UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

APLICACIÓN DE MÉTODO SIMPLEX PARA UN MODELO EN LA PRODUCCIÓN DE LECHE Y SUS DERIVADOS EN PEQUEÑOS Y MEDIANOS PRODUCTORES

TESIS

PRESENTADA POR:

LUZ MARINA ACERO COAQUIRA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO – PERÚ

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

APLICACIÓN DE MÉTODO SIMPLEX PARA UN MODELO EN LA PRODUCCIÓN DE LECHE Y SUS DERIVADOS EN PEQUEÑOS Y MEDIANOS PRODUCTORES

TESIS PRESENTADA POR:

Bach. LUZ MARINA ACERO COAQUIRA

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN PILAR FICA

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 29-12-2017

APROBADA POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

PRESIDENTE: Mg. CELSO WILFREDO CALSIN VELASQUEZ

PRIMER MIEMBRO: D.Sc. JULIO CESAR LAURA HUANCA

SEGUNDO MIEMBRO: Lic. EDWEN CABRERA CRUZ

DIRECTOR / ASESOR: M.Sc. MARTIN CONDORI CONCHA

Área : Programación Lineal
Tema : Método Simplex
Línea de investigación: Matemáticas Aplicada

DEDICATORIA

A Dios por permitirme llegar a este momento de mi vida a mi querido papá Gerardo Acero Meneses por su apoyo quien con todas sus enseñanzas y consejos, me llevo alcanzar mis metas, y a mi querida mamá Dominga Coaquira Coaquira, quien con todo su amor me impulso a seguir adelante y superar los obstáculos que se presentan y lograr escalar y conquistar este peldaño más en la vida.

A mis hermanas Roxana y Yolanda quienes siempre estuvieron pendientes para brindarme su apoyo incondicional.

LUZ MARINA ACERO COAQUIRA

AGRADECIMIENTO

Doy gracias a Dios y a mis padres, por haberme dado fuerzas y valor para culminar esta etapa de mi vida.

Al M.Sc. Martin Condori Concha, por aceptarme realizar este proyecto bajo su dirección, por su apoyo para guiar mis ideas ha sido un aporte invaluable.

A los miembros del jurado calificador:

- *Mg. Celso Wilfredo Calsin Velásquez*
- *D.Sc. Julio Cesar Laura Huanca*
- *Lic. Edwen Cabrera Cruz*

Quienes con sus críticas constructivas lograron mejorar esta tesis.

A todos los docentes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas por ser orientadores en vida profesional. A la universidad nacional del altiplano del cual siempre me sentiré orgullosa de ser parte.

A mis amigas Adelina, Eulalia y María por su apoyo moral.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO VII

BIBLIOGRAFÍA

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

LI: Linealmente independiente.

LD: Linealmente dependiente.

PL: Programación lineal.

PPL: Problema de programación lineal.

SBF: Solución básica factible

LD: Lado derecho

VDH: Variables duales de holgura.

VPF: Variable primal fija.

VPL: Variables primales libres

RESUMEN

El presente trabajado de investigación titulado “APLICACIÓN DEL MÉTODO SIMPLEX PARA UN MODELO EN LA PRODUCCION DE LECHE Y SUS DERIVADOS EN PEQUEÑOS Y MEDIANOS PRODUCTORES”, tiene como objetivo utilizar el método simplex para diseñar un modelo matemático que optimice las ganancias en la producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores, cuya hipótesis el método simplex determina un modelo matemático para optimizar las ganancias en base a métodos descritos para producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores. En tal sentido, el presente estudio se centró en la implantación de un modelo matemático que ayude en la optimización de ganancias a los productores dedicados a la actividad y presentar en forma coherente la teoría mínima necesaria para un curso básico de programación lineal que es de utilidad para la escuela profesional de Ciencias Físico Matemáticas y para otras escuelas que se imparten cursos de optimización. Además, se presenta una aplicación real de la programación lineal en un modelo para la producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores. Por tanto, en este trabajo, se analizó las definiciones, propiedades, teoremas y el método simplex de la teoría de programación lineal. La metodología usada en este trabajo es el método descriptivo, basada en la investigación bibliográfica y documental. Y llegando a la conclusión haciendo el uso de la programación lineal, el subsistema ganado y el subsistema cosecha se ha logrado diseñar el modelo matemático y optimizar las ganancias del productor.

Palabras Clave: Aplicación, Modelo matemático, Método simplex, Producción.

ABSTRACT

The present research work entitled "APPLICATION OF THE SIMPLEX METHOD FOR A MODEL IN THE PRODUCTION OF MILK AND ITS DERIVATIVES IN SMALL AND MEDIUM PRODUCERS", aims to use the simplex method to design a mathematical model that optimizes the gains in milk production and its derivatives in small and medium producers, whose hypothesis the simplex method determines a mathematical model to optimize profits based on described methods for the production of milk and its derivatives in small and medium producers. In this sense, the present study focused on the implementation of a mathematical model that helps in the optimization of profits to the producers dedicated to the activity and present in a coherent way the minimum theory necessary for a basic course of linear programming that is useful for the professional school of Physical Mathematical Sciences and for other schools that offer courses of optimization. In addition, a real application of linear programming is presented in a model for the production of milk and its derivatives in small and medium producers. Therefore, in this work, the definitions, properties and theorems of linear programming theory were analyzed. The methodology used in this work is the deductive method, based on bibliographic and documentary research. And coming to the conclusion making the use of linear programming, the subsystem gained and the subsystem harvest has been able to design the mathematical model and optimize the profits of the producer.

Keywords: Application, Mathematical model, Simplex method, production.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

La Programación Lineal es un procedimiento o algoritmo matemático mediante el cual se resuelve un problema indeterminado, formulado a través de ecuaciones lineales, optimizando la función objetivo, también lineal. Consiste en optimizar una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones que expresamos mediante un sistema de inecuaciones lineales.

La programación lineal constituye un importante campo de la optimización por varias razones, muchos problemas prácticos de la investigación de operaciones pueden plantearse como problemas de programación lineal. Algunos casos especiales de programación lineal, tales como los problemas de flujo de redes y problemas de flujo de mercancías se consideraron en el desarrollo de las matemáticas lo suficientemente importantes como para generar por si mismos mucha investigación sobre algoritmos especializados en su solución. Una serie de algoritmos diseñados para resolver otros tipos de problemas de optimización constituyen casos particulares de la más amplia técnica de la programación lineal.

Históricamente, las ideas de programación lineal han inspirado muchos de los conceptos centrales de la teoría de optimización tales como la dualidad, la descomposición y la importancia de la convexidad y sus generalizaciones. Del mismo modo, la programación lineal es muy usada en la microeconomía y la administración de empresas, ya sea para aumentar al máximo los ingresos o reducir al mínimo los costos de un sistema de producción. Algunos ejemplos son la mezcla de alimentos, la gestión de inventarios, la cartera y la gestión de las finanzas, la asignación de recursos humanos y recursos de máquinas, la planificación de campañas de publicidad, etc.

El desarrollo del presente trabajo de investigación servirá para mostrar las nuevas técnicas de producción de leche utilizando modelos matemáticos que ayuden a establecer un proceso eficiente adecuado para el productor, aplicando una de la herramientas poderosas como la programación lineal en el cual se aplica el método simplex en la modelación de producción de leche, el cual puede ser usado por los pequeños y medianos productores de la región, con la finalidad de establecer programas de producción más eficientes y obtener resultados aceptables con un modelo de programación lineal a mediano y largo plazo.

El trabajo de investigación se estructura de la siguiente manera:

En el capítulo I se desarrollan todas las componentes del problema, como son el planteamiento, formulación, hipótesis, en los cuales se constató la existencia de una real necesidad de generar una propuesta para mejorar la producción de leche. El capítulo II contiene el marco teórico, en el cual se desarrolla importantes sub capítulos estos son: programación lineal en lo que se ha investigado varias fuentes con el fin de describir y analizar grandes rasgos de definiciones y teoremas. Lo importante de este capítulo es que permitió orientar en el proceso de diseño del modelo. En el capítulo III se refiere al diseño de investigación, se aclara precisamente el tipo de investigación seleccionado, que en este caso es de tipo descriptivo. En el capítulo IV se describen los resultados de la investigación.

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La programación lineal constituye un importante campo de la optimización, los problemas de flujo de redes y problemas de flujo de mercancías que se consideraron en el desarrollo de las matemáticas lo suficientemente importantes como para generar mucha investigación sobre los algoritmos especializados en su solución, algoritmos diseñados para resolver otros tipos de problema de optimización. La programación lineal es muy usada en la microeconomía y la administración de empresas, ya sea para aumentar al máximo los ingresos o reducir al mínimo los costos de un sistema de producción.

En tal sentido, la presente investigación se centró en la implantación de un modelo matemático que ayude en la optimización de ganancias a los pequeños y medianos productores de leche, ya que muchas personas dependen de la producción de leche es uno de los sectores tal vez más importantes en la región de Puno en el distrito de vilque, la leche es uno de los productos que ha dado un ingreso relativamente seguro y creciente en los últimos años a los pequeños productores, pero no existe un adecuado aprovechamiento de los recursos, ni se modela la producción ya que los productores carecen de estas herramientas, lo cual muestra la necesidad de investigar en esta dirección.

En este sentido, optimizar la producción de leche involucra el empleo de herramientas que admitan adoptar las mejores decisiones, una de las cuales es la programación lineal en el cual se aplica el método simplex, criterios de optimización, teoría de dualidad y análisis de sensibilidad con la finalidad de obtener resultados aceptables a mediano y largo plazo.

Y que sea de utilidad en la escuela profesional de ciencias físico matemáticas y en las escuelas profesionales que se imparten el curso de optimización o programación lineal.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Será posible diseñar un modelo matemático utilizando el método simplex para optimizar las ganancias en la producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores?

1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

El método simplex determina un modelo matemático para optimizar ganancias en base a métodos descritos para producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores

1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

El desarrollo del presente trabajo de investigación servirá para mostrar las nuevas técnicas de producción de leche utilizando modelos matemáticos que ayuden a establecer un proceso eficiente adecuado para el productor, aplicando una de la herramientas poderosas como la programación lineal en el cual se aplica el método simplex en la modelación de producción de leche, el cual puede ser usado por los pequeños y medianos productores de la región y del país. Además, toda persona interesada en comprender y profundizar sobre el tema, será beneficiada. Ya que será útil para consultas de estudiantes o profesionales que se planteen problemas de aplicación en programación lineal.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1. Objetivo general

Utilizar el método simplex para diseñar un modelo matemático que optimice las ganancias en la producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores.

1.5.2. Objetivos específicos

- Describir la teoría de programación lineal: método simplex, criterios de dualidad y análisis de sensibilidad para producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores.
- Determinar un modelo matemático para optimizar las ganancias, en base a métodos descritos para producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores.
- Diseñar el algoritmo para optimizar las ganancias de leche y sus derivados en pequeñas y medianos productores.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

1.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Para la presente investigación se encontró los siguientes trabajos relacionados con la investigación, los cuales se mencionan a continuación.

- **DEL RIVERO JIMENES, Socorro – RUIZ MORENO Leoncio (1988).** En su trabajo de investigación titulado "Modelo de programación lineal para producción de papel carbón en la empresa productos pelikan, S. A." realizado en México. En el cual se aplica el método simplex, criterios de optimización. Y además una aplicación real de la programación lineal en el área de producción de papel carbón en la empresa productos pelikan.
- **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, Héctor A.- RUÍZ MORENO, Ricardo (1991).** En su trabajo de investigación titulado "El método simplex revisado con variables acotadas y su aplicación en el diseño de dietas para camarón", en el departamento de matemáticas conjuntamente con el Centro de Investigación Científica y Tecnología de la Universidad de Sonora. En el cual aplica la teoría de programación lineal con variables acotadas, el método simplex revisado con descomposición LU y el algoritmo que lleva a la solución del problema de diseño de dietas de manera eficaz.
- **DE LA PEÑA MONTEMAYOR, Jesús Eduardo (2001).** En su trabajo de investigación titulada "Aplicación de la programación lineal en la industria de la panificación", realizado en México. En esta investigación utiliza la teoría de programación lineal en la industria de panificación con la finalidad de minimizar los costos de fabricación, considerando todos los factores que influyen en la

capacidad instalada de la planta. En el cual aplica el método simplex, criterios de optimización, teoría de dualidad y de análisis de sensibilidad.

- **DELGADO HIDALGO, Liliana - TORO DIAZ Héctor Hernán (2010).** En este artículo de investigación titulada "Aplicación de un modelo de programación lineal en la optimización de un sistema de planeación de requerimientos de materiales (MRP) de dos escalones con restricciones de capacidad", realizado en Colombia. En esta investigación utiliza la teoría de programación lineal con la finalidad de implementar un modelo de programación lineal entera mixta que representa un sistema de manufactura de dos escalones, con la intensión de determinar decisiones óptimas de aprovisionamiento de materias primas o componentes. El modelo se programa usando software de modelación algebraica y se integra a una herramienta computacional desde la cual se administra el ingreso de los parámetros y la obtención de resultados además es validado en un ambiente real de manufactura, observando representar fielmente el sistema que obtiene decisiones de aprovisionamiento que minimice el costo total.
- **GOMEZ IRURETA, Francisco (2013).** En su artículo de investigación titulado "Modelo de programación lineal aplicado a la determinación del plan de cultivos y dimensión de una explotación familiar ideal en regadío", realizado en México. Este articulo tiene como objetivo mostrar un ensayo d programación lineal que pueda ser útil en estudios sobre el cálculo del plan de cultivo y dimensión de una explotación, además puede aventurarse que el modelo pude ser útil introduciendo en cada caso sucesivo.

1.2. BASE TEÓRICA

1.2.1. Algunos resultados del algebra lineal

Definición 2.2.1 (COMBINACION LINEAL) (Grossman & Flores Godoy, 2012) El vector $X \in \mathbb{R}^n$ es una combinación lineal de $\{ x_1, \cdots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ si existen escalares $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \in \mathbb{R}$ tales que

$$X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Definición 2.2.2 (INDEPENDENCIA LINEAL) (Grossman & Flores Godoy, 2012)

Un conjunto de vectores $\{x_1, \cdots, x_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ son linealmente independiente sí;

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

Entonces $\alpha_i = 0$, $\forall i = \widehat{1, n}$

Definición 2.2.3 (Kolman & Hill, 2006) (DEPENDENCIA LINEAL) Un conjunto de vectores $\{x_1, \cdots, x_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes si existen escalares $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ en $\mathbb{R}$ no todos iguales a cero tales que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \text{ y } \alpha_i \neq 0 \text{ para algún } i = 1, \cdots, n$$

Teorema 2.2.1 El rango de cualquier matriz es igual al máximo número de columnas linealmente independientes de dicha matriz; esto es, el rango de una matriz es la dimensión del subespacio generado por las columnas de dicha matriz. Ver demostración en (Friedberg, Insel, & Spence, pág. 147)

1.2.2. Convexidad

Definición 2.2.4 (Bazaraa, 2006) Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, es convexo si dados cualesquiera dos puntos x_1, x_2 en S, entonces $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in S$ para cada $\alpha \in [0,1]$.

Obsérvese que para cada α en el intervalo $[0,1]$, el vector $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ representa un punto en el segmento de recta que une a x_1 y x_2 .

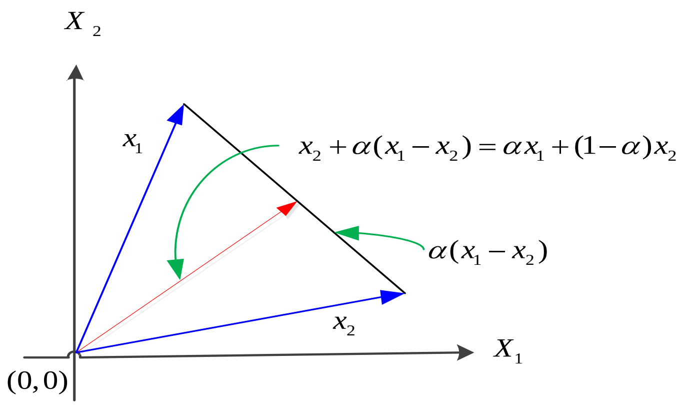


FIGURA 1: *Conjunto convexo*

FUENTE: (Del Rivero Jimenez & Ruiz Moreno)

Es decir un conjunto S es convexo si para cualesquier dos puntos en S el segmento de línea que los une está totalmente contenida en S.

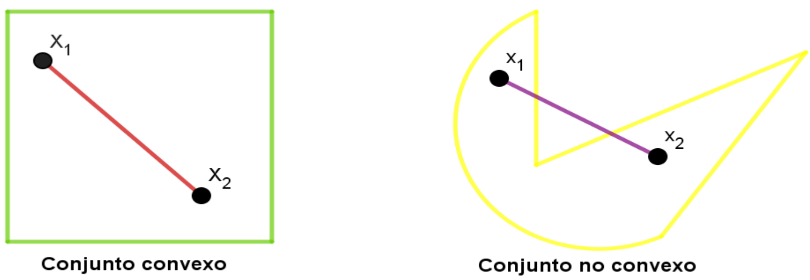


FIGURA 2. *Ejemplos de conjuntos convexos y no convexos.*

FUENTE: *Elaboración propia*

Definición 2.2.5 (COMBINACION LINEAL CONVEXA).- El vector $X \in \mathbb{R}^n$ es una combinación lineal convexa de los vectores $\{x_1, \cdots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ si existen escalares $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \in \mathbb{R}$ tal que

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,, donde\ \alpha_i \geq 0, \ \ y \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \,, \forall i = 1,2, \cdots, n$$

1.2.3. Hiperplano

Definición 2.2.6 (Bazara & Jarvis, 1989) Un hiperplano **H** en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ es una colección de puntos de la forma

$$\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}\}$$

Donde p es un vector no nulo en $\mathbb{R}^n$ y α es un escalar.

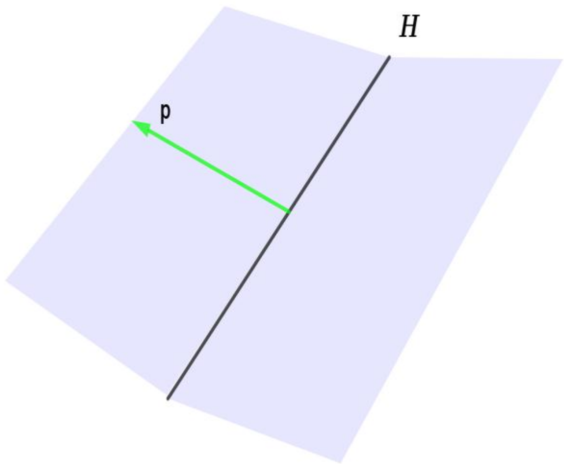


FIGURA 3:** Hiperplano **H

***FUENTE**: Elaboración propia*

Definición 2.2.7 (Bazaraa, 2006) Un hiperplano $\boldsymbol{H}$ define dos semiespacios cerrados de la forma

$$H^{+} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{\alpha}\}$$

$$H^{-} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{\alpha}\}$$

Y dos semiabiertos $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{\alpha}\}$ y $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} < \boldsymbol{\alpha}\}$

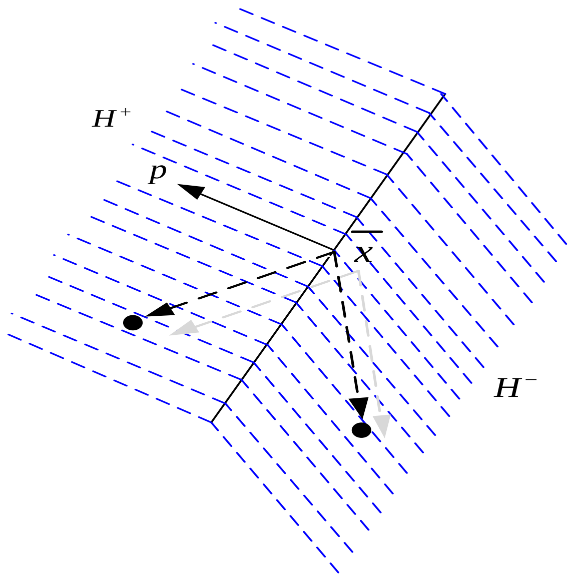


***FIGURA 4:** Semiespacios $\boldsymbol{H}^{+}$ y $\boldsymbol{H}^{-}$*

FUENTE: (Bazaraa, 2006)

Definición 2.2.8 (Bazaraa, 2006) Sea S un conjunto no vacío en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y sea $\bar{x} \in \partial S$, donde ∂S denota la frontera de S. Un hiperplano $\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}\}$ es llamado un hiperplano soporte de S en $\bar{x}$ si se cumple sólo una de las siguientes condiciones:

i) $S \subseteq H^{+}$, es decir, $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) \geq \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}.$

ii) $S \subseteq H^{-}$, es decir, $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) \leq \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}.$

Definición 2.2.9 (Bazara & Jarvis, 1989) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ no vacío y $\boldsymbol{H}$ un hiperplano soporte de S. Denominaremos puntos soporte a los puntos del conjunto $S \cap H$.

Definición 2.2.10 (Bazara & Jarvis, 1989) Un conjunto no vacío $C \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$es llamado un cono convexo con vértice en el origen si para cualquier $x \in C$, entonces $\lambda x \in C$, $\forall \lambda \geq 0$. Por lo tanto, un cono convexo es un conjunto convexo cuyos elementos son todos los rayos que salen del origen.

Observación: Si $x \in C$, donde C es cono, entonces la semirecta que contiene al origen y pasa por el punto x debe estar contenida en el cono C.

1.2.4. Conjuntos poliédricos

Definición 2.2.9 (Bazara & Jarvis, 1989) Se llama poliedro a un conjunto de la forma

$$p = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} / Ax \leq b\}$$

Con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$, es decir; un poliedro es una intersección finita de semiespacios.

Observación:

- Un conjunto poliedro es un conjunto cerrado y convexo.
- Un conjunto poliédrico puede ser representado por un número finito de desigualdades y/o ecuaciones lineales.

1.2.5. Puntos extremos y direcciones extremas

Definición 2.2.10 (Bazaraa, 2006) Sea $S \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ un conjunto convexo no vacío. Un vector $x \in S$ es un punto extremo de S si $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ con $x_1, x_2 \in S$ y $\alpha \in (0,1)$ implica que $x = x_1 = x_2$; es decir, un punto extremo es aquel que no se puede escribir como combinación convexa de dos puntos diferentes de S.

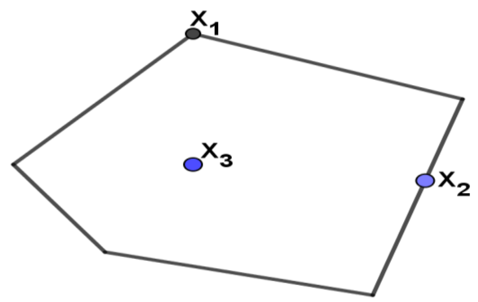


FIGURA 5: *Puntos extremos y no extremos*

FUENTE: *elaboración propia*

En la figura 5 se puede observar que x_1 es un punto extremo de S, mientras que x_2, x_3 no lo son.

El concepto de puntos extremos juega un papel importante dentro de la programación lineal, debido a que cada punto extremo es una posible solución del problema que se está tratando.

Definición 2.2.11 (Bazaraa, 2006) Sea $S \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ un conjunto cerrado y convexo**.** Un vector $d \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, distinto de cero, es una dirección de S si para todo $x \subset S$ se tiene que $x + \lambda d \in S$, $\forall \lambda \geq 0$.

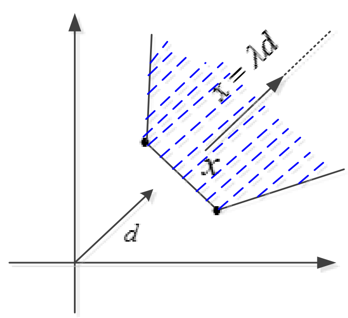


FIGURA 6: d *es una dirección de* ***S***

FUENTE: (Bazaraa, 2006)

Observación: Por la definición dada la "dirección", el conjunto debe ser no acotado para que tenga al menos una dirección.

Definición 2.2.12 Dos direcciones d_1, d_2 de S son distintas si $d_1 \neq \alpha d_2$ para cualquier $\alpha > 0$.

Definición 2.2.13 (Bazaraa, 2006) Una dirección d de S es una dirección extrema si no se puede escribir como combinación lineal positiva de dos direcciones distintas; es decir, si:

$$d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \text{ para } \lambda_1, \lambda_2 > 0, \text{ entonces } d_1 = \alpha d_2 \text{ para algún } \alpha > 0.$$

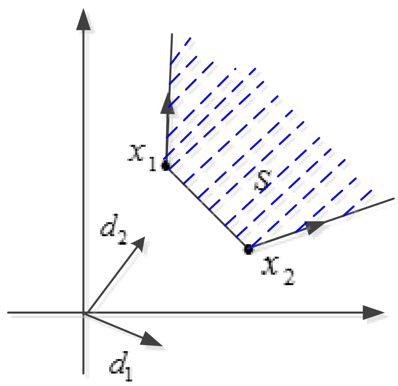


FIGURA 7: ***d_1, d_2*** *son direcciones extremas de* ***S***.

FUENTE*:* (Bazara & Jarvis, 1989)

1.2.6. Caracterización de puntos extremos y direcciones extremas

Teorema 2.2.2 (Bazaraa, 2006) (CARACTERIZACIÓN DE PUNTOS EXTREMOS)

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : Ax = b, x \geq 0\}$, donde A es una matriz $m \times n$ con rango m y $b \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$**.** Un punto extremo de S si y sólo si A puede ser descompuesta en la forma $[B \;\; N]$ tal que

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde B es una matriz $m \times n$ invertible tal que $B^{-1}b \geq 0$.

Prueba

$\Leftarrow$) Como $B^{-1}b \geq 0$, entonces $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \geq 0$, además

$$Ax = [B \;\; N] \cdot \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = BB^{-1}b = b$$

Por lo tanto $x \in S$.

Ahora supongamos que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, donde $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in (0,1)$.

Sea $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$ y $x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$, luego $\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\lambda} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$, ya que

$x_{12} \geq 0, x_{22} \geq 0$ y $\lambda > 0$, se tiene que $x_{12} = x_{22} = 0$.

en consecuencia, $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$ y $x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por otro lado

$$Ax_1 = b$$

$$[B \;\; N] \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = b$$

$$Bx_{11} = b$$

$$x_{11} = B^{-1}b$$

de forma similar $x_{12} = B^{-1}b$; y con esto se tiene que $x = x_1 = x_2$, por lo tanto, x es un punto extremo.

$\Rightarrow$) x es un punto extremo de S. Se debe demostrar que $A = [B \;\; N]$, B es invertible y

$$\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

<u>En efecto</u>:

Por hipótesis $x \in S \subset \mathbb{R}^n$, sin pérdida de generalidades supongamos que

$x = (x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)^T$, donde $x_1, x_2, \cdots, x_k$ son positivos con $k \leq n$.

luego

$$Ax = b$$

$$[A_1\ A_2\ \cdots\ \ A_k]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=b$$

$$[A_1x_1+A_2\,x_2+\cdots+A_kx_k]=b$$

entonces

$$[A_1\ A_2\ \cdots\ \ A_k]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\end{bmatrix}=b \qquad (2.1)$$

Probemos que $\{A_1\,,A_2,\cdots,A_k\}$ son linealmente independientes.

Supongamos que $\{A_1\,,A_2,\cdots,A_k\}$son linealmente dependientes; es decir, existen escalares $\{\lambda_1\,,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\}$ no todos ceros talque $A_1x_1+A_2\,x_2+\cdots+A_kx_k=0$ sea $(\lambda=\lambda_1\,,\lambda_2,\cdots,\lambda_k,0{,}0,\cdots,0)^T\in\mathbb{R}^n$ y $\alpha>0$, definimos $x_1=x+\alpha\lambda$ y $x_2=x+\alpha$, donde α es escogido de tal forma $x_1\geq 0$ y $x_2\geq 0$. Notar que

$$Ax_1=Ax+\alpha A\lambda=b+\sum_{i=1}^{k}\lambda_iA_i=b$$

Puesto que

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_iA_i=0$$

en forma similar, $Ax_2=b$.

Por lo tanto $x_1,x_2\in S$ y como $\alpha>0$ y $\lambda\neq 0$, entonces $x_1\neq x_2$.

Además

$$x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2.$$

Lo que indica que x no es punto extremo; contradiciendo así la hipótesis, por lo tanto $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Puesto que $ran(A) = m$, entonces hay m columnas linealmente independientes lo que indica que $k \leq m$.

Si $k = m$, entonces de la ecuación (2.1) se tiene

$$[A_1 \; A_2 \; \cdots \; A_k] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = b$$

$$Bx_B = b$$

$$x_B = B^{-1}b$$

Pues B es invertible.

Si $k < m$, entonces se puede escoger $m - k$ y $n - k$ columnas tal que ellas, junto con las k primeras columnas forman un conjunto de vectores linealmente independientes. De este modo podemos formar la matriz $B = [A_1 \;\; A_2 \;\; A_k \;\; A_{k+1} \; \cdots \; A_m]$ invertible.

Es decir, A podemos expresar como $Ax = [B \;\; N]$, donde B es matriz invertible de $m \times n$ y además $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$, puesto que $x_i > 0$, $\forall i = 1,2, \cdots, k$.

Corolario 2.2.1 (Bazaraa, 2006) El número de puntos extremos de S es finito.

Teorema 2.2.3 (Bazaraa, 2006) (EXISTENCIA DE PUNTOS EXTREMOS)

Sea un conjunto poliédrico no vació de la forma $S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = b,\ x \geq 0\}$, donde A es una matriz de $m \times n$ con rango m y $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces S tiene al menos un punto extremo.

Teorema 2.2.4 (CARACTERIZACION DE DIRECCIONES EXTREMAS)

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$ no vacio, donde A es una matriz de $m \times n$ con rango m y $b \in \mathbb{R}^n$. Un vector $\bar{d}$ es una dirección extrema de S si y sólo si A puede descomponerse en $[B\ \ N]$ tal que $B^{-1}a_j \leq 0$, para alguna columna a_j de N y $\bar{d}$ es un múltiplo positivo de $d = \begin{bmatrix} B^{-1}a_j \\ e_j \end{bmatrix}$, donde e_j es un vector de $n - m$ componentes de valor cero excepto en la posición j que tiene valor 1.

Prueba

⇐) Como $B^{-1}a_j \leq 0$, entonces $d = \begin{bmatrix} B^{-1}a_j \\ e_j \end{bmatrix} \geq 0$, además

$$Ad = [B\ \ N] \cdot \begin{bmatrix} B^{-1}a_j \\ e_j \end{bmatrix} = -BB^{-1}a_j + Ne_j = -a_j + a_j = 0.$$

Por lo tanto d es una dirección.

Ahora supongamos que

$$d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$$

donde $\lambda_{1,}\lambda_2 > 0$ y d_1, d_2 son direcciones de S.

Notar que d tiene $m - n - 1$ componentes iguales a cero, entonces las correspondientes componentes de d_1 y d_2, también deben ser iguales a cero, pues $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$.

Así d_1 y d_2, pueden ser escritos como $d_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} d_{11} \\ e_j \end{bmatrix}$ y $d_2 = \alpha_2 \begin{bmatrix} d_{21} \\ e_j \end{bmatrix}$, donde $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$. Como d_1 y d_2 son direcciones, entonces $Ad_1 = Ad_2 = 0$.

luego

$$Ad_1 = 0$$

$$Ad = [B \;\; N] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 d_{11} \\ \alpha_1 e_j \end{bmatrix} = 0$$

$$\alpha_1 B d_{11} + \alpha_1 N e_j = 0$$

$$\alpha_1 B d_{11} + \alpha_1 N e_j = 0$$

$$\alpha_1 B d_{11} + \alpha_1 a_j = 0$$

$$d_{11} = B^{-1} a_j.$$

De forma $d_{21} = -B^{-1}a_j$. Así se tiene que d_1 y d_2 no son distintos, el cual implica que d es una dirección extrema ya que $\bar{d}$ es un múltiplo positivo de d, se tiene que $\bar{d}$ también es una dirección extrema.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\bar{d}$ es una dirección extrema de A. Sin pérdida de generalidad, supongamos que

$d = \left(\overline{d_1}, \cdots, \overline{d_k}, 0, \cdots, 0, \bar{d}_j, 0, \cdots, 0\right)^T$, donde $\bar{d} > 0$, para $i = 1,2, \cdots, k$ y para $i = j$ luego, $A_1, A_2, \cdots, A_k$ son linealmente independientes.

<u>En efecto:</u>

Por contradicción supongamos que esto no se cumple, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ no todos ceros tal que

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_k x_k = 0$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i = 0$$

Sea $(\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, 0,0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ y escojamos $\alpha > 0$ talque $d_1 = \bar{d} + \alpha\lambda$ y $d_2 = \bar{d} - \alpha\lambda$ sean no negativos.

Notar que

$$Ad_1 = A\bar{d} + \alpha A\lambda = 0 + \alpha \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i = 0 + \alpha 0 = 0.$$

de forma similar $Ad_2 = 0$, puesto que $d_1, d_2 \geq 0$, se tiene que d_1 y d_2 son direcciones de S. Notar también que d_1 y d_2 son distintos, puesto que $\alpha > 0$ y $\lambda \neq 0$.

Además $\bar{d} = \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{2}d_2$, lo que indica que $\bar{d}$ no es una dirección extrema; contradiciendo así la hipótesis, por lo tanto $A_1, A_2, \cdots, A_k$ son linealmente independientes.

Puesto que $ran(A) = m$, se tiene que $k \leq m$, entonces existe $m-k$ vectores en el conjunto de vectores $\{A_i : i = k+1, \cdots, n ; i \neq j\}$, el cual junto con $A_1, A_2, \cdots, A_k$ forman un conjunto vectores linealmente independientes.

Sin pérdida de generalidades supongamos que esos vectores son $A_{k+1}, \cdots, A_m$. Denotar a $[A_1 \;\; A_2 \;\cdots\; A_k]$ ·por B y notar que B es invertible.

Así que

$$0 = A\bar{d} = B\hat{d} + a_j\bar{d}_j \tag{2.2}$$

donde d es un vector de las m componentes de $\hat{d}$.

De la ecuación (2.2) se tiene $\hat{d} = -\bar{d}_j B^{-1} a_j$ y por tanto $\bar{d} = \bar{d}_j \begin{bmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{bmatrix}$.

Además, como $\bar{d} > 0$ y $\bar{d}_j > 0$ tiene que $B^{-1}a_j \leq 0$, completando así la prueba.

Teorema 2.2.5 (Bazaraa, 2006) (TEOREMA DE REPRESENTACIÓN)

Sea un conjunto poliédrico no vació de la forma $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$, donde A es una matriz de $m \times n$ con rango m y $b \in \mathbb{R}^n$. Sean $x_1, \cdots, x_k$ los puntos extremos de S y $d_1, d_2, \cdots, d_l$ las direcciones extremas de S. Entonces $x \in S$ si y sólo si x puede ser escrito como

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_i d_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0 \,, \qquad \forall i = 1,2, \cdots, k$$

$$\mu_j \geq 0 \,, \qquad \forall i = 1,2, \cdots, l$$

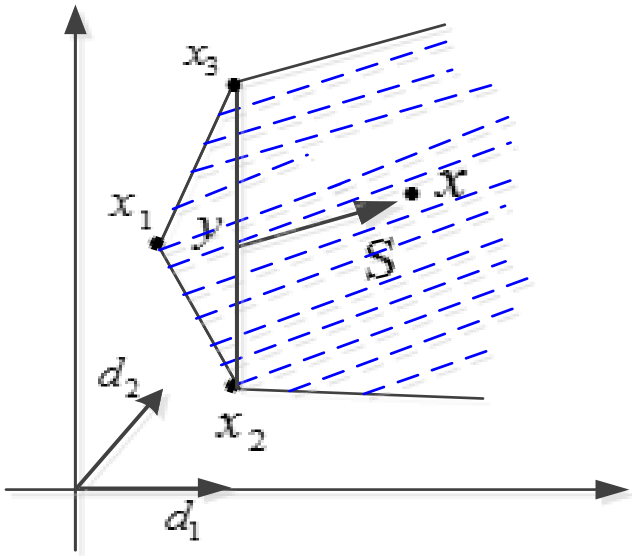


FIGURA 8: *Representación de conjuntos poliédricos en términos de puntos extremos y direcciones extremas*

FUENTE: (Bazara & Jarvis)

Teorema 2.2.6 (EXISTENCIA DE DIRECCIONES EXTREMAS)

Sea un conjunto poliédrico no vació de la forma $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$, donde A es una matriz de $m \times n$ con rango m y $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces S tiene al menos una dirección extrema si y sólo si S es no acotado.

Prueba

⇒) Si S tiene al menos una dirección extrema. Probar que S no es acotado.

<u>**En efecto:**</u>

Por el absurdo, supongamos que S es acotado, entonces $\exists k > 0$: $\|x\| \leq k, \forall x \in S$.

Sea d una dirección extrema, entonces d es una dirección. Por tanto, para cualquier $x \in S$ tiene $x + \alpha d \in S,\ \forall \alpha \geq 0$.

Sea la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ tal que $x = x + nd$, para algún $x \in S$. Como S es acotado, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in k\subset\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es convergente, entonces $(x_n)_{n\in k\subset\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy; es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in K \subset \mathbb{N} : \ \|x_m - x_s\| < \varepsilon, \forall m, s \geq n_0$$

en particular para $m = m_0 > n_0$ y $s = m_0 + r,\ r \geq 1, s \in K$, entonces

$$\left\|x_{m_0} - x_{m_{0+r}}\right\| < \varepsilon$$

Por otro lado

$$\left\|x_{m_0}\right\| = \left\|x_{m_{0+r}} + x_{m_0} - x_{m_0}\right\| \leq \left\|x_{m_0} - x_{m_{0+r}}\right\| + \left\|x_{m_0}\right\| < \varepsilon + \left\|x_{m_0}\right\|$$

entonces

$$\left\|x_{m_{0+r}}\right\| < \varepsilon + \left\|x_{m_0}\right\| \tag{2.3}$$

Además

$(m_0 + r)\|d\| = \|x + (m_0 + r)d - x\| + \|x\| \leq \|x + (m_0 + r)d\| = \left\|x_{m_{0+r}}\right\| + \|x\|,$

entonces

$$(m_0 + r)\|d\| \leq \left\|x_{m_{0+r}}\right\| + \|x\| \tag{2.4}$$

Luego de las ecuaciones (2,4) y (2,3) se tiene:

$$(m_0 + r)\|d\| \leq \|x_{m_{0+r}}\| + \|x\| < \varepsilon + \|x_{m_0}\| + \|x\|$$

entonces

$$\|x\| > (m_0 + r)\|d\| - (\varepsilon + \|x_{m_0}\|)$$

Como $(m_0 + r)\|d\| - (\varepsilon + \|x_{m_0}\|) \to \infty$, cuando $r \to \infty$ entonces $\|x\| \to \infty$, hecho que lleva a una contradicción por haber supuesto que S es acotado. Por lo tanto, S es no acotado.

$\Leftarrow$) Sea S tiene al menos una dirección extrema.

<u>En efecto:</u>

Por el absurdo, supongamos que S no posee direcciones extremas, entonces por el teorema (2.2.5) se tiene que cualquier elemento de S se puede representar como:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

Donde $\lambda_i \in [0,1]$, $x \in S$, $\forall i = 1,2,\cdots,k$

y

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Ahora, usando desigualdad triangular se tiene:

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \|x_i\|$$

Sea $t = \max_{1 \leq i \leq k} \|x_i\|$, entonces $\|x_i\| \leq t,\ \forall i = 1,2,\cdots,k$. Luego

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i t = t \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = t$$

Así $\|x\| \leq t, \ \forall x \in S$, entonces S es acotado. Contradiciendo así la hipótesis. Por lo tanto S posee al menos una dirección extrema.

1.2.7. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 2.2.14 (Kolman & Hill, 2006) Un sistema arbitrario de m ecuaciones lineales con n incógnitas se puede definir como:

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} . \tag{2.5}$$

Donde tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \quad \text{es la matriz de los coeficientes}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \quad \text{es la matriz de las variables}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1} \quad \text{es la matriz de los términos independientes}$$

$$[A:B] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)_{m\times(n+1)} \quad \text{es la matriz ampliada}$$

De modo que el sistema (2.5) se puede escribir también como $Ax = b$.

Observación:

- Si $Ax = 0$ con $b_i = 0$, $\forall i = 1,2,\cdots,m$ del sistema anterior, se llama sistema de ecuaciones lineales homogéneas.
- Si $Ax = b$, con $b_i \neq 0$, $\forall i = 1,2,\cdots,m$ del sistema anterior, se le llama sistemas de ecuaciones lineales no homogéneas.

Definición 2.2.15 (ELIMINACIÓN GAUSSIANA) Es un procedimiento sistemático para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El método consiste en reducir la matriz aumentada a una forma suficientemente simple, para que el sistema se pueda resolver por simple inspección.

Definición 2.2.16 (Kolman & Hill, 2006) (DESCOMPOSICIÓN O FACTORIZACIÓN LU) La descomposición o factorización LU (también conocida como en la literatura especializada como factorización triangular) la cual descompone una matriz como producto de una matriz triangular inferior y una triangular superior. Esta descomposición conduce a un algoritmo para resolver un sistema lineal $Ax = b$, que es el más utilizado en las computadoras para resolver sistemas lineales. La razón principal por la que este método está utilizado, radica en que proporciona la manera más económica de resolver un sistema lineal en el que tenemos que cambiar de manera repetida el lado derecho. Este tipo de problema suele presentarse en problemas de aplicación.

1.2.8. Programación lineal

Básicamente no es otra cosa que el estudio matemático, de cierta clase de optimización que se aplica siempre en los hechos de una situación económica, estudia la optimización de una función lineal sujeta a desigualdades lineales.

1.2.8.1. Modelo matemático

Definición 2.2.17 (Alvarez A., 2001).- La programación lineal se ocupa del estudio de la optimización (maximizar o minimizar) una función de varias variables, la cual está sujeta por un conjunto de inecuaciones lineales de varias variables. A la función que se debe optimizar se le llama función objetivo, mientras que a las inecuaciones se les llama restricciones o limitaciones.

Maximizar o minimizar $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

Sujeto a las condiciones o restricciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ (\leq)(\geq)(=)b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ (\leq)(\geq)(=)b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ (\leq)(\geq)(=)b_m$$

Con $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$

A la función $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ se le llama **"función objetivo"**, al vector $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^t$ se le llama "**vector de costos**", a las variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se les llama "**variables de decisión**", la matiz de coeficientes de la matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se le llama "**matriz de restricciones**" y a sus coeficientes se les llama "coeficientes tecnológicos", al vector $(b_1, b_2, \cdots, b_m)$ se llama "**vector de requerimientos".** En términos más compactos de notación vectorial el PPL se plantea de la siguiente manera:

$$\text{Max o min. } c^t x$$

$$\text{s. a} \qquad Ax \geq b$$

$$x \geq 0.$$

Considere el sistema $Ax = b$, con $x \geq 0$, en donde A es una matriz de $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Suponga que $ran(A, b) = ran(A) = m$. Después de un posible reordenamiento de las columnas de A, se tiene $A = [B \;\; N]$, en donde B es una matriz invertible de orden $m \times n$ y N es una matriz de orden $m(n - m)$.

Esta descomposición de la matriz A genera una descomposición de:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

Así $Ax = b$ queda expresada como:

$$Bx_B + Nx_N = b \tag{2.6}$$

Multiplicando a (2.6) por B^{-1}, puesto que B es invertible, se obtiene

$$x_B = B^{-1}b + B^{-1}Nx_N \tag{2.7}$$

Entonces para cualquier x_N y x_B dado en (2.7) se tiene que $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ satisface $Ax = b$.

Particularmente, si $x_N = 0$ y $x_B = B^{-1}b$ se tiene que $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ también satisface

$$Ax = b.$$

2.2.8.2. Metodología para obtener el modelo

Aunque existan varias técnicas para lograr el modelo matemático de cada problema en particular se recomienda lo siguiente para llegar al propósito.

- **Analizar el problema de decisión**. Describir la estructura de los valores que el modelo debe calcular, junto con las limitaciones y el objeto esencial.
- **Describir las variables de decisión**. Valores o respuestas que optimizan la función objetivo y que se calcularan mediante la solución del modelo matemático.
- **Establecer la función objetivo**. Esto es, construir el modelo que cuantifica el objetivo del problema y definir el tipo de optimización.
- **Establecer las limitaciones**. Determinar aquellos ítems (recursos, subprocesos) que resultan ser limitantes en el proceso para el que se elabora el modelo y construir las expresiones que los cuantifican.

2.2.8.2. Solución factible

Es cualquier conjunto de valores positivos para las variables $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, que cumple cada una y todas las restricciones del modelo matemático de programación lineal. En caso contrario, es decir, no cumplen la condición de no negatividad o algunas de las restricciones, se define como no factible.

Definición 2.2.18 La solución $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ del sistema $Ax = b$, en donde $x_B = B^{-1}b$ y $x_N = 0$, se denomina solución básica del sistema.

Si $x_B = B^{-1}b \geq 0$, entonces el vector $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ se denomina solución básica factible.

La matriz B se denomina matriz básica (o simplemente base) y N se denomina matriz no básica. Las componentes x_B se denominan variables básicas y las componentes de x_N se denominan variables no básicas.

Definición 2.2.19 Si $x_B = B^{-1}b > 0$, entonces $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ se denomina solución básica factible no degenerada.

Definición 2.2.20 Si por lo menos una componente $x_B = B^{-1}b$ es igual a cero entonces $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ se denomina solución básica degenerada.

2.2.8.3. Solución óptima

Es el conjunto de valores para las variables $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, que satisfacen el criterio de factibilidad y optimizan la función objetivo del modelo matemático de programación lineal.

Teorema 2.2.6 (CONDICION DE OPTIMALIDAD DE LA PL)

Considere el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &\text{Máx. } c^T x \\ &\text{s. a} \quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geq 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Donde $c \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz de $m \times n$ con rango m y $b \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que la región factible $\{F = x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ es no vacía y sean $x_1, x_2, \cdots, x_k$ los puntos extremos y $d_1, d_2, \cdots, d_l$ las direcciones extremas de la región factible F. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución óptima finita es que $c^t d_j \leq 0$,

$\forall j = 1, \cdots, l$. Si este es el caso, entonces existe un punto extremo x_j que resuelva el problema.

Prueba

Por el teorema de la representación se tiene que todo el elemento de F se puede expresar como:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j \qquad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \forall i = 1, \cdots, k$$

$$\mu_j \geq 0, \forall j = 1, \cdots, l$$

Reemplazando (2.9) en el problema (2.8) se tiene

$$Máx. \ \sum_{i=1}^{k} (c^T x_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{l} (c^T d_j)\mu_j$$

$$s.a \sum_{i=1}^{k} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \forall i = 1, \cdots, k$$

$$\mu_j \geq 0, \forall j = 1, \cdots, l$$

Observa que si $c^T d_j > 0$ para algún j, entonces μ_j puede elegirse arbitrariamente grande, proporcionando una solución no acotada. Esto demuestra que una condición necesaria y suficiente para solución óptima finita es $c^T d_j \leq 0, \forall j = 1, \cdots, l$.

Supongamos que $c^T d_j \leq 0, \forall j = 1, \cdots, l$ como queremos maximizar la función objetivo elegimos $\mu_j = 0, \forall j$ con lo que el problema se reduce a

$$maximizar\ c^T \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_j x_j \right)$$

$$s.a \sum_{i=1}^{k} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \forall i = 1, \cdots, k$$

Está claro que la solución óptima de este problema es finita y se encuentra haciendo $\lambda_i = 1$ y $\lambda_j = 0$ para $j \neq i$, donde el índice i viene dado por

$$c^T x_i = \max_{1 \leq j \leq k} c^T x_j.$$

Observa que $\lambda_i = 1$ y $\lambda_j = 0$ $j \neq i$ implica que la solución del problema se alcanza en el punto extremo $i - ésimo$, con lo que tenemos demostrado el teorema.

2.2.8.4. Teorema fundamental de la programación lineal

En este apartado expondremos un teorema esencial para la estrategia de búsqueda de la solución de un tipo muy importante de los puntos extremos del poliedro que definen las condiciones del problema en la identificación de las soluciones básicas factibles y del óptimo.

Definición 2.2.21 (Luenberger , 2008) Sea k la región de factibilidad de un PPL en su forma estándar entonces.

- $x \in k$ es una SOLUCION BASICA FACTIBLE si x tiene a lo más "m" componentes positivos.

- $x \in k$ es una SOLUCION FACTBLE OPTIMA si x optimiza la función objetivo.

Teorema 2.2.7 (FUNDAMENTAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL)

Dado un programa lineal en la forma estándar, donde A es una matriz $m \times n$ de rango m.

a) Si hay una solución factible, hay una solución factible básica.

b) Si hay una solución factible optimal, hay una solución factible básica optimal.

Prueba

a) Si hay una solución factible, hay una solución factible básica.

En efecto:

Sea $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ una solución factible y $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ las columnas de la matriz A de $m \times n$ del sistema $Ax = b$ se puede representar de la siguiente forma.

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b$$

Donde a_i es la $i - ésima$ columna de A. Sin pérdida de generalidad supongamos que solo p componentes de x son distintas de cero y que estas son las primeras, entonces se tendría.

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_p a_p = b \qquad (2.10)$$

y se dan dos casos:

Caso 1. Los vectores columna $a_1, a_2, \cdots, a_p$ son linealmente independientes. En este caso puesto que $r(A) = m$, necesariamente se tiene $p \leq m$ de donde se concluye que

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_p, 0, \cdots, 0)$$

Es una solución básica factible.

Caso 2. Los vectores columna $a_1, a_2, \cdots, a_p$ son linealmente dependientes lo cual implica que existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ no todos iguales a cero tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_p a_p = 0 \qquad (2.11)$$

Donde podemos suponer que al menos una de las λ_i con $i = 1.2. \cdots, p$ es positivo multiplicando (2.11) por β y restando de (2.10) se obtiene

$$(x_1 - \beta\lambda_1)a_1 + (x_2 - \beta\lambda_2)a_2 + \cdots + (x_p - \beta\lambda_p)a_p = b \qquad (2.12)$$

Ahora tenemos que $\bar{x} = (x_1 - \beta\lambda_1, x_2 - \beta\lambda_2, \cdots, x_p - \beta\lambda_p, 0,0, \cdots 0)$

Pero no necesariamente se satisface que $\bar{x} \geq 0$. Si $\beta \geq 0$ para los λ_i negativas no hay problema pues $x_i - \beta\lambda_i \geq 0$ pero para las $\lambda_i \geq 0$ necesitamos que

$$x_i - \beta\lambda_i \geq 0$$

O lo que es lo mismo $\frac{x_i}{\lambda_i} \geq \beta$. Si tomamos $\beta = \min\{\frac{x_i}{\lambda_i} / \lambda_i > 0\}$. Entonces $\bar{x}$ es una solución factible y además se tendrá que $x_i - \beta\lambda_i = 0$ para al menos un índice i, entonces la solución factible tendrá $p - 1$ componentes pues una se anula. Este argumento se puede repetir hasta obtener una solución factible que tenga a lo más m componentes positivas o equivalentes hasta que se obtenga vectores linealmente independientes, con lo cual ya será una solución factible básica.

b) Si hay una solución factible optimal, hay una solución factible básica optimal.

<u>En efecto</u>:

Sea $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ una solución factible optima y que p variables son positivas al igual que en a), si las p columnas correspondientes son L. I entonces se tendrá que $p \leq m$ y la solución factible optima es la solución básica.

Consideremos el caso_$A = (a_1, a_2, \cdots, a_p)$ son L.D. entonces como en a) podemos encontrar p' columnas L.I.

Sea $\bar{x} = (x_1 - \beta\lambda_1, x_2 - \beta\lambda_2, \cdots, x_p - \beta\lambda_p, 0,0, \cdots 0)$ la solución factible con estas características, entonces también es factible básica y lo que hay que ver es que también es óptimo.

Probaremos por contradicción. Para β suficientemente pequeño, $\bar{x}$ es una solución factible para valores positivos o negativos de β. El valor de la función objetivo es:

$$c^T x = (c_1 x_1 - c_2\beta\lambda_1, c_2 x_2 - c_2\beta\lambda_2, \cdots, c_P x_p - c_P\beta\lambda_p, 0,0, \cdots 0)$$

Supongamos que $c_i\lambda_i \neq 0$, para algún $i = 1, \cdots p$, β de magnitud pequeña y signo apropiado podría llegar a ser $c^T\bar{x}$ más pequeño que $c^T x$ lo cual contradice al hecho de que $c^T x$ es solución óptima. Por lo tanto $c_i\beta\lambda_i = 0$ y $c^T\bar{x}$ es solución óptima.

Observaciones: Sean $x_1\ y\ x_2$ óptimos con $x_1 \neq x_2$ entonces cualquier combinación convexa de $x_1\ y\ x_2$ es óptima.

2.2.9. Método simplex

Ahora con todo lo anterior mencionado podemos mostrar el método simplex.

Por resultados de la programación lineal sabemos que x es un punto extremo si y solo si es una SBF, el método simplex, en lugar de probar cada punto extremo de la región factible, empieza con cualquier punto extremo y mediante algunas operaciones elementales pasa a otros puntos extremos garantizando paso a paso siempre decrecen o siempre crecen los valores de la función objetivo según sea el caso, es decir en dirección del óptimo.

2.2.9.1. Mejora de una solución básica factible

Obtener todas las soluciones básicas factibles para evaluarlas en la función objetivo y luego compararlas para determinar la solución óptima, el problema es de maximizar, la idea más sencilla para reducir los costes computacionales es reducir el número de soluciones factibles básicas al calcular. Notemos que si el problema es acotado para obtener la solución bastara, partiendo de una solución factible básica inicial. El método simplex proporciona una estrategia que permite mejorar.

$$Max\ o\ min\ f(x)$$

$$\text{s. a} \quad Ax = b \tag{2.13}$$

$$x \geq 0$$

Donde A es una matriz con rango m.

Supongamos que se tiene una solución básica factible $\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ cuyo valor objetivo z_0 esta dado por

$$z_0 = c\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = [c_B \quad c_N]\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = c_B B^{-1}b \tag{2.14}$$

Sea $\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$, donde x_B y x_N denotan respectivamente, al conjunto de variables básicas y al conjunto de variables no básicas para la base dada. Entonces la factibilidad requiere que

$$x_B \geq 0, x_N \ \geq 0\ .$$

$$b = Ax = Bx_B + Nx_N \tag{2.15}$$

Como B es invertible, entonces multiplicando (2.15) por B^{-1} se tiene:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$= B^{-1}b - \sum_{j \in R} B^{-1}a_j b_j \tag{2.16}$$

$$= \bar{b} - \sum_{j \in R} y_j x_j \tag{2.17}$$

donde R es el conjunto actual de índices de las variables básicas.

De las ecuaciones (2.14) y (2.15) y denotando como z al valor de la función objetivo, se obtiene:

$$z = c^T x = [c_B \quad c_N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$= c_B x_B + c_N x_N$$

$$= c_B (B^{-1}b - \sum_{j \in R} B^{-1}a_j b_j) + c_N x_N$$

$$= z_0 - \sum_{j \in R} (c_B B^{-1} a_j - c_j) x_j$$

entonces

$$z = z_0 - \sum_{j \in R} \left(c_B B^{-1} a_j - c_j \right) x_j \tag{2.18}$$

donde $z_j = c_B B^{-1} a_j$ para toda variable no básica y a $z_j - c_j$ se le llama costo reducido de x_j.

La ecuación (2.18) sirve como guía para mejorar una solución básica factible actual. Debido a que como se desea minimizar z conviene aumentar el valor de x_j desde su nivel presente igual a cero, siempre que $z_j - c_j > 0$. Si $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in R$, entonces $x_j = 0$, $\forall j \in R$ y $x_B = \bar{b}$ es óptimo para (2.13), puesto que, de (2.18) se tendría que $z_0 \leq z$. Teniendo esto en cuenta se puede aplicar la siguiente regla:

Se fijan todos los valores de las variables no básicas x_k, cuyo coeficiente $z_k - c_k$ es el más positivo de todos los $z_j - c_j$. Por lo tanto de (2.18) se tiene que el nuevo valor de la función objetivo estaría dada por

$$z = z_0 - (z_k - c_k)x_k \tag{2.19}$$

Debido a que $z_k - c_k > 0$ y si se desea minimizar z es conveniente aumentar el valor de x_k tanto como sea posible. Conforme x_k crece, las variables básicas deben modificarse de acuerdo a la ecuación (2.17) obteniéndose así: $x_B = \bar{b} - y_k x_k$, donde $x_k = B^{-1}a_k$

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Si $y_{ik} \leq 0$, entonces x_{B_i} crece cuando x_k crece y así x_{B_1}continúa siendo negativo.

Si $y_{ik} > 0$, entonces x_{B_i} decrece cuando x_k se incrementa hasta el primer punto en que una variable básica x_{B_r} se hace cero. Al analizar la ecuación (2.20), resulta entonces que la primera variable básica que se vuelve cero corresponde al mínimo de $\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}$ para y_{ik} positivo. Con más precisión, es posible incrementar x_k hasta

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{ik}} = \min_{1 \leq i \leq m} \{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\} \tag{2.21}$$

Cuando no hay degeneración $\bar{b}_r > 0$ y entonces $x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$.por la ecuación (2.19) y con el hecho de que $z_k - c_k > 0$, se concluye que $z < z_0$ y la función objetivo mejora estrictamente.

Cuando x_k crece desde el nivel cero hasta $\frac{\bar{b}_i}{y_{rk}}$ se obtiene una nueva solución básica factible. Al sustituir $x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$ en la ecuación (2.20) se obtiene el siguiente punto.

$$\left\{\begin{array}{c} x_{B_i} = \bar{b}_i - \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\bar{b}_r, \quad \forall i = 1, \cdots, m \\ x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \\ Todas\ las\ demas\ x_j\ son\ cero. \end{array}\right\} \tag{2.22}$$

Con base en la ecuación (2.22), $x_{B_r} = 0$ y entonces cuando más m variables son positivas. Las columnas correspondientes en A son $a_{B_1}, a_{B_2}, \cdots, a_{B_{r-1}}, a_k, a_{B_{r+1}}, \cdots, a_{B_m}$.

Observe que estas columnas son linealmente independientes, ya que $y_{rk} \neq 0$. Por consiguiente, el punto dado por la ecuación (2.22) es una solución básica factible.

En resumen, se ha descrito algebraicamente una iteración; es decir, el proceso de transformación de una base a una base adyacente. Lo anterior se lleva acabo incrementando el valor de una variable no básica x_k entra a la base y x_{B_r} sale de la base. Cuando no hay degeneración el valor de la función objetivo decrece estrictamente y así las soluciones básicas factibles generadas son distintas. Dado que solo existe un número finito de soluciones básicas factibles, entonces el procedimiento debe terminar en un número finito de pasos.

2.2.9.2. Optimalidad y no acotamiento

El procedimiento de introducir una variable en la base y sacar otra variable de la base conduce al proceso de cambio de una base adyacente. Los criterios para que una variable pueda entrar y salir de la base son las siguientes:

1. Entrada: x_k puede entrar si $z_k - c_k > 0$.
2. Salida: x_B pueda salir si

$$x_k = \frac{\overline{b_r}}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Ahora surgen dos preguntas:

- ¿Qué ocurre si todas las variables no básicas x_j tienen $z_j - c_j \leq 0$? En este caso, se ha obtenido el óptimo.
- ¿Qué ocurre si $z_j - c_j > 0$, de modo que x_k es elegible para entrar a la base, pero no es posible encontrar componentes positivas y_{ik}, $i = 1, \cdots, m$; es decir $y_k \leq 0$? En este caso, el valor óptimo de la función es no acotado; es decir,

$$f(x) = \min c^T x = -\infty$$

Ahora veremos con más detalle cada uno de los casos.

2.2.9.3. Terminación con una solución óptima

Consideramos el siguiente problema en donde A es una matriz $m \times n$ con rango m.

$$\min z = c^T x$$

$$s.a: Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Supongan que x^* es una solución básica con base B, es decir $x^* = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ y sea

$z^* = c^T x^* = c_B B^{-1} b$ el valor de la función objetivo en x^*.

Además suponga que $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in R$, de modo que ninguna variable no básica es elegible para entrar a la base. Sea x cualquier solución básica factible con valor objetivo z, entonces por la ecuación (2.18) se tiene

$$z^* - z = \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \tag{2.23}$$

Como $z_j - c_j \leq 0$ y $x_j \geq 0, \forall j \in R$, entonces $z^* \leq z$ y por lo tanto x^* es una solución básica factible óptima.

2.2.9.4. Soluciones óptimas únicas y alternativas

Es posible obtener más información de la ecuación (2.23)

- Si $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in R$, entonces la solución óptima actual es única. Para ver lo anterior, sea x cualquier solución factible distinta de x^*. Luego, existe por lo menos una componente no básica x_j que es positiva, porque si todas las componentes no básicas son ceros, entonces x no podría ser distinta de x^*. Así de la ecuación (2.23) se tiene que $z^* < z$. Y por consiguiente, x^* es la única solución óptima.
- Si $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in R$, pero $z_k - c_k = 0$ para al menos una variable no básica x_k.Al incrementar x_k (y suponiendo que no hay degeneración), se obtienen puntos distintos de x^* pero que tienen el mismo valor objetivo. El proceso se incrementar x_k desde el nivel cero hasta que es bloqueada por una variable básica genera una infinidad de soluciones optimas alternativas.

No acotamiento

Suponga que se tiene una solución básica factible del sistema $Ax = b$, $x \geq 0$ con valor objetivo z_0

Ahora se considerara el caso en que se encuentra una variable no básica x_k, con

$z_k - c_k > 0$ y $y_k \leq 0$. De la ecuación (2.18) se tiene:

$$z = z_0 - (z_k - c_k)x_k$$

Como se desea minimizar el objetivo z y dado que $z_j - c_j > 0$, conviene incrementar indefinidamente el valor de x_k lo cual hará que z se vaya a $-\infty$. La razón por la cual no fue posible hacer esto antes es que el incremento en el valor de x_k estaba bloqueado por una variable básica; es decir, le impone un topo a x_k. Recordemos que de la ecuación (2.20) se tiene:

$$x_k = B^{-1}b - y_k x_k$$

De modo que, como $y_k \leq 0$ entonces x_k se puede incrementar indefinidamente sin que ninguna variable básica se haga negativa.

En resumen, si se tiene una solución básica con $z_k - c_k > 0$ para alguna variable no básica x_k y además $y_k \leq 0$, entonces el valor óptimo de la función objetivo es no acotado; es decir;

$$f(x) = \min c^T x = -\infty$$

Este valor se obtiene al incrementar x_k indefinidamente y ajustar los valores de las variables básicas actuales; esto, a su vez, es equivalente a efectuar desplazamiento a lo largo del rayo

$$\left\{\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, x_k \geq 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix}, x_k \geq 0\right\}$$

Observemos que el vértice del rayo es la solución básica factible actual $\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ y la dirección del rayo es $d = \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix}$, y además es una dirección extrema.

Notar que:

$$c^T d = [c_B \quad c_N] \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix}$$

$$= -c_B y_k + c_k$$

$$= -z_k + c_k$$

Como $z_k - c_k > 0$, entonces $c^T d < 0$, que es la condición necesaria y suficiente para no acotamiento.

Definición 2.2.22 Dadas una solución básica factible y su base correspondiente, es posible mejorar la solución si $z_k - c_k > 0$ para alguna variable no básica x_k, o bien, el proceso se detiene en un punto óptimo si $z_j - c_j \leq 0$ para todas variables no básicas. Si $z_k - c_k > 0$ y el vector y_k, contiene por lo menos una componente positiva, entonces el incremento de x_k será bloqueado por una de las variables básicas presentes, la cual se vuelve cero y sale de la base. Por otra parte, si $z_k - c_k > 0$ y $y_k \leq 0$ entonces x_k se puede incrementar indefinidamente y la solución óptima es no acotada con valor $(-\infty)$.

Esto precisamente es lo que hace el método simplex.

2.2.9.5. El método simplex en formato de tableau

(Problema de minimización)

Paso inicial

Se encuentra una solución básica factible inicial con base B y se forma la siguiente tabla inicial.

z	z	x_B	x_N	LD
z	1	0	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B \bar{b}$
x_B	0	I	$B^{-1} N$	$\bar{b}$

Paso principal

Sea $z_k - c_k = \max\{z_j - c_j : j \in R\}$ Si $z_k - c_k \leq 0$, entonces el proceso ha terminado;

La solución actual es óptima. En caso contrario, se analiza y_k. Si $y_k \leq 0$, entonces el proceso ha terminado; la solución óptima es no acotada. Si $y_k \nleq 0$, entonces el índice r se determina como sigue:

$$\frac{\overline{b_r}}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\overline{b_r}}{y_{rk}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

La tabla se actualiza pivoteando sobre y_{rk}; se actualizan las variables básicas y no básicas, en donde x_k entra a la base y x_{B_r} sale de la base. Se repite el paso principal.

2.2.9.6. El método simplex para variables acotadas

En casi todos los problemas prácticos las variables suelen estas acotadas. Una variable típica x_j está acotada inferiormente por l_j y superiormente u_j, donde $l_j < u_j$. Si se denotan por $l\ y\ u$ los vectores cota inferior y cota superior respectivamente, entonces se obtiene el siguiente programa lineal con variables acotadas.

$$\text{(PLVA)} \begin{cases} \min\ c^T x \\ s.a.\ \ Ax = b \\ l \leq x \leq u, \end{cases}$$

Definición 2.2.23 Considere el sistema $Ax = b$ y $l \leq x \leq u$, en donde A es una matriz de $m \times n$ con rango m. La solución $\bar{x}$ de las ecuaciones $Ax = b$ es una solución básica de este sistema si A puede descomponerse en $\begin{bmatrix} B & N_1 & N_2 \end{bmatrix}$, en donde la matriz (cuadrada) B es de rango m de modo que con x descompuesto de manera correspondiente en (x_B, x_{N_1}, x_{N_2}) se tiene $\bar{x}_{N_1} = \bar{l}_{N_1},\ \bar{x}_{N_2} = u_{N_2}$.

Y por consiguiente $\overline{x_B} = B^{-1}b - B^{-1}bN_1 l_{N_1} u_{N_2}$. Además, si $l_B \leq \overline{x_B} \leq u_B$, entonces se dice que $\bar{x}$ es una solución básica factible. La matriz B se denomina base, x_B son las variables básicas, y x_{N_1} y x_{N_2}son las variables no básicas en sus límites inferior y superior, respectivamente. Se dice que la partición $\begin{bmatrix} B & N_1 & N_2 \end{bmatrix}$ corresponde a una solución básica (factible) es una participación básica (factible).

El vector c también se descompone en $\begin{bmatrix} C_B & C_{N_1} & C_{N_2} \end{bmatrix}$.

Paso inicial

Se encuentra una solución básica inicial. Sea x_B el vector de variables básicas, y sean x_N y x_{N_2} las variables no básicas en sus cotas inferior y superior, respectivamente. Luego se forma la siguiente tabla en el que:

$$\hat{z} = c_B B^{-1} b + (\mathrm{c}_{N_1} - c_B B^{-1}\, \mathrm{N}_1) l_{_{N_1}} + (\mathrm{c}_{N_2} - c_B B^{-1}\, \mathrm{N}_2) u_{_{N2}} \;\; ;$$

y

$$\hat{b} = B^{-1} b - B^{-1} b\, \mathrm{N}_1 l_{_{N_1}} - B^{-1}\, \mathrm{N}_2 u_{_{N2}}$$

son los valores actuales de z y x_B, respectivamente

	z		x_{N_1}	x_{N_2}	LD
z	1	0	$B^{-1}N_1 - c_{N_1}$	$c_{_B} B^{-1} N_2 - c_{N_2}$	$\hat{z}$
x_B	0	I	$B^{-1}N_1$	$B^{-1}N_2$	$\hat{b}$

Paso principal

Sean R_1 y R_2 los conjuntos de índices de variables no básicas en su cota inferior y superior, respectivamente. Sea $z_j = c_B B^{-1} a_j$, $\forall j \in R_1 \cup R_2$, donde a_j es la columna no básica de A correspondiente al índice j.

1. Si $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in R_1$ y $z_j - c_j \leq 0. \forall j \in R_2$ entonces la solución actual es óptima. Caso contrario determinar índice k como el índice donde se alcanza el siguiente máximo:

$$max\{max_{j \in R_1}\{z_j - c_j\}, max_{j \in R_2}\{c_j - z_j\}\}.$$

Determinar $y_k = B^{-1}a_k$, donde a_k es la columna de A correspondiente al índice k.

Si $k \in R_1$, ir al paso 2.

Si $k \in R_2$, ir al paso 3.

2. Si $x_k = l_k$, incrementa hasta $l_k + \Delta_k$ donde $\Delta_k = \min(\gamma_1, \gamma_2, \mu_k - l_k)$.

$$\gamma_1 = \left\{ \begin{array}{c} \min\limits_{1 \leq i \leq m} \left\{ \dfrac{\hat{b}_i - l_{B_i}}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} = \dfrac{\hat{b}_i - l_{B_r}}{y_{ik}}, si\ y_k \nleq 0 \\ \infty \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . . si\ y_k \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$\gamma_2 = \left\{ \begin{array}{c} \min\limits_{1 \leq i \leq m} \left\{ \dfrac{\hat{b}_i - l_{B_1}}{-y_{ik}} : y_{ik} < 0 \right\} = \dfrac{u_{B_r} - \hat{b}_r}{y_{ik}}, si\ y_k \ngeq 0 \\ \infty \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . . si\ y_k \geq 0 \end{array} \right\}$$

Si $\Delta_k = \infty$, entonces el proceso se detiene y el valor de la solución óptima es no acotado. En caso contrario, se actualiza el tableau que muestra la nueva solución básica factible.

Si $\Delta_k = u_k - l_k$ entonces no se hace ningún cambio de la base de trabajo y x_k sigue siendo no básica, pero esta vez en su cota superior. Solo se cambia la columna LD para reflejar el nuevo valor de la función objetivo y los valores de las variables básicas $\hat{z}$. Se reemplaza por:

$$z = \hat{z} - (z_k - c_k)\Delta_k \tag{2.24}$$

$\hat{b}$ se reemplaza por:

$$x_B = \hat{b} - y_k \Delta_k \tag{2.25}$$

Por otra parte, si Δ_k está dado por γ_1 o por γ_2, entonces x_k entra a la base y x_{B_k} sale de la base. El tabla, excepto la columna LD, se actualiza pivotando en y_{rk}. La columna LD se actualiza por separado según las ecuaciones (2.24) y (2.25), excepto que la $r - ésima$ componente del nuevo vector $\hat{b}$ se reemplaza por $l_k + \Delta_k$ que es el valor de x_k el cual acaba de entrar a la base.

Se repite el paso 1.

3. Si $x_k = u_k$, decrece hasta $u_k - \Delta_k$ donde $\Delta_k = min(\gamma_1, \gamma_2, u_k - l_k)$.

$$\gamma_1 = \begin{cases} \min_{1 \le i \le m} \left\{ \dfrac{\hat{b}_i - l_{B_i}}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} = \dfrac{\hat{b}_i - l_{B_r}}{y_{ik}}, si\ y_k \nleq 0 \\ \infty \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .. si\ y_k \le 0 \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} \min_{1 \le i \le m} \left\{ \dfrac{\hat{b}_i - l_{B_1}}{-y_{ik}} : y_{ik} < 0 \right\} = \dfrac{u_{B_r} - \hat{b}_r}{y_{ik}}, si\ y_k \ngeq 0 \\ \infty \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .. si\ y_k \ge 0 \end{cases}$$

Si $\Delta_k = \infty$, entonces el proceso se detiene y el valor de la solución óptima es no acotado. En caso contrario, se actualiza la tabla para que muestre la nueva solución básica factible.

Si $\Delta_k = u_k - l_k$ entonces no se hace ningún cambio de la base de trabajo y x_k sigue siendo no básica, pero esta vez en su cota inferior. Solo se cambia la columna LD para reflejar el nuevo valor de la función objetivo y los nuevos valores de las variables básicas $\hat{z}$ se reemplaza por:

$$z = \hat{z} - (z_k - c_k)\Delta_k \tag{2.26}$$

$\hat{b}$ se reemplaza por:

$$x_B = \hat{b} - y_k\Delta_k \tag{2.27}$$

Por otra parte, si Δ_k está dado por γ_1 o por γ_1, entonces x_k entra a la base y x_{B_k} sale de la base. La tabla, excepto la columna LD, se actualiza pivotendo y_{rk}. La columna LD se actualiza por separado según las ecuaciones (2.26) y (2.27), excepto que la $r - ésima$ componente del nuevo vector $\hat{b}$ se reemplaza por $u_k - \Delta_k$ que es el valor de x_k el cual acaba de entrar a la base. Se repite el paso 1.

2.2.10. Método dual simplex

Planteamiento del problema dual

Por cada problema lineal que se resuelve existe asociado otro problema lineal que se resuelve simultáneamente, denominado problema dual.

Forma canónica de dualidad

Suponga que el programa lineal primal está dado en la forma:

$$\begin{aligned} &min\ \ c^T x \\ &s.a.\ \ Ax \geq b \\ &\qquad\ \ x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Entonces el programa lineal dual se define como:

$$\begin{aligned} &max\ \ \ b^T w \\ &s.a.\ \ A^T w \geq c \\ &\qquad\ \ w \geq 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

2.2.10.1. Método dual simplex en formato de tableau

(Problema de minimización)

Paso inicial

Encontrar una base B inicial del primal de modo que sea factible para el dual (condiciones de Óptimalidad primal) es decir: $z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j \leq 0$ para todo j. Luego se forma la siguiente tabla:

	z	x_B	x_N	LD
z	1	0	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B \bar{b}$
x_B	0	I	$B^{-1} N$	$\bar{b}$

Caso principal

1. Si $\bar{b} = B^{-1} b \geq 0$ el proceso termina; la solución es óptima. En caso contrario, elegir el renglón pivote r con $\overline{b_r} < 0$; por ejemplo, $\overline{b_r} = \min\{\overline{b_\iota}\}$
2. Si $y_{rj} \geq 0$ para todo j , el proceso termina; el dual es no acotado y el primal es no factible. En caso contrario, elegir la columna pivote k mediante la siguiente prueba de la razón mínima:

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0 \right\}$$

3. Pivotear en y_{rk} y volver al paso 1.

2.2.10.2. Problema general de programación lineal

Consideremos el problema de programación lineal (PL) de la forma

$$\begin{aligned} &\min z = c^t x \\ &s.a.\ Ax = b \\ &\quad\ l \le x \le u, \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde A es una matriz de $m \times n$ con rango m , y $m < n$ las coordenadas de los vectores l y u pueden ser menos o más infinito, respectivamente. Sea $J = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de los índices columna de A. Denotamos por $J^f = \{j \backslash j \in J, l_j = -\infty \wedge u_j = +\infty\}$ el conjunto de las variables primales libres (VPL), por $J^u = \{j \backslash j \in J, l_j = -\infty \wedge u_j < +\infty\}$ y $J^l = \{j \backslash j \in J, l_j > -\infty \wedge u_j = +\infty\}$ los conjuntos de las variables primales con una cota finita y por $J^b = \{j \backslash j \in J, l_j > -\infty \wedge u_j < +\infty\}$ el conjunto de variables acotadas inferior y superiormente. Llamaremos a las variables en J^b variables primales encajadas (VPE). Si para alguna variable se tiene $l_j = u_j = a$ para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces la llamaremos variable primal fija (VPF).

Aplicando al problema (2.30) la definición de problema dual, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\max\ z = b^t \pi + \sum_{j \in J^l \cup J^b} l_j v_j + \sum_{j \in J^u \cup J^b} u_j w_j \\ &s.a.\quad A^t \pi + v + w = c \\ &\qquad v_j = 0, w_j = 0,\ \forall j \in J^f \\ &\qquad v_j \ge 0, w_j = 0,\ \forall j \in J^l \\ &\qquad v_j = 0, w_j \le 0,\ \forall j \in J^u \\ &\qquad v_j \ge 0, w_j \le 0,\ \forall j \in J^b \\ &\qquad \pi \ irrestricto, \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde $\pi \epsilon \mathbb{R}^m$, $v, w \in \mathbb{R}^n$. Se denomina a v y w como variables duales de holgura (VDH)

Definición 2.2.24 Una base $\beta = \{k_1, \ldots k_m\}$ es un subconjunto ordenado de J, tal que la submatriz A_β es no singular. El conjunto de índices de columnas no básicas es denotado por $\eta = J \setminus \beta$.

Una solución primal básica (PBS) para una base β es construida fijando cada variable primal no básica x_j, $j \in \eta$ a una de sus cotas finitas (si es variable libre se fija en cero) y calcular las variables primales básicas como:

$$x_\beta = B^{-1}\left(b - A_\eta x_\eta\right) \ .$$

Definición 2.2.25 Una base β es primal factible si todas las variables primales básicas se encuentran dentro de sus respectivas cotas, es decir, $l_j \le x_j \le u_j, \forall_j \in \beta$.

Una solución dual básica (SDB) para una base β es construida calculando los multiplicadores duales $\pi = c_\beta B^{-1}$ y los costos reducidos $d_\eta = c_\eta - A_\eta^t \pi$ y fijando las otras variables de la siguiente forma:

$$v_j = d_j, w_j = 0, \, si \ j \in \eta \ con \, x_j = l_j \ \text{y} \ v_j = 0, w_j = d_j, \, si \ j \in \eta \ con \, x_j = u_j \, .$$

Si $j \in \eta$ y $j \in J^f$ (si las variables primarias asociadas son no básicas y libres), entonces

$$v_j = d_j, w_j = 0, \, si \, d_j \ge 0 \ \text{y} \ v_j = 0, w_j = d_j, \, si \, d_j < 0.$$

Definición 2.2.26 Una base β es dual factible de las (VDH) v y w satisfacen sus respectivas restricciones (sus cotas ceros) en el problema (2.31), es decir, si se cumple.

$$d_j \ge 0, si \ j \in \eta \ con \ x_j = l_j$$

$$d_j \le 0, si \ j \in \eta \ con \ x_j = u_j \ y$$

$d_j \geq 0, si\ x_j$ es variable libre

- La infactibilidad dual solo puede ocurrir en los índices de columnas asociadas con variables primales no básicas, pues π es irrestricto y se obtiene a partir de las variables primales básicas.
- En particular las (VDH) asociadas con variables primales no básicas libres solamente son factibles cuando su correspondiente costo reducido d_j vale cero.
- Las (VDH) asociadas con variables primales no básicas fijas siempre son factibles.
- La infactibilidad dual de (VDH) asociadas con variables primales no básicas encajadas x_j puede convertirse en factibilidad cambiando x_j a su otra cota finita. De este modo si se realiza tal cambio entonces las variables primales básicas deben se actualizadas.

2.2.10.3. Algoritmo dual simplex para problemas generales

El algoritmo dual-simplex se mueve en cada iteración, desde una solución dual básica, para una base dual factible, hacia una solución que mejore la función objetivo, hasta alcanzar la factibilidad, es decir hasta que se logre obtener también una base primal factible, o bien concluir que el problema dual es no acotado y que el primal es no factible.

El algoritmo es el siguiente:

1. Calcular la representación factorizada (LU) de β^{-1} , y calcular: x_β, π y d_η (de la forma antes vista)

2. Determinar $p \in \beta$ con $p = k_r$ y x_p infactible (primal infactible).

   Si $x_p < l_p$, hacer $\delta = x_p - l_p$.

   Si $x_p < u_p$, hacer $\delta = x_p - u_p$.

Si x_β es factible, entonces ir al paso (9).

3. Calcular $\rho_r = e_r^t B^{-1}$. Donde e_r es el r - *ésima* vector canónico.

4. Calcular $\alpha^r = \rho_r A_\eta$.

5. Si $x_p < l_p$, hacer $\underline{\alpha}^r = -\alpha^r$, caso contrario $\underline{\alpha}^r = \alpha^r$.

Sea $F = \left\{ j \in \eta : \left(j \in J^f \wedge \underline{\alpha}_j^r \neq 0 \right) \vee \left(x_j = l_j \wedge \underline{\alpha}_j^r > 0 \right) \vee \left(x_j = u_j \wedge \underline{\alpha}_j^r < 0 \right) \right\}$.

Si $F = \varnothing$, entonces el problema dual es no acotado. Ir al paso (9); caso contrario, determinar q tal que $\left| \frac{d_q}{\alpha_q^r} \right| = \min \left\{ \left| \frac{d_j}{\alpha_j^r} \right| : j \in F \right\}$ y hacer $\theta^D = \frac{d_q}{\alpha_q^r}$.

6. Calcular $\alpha_q = B^{-1} a_q$.

7. Actualizar $Z : Z := +\theta^D \delta$.

Actualizar x: Calcular $\theta^P = \frac{\delta}{\alpha_q^r}$, y hacer:

$$x_\beta := x_\beta - \theta^P \alpha_q \ \text{ y } \ x_q := x_q + \theta^P.$$

Actualizar $d_\eta : d_j := \theta^D \alpha_j^r$ para $j \in \eta$ y $d_p := -\theta^D$.

Actualizar β y $\eta : \beta := \left(\beta \setminus \{p\} \right) \cup \{q\}$ y $\eta := \left(n \setminus \{q\} \right) \cup \{p\}$. Actualizar la representación factorizada (LU) de B^{-1}.

8. Ir al paso (1).

9. Finalizar.

2.2.11. Análisis de sensibilidad

Una vez obtenida la solución óptima del problema de programación lineal, es conveniente realizar un análisis de sensibilidad. Esto consiste en evaluar el impacto en la solución derivado de cambios discretos en algunos de los parámetros del problema. Las magnitudes de estos cambios no siempre son arbitrarios, si no que obedecen a la necesidad de establecer si es importante evaluar o determinar con precisión un cierto coeficiente, o si por el contrario una mayor certeza en su valor no introduce mayores cambios en la solución obtenida. Esto significa que hay más en la programación lineal y en el método simplex que el solo hecho de obtener la solución óptima.

Observación:

En un problema de producción, el costo de una o varias materias primas podrá variar de mes en mes y es, por ende importante saber que ocurre con la solución que se está aplicando, para saber si permanece optima o se deben realizar ajustes para llevarla de nuevo a la condición de optimalidad.

Definición de términos

- **Algoritmos:** un algoritmo es un conjunto finito bien definido de instrucciones para llevar a cabo una determinada tarea que dado un estado inicial, terminará en un estado final definido.
- **Desigualdades.-** Las desigualdades utilizadas para representar las restricciones deben ser cerradas o flexibles, es decir, menor igual ($\leq$) o mayor igual ($\geq$). No se permiten desigualdades de los tipos menor estrictamente o mayor estrictamente, o abiertas.
- **Función Objetivo:** El objetivo es lo que se quiere maximizar o minimizar, en el caso de la programación lineal está expresado como una función lineal.
- **Método Simplex:** es un método analítico de solución de problemas de programación lineal capaz de resolver modelos más complejos que los resueltos mediante el método gráfico sin restricción en el número de variables.

- **Optimización:** La optimización o programación matemática intenta dar respuesta a un tipo general de problemas donde se desea elegir el mejor entre un conjunto de elementos.
- **Programación lineal:** Procedimiento o algoritmo matemático mediante el cual se resuelve un problema indeterminado, formulado a través de ecuaciones lineales, optimizando la función, también lineal.
- **Región factible:** Es un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen las restricciones del problema, la región está determinada por los ejes cartesianos y las rectas
- **Soluciones factibles**: Cualquier punto dentro de la región factible determina valores numéricos para las variables que satisfacen las restricciones.
- **Variable de Holgura:** Diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho de una restricción menor que o igual. Con frecuencia es la cantidad de un recurso que no se está utilizando.
- **Variables de decisión.-** Es lo que se trata de determinar, y para lo cual se requiere una decisión.

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. UBICACIÓN GEOGRÁFICA

El presente estudio de investigación se realizó en la hacienda Tiracomilla situado en el distrito de vilque, provincia y departamento de Puno la misma que se encuentra 3.870 msnm de altura ubicado a unos 11 km del distrito de Vilque.

3.2. PERIODO DE DURACIÓN DEL ESTUDIO

ACTIVIDADES	**O**	**N**	**D**	**E**	**F**	**M**	**A**	**M**	**J**	**J**	**A**	**S**	**O**	**N**	**D**
REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	**x**	**x**													
EJECUCIÓN DEL PROYECTO		**x**	**x**												
PRESENTACION DEL PROYECTO			**x**												
REVISION Y APROBACION DEL PROYECTO				**x**											
EJECUCIÓN DEL BORRADOR DE TESIS					**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	
SUSTENTACIÓN															**x**

3.3. TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

3.3.1. Tipo de investigación

El tipo de investigación del presente trabajo es de tipo descriptivo, ya que toda investigación se basa en profundizar los resultados del tema apropiado, también incrementa los conocimientos que existen en las aplicación del método simplex en el modelo matemático para la producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores. (Muñoz Raso, 2015)

3.3.2. Diseño de investigación

El diseño de la investigación es de tipo no experimental, ya que no hubo manipulación de variables independientes. De diseño transeccional debido a que se describieron relaciones entre dos o más variables los datos fueron recogidos en un momento determinado. (Hernández Sampieri, 2017)

3.4. MÉTODOS Y TÉCNICAS

3.4.1. Método

El método que se utiliza es deductivo y aplicativo, porque se analiza las definiciones, propiedades, teoremas de programación lineal, el método simplex y la aplicación del modelo matemático en la producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores.

3.4.2. Técnicas

Lectura y análisis de las definiciones, propiedades, teoremas y el método simplex de la programación lineal también los gastos e ingresos del productor para la asimilación y aplicación apropiada en la investigación.

3.5. OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

3.5.1. Variable independiente (X)

Método simplex en la aplicación del modelo matemático

3.5.2. Variable dependiente (Y)

Producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para optimizar las ganancias del productor en la producción de leche usaremos el modelo matemático aplicando el método simplex.

4.1. EL ALGORITMO SIMPLEX PARA EL MODELAMIENTO MATEMÁTICO

El método simplex para el modelamiento matemático se resume en el siguiente algoritmo simplex.

Este algoritmo trabaja sobre un problema de programación lineal en la forma estándar, en el cual se conoce una base factible inicial B:

$$Maximizar\ c^T x$$

$$s.a \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Donde $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es de rango m, $m<n$. el vector columna α_i representará la columna la i - columna de A y α_{Bi} la columna de B.

4.1.1. Algoritmo

Elegir una matriz básica B tal que $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$.sea un sistema base factible (SBF).

Paso 1: Calcular $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$, hacer $x_N = 0$ y calcular $z = {c_B}^T x_B$.

Paso 2: Calcular $w = {c_B}^T B^{-1}$, y hallar $z_k - c_k = \max_{j\in R}\{z_j - c_j\}$,

donde $z_k - c_k = w\alpha_j - c_j$

1. Si $z_k - c_k \leq 0$, detenerse. La SBF es óptima es $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Caso contrario, ir al paso 3.

Paso 3: Calcular $y_k = B^{-1}\alpha_k$

1. Si $y_k \leq 0$, detenerse. Existe solución óptima ilimitada.

2. Caso contrario, ir al paso 4.

Paso 4: Calcular $x_k = \overline{\frac{b_r}{y_{rk}}} = \max_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\bar{b}_\iota}{y_{i,k}} : y_{i,k} > 0 \right\}$

1. Actualizar de la base B, cambiado α_B, por α_k.

2. Actualizar R cambiando k, por B_r.

3. Volver al paso 1

4.2. EL MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA OPTIMIZAR LAS GANANCIAS EN LA PRODUCCIÓN DE LECHE Y SUS DERIVADOS EN PEQUEÑOS Y MEDIANOS PRODUCTORES

4.2.1. Formulación del modelamiento

Con el fin de desarrollar un modelo, fue muy útil visualizar la hacienda Tiracomilla, como se muestra en la figura 8, la progresión del ganado vacuno a través de los primeros dos grupos requieren un año, mientras que la progresión del grupo 3 hacia el grupo 4, grupo productor de leche, toma un año más. En cada etapa de tiempo, la hacienda debe de cultivar y comprar suficientes cosechas para cumplir los requerimientos de alimentación al rebaño entero. Desarrollaremos ahora un conjunto de relaciones que describen el sector ganado; el sector cosecha es modelado después e incluye la interacción con el sector ganado.

4.2.2. El subsistema ganado

Cuando fijamos la atención sobre la progresión de ganado vacuno a través del tiempo, las relaciones del número de vacas productoras de leche (ganado del grupo 4) al ganado de otros grupos dependen del número y tipo de ganado conservado y vendido durante cada periodo. En particular, las relaciones pueden ser representadas como en la figura 8.

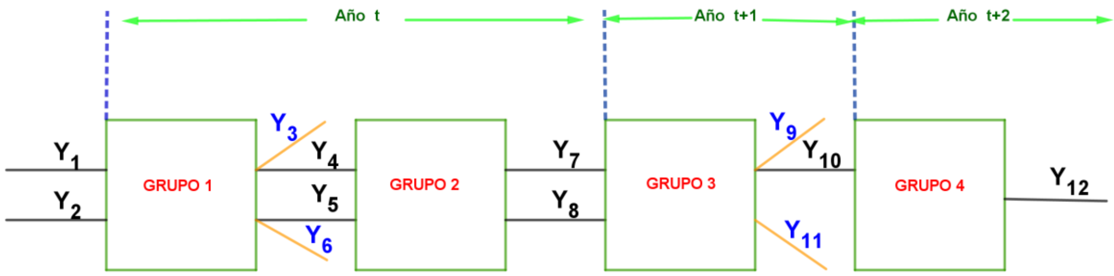


***FIGURA 9:** Representación gráfica del subsistema de ganado.*

***FUENTE**: Elaboración propia.*

Donde las variables están definidas como sigue:

Y_1: El número de vaquillas nacidas del grupo 1.

Y_2: El número de toros nacidos del grupo 1.

Y_3: El número de vaquillas vendidas en el nacimiento.

Y_4: El número de vaquillas no vendidas en el nacimiento.

Y_5: El número de toros no vendidos en el nacimiento.

Y_6: El número de toros vendidos en el nacimiento.

Y_7: El número de vaquillas del grupo 2.

Y_8: El número de toros del grupo 2.

Y_9: El número de vaquillas vendidas del grupo 3.

Y_{10}: El número de vaquillas no vendidas del grupo 3.

Y_{11}: El número de toros del grupo 3.

Y_{12}: El tamaño del rebaño de ganado del grupo 4 (es decir, el tamaño de producción de leche).

Las relaciones entre estas variables como se conceptualiza en la figura 8, son dependientes del periodo particular de tiempo t, bajo consideración. Durante cada periodo de tiempo (año), cada productora de leche (ganado del grupo 4) tiene terneros y aproximadamente la mitad de todos los terneros serán toros y la otra mitad vaquillas. Consecuentemente, las siguientes relaciones son verdaderas para cada periodo t $(1\ periodo = un\ año)$:

$$Y_{3,t} + Y_{4,t} = 0.5Y_{12,t} \tag{4.1}$$

$$Y_{5,t} + Y_{6,t} = 0.5Y_{12,t} \tag{4.2}$$

Las crías no serán vendidas mientras estén en edad del grupo 2. También debe recordarse que la progresión del grupo 1 al grupo 2 es hecha en el mismo año. Por lo tanto, para cada t, tenemos las siguientes ecuaciones.

$$Y_{7,t} = Y_{4,t} \tag{4.3}$$

$$Y_{8,t} = Y_{5,t} \tag{4.4}$$

El ganado del grupo 2 se convertirá en ganado del grupo 3 en el próximo periodo. Puesto que todos los toros de esta edad deberán ser vendidas, para cada t tenemos las siguientes igualdades:

$$Y_{10,t+1} + Y_{9,t+1} = Y_{7,t} \tag{4.5}$$

$$Y_{11,t+1} = Y_{8,t} \tag{4.6}$$

Finalmente, el ganado del grupo 4, sufre aproximadamente una tasa de mortalidad del 30% cada año, pero al mismo tiempo la población del grupo 4 es aumentada por la infusión de vaquillas del grupo 3 del periodo anterior que se conservaron. Consecuentemente

$$Y_{12,t+1} = Y_{10,t} + 0.7Y_{12,t} \tag{4.7}$$

Las ecuaciones del (4.1) al (4.7), involucran todas las relaciones necesarias para describir el subsistema ganado del rebaño con la excepción de algunas condiciones iniciales indicando el número de ganado que existe actualmente dentro de cada grupo. Ahora describiremos el subsistema cosecha juntamente con las interacciones cosecha – ganado.

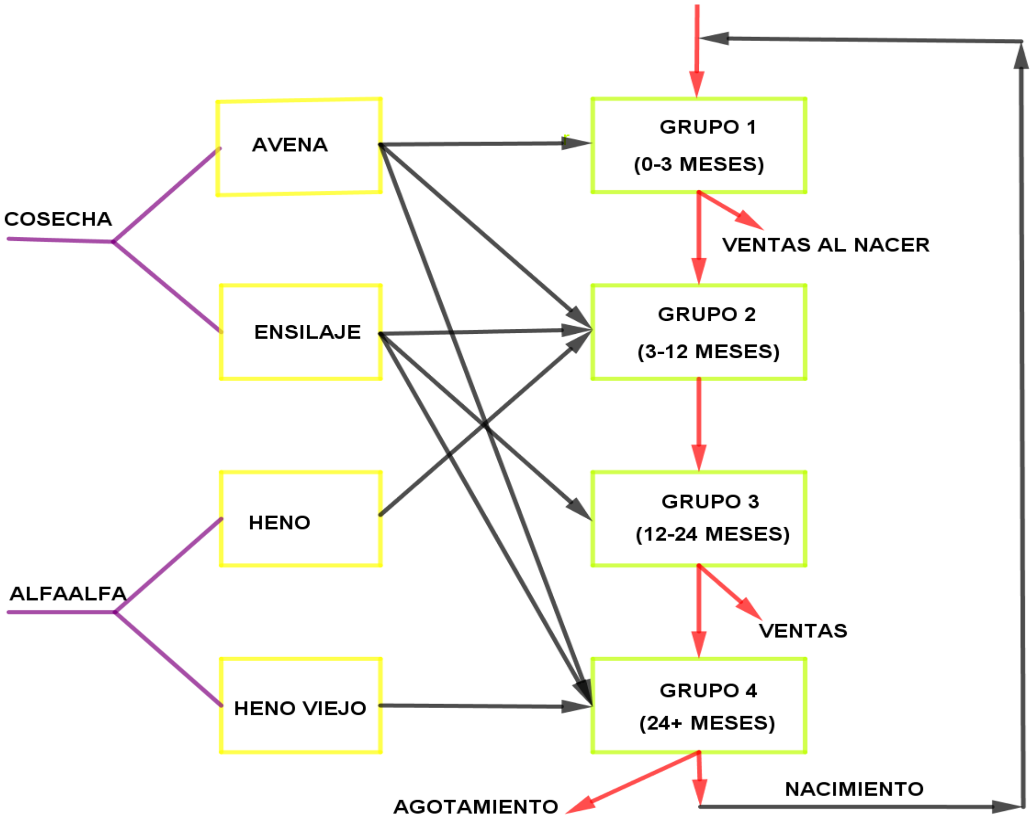


FIGURA 10: *Re presentación conceptual del rebaño.*

***FUENTE**: Elaboración propia.*

4.2.3. Subsistema cosecha

Una gran parte del subsistema cosecha puede ser representada adecuadamente por una serie de ecuaciones, cada una de las cuales iguala a la cantidad de un cierto cultivo de la cosecha durante un periodo particular más la cantidad disponible en almacén, a la cantidad que deberán consumirse en ese periodo más la cantidad que permanecerá en el almacena para usarse en periodos subsecuentes. Esquemáticamente este balance de materia se exhibe en la (figura 10).

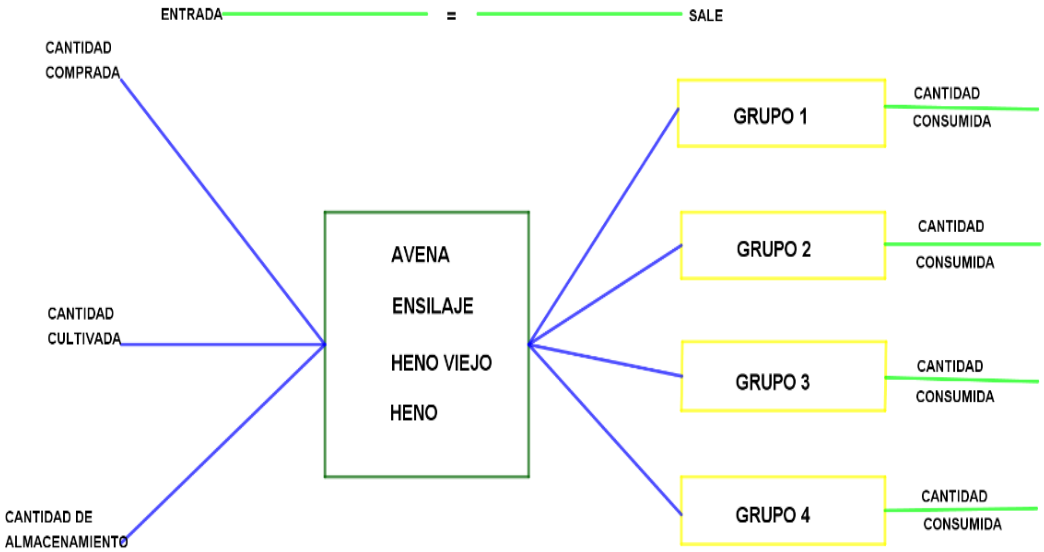


FIGURA 11: *Esquemas de ecuaciones de balance de materia para el subsistema de cosecha.*

FUENTE*: Elaboración propia.*

Además de las ecuaciones de balance de materia, es también necesario incorporar las relaciones que describen las limitaciones que existen de la cantidad de cada cosecha que puede ser almacenado debido a la capacidad del silo o granero.

Variables del subsistema cosecha

Sea la variable, bajo el control del dueño, definidas como sigue:

$X_{1,t}$: El número de hectáreas dedicadas para producir ensilaje en el año t.

$X_{2,t}$: El número de hectáreas dedicadas para producir forraje de avena en el año t.

$X_{3,t}$: El número de hectáreas dedicadas para producir heno viejo en el año t.

$X_{4,t}$: El número de hectáreas dedicadas para producir heno en el año t.

$X_{5,t}$: El número de quintales de semilla de avena comprada en el año t.

$X_{6,t}$: El número de pacas de heno compradas en el año t.

$Z_{1,t}$: El número de toneladas de ensilaje en almacenamiento al final del año t.

$Z_{2,t}$: El número de toneladas de heno viejo en almacenamiento al final del año t.

$Z_{3,t}$: El número de toneladas de heno en almacenamiento al final del año t.

$W_{i,t}$: El total de consumo de cultivo i en año t para todos los grupos de ganado,

$\forall i = 1,2,3,4.$

Los $W_{i,t}$ $(i = 1,2,3,4)$ son variables las cuales relacionan las variables del subsistema ganado a las variables subsistema cosecha.

Entonces la ecuación que describe el balance de materia para **ensilaje** está dada por:

$$Z_{1,t} + 15X_{1,t} - W_{1,t} - Z_{1,t+1} = 0 \tag{4.8}$$

donde

$$W_{1,t} = 0.6(Y_{7,t} + Y_{8,t}) + 1.3(Y_{9,t} + Y_{10,t} + Y_{11,t}) + 6Y_{12,t} \tag{4.9}$$

El coeficiente $X_{1,t}$, 15, indica que cada hectárea produce 15 toneladas de ensilaje, la cantidad $W_{1,t}$ representa el consumo anual de ensilaje por los diversos grupos de ganado y los coeficientes en (4.9) representan el consumo por ganado de ensilaje en toneladas por cada grupo del rebaño, menos el ganado del grupo 1 no consume ensilaje.

El límite de almacenamiento para el ensilaje es igual a la capacidad del silo, la cual es de 56 toneladas.

$$Z_{1,t} \leq 56 \tag{4.10}$$

Similarmente podemos definir las restricciones de otras cosechas como se muestran abajo.

Para avena:

$$X_{5,t} + 36X_{2,t} - W_{2,t} \tag{4.11}$$

donde

$$W_{2,t} = 0.5(Y_{4,t} + Y_{5,t}) + 2.4(Y_{7,t} + Y_{8,t}) + 4.1(Y_{9,t} + Y_{10,t} + Y_{11,t}) + 24.3Y_{12,t} \tag{4.12}$$

$$36X_{2,t} \leq 479 \tag{4.13}$$

Para heno viejo:

$$Z_{2,t} + 12.7X_{3,t} - W_{3,t} - Z_{2,t+1} = 0 \tag{4.14}$$

$$W_{3,t} = Y_{12,t} \tag{4.15}$$

$$Z_{2,t} \leq 196 \tag{4.16}$$

Para heno

$$Z_{3,t} + 31X_{4,t} + X_{6,t} - W_{4,t} - Z_{3,t+1} = 0 \tag{4.17}$$

$$W_{4,t} = 0.5(Y_{4,t} + Y_{5,t}) + 2.2Y_{8,t} \tag{4.18}$$

$$Z_{3,t} \leq 463 \tag{4.19}$$

Además de las relaciones anteriores, ciertas condiciones de operaciones debieron ser satisfechas. En particular fue necesario para la granja cultivar continuamente en todas las 95 hectáreas disponibles para el cultivo, dado que cualquier tierra para cultivar no usada durante un año se convierte en inservible para cultivar por un cierto tiempo después de eso. Como una alternativa para extender la capacidad de cultivo, el dueño puede decidir rentar hasta 16 hectáreas en cualquier instante en el tiempo. Por lo tanto su capacidad disponible incluyendo las restricciones de su uso continuo por 95 hectáreas, puede ser expresada por.

$$X_{1,t} + X_{2,t} + X_{3,t} + X_{4,t} + V_t = 111 \tag{4.20}$$

$$V_t \leq 16 \tag{4.21}$$

Donde V_t representa el número de hectáreas no rentadas en el periodo t (note que cuando las todas las 16 hectáreas son rentados $V_t = 0$, mientras que si ninguno se renta $V_t = 16$). Finalmente, como una condición operacional, el propietario desea dedicar por lo menos 44 hectáreas para el cultivo de alfaalfa (ambos; heno y heno viejo son cosechas de alfaalfa), esta condición nos da:

$$X_{3,t} + X_{4,t} \geq 44 \tag{4.22}$$

4.2.4. Tipo de investigación

Una asignación de valores para las variables definidas en el subsistema ganado y cosecha, los cuales satisfacen las relaciones de la ecuación (4.1) hasta la ecuación (4.22) así como las necesarias condiciones iniciales y requisitos de no negatividad, constituyen una política de operación factible para la granja lechera de la hacienda. Ya que es muy probable que existan más de un conjunto de valores para las variables de decisión que satisfagan todas las relaciones derivadas hasta aquí, es necesario desarrollar un criterio, o medida de efectividad.

Después de una reflexión cuidadosa, el dueño planteo, que un criterio aceptable para elegir una política viable de operaciones para la granja seria las ganancias resultantes, los cuales el deseaba maximizar. Para el propósito del estudio, fue apropiado definir ganancias como la diferencia entre la suma de ingresos y la suma de todos los costos asociados con las variables de decisión. La cantidad de ingresos o costos asociados con cada variable de decisión se exhiben en la tabla 1, en el anexo 1. Estos valores fueron obtenidos del libro de registro del productor, en el cual enlistan todos los gastos de la granja y redactan sobre la experiencia y conocimiento práctico del propietario y empleados. Los costos al almacenamiento de cosechas, son derivados considerando el costo de cultivar una hectárea de cosecha, dividiendo el costo por el tonelaje o pacas producidas por una hectárea y multiplicando este costo por la tasa de interés que hubiera sido aplicada si este dinero hubiera sido depositado al banco. Por lo tanto este costo simplemente representa saldos inevitables de la inversión por la utilización del dinero para cultivar la tierra en vez de depositarlo en un banco. La utilidad por año t, U_t esta dada entonces por la suma de los productos de las variables de tiempo por sus correspondientes costos e ingresos apropiados

La función objetivo para utilidad máxima es:

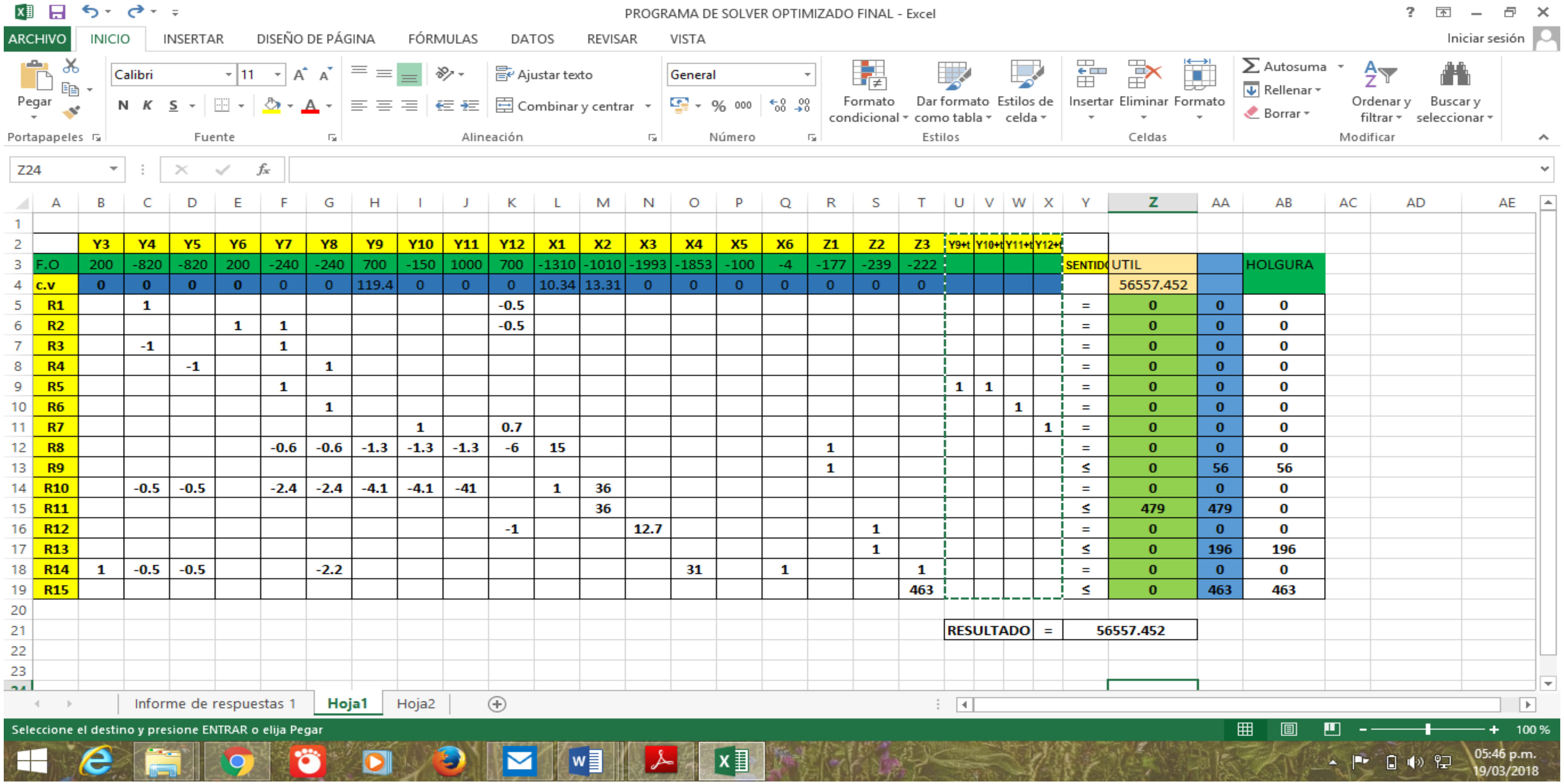
$$U_{max,t} = 200(Y_{3,t} + Y_{6,t}) + 700Y_{9,t} + 1000Y_{11,t} + 700Y_{12,t} - 820(Y_{4,t} + Y_{5,t})$$

$$-240(Y_{7,t} + Y_{8,t}) - 150Y_{10,t} - 1310X_{1,t} - 1010X_{2,t} - 1993X_{3,t} - 1853X_{4,t}$$

$$-100X_{4,t} - 100X_{5,t} - 4X_{6,t} - 239.16Z_{2,t} - 177.2Z_{1,t} - 222.36Z_{3,t}$$

4.3. RESULTADOS DE LA INVESTIGACION

La hoja de cálculo Excel de Microsoft office tiene incorporado una poderosa herramienta llamada solver, que me permite optimizar y como resultado del trabajo se tiene en la siguiente figura.



	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	Y10	Y11	Y12	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Z1	Z2	Z3	Y9+	Y10+	Y11+	Y12+				
F.O	200	-820	-820	200	-240	-240	700	-150	1000	700	-1310	-1010	-1993	-1853	-100	-4	-177	-239	-222					SENTID	UTIL		HOLGURA
c.v	0	0	0	0	0	0	119.4	0	0	0	10.34	13.31	0	0	0	0	0	0	0						56557.452		
R1		1								-0.5														=	0	0	0
R2				1	1					-0.5														=	0	0	0
R3		-1			1																			=	0	0	0
R4			-1			1																		=	0	0	0
R5					1															1	1			=	0	0	0
R6						1																1		=	0	0	0
R7								1		0.7													1	=	0	0	0
R8					-0.6	-0.6	-1.3	-1.3	-1.3	-6	15						1							=	0	0	0
R9																	1							≤	0	56	56
R10		-0.5	-0.5		-2.4	-2.4	-4.1	-4.1	-41		1	36												=	0	0	0
R11												36												≤	479	479	0
R12										-1			12.7					1						=	0	0	0
R13																		1						≤	0	196	196
R14	1	-0.5	-0.5			-2.2								31		1			1					=	0	0	0
R15																			463					≤	0	463	463

RESULTADO = 56557.452

FIGURA 12: *Cuadro de resultado*

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

Al terminar el trabajo de investigación, se llegó a las siguientes conclusiones:

- Las descripciones para aplicar las definiciones, propiedades y teoremas de programación lineal y el método simplex en la aplicación del modelo matemático para la producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores, el Teorema 2.2.7, otras teoremas de programación lineal, método simplex y algoritmo del método simplex, para formular el modelo matemático en la producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores.

- El análisis de la teoría de programación lineal, método simplex, criterios de optimización, teoría de dualidad y de análisis de sensibilidad, Se desarrolló un modelo matemático basado en la producción de leche.

- Se diseñó el algoritmo para optimizar las ganancias de los productores, formulado la función objetivo con sus respectivas restricciones que se obtuvo para optimizar las ganancias.

- Con la utilización de la programación lineal (método simplex), se determino el modelo matemático, cuya solución se obtuvo mediante la aplicación del software Microsoft Excel y su poderosa herramienta Solver que permite la simulación del modelo para producción de leche y sus derivados en pequeños y medianos productores.

CAPÍTULO VI

RECOMENDACIONES

- A los productores de leche, con características similares a las estudiadas, se sugiere aplicar el modelo para mejorar la producción de leche de esta forma se optimiza la economía.

- Se recomienda tener en cuenta la teoría de Programación Lineal para trabajos de investigación para el modelamiento, para problemas reales en pequeñas y medianas empresas de la región Puno para optimizar sus ganancias y minimizar sus gatos.

- Se recomienda utilizar el método simplex en los próximos trabajos de investigación en el área de economía, biología, contabilidad y administración de empresas ver el modelamiento en temas específicos en dicha áreas ya que es de mucha utilidad para la sociedad.

CAPÍTULO VII

BIBLIOGRAFÍA

Alvarez A., J. (2001). *"Investigacion de opreaciones, Programacion lineal"*. Perú: TOP-JOB E.I.R.L.

Bazara, M. S., & Jarvis, J. J. (1989). *"Programación lineal y flujo en redes"*. México: NORIEGA EDITORES.

Bazaraa, M. S. (2006). *"Nonlinear programing, theory and algorithms"*. Canada: WILEY- INTERSCIENCE.

Del Rivero Jimenez, S., & Ruiz Moreno, L. (1988). *"Modelo de programacion lineal para produccion de papel carbon en la empresa Productos Pelikan, S.A."*. México: Tesis de grado.

Delgado Hidalgo, L., & Toro Diaz , H. H. (2010). *"Aplicaccion de un modelo de programación Lineal en la optimización de un sistema de planeación de requerimientos de materiales (MRP) de dos escalones con restricciones de capacidad"*. Colombia: trabajo de investigación.

Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (1982). *"Algebra Lineal"*. México: Publicaciones cultural, S.A.

Grossman , S. I., & Flores Godoy, J. J. (2012). *"Algebra Lineal"*. México: Interamérica editores, S.A.

Hernandez Hernandez , H. A., & Ruíz Moreno, R. (1991). *"El método simplex revisado con variables acotadas y su aplicación en el diseñode dietas para camarón"*. México: Trabajo de investigación.

Hernández Sampieri, R. (2017). *"Fundamentos de Investigación"*. México: INTERAMERICANA EDITORES, S.A.

Hiller, F. S., & Liebermann, G. J. (2001). *"Introducción a la investigación de operaciones"*. McGraw-Hill.

Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). *"Algebra Lineal "*. México: PEARSON EDUCACIÓN.

Luenberger , D. G. (2008). *"Linear and Nonlinear Programing"*. New York USA: Stanford, CA,USA.

Moya, M. (1998). *"La programación Lineal"*. Costa Rica: EUNED.

Muñoz Raso, C. (2015). *"Como elaborar y asesorar una investigacion de tesis"*. México: PEARSON EDUCACIÓN.

Pannell, D. (1997). *"Introduction to practical Linear Programming"*. Australia: Wiley.

Rincón Abril, L. A. (2001). *"Investigación de Operaciones para Ingenierias y Administracion de Empresas"*. Colombia: IMPRESORA FERIVA S.A.

Taha, H. A. (2004). *"Investigacion de Operaciones"*. México: Pearson educación.

ANEXO

Tabla de información de ingresos y costos para el modelo

Variables	MONTO DE INGRESOS Y COSTOS	Monto de ingresos o costos (S/.)
$Y_{3,t}$, $Y_{6,t}$	Ganado grupo 1 puede ser vendida a precio de mercado.	+200
$Y_{9,t}$	Una vaquilla del grupo 3 puede ser vendida a precio de mercado.	+700
$Y_{11,t}$	Un toro del grupo 3 puede ser vendida	+10000
$Y_{12,t}$	Una vaca produce ingresos por su leche.	+700
$Y_{4,t}$, $Y_{5,t}$	Cuidados y otros gastos del ganado grupo 1	-820
$Y_{7,t}$, $Y_{8,t}$	Cuidados y otros gastos del ganado grupo 2	-240
$Y_{10,t}$	Cuidados y otros gastos de vaquillas grupo 3	-150
$X_{1,t}$	Costo de cultivar una hectaria de ensilado	-1310
$X_{2,t}$	Costo de cultivar una hectaria de avena	-1010
$X_{3,t}$	Costo de cultivar una hectaria de heno viejo	-1993
$X_{4,t}$	Costo de cultivar una hectaria de heno	-853
$X_{5,t}$	Costo de comprar un quintal de avena	-100
$X_{6,t}$	Costo de comprar un paca de alfaalfa	-4
$Z_{1,t}$	Costo de almacenar una tonelada de ensilaje en un año.	-177.2
$Z_{2,t}$	Costo de almacenar una tonelada de heno viejo en un año.	-239.16
$Z_{3,t}$	Costo de almacenar una paca de heno en un año.	-222.36

FUENTE: Datos del productor

DATOS DEL GANADO DIVIDO EN GRUPOS			
CANTIDAD DEL GANADO			
GRUPO 1	Terneros	0 - 3 meses	20
GRUPO 2	Terneros	3 - 12 meses	15
GRUPO 3	Vaquillas	12 - 29 meses	15
	Toros		5
GRUPO 4	Productoras	24 + meses	50

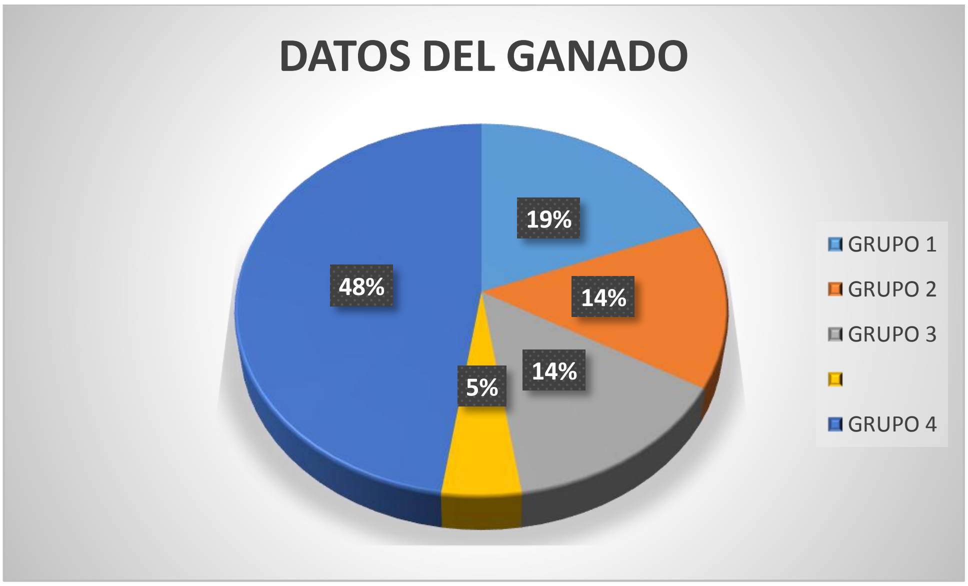


FIGURA 13: Cantidad de ganado en la hacienda

ALIMENTACIÓN DEL GANADO

ALIMENTOS CONSUMIDOS DURANTE EL DIA POR LOS GRUPOS DE GANADO				
	GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3	GRUPO 4
ENSILAJE	0	22.5 kg	70 kg	59.8 kg
AVENA	0	150 kg	340 kg	1000 kg
HENO	30 kg	26 kg	360 kg	1000 kg
HENO VIEJO	0	45 kg	80 kg	261 kg