiciones iniciales, mediantes la Transformada de Laplace.

1.4. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El presente trabajo de investigación servirá para encontrar la solución de circuitos eléctricos de dos mallas en sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. Mediante la Transformada de Laplace.

Además, toda persona interesada en las aplicaciones de la Transformada de Laplace en diferentes campos de la ingeniería será beneficiada. Ya que será útil para consultas de estudiantes o profesionales que se planteen problemas de circuitos eléctricos con objeto de aplicar la Trasformada de Laplace en sistema de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes con condiciones iniciales.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1. Objetivo General

- Aplicar la Transformada de Laplace en la resolución de problemas de circuitos eléctricos de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes y sistema de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Analizar la teoría de la Transformada de Laplace y de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con condiciones iniciales, para resolver problemas de circuitos eléctricos mediante la Transformada de Laplace.
- Analizar conceptos básicos de circuitos eléctricos, para aplicar la teoría de la Transformada de Laplace en circuito eléctrico.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Los antecedentes relacionados al trabajo de investigación son:

- **MADRIGAL ESPINOZA, Sergio David - CANTÚ CUELLAR, Ramón (2013).** En su artículo de investigación titulada "Transformadas de Laplace con Máxima" realizado en Nuevo león-México, en el cual aplica tres programas computacionales para la enseñanza de la asignatura de Transformada de Laplace. A saber: Maple, Mathematica y Máxima, relacionadas con la asignatura y se dan ejemplos de solución. Debido a sus características, es esta última opción la que resulta más recomendable para la enseñanza de esta materia. Llegando a la CONCLUSIÓN de que las Transformadas de Laplace son la mejor alternativa para la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y condiciones iniciales, Máxima es el programa ideal para la implementación de esta técnica.
- **LOMELÍ HÉCTOR - RUMBOS BEATRIZ (2011).** En su artículo de investigación titulada "La transformada de Laplace en economía", en este artículo de investigación utilizan en las técnicas y métodos matemáticos para representar las funciones continuas, con lo cual las funciones de impulso son de gran ayuda para la modelación de ciertos fenómenos económicos, que nos permite manipular los flujos discontinuos, convirtiéndolos en conjuntos continuos con la Transformada de Laplace es una herramienta muy importante en la interpretación natural que tiene como el valor presente de un flujo de efectivo. Y resolución de algunos problemas en economía. En general, que los

economistas ignoran la existencia de esta Transformada y los usuarios principales de la misma desconocen los conceptos económicos.

- **IGNACIO HUIRCÁN, Juan (2006).** En su artículo de investigación titulada “Aplicando la Transformada de Laplace a Redes Eléctricas” realizada en Universidad de La Frontera -Chile. En este artículo aplica la Transformada de Laplace a distintas redes eléctricas, primero excitaciones básicas conocidas, luego, excitaciones tipo exponencial y sinusoidal. La parte más compleja resulta al determinar la Transformada de Laplace permite convertir las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas en el plano. Se puede despejar más fácilmente la variable buscada, luego aplicando Transformada de Laplace y determinar la variable en el dominio del tiempo. Si existen componentes con condiciones iniciales es más fácil pasar el circuito al plano, e incorporar la condición inicial.
- **ALBARRÁN ZAVALA, Erik (2013).** En su artículo de investigación titulada “Algunas aplicaciones de la transformada de Laplace en Cinética Química, Circuitos Eléctricos y Transferencia de Calor” realizada en la Universidad Nacional Autónoma de México, En este artículo muestra algunos ejemplos simples de ecuaciones diferenciales resueltos utilizando la Transformada de Laplace. Llegando a la CONCLUSIÓN: La Transformada de Laplace es una poderosa herramienta matemática para resolver problemas sobre circuitos eléctricos, la Cinética Química o la Transferencia de Calor, y estos problemas pueden ayudar al alumno a entender la utilidad de ecuaciones diferenciales en problemas concretos.

2.2. MARCO TEÓRICO

2.2.1. ECUACIONES DIFERENCIALES

Definición 2.2.1. Una ecuación diferencial ordinaria es la que establece una relación entre una variable independiente x, y la función buscada $f(x)$ y una o varias derivadas de esta función $f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)$, y se representa por $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ ó $y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1})$ (W.E & R.C, 1996)

2.2.2. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Definición 2.2.2. Una solución de una ecuación diferencial es toda función que sustituida en la ecuación diferencial la reduce a la identidad.

Observación:

La solución general para una diferencial es toda función que satisface las siguientes condiciones:

a) Es independiente de las derivadas.

b) Tiene tantas constantes arbitrarias como el orden de la ecuación diferencial.

c) Verifica o satisface la ecuación diferencial.

2.2.3. PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Definición 2.2.3. Se llama problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} Resolver\ y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1}) \\ Sujetas\ a: y(x_0) = y_0, y(x_0) = y_1, \dots, y(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Donde $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, son constantes reales llamados condiciones iniciales

2.2.4. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE COEFICIENTES CONSTANTES

Definición 2.2.4. Una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden n esta expresado por:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x). \qquad (2.1)$$

Donde a_i; $1 \leq i \leq n$, son constantes arbitrarios reales. (Braun, 1993)

Observación:

- Si $h(x) = 0$, la ecuación (2.1), se denomina ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes.
- Si $h(x) \neq 0$, la ecuación (2.1), se llama ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes.

2.2.5. SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.

Definición 2.2.5: Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, es un sistema de la siguiente forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \qquad (2.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_3 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n + f_3(t)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t)$$

El sistema de la ecuación (2.2) se puede escribir de manera matricial de la siguiente forma:

$$X' = AX + F$$

Observación:

- si las funciones $f_i(t) = 0, \forall i = 1,2, \dots, n$, en la ecuación (2.2) se llama homogénea.
- si las funciones $f_i(t) \neq 0, \forall i = 1,2, \dots, n$, en la ecuación (2.2) se llama homogénea.

TEOREMA 2.2.5.1:

Sean $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$

Soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, entonces los vectores son linealmente independientes en un intervalo I si solo si es Wronskiano.

$$W = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_{11}} & \boldsymbol{x_{12}} & \cdots & \boldsymbol{x_{1n}} \\ \boldsymbol{x_{21}} & \boldsymbol{x_{22}} & \cdots & \boldsymbol{x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{x_{n1}} & \boldsymbol{x_{n2}} & \dots & \boldsymbol{x_{nn}} \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Definición 2.2.5.2: Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$; un conjunto linealmente independiente de soluciones (llamado también conjunto fundamental de soluciones). Entonces la solución general del sistema es:

$$X_g = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n$$

Donde $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ son constantes arbitrarias.

TEOREMA 2.2.5.2:

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ valores propios reales y distintos de la matriz A, y sean $k_1, k_2, \dots, k_n$ los vectores propios correspondientes. Entonces la solución general del sistema lineal homogéneo $X' = AX$ en $\langle -\infty, +\infty \rangle$ es:

$$X_g = c_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 k_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n k_n e^{\lambda_n t}$$

Donde $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ son constantes arbitrarias.

TEOREMA 2.2.5.3:

Sean X_p una solución dada del sistema $X' = AX + F$ no homogénea en un intervalo I, y sea $X_g = c_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 k_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n k_n e^{\lambda_n t}$ la solución general, en el mismo intervalo del sistema $X' = AX + F$. Entonces la solución del sistema no homogéneo en el intervalo $\langle -\infty, +\infty \rangle$ es: $X = X_g + X_p$

2.2.6. FUNCIONES CONTINUAS A TROZOS

Dado los números reales $a < b$, se dice que la función $f: [a, b] \to \mathbb{C}$ es continua a trozos si existe una partición de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, de manera que f es continua en (t_i, t_{i+1}), $0 \leq i < n$, y existen y son finitos los límites laterales de f en cada uno de los puntos $t_i, 0 \leq i < n$. (Kreiszig, 1996)

Definición 2.2.6.1: Una función $f: [a, b] \to \mathbb{C}$ se dice que es continua por tramos, si para cada intervalo compacto $f: [a, b] \to [0, +\infty)$ se verifica que $f: [a, b] \to \mathbb{C}$ es continua a trozos.

2.2.7. FUNCIONES DE HEAVISIDE

Definición 2.2.7.1: Una función continua a trozos es $h_a: [0, +\infty) \to \mathbb{C}$, donde a es un número real mayor o igual que cero. (Ignacio Gracia Rivas, 2008)

Esta función está definida por:

$$h_a(t) = \begin{cases} 0, si\ t < a \\ 1, si\ t \geq a \end{cases}$$

Y se conoce como de Heaviside.

Físicamente, la función de Heaviside realiza la función de interruptor, de manera que si $f: [a, b] \to \mathbb{C}$ es una función continua se tiene que $h_a * f$ es la función

$$(h_a * f)(t) = \begin{cases} 0, si\ t < a \\ f(t), si\ t \geq a \end{cases}$$

Lo que representa que la función h_a "enciende" a la función o señal f en el instante de tiempo $t = a$. Adicionalmente, si consideramos $0 \leq a < b$ y la función

$h_a - h_b: [0, +\infty) \to \mathbb{C}$, esta tiene la forma

$$(h_a - h_b)(t) = \begin{cases} 0, si\ t \notin [a, b) \\ 1, si\ t \in [a, b) \end{cases}$$

Así, si tomamos ahora la función $h_a * f - h_b * f$, la función h_b tiene el efecto físico de "apagar" la función f, ya que:

$$(h_a * f - h_b * f) = \begin{cases} 0, si\ t < a \\ f(t), si\ a \leq t < b \\ 0, si\ b \leq t \end{cases}$$

Además de estas interpretaciones físicas, la función de Heaviside es útil para descubrir funciones continuas a trozos que a su vez sean continuas por la derecha. Por ejemplo, la función:

$$f(t) = \begin{cases} t, si\ 0 \leq t < 1 \\ t - 1, si\ 1 \leq t < 3 \\ sent, si\ 3 \leq t \end{cases}$$

Puede escribirse como

$$f(t) = t * [h_t(t) - h_1(t)] + (t+1) * \left[[h_1(t) - h_3(t)]\right] + sent * h_3(t)$$

Esta forma de describir funciones continuas a trozos será útil en los siguientes apartados del tema debido a las propiedades de la Transformada de Laplace que posteriormente desarrollaremos.

2.2.8. TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición 2.2.8.1: Sea $f: [a, b] \to \mathbb{C}$, una función localmente integrable, existe la integral de Riemann de f en todo intervalo compacto $[0, a] \subset [0, +\infty)$. Se define la Transformada de Laplace de f en $z \in \mathbb{C}$ como (Peña, 2008)

$$L\{F\}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)dt \qquad (2.3)$$

Siempre que tal integral impropia exista. Como se debe conocer, la convergencia de la integral

$$L\{F\}(z) = \int_0^{+\infty} |e^{-zt} f(t)|dt$$

Implica la convergencia de la integral (2.3). Denotaremos por D_f el dominio de $L\{f\}$, es decir, el subconjunto del plano complejo donde (2.3) tiene sentido.

A continuación veamos ejemplos de la Transformada de Laplace de algunas funciones elementos.

Sea $a \geq 0$ y consideremos la función de Heaviside a definida anteriomente.

Entonces para todo z $\in \mathbb{C}$ tal que Rez $>$ 0 se verifica

$$L[h_a](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} h_a(t)dt = \int_a^{-\infty} e^{-zt} dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\int_a^x e^{-zt}dt = \lim_{x\to+\infty}(\frac{e^{-za}}{z}-\frac{e^{-za}}{z}) = \frac{e^{-za}}{z}$$

En particular, $a = 0$, cuando obtenemos $L[h_0] = \frac{1}{z}$

Sea $w \in \mathbb{C}$ y consideremos la función exponencial $f(t) = e^{wt}$. Se verifica entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $Rez > Rew$

$$L[f](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}e^{wt}dt = \int_a^{-\infty} e^{-(z-w)t}dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\int_a^x e^{-(z-\omega)t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{z-\omega}-\frac{e^{-(z-\omega)x}}{z-\omega}\right) = \frac{1}{z-\omega}.$$

En particular, si $w = 0$ se verifica que $f(t) = 1$, con lo que nuevamente

L$[h_a](z) = \frac{1}{z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $Rez > 0$

Sea n un número natural y consideremos la función $f_n(t) = t^n$. Vamos ver la Transformada de Laplace de f_n viene dada por la expresión

$L[f_1](z) = f_n\frac{n!}{z^{n+1}}$, para todo$z \in \mathbb{C}$ tal que $Rez > 0$.

Para ver esto procedemos por inducción calculando en primer lugar la Transformada de f_1. Integrando por las partes obtenemos

$$L[f_1](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz}tdt = \lim_{x\to+\infty} e^{-tz}tdt$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^{-xz}}{z}+\frac{1-e^{-xz}}{z^2}\right) = \frac{1}{z^2}$$

A continuación, por la hipótesis de inducción supongamos que $L[f_n](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$ y calculemos la Transformada de f_{n+1}

Consideremos

$$L[f_{n+1}](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^{n+1} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^{n+1}\, dt \qquad (2.4)$$

Tomando por partes para la expresión anterior

$$\int_0^x e^{-zt} t^{n+1} dt = \frac{x^{n+1} e^{-xz}}{-z} + \frac{x}{z} \int_0^x e^{-zt} t^n dt \qquad (2.5)$$

Combinando (2.4) y (2.5) concluimos que

$$L[f_{n1}](z) = \frac{n+1}{z} L[f_n](z) = \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}$$

Las funciones periódicas son bastante importantes en ingeniería debido a que su periodicidad las hace controlables.

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{C}$ una función periódica con periodo T. Entonces

$$\int_0^{nT} e^{-zt} f(t) dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{jT}^{(j+1)T} e^{-zt} f(t) dt = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-jzT} \int_0^T e^{-zt} f(t) dt$$

Realizando cambios de variable en las integrales y usando que la función es periódica de periodo T. Tomando límites cuando $n \to +\infty$, se verifica para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que

$Rez > 0$. La relación

$$L[f](z) = \frac{1}{1 - e^{-zT}} \int_0^T e^{-zT} f(z) dt.$$

2.2.9. DOMINIO DE LA DEFINICIÓN DETRANSFORMADA DE LAPLACE

Las Transformada de Laplace de algunas funciones elementos que anteriormente hemos explicado ponen de manifiesto que la función Transformada de Laplace de una función $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ no tiene por qué estar definida en todo el plano complejo. Vamos a estudiar con precisión cómo es el dominio de función de estas funciones, pero consideremos una clase especial de funciones que tienen lo que llamaremos orden exponencial.

2.2.10. FUNCIÓN DE ORDEN EXPONENCIAL

Definición 2.2.10: Una función $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ se dice que tiene orden exponencial si existen constantes $A > 0$ y $B \in R$ de manera que para todo $t \geq 0$ se satisface la condición

$$|f(t)| \leq Ae^{tB}. \tag{2.6}$$

Denotaremos por E el conjunto de funciones continuas a trozos con orden exponencial, que serán las funciones con las que trabajaremos a partir de ahora. El siguiente resultado ofrece una primera aproximación sobre el dominio de definición de la Transformada de Laplace de funciones con orden exponencial.

Proposición 2.2.10.1: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$una función continua a trozos cumpliendo la condición (2.6). Entonces $L[f](z)$ está definida para todo número complejo z tal que $\operatorname{Re} z > B$

Demostración.

Vamos a ver que la función $e^{-zt} f(t)$ es absolutamente integrable para todo complejo z tal que $\operatorname{Re} z > B$. Para ello consideramos

$$\int_0^{+\infty} \left| e^{-zt} f(t) \right| dt = \int_0^{+\infty} \left| e^{-\operatorname{Re} zt} f(t) \right| dt$$

$$\leq A \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} z - B)^t} dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} A \int_0^x e^{-(\operatorname{Re} z - B)t} dt$$

$$= A \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{B - \operatorname{Re} z} - \frac{e^{-x(\operatorname{Re} z - B)}}{B - \operatorname{Re} z} \right) = \frac{1}{B - \operatorname{Re} z},$$

Con lo que la Transformada de Laplace existe en el subconjunto $\{z \in \mathbb{C}: Rez > B\}$.□

Este resultado prueba que $\{z \in \mathbb{C}: Rez > B\} \subset D_f$.

Si definimos por: $\rho = inf\{B\epsilon\mathbb{R}: \exists A > 0 \text{ con } |f(t)| \leq Ac^{Bt} \text{ para todo } t \geq 0\}$,

Y denotamos por: $D_f^* = \{z \in \mathbb{C}: Rez > \rho\}$

La preposición 2.2.10.1, nos asegura que $D_f^* \subseteq D_f$

Nota: todo elemento tiene su imagen, toda imagen de todo elemento es única.

2.2.11. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Una vez estudiada la definición de Transformada de Laplace y caracterizadas algunas condiciones para que una función f tenga Transformada de Laplace $L[f]$ definida en un dominio del plan complejo D_f, pasamos a estudiar algunas propiedades básicas de esta Transformada de Laplace.

2.2.11.1. Propiedades de linealidad

Teorema 2.2.11.1: Sean $f, g \in E$ y $a, b \in \mathbb{C}$ entonces para todo $z \in D_f \cap D_g$ se verifica que $L[af + bg](z) = aL[f](z) + bL[g](z)$ (2.7)

Demostración.

La demostración se sigue inmediatamente de la linealidad de la integral. Consideremos

$$L[af+bg](z)=\int_0^{+\infty} e^{-zt}[af(t)+bg(t)]dt$$

$$=a\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-zt}f(t)dt+b\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-zt}g(t)dt$$

$$aL[f](z)+bL[g](z)\square$$

A partir de la linealidad de la Transformada de Laplace podemos obtener nuevas Transformadas de funciones elementales, como muestran los siguientes ejemplos.

- **Función seno**: Sea $w \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$f(t)=\sin(\omega t)=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}$$

Entonces

$$L[f](z)=\frac{1}{2i}\left(L\left[e^{it\omega}\right](z)-L\left[e^{-it\omega}\right](z)\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i\omega}-\frac{1}{z+i\omega}\right)=\frac{\omega}{z^2+\omega^2}\text{, Siempre que } \operatorname{Re} z>0$$

- **Función coseno:** Sea $w \in \mathbb{R}$ y consideramos la función

$$f(t)=\cos(\omega t)=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2}$$

De forma análoga a la anterior se obtiene que

$$L[f](z)=\frac{z}{z^2+\omega^2}\text{, Siempre que } \operatorname{Re} z>0$$

- **Función seno hiperbólico:** Sea $\omega \in R$ y consideremos la función

$$f(t)=\sinh(\omega t)=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}.$$

Entonces

$$L[f](z) = \frac{1}{2}(L[e^{\omega t}](z) - L[e^{-\omega t}](z))$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-\omega} - \frac{1}{z+\omega}\right) = \frac{\omega}{z^2-\omega^2}\text{ , si } Rez > |\omega|.$$

- **Función coseno hiperbólico**. $Sea\ \omega\ \in R$ y consideremos la función

$$f(t) = \cosh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$$

De forma análoga a la anterior

$$L[f](z) = \frac{z}{z^2-\omega^2}\text{, siempre que } Rez > |\omega|.$$

2.2.11.2. Primera Propiedades de Traslación

Fijemos un número complejo a y consideramos $f \in E$. El primer teorema de desplazamiento hace referencia a la transformada de la función $e^{at} f(t)$ y afirma lo siguiente

Teorema 2.2.11.2. Bajo las condiciones anteriores

$$L[e^{at}f(t)] = L[f](z-a) \tag{2.8}$$

, Para todo $Z \in D_f + \operatorname{Re} a := \{\omega + \operatorname{Re} a : \omega \in D_f\}$

<u>Demostración</u>.

Sea $\int_0^{+\infty} e^{-zt}e^{at}f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-(z-a)t}f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-a)}f(t)dt$, de donde se deduce inmediatamente (2.8).

A partir de este resultado podemos obtener las Transformadas de las funciones siguientes:

- $f(t) = e^{at}\sin(wt)\,, w \in \mathbb{R}$ Cuya Transformada de Laplace para todo número complejo Z Tal que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a$ es

$$L[f](z)=\frac{\omega}{(z-a)^2+\omega^2}$$

- $f(t) = e^{at}\cos(wt), w \in \mathbb{R}$cuya Transformada de Laplace para todo número complejo z tal que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a$ es

$$L[f](z)=\frac{\omega}{(z-a)^2-\omega^2}$$

- $f(t) = e^{at}\cosh(wt), w \in \mathbb{R}$. Si $\operatorname{Re} z > |\omega| + \operatorname{Re} a$, entonces

$$L[f](z) = \frac{z-a}{(z-a)^{n+1}}$$

Siempre que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a$.

2.2.11.3. Segunda Propiedades de Traslación

Sea ahora $a > 0$ un número real y supongamos que $f \in E$ está definida por $f(t) = 0$ para todo $t < 0$. Recordemos que h_a es la función de Heaviside. Entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.11.3. Bajo las anteriores condiciones se verifican para todo $z \in D_f$

$$L[h_a(t)f(t-a)](z) = e^{-az}L[f](z) \tag{2.9}$$

<u>Demostración</u>.

Tomamos

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}h_a(t)f(t-a)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{at}h_a(t)f(t-a)dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\int_a^x e^{at}f(t-a)dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x-a} e^{-a(s+a)} \, \mathrm{f(s)} \, \mathrm{ds}$$

$$= e^{-za} \int_0^{+\infty} e^{-za} f(t) f(\mathrm{s}) ds$$

Haciendo el cambio de variable $s = t - a$. De aquí se obtiene inmediatamente (2.9). □

Este resultado es útil para obtener la Transformada de Laplace de funciones continuas a trozo. Por ejemplo consideremos la función

$$f(t) = \begin{cases} t, si\ 0 \leq t \leq 1 \\ 0, si\ t \geq 1 \end{cases}$$

Esta función puede describirse como

$$f(t) = t[h_0(t) - h_1(t)] \ .$$

Entonces

$$L[f](z) = L[h_0(t)t](z) - L[h_1(t)t](z) = L[t](z) - e^{-z}L[t+1](z)$$

$$= \frac{1}{z^2} - e^{-z}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} - e^{-z}\frac{z+1}{z^2}$$

Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $Rez > 0$.

2.2.11.4. Transformada de la Derivada.

Se dice que la función $f \in E$ es derivable a trozos si es continua, existen las derivadas laterales de f en cada punto de $[0, +\infty)$ y en cada sub intervalo $[a, b] \subset [0, +\infty)$ existen a lo sumo una cantidad finita de puntos donde f no es derivable. Si f es derivable a trozos, definimos $f' : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ como $f'(x) = f'_+(x)$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Es claro entonces que f' es una función continua a trozos, que coincidirá en casi todos los puntos con la derivada ordinaria. Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2.11.4: Bajo las condiciones anteriores se verifica para todo $z \in D_f^*$

$$L[f'](z) = zL[f](z) - f(0) \tag{2.10}$$

Demostración.

Sean $z \in D_f^*$ y $x > 0$ y consideremos $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x$ los puntos de discontinuidad de f' en el intervalo $(0, x)$ y fijemos $x_0 = 0$ y $x_n = x$. Entonces, dividiendo el intervalo de integración y utilizando la fórmula de integración por partes.

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-zt} f'(t)\,dt &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i-1}^{x_i} e^{-zt} f'(t)\,dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[e^{-zx_i} f(x_i) - e^{-zx_i-1} f(x_{i-1}) \right] + z \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-zt} f(t)\,dt \\ &= e^{-zx} f(x) - f(0) + z \int_0^x e^{-zt} f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Tomando límites cuando $x \to +\infty$ y teniendo en cuenta que $z \in D_f^*$ y que por tanto existen $A, B \in \mathbb{R}, A > 0, Rez > B$ tales que

$$\left| f(x) e^{-zx} \right| \leq A e^{(B-\mathrm{Re}\,z)x} \to 0, \text{ si } x \to +\infty,$$

Obtenemos inmediatamente (2.10).□

Procediendo por inducción a partir de la fórmula (2.10) se prueba una fórmula general para la derivada $k - esima$ de la función f en el caso de que $f^{(k-1)}$ sea derivable a trozos para $k \in \mathbb{N}$. Esta fórmula viene dada para todo $z \in D_f^*$ por

$$L[f^k](z) = z^k L[f](z) - z^{k-1} f(0) - \cdots - z f^{k-2}(0) - f^{k-1}(0) \tag{2.11}$$

Donde las derivadas sucesivas de f en 0 y entienden como derivadas por la derecha. Las fórmulas (2.10) y (2.11) serán claves para resolver ecuaciones y sistemas diferenciales lineales con coeficientes constantes, como veremos en el apartado de aplicación de este tema.

2.2.11.5. Transformada de la Integral

Sea $f \in E$ y definamos la función $g(t)=\int_0^t f(s)ds$ que obviamente está bien definida y es continua para todo $t\in[0,+\infty)$. La relación entre las Transformadas de Laplace de ambas funciones viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 2.2.11.5: En las condiciones anteriores, para todo $z \in D_f^* \cap \{z \in \mathbb{C}: Re > 0\}$ se verifica

$$L[g](z)=\frac{L[f](z)}{z} \tag{2.12}$$

<u>**Demostración**</u>.

Sea $x>0$ y consideramos

$$0=x_0+<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=x$$

De manera que f no es continua en x_i para $1\le i<n$ Obviamente g es derivable en (x_i,x_{i+1}) para $1\le i<n$ .entonces

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-zt}g(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_i+1} e^{-zt}g(t)dt\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(g(x_i)\frac{e^{-zx_i}}{z}-g(x_{i+1})\frac{e^{-zx_{i+1}}}{z}\right)+\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_i+1} e^{-zt}f(t)dt\}\\ &= -g(x)\frac{e^{-zx}}{z}+\frac{1}{z}\int_0^x e^{-zt}f(t)dt\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la continuidad de g y $g(0)$. Vamos a comprobar que

$$\lim_{x\to+\infty} g(\mathrm{x})\mathrm{e}^{-zx}=0$$

Para ello y dado que $f \in E$, existirá reales B y $A > 0$ de manera que $\left|f\left(t\right)\right| \leq Ae^{Bt}$ para todo $t \geq 0$ Sea.

$$\begin{aligned}\left|g\left(x\right)e^{-zx}\right| &\leq \int_0^x e^{-zx} f\,(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} \leq \mathrm{A}\int_0^x e^{Bt - x\operatorname{Re} z} \\ &= Ae^{-x\operatorname{Re} z}\left(\frac{e^{Bx}}{B} - \frac{1}{B}\right) \rightarrow 0 \; si \; x \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Entonces tomando límites en la expresión anterior obtenemos □

2.2.11.6. Transformada de la Convolución

Sean $f, g \in \varepsilon$ y definimos $f(t) = g(t) = 0$ para todo $t < 0$. Se define la convolución de f y g. como la función $\left(f * g\right)(t) = \int_0^{+\infty} f(t-s)g(s)ds = \int_0^t f\,(\mathrm{t-s})\,\mathrm{g(s)}\,\mathrm{ds}$.

Puede verse con el cambio de variable $y = t - s$ que $f * g = g * f$.

El principal interés de la convolución respecto a la transformada de Laplace se concreta en el siguiente resultado.

Teorema de Fubini 2.2.11.6. Sea $A = [a, b]x[c, d]$ un rectángulo de R^2, y sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, una función integrable, tal que las funciones $f_x: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f_x(y) = f(x, y)$, son integrables en $[c, d]$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces, la función $x \rightarrow \int_c^d f(x, y)dy$, es integrable en $[a, b]$, y

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x)(y)dy\right) dx$$

O, con una notación más práctica

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx$$

Análogamente, si se supone que $\int_a^b f(x,y)dx$, existe para cada $y \in [c,d]$, se obtiene que

$$\int_A f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Teorema 2.2.11.7.

En las condiciones anteriores, para todo $z \in D_f^* \cap D_g^*$ se verifica la formula

$$L[f*g](z) = L[f](z)L[g](z). \tag{2.13}$$

Demostración.

En primer lugar, existen números reales B y $A_I > 0, \mathrm{i} = 1, 2,$ de manera que para todo $t \geq 0$ se verifica

$$|f(\mathrm{t})| \leq A_1 e^{Bt} y |g(t)| \leq A_2 e^{Bt}$$

Entonces para todo $t \geq 0$

$$|(f*\mathrm{g})(t)| = \left| \int_0^t f(t-s) g(s) ds \right| \leq \int_0^t |f(t-s)||g(s)| ds$$
$$\leq A_1 A_2 e^{Bt} \int_0^t ds = A_1 A_2 t e^{Bt}$$

Con lo que se ve fácilmente que $e^{-zt}(f*g)(t)$ es absolutamente integrable para $\operatorname{Re} z > B$ todo con lo que $L[f*g](z)$ existe para todo z con. $\operatorname{Re} z > B$). Por otra parte, como las funciones $e^{-zt} f(t)$ y $e^{-zt} g(t)$ también son absolutamente integrables para todo $\operatorname{Re} z > B$ por el Teorema de Fubini, se tiene que

$$
\begin{aligned}
L[f*g](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt}[\int_0^t f(t-s)g(s)ds]dt \\
&= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^t e^{-z(t-s)} f(t-s)e^{-zs}g(s)ds\right]dt \\
&= \int_0^{+\infty}\left[\int_s^{+\infty} e^{-z(t-s)} f(t-s)e^{-zs}g(s)dt\right]ds \\
&= \int_0^{+\infty}\left[\int_s^{+\infty} e^{-z(t-s)} f(t-s)dt\right]e^{-zs}g(s)ds \\
&= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-zu} f(u)du\right]e^{-zs}g(s)ds \\
&= \int_0^{+\infty} L[f](z)\mathrm{e}^{-zs}\, g(s)ds = L[f](z)L(g)(z)
\end{aligned}
$$

Con lo que termina la primera prueba □

2.2.12. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

En esta sección estudiamos la propiedad de la función Transformada de Laplace considerándola como una función de variable compleja definida en un semiplano $\{z \in \mathbb{C}: Rez > x\}, x \in \mathbb{R}$. Dividimos la sección en tres subsecciones.

2.2.12.1. Función Holomorfa

Las funciones holomorfas son el principal objeto de estudio de análisis complejo; son funciones que se definen sobre un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y con valores En $\mathbb{C}$, que ademas son complejo-diferenciables en cada punto. Una función que sea holmorfa sobre todo el plano complejo se dice función entera.

Definición 2.2.12.1. Sea Ω abierto de $\mathbb{C}$. Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \Omega$. Diremos que f es derivable en z_0 si existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

Al valor de dicho límite $f'(z_0)$ lo llamaremos derivada de f en z_0.

2.2.12.2. Derivabilidad de la Transformada de Laplace.

Consideremos una función $f \in E$ y su Transformada de Laplace

$$L[f]: \{z \in \mathbb{C}: Rez > \rho\} \to \mathbb{C}$$

Teorema 2.2.12.1 Bajo la notación anterior, la función $L[f]$ es Holomorfa para todo $z \in \mathbb{C}$, qué $\operatorname{Re} z > \rho$ y además se verifica

$$\frac{d}{dz} L[f](z) = -\int_0^{+\infty} te^{-zt} f(t)\,dt$$

En las condiciones del resultado anterior, podemos generalizar por inducción la fórmula para la derivada *n*- ésima de la Transformada de Laplace

$$\frac{d^n}{dz^n} L[f](z) = (-1)^n \int_0^{+\infty} te^{-st} f(t)\,dt$$

A continuación daremos algunos ejemplos, calculando las Transformadas de las siguientes funciones.

- $f(t): t^n \sin(at), n \in \mathbb{N}\ y\ a \in \mathbb{R}$ se tiene siempre que $\operatorname{Re} z > 0$ la relación

$$L[f](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} L[\sin(at)](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{a}{z^2 + a^2}\right)$$

- $f(t): t^n \cos(at), n \in \mathbb{N}\ y\ a \in \mathbb{R}$. Se tiene análogamente siempre que $\operatorname{Re} z > 0$

$$L(f)(z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} L[\cos(at)](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{a}{z^2 + a^2}\right)$$

De forma similar se obtienen fórmulas equivalentes para el coseno y seno hiperbólicos.

2.2.12.3.Teoremas del valor inicial

Estos resultados hacen alusión a aspectos cualitativos de la Transformada de Laplace de funciones de la clase E.

Teorema 2.2.12.3. Sea $f \in \mathrm{E}$ Entonces

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} L[f](z) = 0 \tag{2.14}$$

<u>Demostración</u>.

Sea $z \in D_f^*$. Existen números reales $A > 0$ y B de manera que $|f(t)| \leq \mathrm{A}e^{Bt}$ para todo $t \geq 0$ Entonces.

$$|L[f](z)| \leq \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^\alpha e^{tz} f(t)\,dt \leq A \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^\alpha e^{t(B - \operatorname{Re} z)} dt$$

$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{A\left(e^{\alpha(\mathrm{B} - \mathrm{Bez})} - 1\right)}{\mathrm{B} - \operatorname{Re} z} = \frac{A}{\operatorname{Re} z - \mathrm{B}'}$$

De donde claramente obtenemos (1.10) al hacer $\operatorname{Re} z \to +\infty$. □

Continuamos esta sección con otro resultado que estudia cuestiones cualitativas de la Transformada de Laplace.

Teorema 2.2.12.4. Asumamos que $f \in \mathrm{E}$ .es derivable a trozos y que $F' \in \mathrm{E}$ Entonces

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} zL[f](z) = f(0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2.15}$$

<u>Demostración</u>.

Sea $z \in D_f^*$. Por el Teorema 2.2.11.4 tenemos que

$$zL[\mathrm{f}](\mathrm{z}) = f(0) + L[f'](z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2.16}$$

Aplicando el Teorema 2.2.12.2 a (2.16) se tiene que $\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} L[f'](z) = 0$, de donde se deduce inmediatamente (2.16). □

Los resultados anteriores muestran que no todas las funciones de variable compleja pueden ser Transformadas de Laplace de funciones de E. Por ejemplo, la función $1/\sqrt{z}$ no puede serlo al tenerse que

$$\lim_{\mathrm{Re} z \to +\infty} \frac{z}{\sqrt{z}} = \infty \ .$$

2.2.12.4.Teorema del valor final.

Al igual que los resultados de la sección anterior el Teorema del valor final aporta información cualitativa de la Transformada de Laplace en conexión directa con la función de la cuales transformada.

Teorema 2.2.12.4. Sea $f \in E$ una función derivable a trozos tal que $f' \in E$

Supongamos que

$0 \in D_f^*$, y que existe y es $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ finito Entonces

$$\lim_{z \to 0} zLf)(\mathrm{z}) = \lim_{t \to +\infty} f(t) \ .$$

<u>Demostración</u>.

Por el Teorema 2.2.11.3,

$$zL[f](z) - f(0) = L[f'](z) = \int_0^{+\infty} e^{zt} f'(t)dt \ .$$

Por el Teorema 2.2.12.1, $L[\mathrm{f}'](\mathrm{z})$ es derivable y por lo tanto continua. Entonces

$$\lim_{z \to 0} L[f'](\mathrm{z}) = L[\mathrm{f}'](0) = \int_0^{+\infty} f'(t)dt = \lim_{t \to +\infty} f(t) - f(0)$$

Lo cual concluye la demostración. □

2.2.13. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

2.2.13.1. Inyectividad de Transformada Inversa de Laplace

Al intervenir en la definición de Transformada de Laplace la integración, está claro que puede haber infinitas funciones en E teniendo la misma Transformada, por lo que la ésta no será inyectiva. Sin embargo este problema puede paliarse en parte para así poder hablar de la Transformada inversa de una función holomorfa definida en un semiplano complejo. Como veremos en las aplicaciones del tema, este punto será de vital importancia

Consideremos $f:[0,+\infty] \to \mathbb{C}$ una función localmente integrable. Diremos que f es nula o nula casi por todas partes si para todo $x \in (0+\infty)$ se verifica que

$$\int_0^x |f(t)| dt = 0$$

Dos funciones $f,g:[0,+\infty] \to \mathbb{C}$localmente integrables se dirán iguales casi por todas partes si $f-g$ es nula. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 2.2.13.2 Sean $f,g \in E$ iguales casi por todas partes. Entonces $L[f](z) = L[g](z)$ para todo $z \in D_f \cap D_g$

<u>**Demostración**</u>.

Sea $x > 0 y z \in D_f \cap D_g$ Por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral existe $\rho \in (0,x)$ tal que

$$\int_0^x \left| e^{-zt} f(t) - e^{-zt} g(t) \right| dt = e^{-\rho \operatorname{Re} z} \int_0^x |f(t) - g(t)| dt = 0$$

Así

$$|L[f](z) - L[g](z)| = \lim_{x \to \infty} \left| \int_0^x e^{-zt} f(t) dt - \int_0^x e^{-zt} g(t) dt \right|$$

$$\leq \lim_{x\to\infty} e^{-\rho \operatorname{Re} z} \int_0^x \left| f(t) - g(t) \right| dt = 0$$

Lo que termina la demostración. □

El siguiente resultado establece una especie de recíproco para el resultado anterior.

Teorema 2.2.13.2 (***Lerch***)

Sean $f, g \in \varepsilon$ tales que $L[f](z) = L[g](z)$ para todo $z \in D_f \cap D_g$, Entonces f y g son igual es salvo a lo mejor en los puntos de discontinuidad de ambas, con lo que además $D_f = D_g$

2.2.13.2.Transformada Inversa de Laplace

Consideremos la función $L : E \to L(E)$

El Teorema 2.2.13.1permite definir clases de equivalencia en E del siguiente modo. Dadas $f, g \in E$ se dirá que ambas están relacionadas, $f \sim g$ si y sólo si son iguales salvo a lo sumo en los puntos de discontinuidad de ambas. Podemos definir entonces la Transformada de Laplace inversa.

$$L^{-1} : L(E) \to E/\sim$$

Para $F \in L(E)$, cómo $L^{-1}[F] = [f]$ donde $[f]$ denota la clase de manera que $L[f] = F$. En general identificaremos clases con funciones que normalmente podrán ser calculadas. Así diremos que dada $F \in L(E)$ su Transformada inversa es una función $L^{-1}[F](t) = f(t)$ de forma que $L[f] = F$, aunque está perfectamente claro que tal f no es única.

En este contexto, destacamos las siguientes propiedades de Transformada inversa que serán especialmente interesantes a la hora de las aplicaciones.

- Linealidad. Dadas $F,C \in L(E)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ severifica

$$L^{-1}[\alpha F+\beta C](t)=\alpha L^{-1}[F](t)+\beta L^{-1}[C](t)$$

- Traslación. Dada $F \in L(E)$ y $a>0$ se cumple la relación

$$L^{-1}\left[e^{-az}F(z)\right](t)=h_a(t)L^{-1}[F](t-a)$$

- Convolución. Dadas $F,C \in L(E)$ se cumple

$$L^{-1}[FG](t)=\left(L^{-1}[F]*\mathrm{L}^{-1}[C]\right)(t)$$

2.2.14. CONCEPTOS BÁSICOS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS.

2.2.14.1. Circuito Eléctrico.

Es la interconexión de elementos eléctricos simples de tal manera que formen una trayectoria cerrada a través de cual pueda fluir una corriente eléctrica.

El análisis de circuitos eléctricos, es un estudio matemático de alguna interconexión útil, de dispositivos eléctricos simples, en la cual existe por lo menos una trayectoria cerrada por la cual pueda fluir la corriente eléctrica (Hayt Jr, 2012)

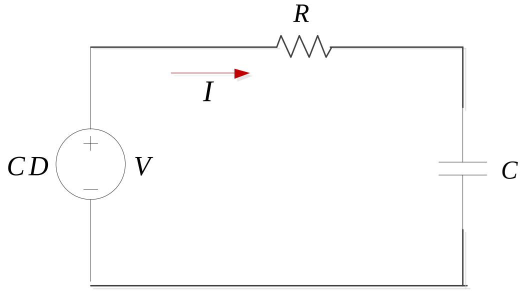


Gráfico N°03: Circuito Eléctrico simple
Fuente: Ing. Javier Villagrán

2.2.14.2. Parámetro Fundamentales de un Circuito Eléctrico.

2.2.14.2.1. Circuito Eléctrico.

La carga eléctrica al igual que la masa, son propiedades intrínsecas de la materia, acorde a la teoría aprobada bajo reiteradas pruebas, confirman que la materia está constituida por átomos, los cuales dentro de su estructura conformada por el núcleo y sus capas. Se ha comprobado que el núcleo del átomo contiene dos tipos de partículas elementales, los protones (cargas positivas) y los neutrones (carga eléctrica neutra). En las capas de los átomos encontramos a los electrones (cargas negativas), las cuales balancean al átomo haciendo que este tenga sea eléctricamente neutro. La unidad con la que se mide la carga eléctrica es el Coulomb (C). (Irwin, 2001).

2.2.14.2.2. Intensidad de Corriente.

La intensidad de corriente, es considerada como el movimiento de las cargas eléctricas positivas, convenio propuesto por Benjamín Franklin (1706-1790).“El propósito principal de un circuito eléctrico es el de hacer fluir las cargas eléctricas a través de una trayectoria cerrada. Formalmente, la corriente eléctrica es la razón de cambio que experimente la carga con respecto al tiempo”. (Jhonson & Hilburn).

La unidad de medida de la intensidad eléctrica es el amperio (A).

2.2.14.2.3. Voltaje Eléctrico o Diferencial Potencial.

El voltaje eléctrico o diferencia de potencial para (Hayt Jr, 2012) “Es una medida de trabajo, requerida para mover carga eléctrica a través de un elemento, específicamente se define el voltaje entre los extremos de un elemento, como el trabajo necesario para mover una carga de 1C de una terminal a la otra a través del dispositivo”. La unidad de medida del voltaje eléctrico es el voltio (V).

2.2.14.2.4. Leyes Circuitales (Criterio de Kirchhoff)

Ley de la Corriente de Kirchhoff (LCK)

Esta ley establece aproximadamente que la suma algebraica de las corrientes que entran y salen de un nodo es cero. (Hayt Jr, 2012).

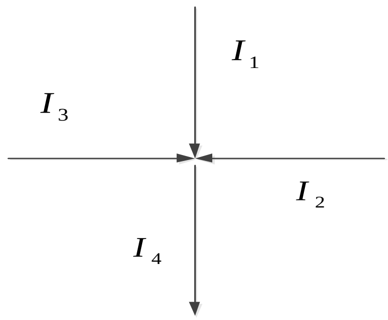


Gráfico N° 04: Ley de Corriente de Kirchhoff
Fuente: Ing. Javier Villagrán

De la figura N° 04. La ecuación de la ley de corriente de Kirchhoff es:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

2.2.14.2.4.1. Ley de los Voltajes de Kirchhoff (LVK)

La ley de voltaje, también es considerada como la ley axiomática, a pesar de lo demostrado en la teoría electromagnética, en la cual se establece que la suma algebraica de los voltajes alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un circuito es cero. (Hayt Jr, 2012)

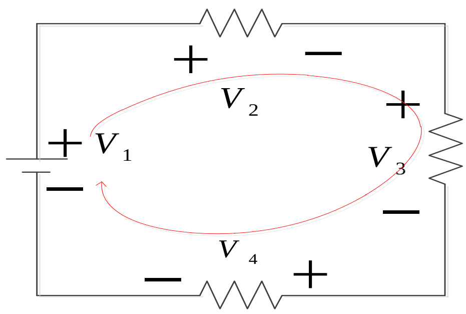


Gráfico N° 05: Ley de Voltaje de Kirchhoff
Fuente: Ing. Javier Villagrán

De la figura N° 05 Ley de voltaje de Kirchhoff es:

$$V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = 0$$

2.2.14.2.4.2. Divisor de Voltaje

La caída de voltaje se utiliza, para calcular el voltaje que hay en uno de los tantos elementos en serie en términos de voltaje de la combinación.

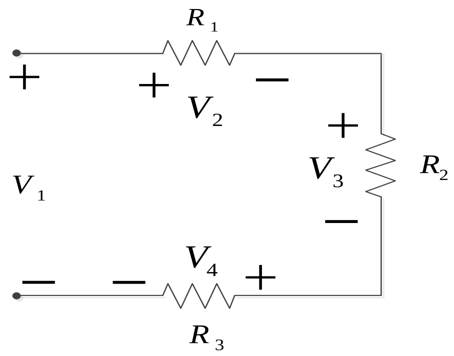


Gráfico N° 06: Divisor de Voltaje
Fuente: Ing. Javier Villagrán

De la figura N° 06 el divisor de voltaje es:

$$I_2 = \frac{I + R_1}{R_1 + R_2}$$

2.2.14.2.4.3. Transformación de Fuente.

Una de las técnicas más simples y gran potencialidad para la resolución de circuitos eléctricos es la transformación de fuentes, en donde una fuente real de voltaje puede ser reemplazada por una real de corriente y viceversa. Este tipo de transformación permite simplificar circuitos de manera óptica.

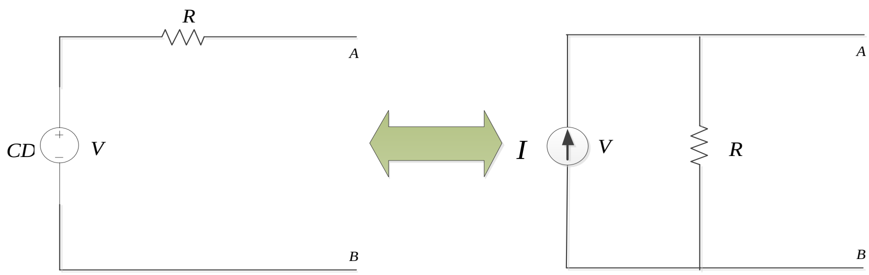


Gráfico N° 07 Transformación de fuente
Fuente: Ing. Javier Villagrán

Gráfico N° 08 El divisor de corriente es:

$$V = I * R, \qquad I = \frac{V}{R}.$$

2.2.14.2.5. Linealidad y Ley de Ohm.

Una linealidad resistencia es un elemento lineal, debido a que su relación corriente – voltaje tiene una curva característica lineal, es decir

$$V_R(t) = R * I(t)$$

Pero si por ésta resistencia se hace pasar una corriente I_1 y luego una corriente I_2 su una relación seria

$$V_1(t) = R * I_1(t), \text{ para } I_1$$

$$V_2(t) = R * I_2(t), \text{ para } I_2$$

Sin embargo sí, se aplica $I_1(t) + I_2(t)$, el voltaje de la resistencia es

$$V(t) = R * I_1(t) + I_2(t) = R * I_1(t) + R * I_2(t) = V_1(t) + V_2(t)$$

Lo cual demuestra la propiedad aditiva. Si la corriente es incrementada K veces su magnitud original, entonces se obtiene que

$$R(\mathrm{K}_1(t)) = K * R * I_2(t) = K * V(\mathrm{t})$$

Lo cual demuestra la homogeniedad, con lo que se puede demostrar que un circuito eléctrico cumple con la linealidad.

2.2.14.2.5.1. Teoremas de Thevenin y Norton.

Las herramientas de mayor utilidad en el análisis de circuitos y electrónicos son el teorema de Thevenin, nos dice que podemos remplazar toda la red, excluyendo la carga, por un circuito equivalente, que contenga solamente una fuente de voltaje independiente en serie con una resistencia de tal forma que la relación corriente-voltaje se mantenga sin cambios. El teorema de Norton es semejante al anterior, con la diferencia que el circuito equivalente contendrá una fuente de corriente independiente en paralelo, de tal forma que la relación corriente voltaje se mantenga sin cambios. (Irwin, 2001)

La forma de hallar el equivalente de Thevenin puede resumirse de la siguiente manera: para hallar la resistencia equivalente, en primera instancia debemos reemplazar por un corto circuito a cada fuente de voltaje independiente. Las fuentes de corriente independientes serán reemplazadas por un circuito abierto. Una vez realizado este proceso mediante los criterios de reducción de resistores se obtendrán la resistencia equivalente, entre los terminales de la porción del circuito que estemos realizando.

Para determinar el voltaje de Thevenin entre los terminales de la porción del circuito elegido para su análisis, procedemos a incluir nuevamente todas las fuentes de voltaje y corriente independientes, de tal forma que aplicando los criterios circuitales anteriormente mencionados, podemos calcular el voltaje entre los terminales indicados.

Si la situación problemática que estemos resolviendo requiere de la utilización del teorema de Norton, procedemos con la transformación de fuentes, que nos permitirá calcular en equivalente de Norton correspondiente.

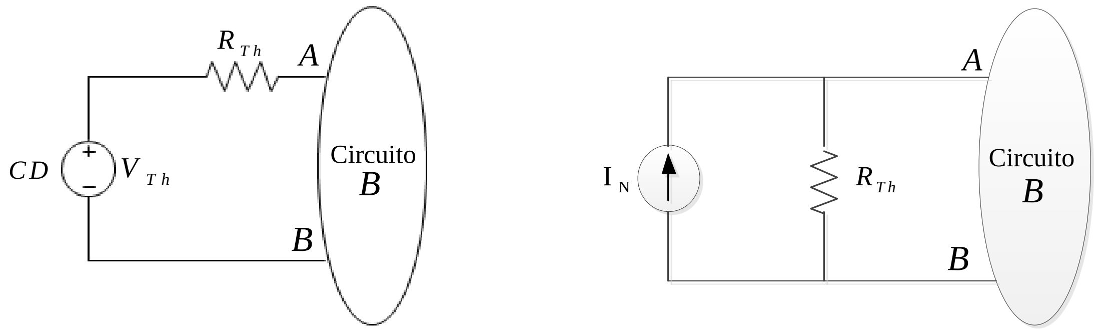


Gráfico N° 09: Circuitos equivalentes de Thevenin y Northon.

Fuente: Ing. Javier Villagrán

Del gráfico N° 09. El divisor de corriente es:

$$V_{Th} = I_N * R_{Th}, \quad I_N = \frac{V_{Th}}{I_N}$$

2.2.14.2.6. Capacitor.

Es un dispositivo pasivo, capaz de almacenar energía en forma de campo eléctrico. A la vez también sirve como u dispositivo de producción, ya que se opone a los cambios bruscos de voltaje (Irwin, 2001), considera: "Un capacitor es un elemento de circuito, formato por dos capas conductoras, separadas por un material dieléctrico, que aumenta la capacidad de almacenamiento original". Los capacitores o condensadores comerciales pueden ser cerámicos u electrolíticos. Su unidad de medida es el Coulomb por voltio, también conocida como faradio *(F)* en honor al físico Michael Faraday. Los condensadores son fijos o variables, dependiendo de su aplicación. Se los puede encontrar en el rango de los micro faradios (μF) hasta unos cuantos pico faradios (pF)

La carga en el condensador es directamente proporcional al voltaje a través del dispositivo

$$q = C * V$$

Como el interés de este análisis es observar el comportamiento de la corriente entonces podemos escribir una nueva ecuación a partir de la definición de corriente

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Por lo tanto

$$I_c = C * \frac{dV_c}{dt}, \quad V_c = \frac{1}{C}\int I_c dt$$

Su representación y símbolo eléctrico se presenta en el siguiente gráfico:

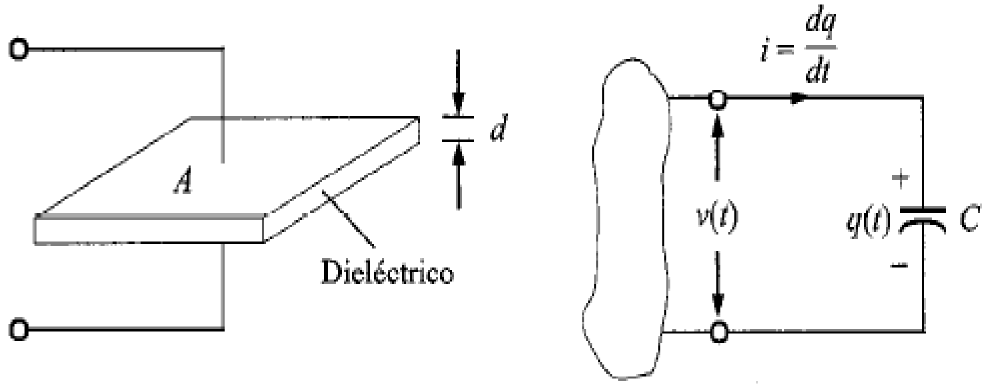


Gráfico N°10: Inductor o Bobina y su símbolo eléctrico

Fuente: Irwin, 2001

2.2.14.2.7. Inductor.

Un inductor es un dispositivo, pasivo similar que le capacitor y la resistencia, tiene la capacidad de almacenar energía en forma de campo magnético, a la vez que análogamente que un condensador puede ser utilizado como un dispositivo de protección, ya que se opone a los cambios bruscos de corriente. Al igual que la sección anterior (Irwin, 2001), afirma: "Un inductor o bobina es un elemento de circuito que consiste en un alambre conductor usualmente en forma de rollo o carrete. Las bobinas se suelen caracterizar según el núcleo en el que están enrollados".

Las bobinas con núcleo hecho de materiales no magnéticas se utilizan en aplicaciones de televisión, radio y filtro. Las bobinas con núcleo de hierro se suelen utilizar en el suministro de potencia y en filtros. Las bobinas con núcleo de ferrita se utilizan en aplicaciones de alta frecuencia.

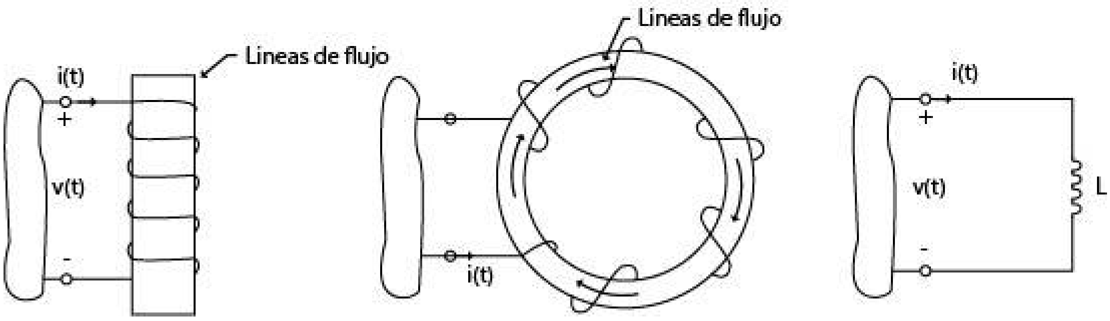


Gráfico N° 11: Inductor o Bobina y su símbolo eléctrico

Fuente: Irwin, 2001

2.1. DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS

- **Capacitancia:** Razón de la carga almacenada a la diferencia de voltaje entre dos placas o alambres conductores.
- **Capacitor:** Elemento de dos terminales cuya función básica es introducir capacitancia en un circuito eléctrico.
- **Carga:** Propiedad fundamental de la materia responsable de los fenómenos eléctricos.
- **Coeficiente:** Es el número que va situado a la izquierda de una letra o literal.
- **Constante:** Valor de tipo permanente
- **Corriente eléctrica:** Es una medida de la facilidad con la que se mueven los electrones a través de cierto material.
- **Expresión Algebraica:** Se llama así a la expresión que tiene por lo menos una literal.
- **Flujograma:** Se denomina a la representación gráfica de distintos procedimientos lógicos que tiene que seguir para resolver un problema.
- **Función de transferencia:** Cociente entre la transformada de Laplace de la salida de un sistema y la transformada de Laplace de la entrada.

- **Función:** Usada en matemáticas para modelar situaciones de la dependencia de una variable sobre otra.
- **Intervalo:** Conjunto de números reales comprendidos entre otros dos números reales.
- **Incógnita:** Es el nombre que recibe el elemento desconocido en una ecuación.
- **Ley de Kirchhoff de voltaje:** La suma algebraica de las tensiones alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero.
- **Ley de Kirchhoff de corriente:** La suma de las corrientes que entran a un nodo, debe ser igual a la suma de las corrientes que salen de dicho nodo.
- **Ley de Ohm:** Establece que la tensión en los extremos de materiales conductores es directamente proporcional a la corriente que fluye a través del material
- **Periodo:** Espacio de tiempo, T, en el que una onda se repite a sí misma.
- **Potencia:** Energía por unidad de tiempo.
- **Potencial eléctrico:** Es el trabajo realizado al desplazar una carga de un punto a otro dentro de un campo eléctrico.
- **Resistencia:** Parte real de la impedancia, denotada por R. Sus unidades son [Ω]. Propiedad física de un elemento que impide el flujo de corriente.
- **Sistema de ecuaciones:** Conjunto de ecuaciones que presentan soluciones comunes.
- **Transformación:** útil para modelar, analizar y diseñar sistemas de control, así como para resolver ecuaciones diferenciales lineales.
- **Transformada de Laplace:** transformación que asocia a cada función real $f(t)$ una función compleja $F(z)$. (z : número complejo.

CAPITULO III

METODOLOGÍA

En el presente trabajo de investigación se utilizó los métodos deductivo y aplicativo; porque se han analizado las definiciones y teoremas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, las definiciones, propiedades y teoremas de la Transformada de Laplace y su inversa, además los conceptos básicos de circuitos eléctricos o redes, para aplicarlos en la resolución de circuitos eléctricos.

a) Tipo de Investigación.

El tipo de investigación es básica, teórica y aplicativa, ya que toda investigación se basa en profundizar los resultados del tema propuesto, también incrementa los conocimientos que existen en las aplicaciones de problemas de circuitos eléctricos cuyo sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, correspondientes se puede, resolver mediante la Transformada de Laplace.

b) Diseño de Investigación.

El diseño de la investigación bajo el cual se realizó el presente trabajo de investigación es inductivo-deductivo y aplicativo que consiste en aplicar la Transformada de Laplace en la resolución de problemas de circuitos eléctricos.

c) Técnicas.

Lectura y análisis de definiciones, propiedades y teoremas de la Transformada de Laplace y su inversa, además de los conceptos básicos de circuitos eléctricos o redes, utilizarlos en la investigación, como materiales de consulta para la asimilación y aplicación apropiada en la investigación.

d) Estrategias.

Revisión bibliográfica y búsqueda en el internet informaciones necesarias para la aplicación en la investigación.

3.1. Ubicación Geográfica del Estudio

Universidad Nacional del Altiplano – Puno.

Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura.

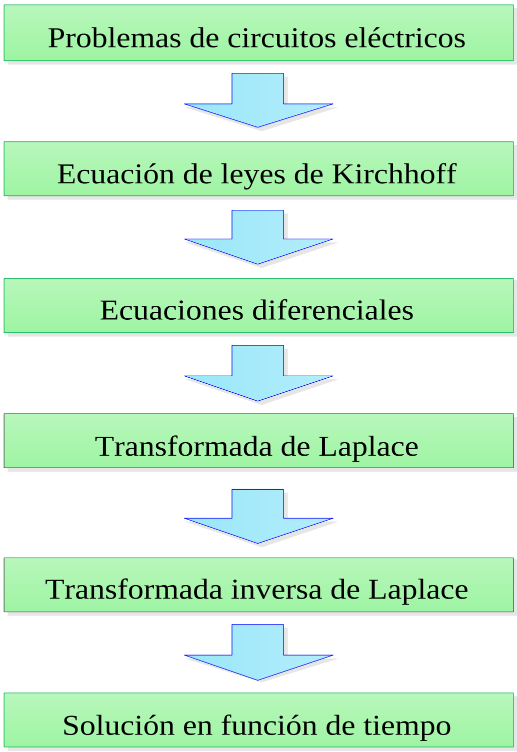
E.P: Ciencias Físico- Matemáticas

3.2. Periodo de Duración del Estudio

Actividad	Trimestres														
	Oct	Nov	Dic	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Set	Oct	Nov	Dic
Revisión bibliográfica.	X	X													
Redacción de proyecto		X													
Presentación del proyecto			X												
Revisión y aprobación del proyecto			X	X											
Ejecución del proyecto				X	X	X	X	X							
Presentación de borrador de tesis									X	X	X	X	X	X	
Sustentación de tesis															X

3.3. Procedimiento.

El flujograma de procesos para la resolución de problemas de circuitos eléctricos mediante la Transformada de Laplace:



3.4. Variables

3.4.1. Variable Independiente (X)

Teoría de la Transformada de Laplace y conceptos básicos de circuitos eléctricos.

3.4.2. Variable Dependiente (Y)

Solución de problemas de circuitos eléctricos de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes contantes con condiciones iniciales

3.4.3. Cuadro de Operacionalización de Variables.

VARIABLES	DIMENSIÓNES	INDICADORES
Variable independiente (X) ▪ Teoría de la Transformada de Laplace y conceptos básicos de circuitos eléctricos.	▪ Identifica teoremas de Transformadas de Laplace y sus inversas. ▪ Analiza conceptos básicos de circuito eléctricos.	▪ Teorema de la transformada de Laplace. ▪ Teorema de derivada de Laplace. ▪ Teorema de la transformada inversa de Laplace
Variable dependiente (Y) ▪ Solución de problemas de circuitos eléctricos de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con condiciones iniciales.	▪ Ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con condiciones iniciales. ▪ Sistema de Ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales.	▪ Solución de la Ecuación diferencial que representa al circuito eléctrico, problema de estudio, mediante Transformadas de Laplace. ▪ Solución del sistema de ecuaciones diferenciales que representa al circuito eléctrico, problema de estudio, mediante Transformadas de Laplace.

CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS.

En las anteriores secciones se han estudiado conceptos teóricos referentes a la Transformada de Laplace, sin embargo, nuestro objetivo fundamental, es tomar ésta teoría y aplicarla en la resolución de problemas de ingeniería de más específicamente en el análisis de circuitos eléctricos.

4.2. EL PARÁMETRO RESISTIVO.

La Transformada de Laplace, en un circuito exclusivamente resistivo, no tiene efecto sino en las funciones de voltaje y corriente:

$$\boldsymbol{v(t) = Ri(t)}$$

Cuya Transformada es: $\boldsymbol{V(s) = RI(s)}$

Estos resultados se pueden observar en el gráfico N°12

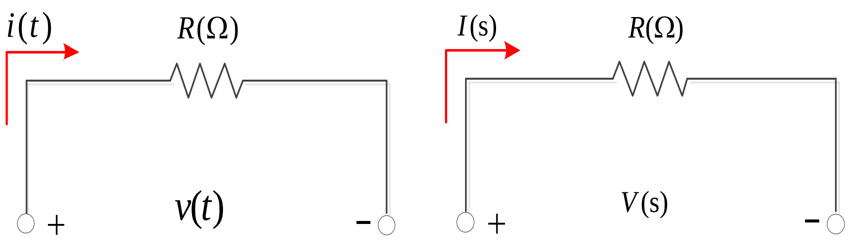


Gráfico N° 12: Circuito Eléctrico de Transformada de parámetro resistivo

4.3. EL PARÁMETRO INDUCTIVO

Observe en el gráfico N° 13. Y detalle que para una inductancia L en Henrios, que posee una corriente inicial de $i(0^+)$ A en la dirección de la corriente $i(t)$, se transforma en el dominio de *S* como una impedancia *sL* en omhios en serie con una fuente de voltaje cuyo valor en *s* es *Li(t)* y que va en la dirección de la corriente *I(s)*.

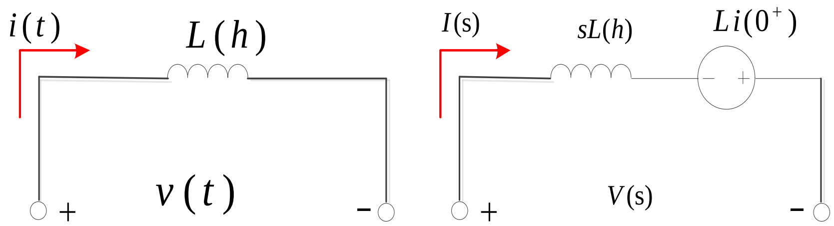


Gráfico N° 13: Circuito Eléctrico de Transformada de parámetro Inductivo

La ecuación que describe el comportamiento del inductor en el dominio del tiempo es:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Cuya respectiva transformada es: $V(s) = sLI(s) - Li(0^+)$

4.4. PARÁMETRO CAPACITIVO

En el gráfico N° 14, se observa en esta sección muestra una capacitancia de *C* faradios en el dominio del tiempo; en el dominio de *S*, ésta se transforma en una impedancia y una fuente de voltaje en serie oponiéndose a la corriente $i(t)$, cuyos valores se observan también en siguiente gráfico.

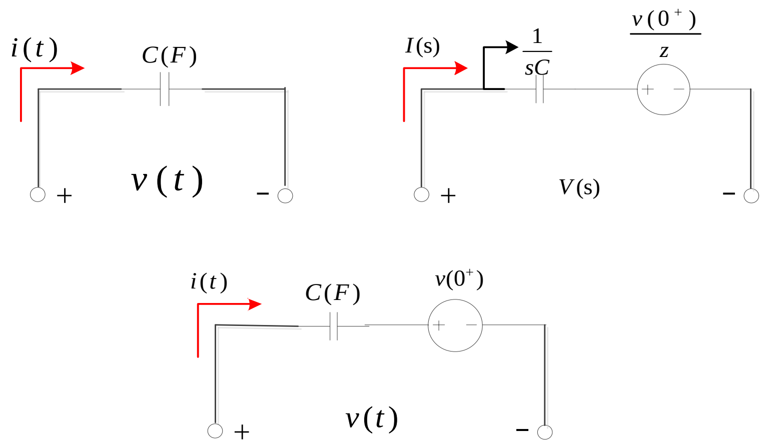


Gráfico N° 14: Circuito eléctrico de transformada de parámetro capacitivo

En el dominio del tiempo se tiene:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad (\alpha)$$

Transformamos esta ecuación (α) y obtenemos:

$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^+)}{s}$$

Como segunda instancia, se aprenderán a resolver circuitos que contengan los anteriores parámetros, e involucren corrientes, voltajes y condiciones iniciales:

4.5. CIRCUITOS ELÉCTRICOS RLC EN SERIE CON CONDICIONES INICIALES

Considere el circuito del gráfico, donde la corriente inicial del inductor es $i(0^+)$ amperes, y el voltaje inicial en ele condensador es $v_c(0^+)$ voltios, con la polaridad indicada.

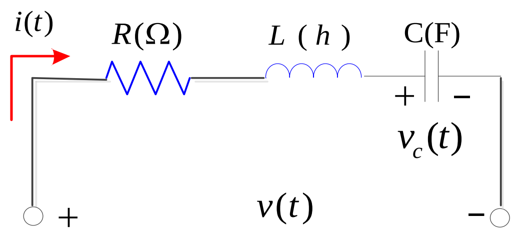


Gráfico N° 15: Circuito Eléctrico RLC en Serie

Si aplicamos la Ley de voltaje de Kirchhoff (LVK), obtenemos la ecuación integro-diferencial.

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = V(t)$$

Aplicando la Transformada de Laplace se obtiene:

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) + \frac{1}{sC}I(t) + \frac{v(0^+)}{s} = V(s)$$

Realizado las operaciones algebraicas se obtiene

$$I(s)=\left[\frac{1}{R+sL+\frac{1}{sC}}\right]\left[V(s)+Li(0^{+})-\frac{v_c\left(0^{+}\right)}{s}\right]$$

El primer factor de esta ecuación corresponde a la función del sistema, mientras que el segundo factor corresponde a la función de excitación.

De acuerdo a lo anterior, el primer factor puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\mathrm{Z}(s)=\left[\frac{1}{R+sL+\frac{1}{sC}}\right]$$

Y dada la relación entre admitancia e impedancia: $\mathrm{Z}(s)=\left[\frac{1}{Y(s)}\right]$

Podemos deducir que: $\mathrm{Z}(s)=R+sL+\frac{1}{sC}(\Omega)$

Ahora, dejamos todo en una sola fracción: $\mathrm{Z}(s)=\frac{s^{2}LC+sRC+1}{sC}(\Omega)$

Si detallamos la última ecuación escrita, y la relacionamos con la ecuación donde está despejada $I(s)$, veremos que los ceros de $\mathrm{Z}(s)$ son los que en últimas determinan el comportamiento del circuito.

Lo anterior, escrito en una ecuación sería:

$$s^{2}+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$

Después de tener en cuenta todas estas consideraciones, lo único que resta es encontrar la respuesta en el dominio del tiempo; sin embargo, no se puede generalizar una respuesta debido a que, dependiendo de las funciones de excitación y de las condiciones iniciales, la respuesta en el tiempo cambia. Lo que haremos entonces es plantear la ecuación de transformada inversa de Laplace:

$$i(t) = \ell^{-1}\left\{I(s)\right\} = \ell^{-1}\left[\frac{V(s) + Li(0^+) - \frac{v_c(0^+)}{s}}{Z(s)}\right]$$

4.6. CIRCUITOS RLC PARALELO CON CONDICIONES INICIALES.

La fuente de corriente $i(t)$ del gráfico, es la que excita el circuito. El inductor lleva una corriente inicial $i_2(0^+)$. En la misma dirección de $i_2(t)$. El voltaje inicial del condensador es $v_c(0^+)$ con la polaridad opuesto al sentido de la corriente $i_3(t)$.

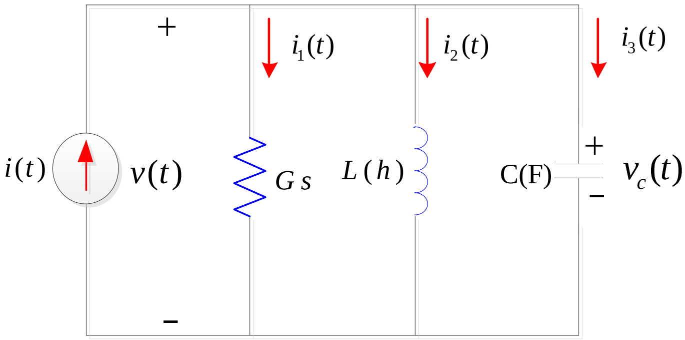


Gráfico N° 16: Circuitos Eléctricos RLC en Paralelo

Aplicando la Ley del capacitor de Kirchhoff (LCK):

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

Hallamos el equivalente de cada una de estas corrientes, para el caso del resistor en siemens:

$$i_1(t) = Gv(t)$$

Para el inductor: $$i_2(t) = \frac{1}{L}\int v(t)\,dt$$

Y para el condensador: $$i_3(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Reemplazamos estas tres expresiones en la primera ecuación:

$$i(t) = Gv(t) + \frac{1}{L}\int v(t)\,dt + C\frac{dv(t)}{dt}$$

Aplicando Transformada de Laplace, y el resultado es:

$$I(s) = GV(\mathrm{s}) + \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i_3(0^+)}{s} + sCV(s) - Cv(0^+)$$

Arreglando esta ecuación, de tal forma que se pueda ver de forma más clara:

$$\mathrm{V(s)} = \left[\frac{1}{G + sC + \frac{1}{sL}}\right]\left[I(s) + Cv(0^+) - \frac{i_2(0^+)}{s}\right]$$

El primer factor de esta ecuación corresponde a la función del sistema, mientras que el segundo factor corresponde a la función de excitación, de acuerdo a lo anterior, el primer factor es una impedancia que puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\mathrm{Z(s)} = \frac{1}{G + sC + \frac{1}{sL}}(\Omega)$$

O una admitancia cuyo valor es: $\mathrm{Y(s)} = \frac{1}{Z(s)} = G + sC + \frac{1}{sL}$

En Siemens los polos de $Z(s)$ o los ceros de $\mathrm{Y}(s)$, determinan el comportamiento transitorio de la función respuesta $V(s)$.

La función respuesta en el dominio del tiempo es:

$$v(t) = \ell^{-1}\{V(s)\} = \ell^{-1}\left[\frac{I(s) + Cv(0^+) - \frac{i_2(0^+)}{s}}{Y(s)}\right]$$

a) **Aplicaciones de la Transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.**

1. Un circuito RLC conectado en serie tiene una fuente de voltaje dada por $E(t)=50$ voltios, un resistor de $2\ \Omega$, un inductor de 1 H y un capacitor de 0.5 F las condiciones iniciales con el circuito abierto son $q(0)=0$ y $i(0)=0$, determinar la corriente en el circuito para $t>0$.

RESOLUCIÓN

Sea $i_1(t)$: la corriente que circula en el circuito RLC en cualquier momento t.

Datos del problema:

$E(t)=50$ v Voltios.

$R=2\ \Omega$

$L=1\ H$

$C=0.5$ F

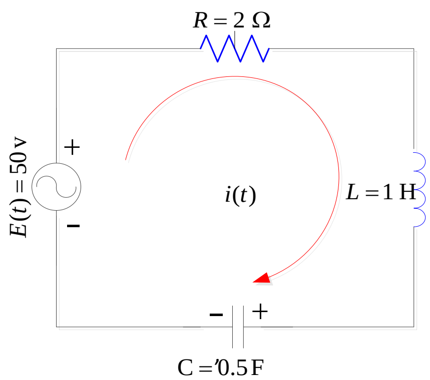


Gráfico N° 17: Circuitos Eléctricos RLC en serie

Condiciones iniciales son $i(0)=0$ e $q(0)=0$

De acuerdo a la Ley de Ohm. Para el circuito eléctrico RLC se tiene:

$$R\ i(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=E(t) \tag{1.1}$$

Sabemos que: $$q(t)=\int i(t)dt \tag{1.2}$$

Remplazando (1.2) en (1.1) se tiene:

$$R\ i(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)dt=E(t) \tag{1.3}$$

Remplazando los valores R, L, C y $E(t)$ en (1.3), se tiene:

$$2\,i(t)+1\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{0.5}\int i(t)dt=50 \tag{1.4}$$

Aplicando la transformada de Laplace en (1.4)

$$2\ell\{i(t)\}+\ell\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\}+\frac{1}{0.5}\ell\left\{\int i(t)dt\right\}=50\ell\{1\} \tag{1.5}$$

Aplicando la transformada de la derivada, la integral de Laplace y condiciones iniciales

en (1.5)

$$2\ell\{i(t)\}+\left[s\ell\{i(t)\}-i(0)\right]+\frac{1}{0.5s}\ell\{i(t)\}+\frac{1}{0.5}q(0)=\frac{50}{s}$$

$$\ell\{i(t)\}(\mathrm{s}+2+\frac{2}{s})=\frac{50}{s}$$

$$\ell\{i(t)\}(\frac{\mathrm{s}^2+2s+2}{s})=\frac{50}{s}$$

Despejando $\ell\{i(t)\}$ se tiene:

$$\ell\{i(t)\}=\frac{50}{\mathrm{s}^2+2s+2} \tag{1.6}$$

Luego aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (1.6) se tiene:

$$\ell^{-1}\{\ell\{i_1(t)\}\}=\ell^{-1}\left\{\frac{50}{\mathrm{s}^2+2s+2}\right\}=50\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(\mathrm{s}+1)^2+1}\right\}$$

$$i(t)=50e^{-t}sent \tag{1.7}$$

Finalmente la ecuación (1.7) es la solución del circuito RLC

2. Un circuito $\boldsymbol{RLC}$ conectado en serie tiene una fuente de voltaje dada por

$\boldsymbol{E(t) = 100sen3t}$ Voltios, un resistor de $\boldsymbol{16\Omega}$, un inductor de $\boldsymbol{2H}$ y un capacitor de $\boldsymbol{0.02F}$; si la corriente y la circuito y la carga iniciales en el capacitor son iguales a cero, determinar la corriente en el circuito para $\boldsymbol{t > 0}$.

SOLUCION

Sea $i_1(t)$: la corriente que circula en el circuito RLC en cualquier momento t.

Datos del problema:

$E(t) = 100sen3t$ Voltios.

$R = 16\ \Omega$

$L = 2\ H$

$C = 0.02$ F

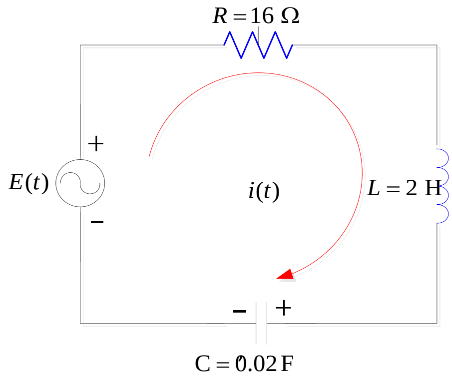


Gráfico N° 18: Circuitos Eléctricos RLC en serie

Condiciones iniciales son $i(0) = 0$ e $i'(0) = 0$

De acuerdo a la Ley de Kirchhoff.

Para el circuito de la izquierda, se tiene:

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{L}\frac{dE(t)}{dt} \qquad (2.1)$$

Remplazando los valores $R,\ L,\ C$ y $E(t)$ en (2.1), se tiene:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{16}{2}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2(0.02)}\ i(t) = \frac{1}{2}\frac{d(100\operatorname{sen}3t)}{dt}$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+8\frac{di(t)}{dt}+25\,i(t)=150\cos 3\text{t} \tag{2.2}$$

Aplicando la transformada de Laplace en (2.2)

$$\ell\left\{\frac{d^2 i(t)}{dt^2}\right\}+8\ell\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\}+25\ell\{i(t)\}\;=150\ell\{\cos 3\text{t}\}$$

(2.3)

Aplicando la transformada de las derivadas y condiciones iniciales en (2.3)

$$s^2\ell\{i(t)\}-si(0)-i'(0)+8\left[s\ell\{i(t)\}-i(0)\right]+25\ell\{i(t)\}\;=150\ell\{\cos 3\text{t}\}$$

$$s^2\ell\{i(t)\}+8s\ell\{i(t)\}+25\ell\{i(t)\}\;=150\ell\{\cos 3\text{t}\}$$

$$\ell\{i(t)\}(s^2+8s+25)=\frac{150s}{s^2+9}$$

$$\ell\{i(t)\}=\frac{150s}{(s^2+9)(s^2+8s+25)} \tag{2.4}$$

Luego aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (2.4) se tiene:

$$\ell^{-1}\{\ell\{i_1(t)\}\}=\ell^{-1}\left\{\frac{150s}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}\right\} \tag{2.5}$$

Por fracciones parciales

$$\frac{150s}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}=\frac{As+B}{s^2+9}+\frac{Cs+D}{s^2+8s+25}=\frac{(\text{As}+B)(s^2+8s+25)+(\text{Cs}+D)(s^2+9)}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}$$

$$150s=\text{As}^3+8As^2+25As+Bs^2+8Bs+25B+\text{Cs}^3++9Cs+Ds^2+9D \tag{2.6}$$

Formando sistema de ecuaciones de (2.6):

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 8A+B+D=0 \\ 25A+8B+9C=150 \\ 25B+9D=0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Resolviendo la ecuación (2.7) se tiene:

$$A=\frac{25}{9},\quad B=\frac{75}{6},\quad C=-\frac{25}{9},\ \text{y}\ D=-\frac{625}{18}$$

$$\ell^{-1}\left\{\ell\left\{i\ (t)\right\}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{150s}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{As+B}{s^2+9}+\frac{Cs+D}{s^2+8s+25}\right\}$$

$$i(t)=\ell^{-1}\left\{\frac{\frac{25}{9}s+\frac{75}{6}}{s^2+9}+\frac{\frac{-25}{9}s+\frac{-625}{18}}{s^2+8s+25}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{\frac{25}{9}s+\frac{75}{6}}{s^2+9}\right\}-\ell^{-1}\left\{+\frac{\frac{25}{9}s+\frac{625}{18}}{s^2+8s+25}\right\}$$

$$i(t)=\frac{25}{9}\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}+\frac{75}{6}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}-\frac{25}{9}\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+8s+25}\right\}-\frac{625}{18}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+8s+25}\right\}$$

$$i_1(t)=\frac{25}{9}\cos(3t)+\frac{75}{6}\text{sen}(3t)-\frac{25}{9}\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s+4)^2+9}\right\}-\frac{625}{18}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2+9}\right\}$$

$$i_1(t)=\frac{25}{9}\cos(3t)+\frac{75}{6}\text{sen}(3t)-\frac{25}{9}\ell^{-1}\left\{\frac{s+4-4}{(s+4)^2+9}\right\}-\frac{625}{18}\frac{1}{3}\ell^{-1}\left\{\frac{3}{(s+4)^2+9}\right\}$$

$$i_1(t)=\frac{25}{9}\cos(3t)+\frac{75}{6}\text{sen}(3t)-\frac{25}{9}e^{-4t}\cos 3t+\frac{100}{27}e^{-4t}sen3t-\frac{625}{54}e^{-4t}sen3t \qquad (2.8)$$

Finalmente la ecuación (2.8) es la solución del circuito RLC

b) Aplicaciones de la Transformada de Laplace para resolver sistema de ecuaciones diferencias lineales con coeficientes constantes.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales son aquellos que contiene más de una función incógnita. Estos aparecen de modo natural en diversidad de problemas; por ejemplo, consideran circuitos eléctricos con más de una malla circuito, como se muestra en el gráfico N° 19.

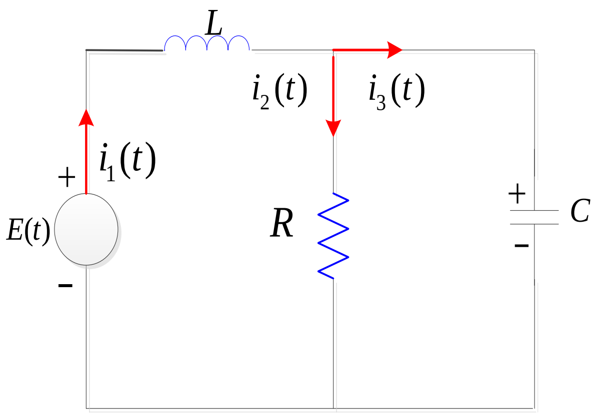


Gráfico N° 0 19: Sistema de Circuitos Eléctricos

En el gráfico N° 19, $i_1(t)$ es la corriente que atraviesa el conductor en la dirección indicada e $i_2(t)$ es la que atraviesa la resistencia R . Obsérvese que la corriente que pasa por la resistencia R es $i_1(t) = i_2(t) - i_3(t)$ en la dirección indicada en el gráfico.

De acuerdo a la Ley de Kirchhoff.

Para el circuito de la izquierda, se tiene:

$$L\frac{di_1(t)}{dt} + R(i_2(t) = E(t) \qquad (\alpha)$$

Para el circuito de la derecha, se tiene:

$$RC\frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) - i_1(t) = 0 \qquad (\beta)$$

Como las corrientes en el circuito están relacionadas, las ecuaciones (α) y (β) formas un sistema de ecuaciones diferenciales, esto es, si se requiere determinar la intensidad de corriente a través del circuito eléctrico se debe determinar las funciones $i_1(t)$ e $i_2(t)$ que satisface simultáneamente el sistema.

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1(t)}{dt} + R(i_2(t) = E(t) \\ RC\dfrac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) - i_1(t) = 0 \end{cases} \qquad (\gamma)$$

3. Determinar la intensidad de corriente en cada uno de los circuitos de la red eléctrica descrita por sistema:

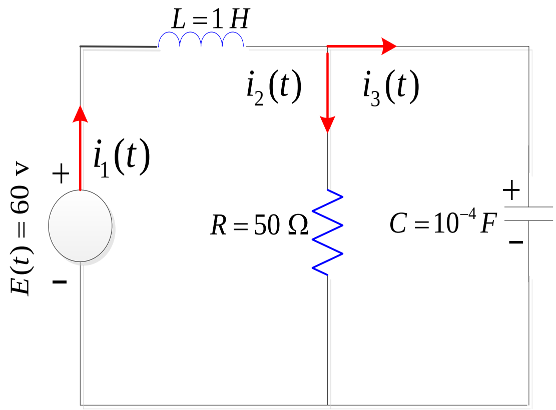


Gráfico N° 20: Circuito Eléctrico con mallas

Supongamos que, en el instante en el cual se conecta la batería ($t=0$), no hay corriente fluyendo por la red.

RESOLUCIÓN

Recuerde que el sistema es:

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1(t)}{dt}+Ri_2(t)=E(t) \\ RC\dfrac{di_2(t)}{dt}+i_2(t)-i_1(t)=0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Remplazando los valores de $L=1\,H$, $R=50\ \Omega$, $C=10^{-4}$ F y $E=60$ v, además, como inicialmente no hay corriente fluyendo por la red, entonces las condiciones iniciales son $i_1(0)=0$ e $i_2(0)=0$.

Remplazando estos valores en (3.1) se obtiene el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} \dfrac{di_1(t)}{dt}+50i_2(t)=60 \\ 50\text{x}10^{-4}\dfrac{di_2(t)}{dt}+i_2(t)-i_1(t)=0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Con $i_1(0)=0$ e $i_2(0)=0$

Aplicando la transformada de Laplace en (3.2) se obtiene:

$$\begin{cases} \ell\left\{\dfrac{di_1(t)}{dt}\right\}+50\ell\{i_2(t)\} = 60\ell\{1\} \\ 50\text{x}10^{-4}\ell\left\{\dfrac{di_2(t)}{dt}\right\}+\ \ell\{i_2(t)\}-\ell\{i_1(t)\}=\ell\{0\} \end{cases} \tag{3.3}$$

Aplicando la transformada de Laplace y las condiciones iniciales en (3.3), se obtiene:

$$\begin{cases} s\ell\{i_1(t)\}-i_1(0)+50\ell\{i_2(t)\} = \dfrac{60}{s} \\ \dfrac{1}{200}\left[s\ell\{i_2(t)\}-i_2(0)\right]+\ \ell\{i_2(t)\}-\ell\{i_1(t)\}=0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Aplicando las condiciones iniciales en (3.4) y simplificando se obtiene:

$$\begin{cases} s\ell\{i_1(t)\}+50\ell\{i_2(t)\} = \dfrac{60}{s} \\ -200\ell\{i_1(t)\}+(s+200)\ell\{i_2(t)\}=0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Resolviendo la ecuación (3.5) del sistema por el método de Cramer para $\ell\{i_1(t)\}$ se tiene:

$$\ell\{i_1(t)\}=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{60}{s} & 50 \\ 0 & s+200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 50 \\ -200 & s+200 \end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{60s+12000}{s}}{s^2+200s+10000}=\frac{60s+12000}{s(s+100)^2} \tag{3.6}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace en (3.6) se obtiene:

$$\ell^{-1}\{\ell\{i_1(t)\}\}=\ell^{-1}\left\{\frac{60s+12000}{s(s+100)^2}\right\}$$

$$i_1(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{60s+12000}{s(s+100)^2}\right\} \tag{3.7}$$

Aplicando fracciones parciales en (3.7)

$$\frac{60s+12000}{s(s+100)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+100} + \frac{C}{(s+100)^2} = \frac{A(s+100)^2 + Bs(s+100) + Cs}{s(s+100)^2}$$

$$60s+12000 = As^2 + 200As + 10000A + Bs^2 + 100Bs + Cs$$

Formando sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 200A+100B+C=60, \\ 10000A=12000 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, los valores son:

$$A=\frac{6}{5}, \quad B=-\frac{6}{5} \quad \text{y} \quad C=60$$

Remplazando los valores de A, B y C en la ecuación (3.7) se tiene:

$$i_1(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{60s+12000}{s(s+100)^2}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s+100} + \frac{C}{(s+100)^2}\right\}$$

$$i_1(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{60}{(s+100)^2}\right\}$$

$$i_1(t) = \frac{6}{5}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{6}{5}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+100}\right\} - 60\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\}$$

$$i_1(t) = \frac{6}{5}t - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t} \tag{3.8}$$

Luego la solución de $i_1(t)$ es la ecuación (3.8).

Resolviendo la ecuación (3.5) del sistema por el método de Cramer para $\ell\{i_2(t)\}$ se tiene:

$$\ell\{i_2(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s & \frac{60}{s} \\ -200 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 50 \\ -200 & s+200 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{12000}{s}}{s^2+200s+10000} = \frac{12000}{s(s+100)^2} \tag{3.9}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace en (3.9) se obtiene:

$$\ell^{-1}\{\ell\{i_2(t)\}\} = \ell^{-1}\left\{\frac{12000}{s(s+100)^2}\right\}$$

$$i_2(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{12000}{s(s+100)^2}\right\} \tag{3.10}$$

Aplicando fracciones parciales en (3.10) se tiene:

$$\frac{12000}{s(s+100)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+100} + \frac{C}{(s+100)^2} = \frac{A(s+100)^2 + Bs(s+100) + Cs}{s(s+100)^2}$$

$$12000 = As^2 + 200As + 10000A + Bs^2 + 100Bs + Cs$$

Formando sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 200A+100B+\ C=0 \\ 10000A=12000 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, los valores son:

$$A=\frac{6}{5},\quad B=-\frac{6}{5}\quad \text{y}\quad C=-120$$

Luego remplazando los valores de A, B y C en la ecuación (3.10) se tiene:

$$i_2(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{60s+12000}{s(s+100)^2}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s+100} + \frac{C}{(s+100)^2}\right\}$$

$$i_1(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{120}{(s+100)^2}\right\}$$

$$i_2(t)=\frac{6}{5}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{6}{5}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+100}\right\}-120\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\}$$

$$i_2(t)=\frac{6}{5}t-\frac{6}{5}e^{-100t}-120te^{-100t} \qquad (3.11)$$

Luego la solución de $i_2(t)$ es la ecuación (3.11).

Finalmente de ecuación la (3.8) y (3.11) es la solución del sistema del circuito eléctrico en función del tiempo.

$$i_1(t)=\frac{6}{5}t-\frac{6}{5}e^{-100t}-60te^{-100t}$$

$$i_2(t)=\frac{6}{5}t-\frac{6}{5}e^{-100t}-120te^{-100t}$$

4. Determinar la intensidad de corriente en cada uno de los circuitos de la red eléctrica descrita por sistema:

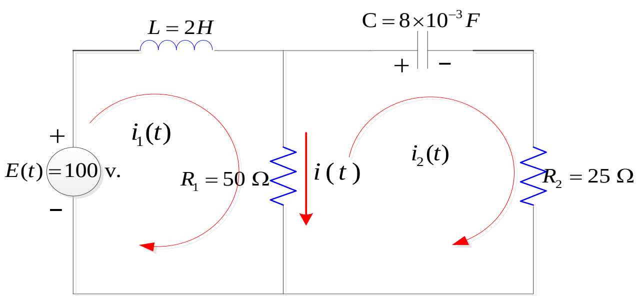


Gráfico N° 21: Circuito Eléctrico con mallas

Supongamos que, en el instante en el cual se conecta la batería ($t=0$), no hay corriente fluyendo por la red

Resolución

Recuerde que el sistema es:

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1(t)}{dt} + R_1\left[(i_1(t) - i_2(t)\right] = E(t) \\ -R_1\dfrac{di_1(t)}{dt} + \left[R_2 + R_1\right]\dfrac{di_2(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}i_2(t) = 0 \end{cases}$$

Remplazando $L = 2H$, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 25\ \Omega, C = 8\times 10^{-3}$ F y $E = 100$ v, además, como inicialmente no hay corriente fluyendo por la red, entonces las condiciones iniciales son $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$.

Remplazando estos valores en el sistema y simplificando se obtiene el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} \dfrac{di_1(t)}{dt} + 25\ i_1(t) - 25\ i_2(t) = 50 \\ 2\ \dfrac{di_1(t)}{dt} - 3\ \dfrac{di_2(t)}{dt} - 5\ i_2(t) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Con $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$

Aplicando la transformada de Laplace, la derivada de transformada y las condiciones iniciales en (4.1), se obtiene:

$$\begin{cases} (s+25)\ell\{i_1(t)\} - 25\ell\{i_2(t)\} = \dfrac{50}{s} \\ 2s\ \ell\{i_1(t)\} - (3s+5)\ell\{i_2(t)\} = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Resolviendo el sistema por el método de Cramer se tiene:

$$\begin{vmatrix} s-25 & -25 \\ 2s & -3s-5 \end{vmatrix} = -(3s^2 + 30s + 125)$$

Por tanto:

$$\ell\{i_1(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{50}{s} & -25 \\ 0 & -3s-5 \end{vmatrix}}{-(3s^2 + 30s + 125)} = \frac{150s + 250}{s(3s^2 + 30s + 125)} \tag{4.3}$$

$$\ell\{i_2(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s+25 & \dfrac{50}{s} \\ 2s & 0 \end{vmatrix}}{-(3s^2+30s+125)} = \frac{100}{(3s^2+30s+125)} \tag{4.4}$$

Luego aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (4.3) se tiene:

$$\ell^{-1}\{\ell\{i_1(t)\}\} = \ell^{-1}\left\{\frac{150s+250}{s(3s^2+30s+125)}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} + \ell^{-1}\left\{\frac{-6s+90}{3s^2+30s+125}\right\}$$

$$i_1(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} + \ell^{-1}\left\{\frac{-6s+90}{3s^2+30s+125}\right\} \tag{4.5}$$

$$\frac{-6s+90}{3s^2+30s+125} = \frac{-2s+30}{s^2+10s+\dfrac{125}{3}} = -2\frac{(s+5)+40}{(s+5)^2+\dfrac{50}{3}} + \frac{40}{(s+5)^2+\dfrac{50}{3}}$$

$$= -2\frac{(s+5)+40}{(s+5)^2+\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2} + \frac{40}{(s+5)^2+\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2}$$

$$\frac{-6s+90}{3s^2+30s+125} = -2\frac{(s+5)+40}{(s+5)^2+\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2} + 4\sqrt{6}\frac{\dfrac{5\sqrt{6}}{3}}{(s+5)^2+\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2} \tag{4.6}$$

Luego remplazando la ecuación (4.6) en (4.5) se tiene:

$$i_1(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} + \ell^{-1}\left\{= -2\frac{(s+5)+40}{(s+5)^2+\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2} + 4\sqrt{6}\frac{\dfrac{5\sqrt{6}}{3}}{(s+5)^2+\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2}\right\}$$

$$i_1(t) = 2 - 2e^{-5t}\cos\left(\frac{5}{3}\sqrt{6}t\right) + 4\sqrt{6}e^{-5t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{3}\sqrt{6}t\right) \tag{4.7}$$

Luego aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (4.4) se tiene:

$$\ell^{-1}\left\{\ell\left\{i_2(t)\right\}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{100}{(3s^2+30s+125)}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{10}{3}\sqrt{6}\frac{\frac{5}{3}\sqrt{6}}{(s+5)^2+\left(\frac{5}{3}\sqrt{6}\right)^2}\right\}$$

$$i_2(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{10}{3}\sqrt{6}\frac{\frac{5}{3}\sqrt{6}}{(s+5)^2+\left(\frac{5}{3}\sqrt{6}\right)^2}\right\} = \frac{5}{3}\sqrt{6}e^{-5t}\,\mathrm{sen}(\frac{5}{3}\sqrt{6}t)$$

$$i_2(t) = \frac{5}{3}\sqrt{6}e^{-5t}\,\mathrm{sen}(\frac{5}{3}\sqrt{6}t) \qquad (4.8)$$

Finalmente de la ecuación (4.8) y (4.8) es la solución del sistema del circuito eléctrico en función del tiempo.

$$i_1(t) = 2 - 2e^{-5t}\cos(\frac{5}{3}\sqrt{6}t) + 4\sqrt{6}e^{-5t}\,\mathrm{sen}(\frac{5}{3}\sqrt{6}t)$$

$$i_2(t) = \frac{5}{3}\sqrt{6}e^{-5t}\,\mathrm{sen}(\frac{5}{3}\sqrt{6}t)$$

CAPITULO V

CONCLUSIONES

Al terminar el trabajo de investigación, se llegó a las siguientes conclusiones:

- Para aplicar la Transformada de Laplace en la resolución de problemas de circuitos eléctricos de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con condiciones iniciales mediante la transformada de Laplace se utilizó principalmente criterios de las leyes de Kirchhoff, el Teorema 2.2.11.4**,** las propiedades de transformada y la transformada inversas de Laplace, además siguiendo el flujograma de procesos para la resolución de problemas de circuitos eléctricos mediante la Transformada de Laplace

- El análisis de la teoría de Transformada de Laplace y sus inversas, facilitan en la resolución de problemas de circuitos eléctricos con condiciones iniciales en sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

- Se ha analizado los conceptos básicos de circuitos eléctricos como los criterios de Kirchhoff, para la Transformada de Laplace en circuito eléctrico RLC en Serie y circuito eléctrico en RLC en Paralelo.

CAPITULO VI

RECOMENDACIONES:

- Se recomienda tener en cuenta la teoría de la Trasformada de Laplace y su inversa para trabajos de investigación en el área de ingeniería química en el tema de modelamiento para problemas mezcla de salmueras de dos o más tanques.

- Se recomienda utilizar la teoría de la Trasformada de Laplace y su inversa en los próximos trabajos de investigación en el área de economía y biología, para que pueda ver el modelamiento en temas específicos en dichas áreas.

CAPITULO VII

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS:

Braun, M. (1993). *Diferential equations and their applications.* New York: Springer Verlag.

Hayt Jr, K. (2012). *Análisis de circuitos en ingeniería.* México: Mc Graw-Hill.

Ignacio Gracia Rivas, N. R.-R. (3 de Octubre de 2008). *Ecuaciones Diferenciales.* Barcelona: E-08034.

Kreiszig, E. (1996). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería .* Limusa.

Peña, J. S. (8 de Enero de 2008). Transformada de Laplace y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales. págs. 6-7.

W.E, B., & R.C, D. (1996). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valor en la frontera.* Mexico: Limusa.

Simmons, George F. (1991). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y notas históricas. McGraw-Hill; Madrid.*

Dorf, R. C. &Svoboda, J. A. (2000) *Circuitos eléctricos. Introducción al análisis y diseño: Alfaomega. México.*

Jeffrey, A. (1993). *Linear algebra and ordinary differential equations, CRC Press.*

Marcellán, F. & Casasús, L. & Zarzo, L. (1990). *Ecuaciones diferenciales. Problemas lineales y aplicaciones, McGraw—Hill.*

ANEXOS

(a) Tabla de Transformadas de Laplace de Funciones Básicas.

Función $f(t)$	Transformada	Observaciones
$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$	
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^n, con $n=1,2,3,\dots$	$n!/s^{n+1}$	$s>0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s>a$
$\left(e^{at}-e^{bt}\right)/(a-b)$	$1/(s-a)(s-b)$	$(a\neq b)$
$\left(ae^{at}-be^{bt}\right)/(a-b)$	$s/(s-a)(s-b)$	$(a\neq b)$
$\operatorname{sen}\omega t$	$\omega/\left(s^2+\omega^2\right)$	$s>0$
$\cos\omega t$	$s/\left(s^2+\omega^2\right)$	$s>0$
$\operatorname{senh}\omega t$	$\omega/\left(s^2-\omega^2\right)$	$s>\lvert\omega\rvert$
$\cosh\omega t$	$s/\left(s^2-\omega^2\right)$	$s>\lvert\omega\rvert$
$e^{at}\operatorname{sen}\omega t$	$\omega/\left[(s-a)^2+\omega^2\right]$	$s>a$
$e^{at}\cos\omega t$	$(s-a)/\left[(s-a)^2+\omega^2\right]$	$s>a$
te^{at}	$1/(s-a)^2$	$s>a$
$t^n e^{at}$	$n!/(s-a)^{n+1}$, $n=1,2,\dots$	$s>a$
$t\operatorname{sen}\omega t$	$2\omega s/\left(s^2+\omega^2\right)^2$	$s>0$
$t\cos\omega t$	$\left(s^2-\omega^2\right)/\left(s^2+\omega^2\right)^2$	$s>0$
$(1-\cos\omega t)/\omega^2$	$1/(s^2+\omega^2)$	$s>0$
$y'(t)$	$sY-y(0)$	$Y=\mathcal{L}\{y(t)\}$
$y''(t)$	$s^2Y-sy(0)-y'(0)$	$Y=\mathcal{L}\{y(t)\}$
$y^{(n)}(t)$	$s^nY-s^{n-1}y(0)-\cdots-y^{(n-1)}(0)$	$n=1,2,3,\dots$ $Y=\mathrm{L}\{y(t)\}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$s>a$
$t^n f(t)$	$(-1)^n f^{(n)}(s)$	$n=1,2,3,\dots$
$\int_0^t f(u)g(t-u)\,du$	$F(s)\cdot G(s)$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}$
$\int_0^t f(u)\,du$	$F(s)/s$	$F(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$