UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS EN R^n Y SUS APLICACIONES"

TESIS

PRESENTADA POR:

BACH. EDGAR MANUELO SALAMANCA

PARA OPTAR EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Puno – Perú

2016

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS EN R^n Y SUS APLICACIONES"

TESIS PRESENTADA POR:
BACH. EDGAR MANUELO SALAMANCA

PARA OPTAR EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 28 DE ENERO DEL 2016

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura DIRECCION DE UNIDAD DE INVESTIGACION UNA - PUNO

APROBADO POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

PRESIDENTE: Blanca J. Quispe A.
LIC. BLANCA JACQUELINE QUISPE AUCCA

PRIMER MIEMBRO:
LIC. HUGO CONDORI RAMOS

SEGUNDO MIEMBRO:
LIC. RENZO HENRY MAMANI PARI

DIRECTOR DE TESIS:
LIC. RUPERTO ZAPANA YERBA

ASESOR DE TESIS:
LIC. EDGAR RAMOS FLORES

TEMA: Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas
AREA: Matemática Pura
LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Pura

DEDICATORIA

A mi hijo Yoshimi, porque su llegada cambió mi existencia, por ser la luz de mi vida, el motor que me anima a seguir adelante y ser una mejor persona día a día, por iluminarme con la paz de su sonrisa y por enseñarme a disfrutar de la vida.

AGRADECIMIENTO

A mis padres, por su apoyo incondicional y gran ejemplo de lucha, trabajo y dedicación en la vida, que me impulsaron a culminar una de las fases más importantes en mi superación personal.

CONTENIDO

RESUMEN.

El presente Trabajo de Investigación intitulada "**Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en R^n y sus Aplicaciones**", se reúne los conceptos fundamentales de geometría analítica, dinámica del sólido rígido, y algebra lineal, con el propósito de identificar la clasificación cónica y superficies cuádricas rotadas, como lugares geométricos y analíticamente por medio del estudio de la ecuación de segundo grado en dos variables. De igual forma se estudian las superficies cuádricas, donde se analiza la ecuación general de segundo grado en tres variables, las correspondientes superficies y sus gráficas.

Se presenta una síntesis de valores y vectores característicos, diagonalización de matrices simétricas, diagonalización ortogonal y bases ortogonales y matrices simétricas asociados a la clasificación de formas cuadráticas en R^n. para aplicar posteriormente estos conceptos a la identificación de cónicas y cuádricas rotadas.

Se estableció conexiones entre cónicas y las superficies cuádricas y las propiedades de ortogonalidad de los vectores propios correspondientes a matrices simétricas a través de la matriz asociada a la forma cuádrica, se realizó la identificación de cónicas y cuádricas rotadas y trasladadas, sus nuevos ejes con base en los vectores propios y su correspondiente gráfica.

PALABRAS CLAVES.

Teorema de clasificación formas cuadráticas en R^n, Dinámica del Sólido Rígido, Valores Propios, Vectores Propios, Matrices Simétricas, Diagonalización de Matrices, Ortogonalización.

ABSTRACT

The present Research Work entitled **"Theorem of Classification of Quadratic Forms in R^n and Applications",** brings together the fundamental concepts of analytical geometry, rigid solid dynamics, and linear algebra, with the purpose of identifying the conical classification and rotated quadric surfaces, as loci and analytically by means of the study of the second-degree equation in two variables. In the same way, the quadric surfaces are studied, where the general equation of the second degree is analyzed in three variables, the corresponding surfaces and their graphs.

We present a synthesis of characteristic values and vectors, diagonalization of symmetric matrices, orthogonal diagonalization and orthogonal bases and symmetric matrices associated with the classification of quadratic forms in R^n. To subsequently apply these concepts to the identification of rotated conics and quadrics.

Connections were established between conics and the quadric surfaces and orthogonality properties of the eigenvectors corresponding to symmetric matrices through the matrix associated with the quadric form.

The identification of rotated and translated conics and quadrics, their new axes based on the eigenvectors and their corresponding graph.

INTRODUCCIÓN

A través de la historia, la matemática ha sido fundamento del progreso material de la humanidad, desde que el hombre prehistórico que al parecer registraba un número cortando un palo o en un trozo de hueso, hasta los modernos y complicados algoritmos utilizados en la actualidad, convirtiéndose para el ser humano en una herramienta indispensable para el desarrollo de sus sociedades.

En ese sentido, cada una de sus ramas ha hecho aportes en distintos campos como la física, la economía, la estadística, entre otros, tratando por medio de sus diversos grados de análisis enfrentar los problemas que afronta la sociedad.

En esa misma dirección, el álgebra lineal juega un papel fundamental, tanto en las matemáticas puras como aplicadas. Entre los temas que estudia encontramos las matrices, espacios y subespacios vectoriales, valores y vectores propios, con algunas aplicaciones.

Este trabajo es una revisión bibliográfica encaminada a identificar cónicas y superficies cuádricas rotadas a partir de los valores propios y vectores propios como una aplicación del algebra lineal.

Se presenta una revisión de las superficies cuádricas y cónicas dado nuestro interés de identificarlos. Para tal propósito, se revisa la ecuación general de segundo grado de dos y tres variables y las diferentes cónicas y superficies obtenidas, con sus respectivas gráficas, se hace una síntesis de los valores y vectores propios incluyendo la parte correspondiente a matrices simétricas asociadas a formas cuadráticas. Para finalizar con la aplicación de estos conceptos a la clasificación de formas cuadráticas.

A continuación, se describe la estructura de los Contenidos por Capítulos.

En el **CAPITULO 1**, se describe el Planteamiento del Problema, Justificación, antecedentes, Objetivos de la Investigación.

En el **CAPITULO 2**, se desarrolla el Marco Teórico en el que se detallan los conceptos fundamentales de espacios vectoriales, Formas Cuadráticas y la Expresión de las magnitudes Cinéticas, etc.

El **CAPITULO 3**, está dedicado al Diseño Metodológico, aquí se establece el Tipo y Diseño de Investigación, Técnica y Estrategias.

En el **CAPITULO 4**, se muestra los Resultados de la Investigación; es decir, la del teorema de clasificación de formas cuadráticas en R^n.

Finalmente, en el **CAPITULO 5,** se muestran las Conclusiones y Recomendaciones.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, ANTECEDENTES, OBJETIVOS.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

1.1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.

La clasificación de formas cuadráticas en R^n, se ubica en el área del algebra lineal, generalmente en los capítulos finales. Esta clasificación permite profundizar en el conocimiento de las superiores y curvas, así mismo, permite visualizar la relación de los autovalores asociados a la forma cuadrática con la presentación grafica correspondiente; sin embargo, esta teoría de clasificación se encuentra desprovisto de ejemplos y gráficas.

Las formas cuadráticas se aplica además en área como física (Dinámica del solido rígido), entre otras áreas.

1.1.2 ENUNCIADO DEL PROBLEMA.

Para fijar una dirección a esta investigación definimos el problema:

- ¿Cuál es la descripción del Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en R^2 y R^3?
- ¿Cuáles son las Aplicaciones que tiene en Física el Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en R^2 y R^3?

1.1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.

La presente Investigación pretende desarrollar una teoría clara y detallada de aplicaciones de las formas cuadráticas y por lo expuesto justificamos su importancia.

En el estudio de la matemática superior surge la necesidad de usar el Teorema de clasificación de formas cuadráticas para identificar curvas y superficies cuádricas; sin embargo, el proceso de identificación no se encuentra detallado en los libros.

Este resultado es fundamental en el Algebra Lineal, siendo curso pilar del Conocimiento Matemático.

1.2 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN.

- **A NIVEL LOCAL:**

  Al revisar los archivos de tesis e informes de investigación existentes en nuestra escuela, no se encuentra trabajos realizados referentes al tema de Investigación.

- **A NIVEL REGIONAL:**

  De la misma forma se ha indagado en los archivos de tesis de la macro región sur, donde no se ha encontrado temas similares.

- **A NIVEL NACIONAL E INTERNACIONAL:**

Haciendo un sondeo vía Internet de los trabajos relacionados con el presente trabajo de investigación, no se ha encontrado que desarrollen de un modo claro y completo, que sea fácil de ser asimilado con claridad los conceptos involucrados en el presente trabajo.

Entre los artículos que se ha podido encontrar por Internet se tiene los siguientes trabajos:

ALGEBRA LINEAL.- séptima versión (Lucia Contreras Caballero) Departamento de matemática, Fac. Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid. Es un artículo que desarrolla en forma genérica el tema; es decir, no especifica los procedimientos aplicados, por lo que no permite lograr un conocimiento pleno.

ALGEBRA LINEAL.- (José Antonio AbiaVian) Dpto. Matemática Aplicada a la Técnica E.U.P., Universidad de Valladolid. Es otro artículo que también dedica una parte de su contenido, pero también de manera superficial al tema propuesto, puesto que simplemente se menciona en una clasificación con una breve definición.

1.3 OBJETIVOS.

1.3.1 OBJETIVO GENERAL.

- Describir el Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en R^n y su Aplicación en Dinámica del Sólido Rígido.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Describir el Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en R^2 y R^3.
- Aplicar el Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en dinámica de Solidos Rígido.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN.

2.1 ESPACIOS VECTORIALES.

DEFINICIÓN 2.1.

Sean K un conjunto de escalares y V un conjunto no vacío. Se dice que V es un espacio vectorial sobre K o un $K-$ espacio, si en V existen dos operaciones: una suma y un producto por un escalar, que satisfacen las propiedades siguientes [5]:

1) La suma en V es conmutativa:

$x+y=y+x$, para todo $x,y \in V$

2) La suma en V es Asociativa:

$x+(y+z)=(x+y)+z$, para todo $x,y,z \in V$

3) Existe en V un elemento único, que se denota por $0 \in V$ y se denomina cero del espacio, que cumple:

$x+0=x$, para todo $x \in V$

4) Para todo elemento $x \in V$ existe un único elemento $(-x) \in V$ denominado opuesto de x, que cumple:

$x+(-x)=0$

5) La suma de elemento de V y el producto por un escalar cumplen la propiedad distributiva:

$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, para todo $x,y \in V, \alpha \in K$

6) La suma en el conjunto de los escalares y el producto por un vector elemento de V cumplen la propiedad distributiva:

$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,$ para todo $x\in V,\ \alpha,\beta\in K$

7) El producto por un escalar y el producto en el conjunto de los escalares, cumplen la propiedad asociativa:

$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x),$ para todo $x\in V,\ \alpha,\beta\in K$

8) La unidad del conjunto de los escalares cumple:

$1x=x,$ para todo $x\in V$

Demostración.

Sean $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n), y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in V, \lambda\in K$.

Definimos:

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\in V$$

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)\in V$$

Comprobemos los axiomas de la definición.

A_1. Conmutatividad.

$$\begin{aligned} x+y &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n) && \text{Definicion Suma} \\ &= (y_1+x_1,y_2+x_2,\ldots,y_n+x_n) && \text{Conmutatividad en K} \\ &= y+x \end{aligned}$$

A_2. Asociatividad.

$$\begin{aligned} (x+y)+z &= ((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,\ldots,(x_n+y_n)+z_n) && \text{Definicion Suma} \\ &= ((x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),\ldots,x_n+(y_n+z_n)) && \text{Asociatividad en K} \\ &= x+(y+z) \end{aligned}$$

A_3. Sea $0=(0,0,\ldots,0)$.

$$x+0=\left(x_1+0,x_2+0,\ldots,x_n+0\right) \text{ Definición Suma e identidad en K}$$
$$=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) \text{ Definición Suma}$$
$$=x$$

A_4. Para $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, tomemos $-x=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$.

$$x+(-x)=\left(x_1+(-x_1),x_2+(-x_2),\ldots,x_n+(-x_n)\right) \text{ Definición Suma}$$
$$=\left((-x_1)+x_1,(-x_2)+x_2,\ldots,(-x_n)+x_n\right) \text{ Conmutativa en K}$$
$$=\left(0,0,\ldots,0\right) \text{ Inverso aditivo en K}$$
$$=0$$

B_1. Para $x\in V;\alpha,\beta\in K$.

$$(\alpha\beta)x=((\alpha\beta)x_1,(\alpha\beta)x_2,\ldots,(\alpha\beta)x_n) \text{ Definicion Producto}$$
$$=(\alpha(\beta x_1),\alpha(\beta x_2),\ldots,\alpha(\beta x_n)) \text{ Asociatividad en K}$$
$$=\alpha((\beta x_1),(\beta x_2),\ldots,(\beta x_n)) \text{ Factor Comun}$$
$$=\alpha(\beta x)$$

B_2. Para $x\in V;\alpha,\beta\in K$.

$$\left(\alpha+\beta\right)x=\left((\alpha+\beta)x_1,(\alpha+\beta)x_2,\ldots,(\alpha+\beta)x_n\right) \text{ Definición Suma y Producto}$$
$$=\left(\alpha x_1+\beta x_1,\alpha x_2+\beta x_2,\ldots,\alpha x_n+\beta x_n\right) \text{ Destribución en K}$$
$$=\alpha x+\beta x \text{ Definición Suma en V}$$

B_3. $x,y\in V;\alpha\in K$.

$$\alpha(x+y)=\alpha(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n) \text{ Definicion Producto}$$
$$=(\alpha(x_1+y_1),\alpha(x_2+y_2),\ldots,\alpha(x_n+y_n)) \text{ Distributiva en K}$$
$$=\alpha x+\alpha y$$

B_4. $\forall x\in V$ y tomando $1\in K$.

$$1x=(1x_1,1x_2,\ldots,1x_n)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x \text{ Definicion de Producto}$$

2.2 COMBINACIÓN LINEAL.

DEFINICIÓN 2.2.

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores en un espacio vectorial real V. Un vector v en V es una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sí [1].

$$V = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n \quad (2.1)$$

Para ciertos números reales $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

DEFINICIÓN 2.3.

Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, entonces se dice que S es [1]:

1.- Linealmente Dependiente o ligado si y sólo si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos nulos, tal que.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$$

2.- Linealmente independiente o libre si y sólo si no son ligados. Esto es.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$$

Se cumple solo para $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

TEOREMA 1.

Sean V un espacio vectorial, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un sistema de vectores. Entonces el sistema de vectores $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es linealmente independiente si y sólo si la única combinación lineal del sistema que tiene como resultado el vector nulo, es la combinación lineal trivial, es decir, se cumple.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0, \text{ entonces } \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que el sistema $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente.

Tenemos que demostrar que si una combinación lineal tiene como resultado cero, es la trivial. Sea, por lo tanto.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0$ con $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$.

Y vamos a suponer que al menos uno de los coeficientes es no nulo; $\lambda_n \neq 0$

$$\lambda_n v_n = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - ... - \lambda_{n-1} v_{n-1}$$

que $\lambda_n \neq 0$ y obtenemos.

$$v_n = (-\frac{\lambda_1}{\lambda_n})v_1 + (-\frac{\lambda_2}{\lambda_n})v_2 + ... + (-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n})v_{n-1}$$

Luego v_n se expresa como combinación lineal del resto de los vectores del sistema. Esto significa que el sistema $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$,es linealmente dependiente, lo cual contradice. Por lo tanto, ninguno de los coeficientes de la combinación lineal es no nulo.

Supongamos que uno de los vectores del sistema se puede expresar como combinación lineal de los demás; tomemos el vector v_1. Entonces.

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + ... + \lambda_n v_n$$

de aquí tenemos.

$$-v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + ... + \lambda_n v_n = 0$$

Lo cual contradice lo supuesto, y no es la trivial por que al menos el coeficiente de v_1 es no nulo.

Por lo tanto, ninguno de los vectores del sistema se puede expresar como combinación lineal de los demás y el sistema es linealmente independiente.

2.3 ESPACIO GENERADO.

DEFINICIÓN 2.4.

Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, entonces el conjunto de todos los vectores en V que son combinaciones lineales de los vectores en S se denomina espacio generado y se denota por[13].

$$\text{gen} \quad \text{o} \ \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \tag{2.2}$$

TEOREMA 2.

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores de un espacio vectorial V. Si el vector u es combinación lineal de ellos entonces los coeficientes de la combinación lineal son únicos.

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base. Entonces es un generador y $v \in V$ se expresa como combinación lineal de los elementos de la base, es decir, existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ tales que.

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$$

Tenemos que demostrar que los escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ son únicos.

Supongamos que existe otro conjunto de escalares $b_1, \mathrm{b}_2, ..., \mathrm{b}_n \in K$ tales que

$$v = b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_ne_n$$

Entonces:

$$a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n = b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_ne_n$$

Operando la igualdad obtenemos.

$$(a_1 - b_1)e_1 + (a_2 - b_2)e_2 + ... + (a_n - b_n)e_n = 0$$

Pero el sistema $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, por ser base, es linealmente independiente, la única combinación lineal que tiene como resultado cero es la trivial, de donde.

$$(a_1 - b_1) = 0,\ (a_2 - b_2) = 0,\ ...\ ,(a_n - b_n) = 0$$

$$\text{Y} \quad a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ...\ ,a_n = b_n$$

Por lo tanto, la forma de expresar un vector como combinación lineal de la base es única.

DEFINICIÓN 2.5.

El conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de un espacio vectorial V es una base de V sí.

i). $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto generador de V

ii). $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es Linealmente independiente.}

DEFINICIÓN 2.6.

Un Espacio Vectorial Real V de dimensión finita, se dice que es un espacio con producto interno si a cada par de vectores $u,v \in V$, le asigna un número real denotado por $\langle u,v \rangle$, tal que.

$$\langle u,v \rangle = u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad (2.3)$$

A₁. $\langle u,u \rangle \geq 0$ y $\langle u,u \rangle = 0$ si y sólo si $u = 0$.

A₂. $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$

A₃. $\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v+w \rangle$

A₄. $\langle \alpha u,v \rangle = \alpha \langle u,v \rangle$ para cualquier escalar α .

2.4 LONGITUD O NORMA.

DEFINICIÓN 2.7.

Sea V un espacio vectorial, con un producto interno $\langle , \rangle$. Una norma en V es una función de V en R, tal que, a cada $v \in V$, le asigna un número real no negativo, denotado por $\|V\|$ y definido como [1].

$$\|V\| = \sqrt{\langle v,v \rangle} \qquad (2.4)$$

2.5 PROPIEDADES DE LA NORMA.

TEOREMA 3.

Sea V un espacio vectorial. Entonces.

i). $\|u\| = 0$ si y sólo si, $u = 0$.

ii). $\|\alpha u\| = |\alpha| \, . \|u\|$

iii). $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

iv). $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular).

DEMOSTRACIÓN.

i). Por definición de Producto Interno.

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ del Producto interno}$$

ii). De las propiedades de producto interno.

$$\begin{aligned}\|\alpha u\| &= \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle u,u\rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle u,u\rangle} \\ &= |\alpha| \, .\|u\|\end{aligned}$$

iii). Claramente,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle \\ &= 2\langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle - 2\langle u,v\rangle + 2\langle v,v\rangle \\ &= 2(\ \|u\|^2 + \|v\|^2\ )\end{aligned}$$

iv).

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \\ &\leq \langle u,u\rangle + 2|\langle u,v\rangle| + \langle v,v\rangle \text{ Propiedad de valor absoluto} \\ &\leq \langle u,u\rangle + 2\|u\|\|v\| + \langle v,v\rangle \text{ Por Definición de } |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \\ &= \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \text{ extrayendo raiz cuadrada se obtiene}\end{aligned}$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

2.6 CAMBIO DE BASE.

DEFINICIÓN 2.8.

En un espacio vectorial V de dimensión finita n, sean $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ dos bases, v un vector de V con las coordenadas [5].

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ y } [v]_{B'} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que:

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$
$$v = \beta_1 e_1' + \beta_2 e_2' + \ldots + \beta_n e_n'$$

Entonces:

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1' + \beta_2 e_2' + \ldots + \beta_n e_n'$$

Ahora buscaremos una expresión tal que a partir de los α_i podamos encontrar los β_i.

Como B' es una base de V, cada vector de la base B se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de la base B'.

Así tenemos.

$$\begin{aligned} e_1 &= a_{11} e_1' + a_{21} e_2' + \ldots + a_{n1} e_n' \\ e_2 &= a_{12} e_1' + a_{22} e_2' + \ldots + a_{n2} e_n' \\ &\vdots \\ e_n &= a_{1n} e_1' + a_{2n} e_2' + \ldots + a_{nn} e_n' \end{aligned}$$

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i'$$

Donde $a_{ij} \in K$, entonces:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i^{'}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \alpha_j e_i^{'} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j) e_i^{'} \\ &= (\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \alpha_j) e_1^{'} + (\sum_{j=1}^{n} a_{2j} \alpha_j) e_2^{'} + \ldots + (\sum_{j=1}^{n} a_{nj} \alpha_j) e_n^{'} \\ &= \beta_1 e_1^{'} + \beta_2 e_2^{'} + \ldots + \beta_n e_n^{'} \end{aligned}$$

Como las coordenadas de un vector en una base son únicas, entonces:

$$\beta_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \alpha_j , \beta_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \alpha_j , \ldots , \beta_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \alpha_j$$

Es decir.

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j , i = 1, 2, \ldots, n .$$

Esta relación puede expresarse en notación matricial.

Sea $A = (a_{ij})$. Entonces escribimos.

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$[V]_{\beta'} = A [V]_{\beta'}$$

La matriz A se denomina la matriz de cambio de coordenadas de la base B a la base $B^{'}$ y se obtiene expresando los elementos de la base B como combinación lineal de los elementos de la base $B^{'}$ y escribiendo esos coeficientes como columnas en la matriz. La forma de construir esta matriz garantiza que es la única que establece esta relación.

Teorema 4.

Sea A una matriz cuadrada. A es invertible si, y solo si,

$$\det A \neq 0$$

Demostración.

Si A es invertible, entonces $AA^{-1} = I$, aplicando la propiedad de determinantes $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, se obtiene.

$$\det\left(AA^{-1}\right) = \det\left(I\right)$$
$$\det\left(A\right)\det\left(A^{-1}\right) = 1$$

Por lo tanto $\det A \neq 0$

Recíprocamente si A no es invertible, además si una matriz B no es invertible, entonces se cumple que $\det B = 0$, por lo tanto $\det A = 0$, complementando así la caracterización de invertibilidad.

TEOREMA 5.

Sean V un espacio vectorial de dimensión n, B y B' dos bases de V. Si A es la matriz de cambio de coordenadas de la base B a la base B'. Entonces A es inversible.

DEMOSTRACIÓN.

A es una matriz cuadrada de orden n. Para demostrar que A es inversible tenemos que probar que $\det(A) \neq 0$.

Sea $v \in V$, analicemos la relación que existe entre $[V]_B$ y $[V]_{B'}$.

$$[V]_{B'} = A[V]_B$$

Vamos a interpretar esta relación como un sistema de ecuaciones. Supongamos $[V]_{B'}$ conocido, el problema es hallar $[V]_B$. Entonces la relación $[V]_{B'} = A[V]_B$

Es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, que tiene solución única las coordenadas de un vector en una base son únicas si y sólo si $rang A = n$ y esto significa que A es inversible.

Si A es la matriz de cambio de coordenadas de la base B a la base B', cumple la relación $[V]_{B'} = A[V]_B$ y como A es inversible, tenemos:

$$[V]_B = A^{-1}[V]_{B'}$$

Por lo tanto A^{-1} es la matriz de cambio de coordenadas de la base B' a la base B .

2.7 CONJUNTO ORTOGONAL Y CONJUNTO ORTONORMAL.

2.7.1 VECTORES ORTOGONALES.

DEFINICIÓN 2.9.

1.- Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean dos vectores $u, v \in V$.[6]

Se dice que u, v son ortogonales $(u \perp v)$ si sólo si $\langle u, v \rangle = 0$.

2.- Un conjunto de vectores $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ de un espacio vectorial V se dice que es ortogonal si y sólo si son ortogonales dos a dos, es decir $\langle v_i,v_j\rangle = 0, i\neq j$.

3.- El conjunto de vectores S (en 2), se dice que es ortonormal si y sólo si

a) S es ortogonal

b) $\|v_i\| = 1, \forall i$.

2.7.2 PROCESO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT.

TEOREMA 6.

Sea H un subespacio de dimensión n de R^n. Entonces H tiene una base ortonormal.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ una base de H, se probara el teorema construyendo una base ortonormal a partir de los vectores en B.

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$v_2' = v_2 - \langle v_2,e_1\rangle e_1 \quad \text{Redefinición}$$

Probar que v_2' es ortogonal a e_1

$$\begin{aligned}\langle v_2',e_1\rangle &= \langle v_2 - \langle v_2,e_1\rangle e_1, e_1\rangle \\ &= \langle v_2,e_1\rangle - \langle v_2,e_1\rangle\langle e_1,e_1\rangle, \ pero \ \langle e_1,e_1\rangle = 1 \\ &= \langle v_2,e_1\rangle - \langle v_2,e_1\rangle = 0\end{aligned}$$

v_2' es ortogonal a e_1.

$$e_2 = \frac{v_2'}{\left\| v_2' \right\|}$$

$$v_3' = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2$$

Probar que v_3' es ortogonal a e_1 y e_2.

$$\begin{aligned} \langle v_3', e_1 \rangle &= \langle v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2, e_1 \rangle \\ &= \langle v_3, e_1 \rangle - \langle v_3, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle - \langle v_3, e_2 \rangle \langle e_2, e_1 \rangle, \text{ pero } \langle e_2, e_1 \rangle = 0 \\ &= \langle v_3, e_1 \rangle - \langle v_3, e_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

v_3' es ortogonal a e_1

$$\begin{aligned} \langle v_3', e_2 \rangle &= \langle v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2, e_2 \rangle \\ &= \langle v_3, e_2 \rangle - \langle v_3, e_1 \rangle \langle e_1, e_2 \rangle - \langle v_3, e_2 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle, \text{pero } \langle e_1, e_2 \rangle = 0, \ \langle e_2, e_2 \rangle = 1 \\ &= \langle v_3, e_2 \rangle - \langle v_3, e_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia v_3' son ortogonales a e_1 y e_2.

$$e_3 = \frac{v_3'}{\left\| v_3' \right\|}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

$$v_k' = v_k - \langle v_k, e_1 \rangle e_1 - \langle v_k, e_2 \rangle e_2 + \ldots + \langle v_{k-1}, e_{k-1} \rangle e_{k-1}$$

$$\begin{aligned} \langle v_k', e_1 \rangle &= \langle v_k - \langle v_k, e_1 \rangle e_1 - \langle v_k, e_2 \rangle e_2 + \ldots + \langle v_{k-1}, e_{k-1} \rangle e_{k-1}, e_1 \rangle \\ &= \langle v_k, e_1 \rangle - \langle v_k, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle - \langle v_k, e_2 \rangle \langle e_2, e_1 \rangle + \ldots + \langle v_{k-1}, e_{k-1} \rangle \langle e_{k-1}, e_1 \rangle, \\ &\quad \text{pero } \langle e_1, e_1 \rangle = 1, \langle e_2, e_1 \rangle = 0, \ldots, \langle e_{k-1}, e_1 \rangle = 0, \text{entonces} \end{aligned}$$

$$\langle v_k', e_1 \rangle = \langle v_k, e_1 \rangle - \langle v_k, e_1 \rangle = 0$$

De forma análoga.

$$\langle v_k', e_2 \rangle = 0$$

$$\vdots$$

$$\langle v_k', e_{k-1} \rangle = 0$$

$$e_k = \frac{v_k'}{\|v_k'\|}$$

Por lo tanto $B' = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ son vectores ortogonales que generan el mismo espacio vectorial V.

TEOREMA 7.

Todo conjunto ortogonal de un espacio vectorial V es linealmente independiente.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto ortogonal de V. Construimos la combinación lineal.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

Calculamos el producto interno del vector de la ecuación por v_1 obtenemos.

$$\langle 0, v_1 \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, v_1 \rangle$$

$$0 = \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_1 \rangle + \ldots + \alpha_n \langle v_n, v_1 \rangle$$

El conjunto formado por los vectores v_i es ortogonal se deduce.

$$0 = \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle$$
$$0 = \alpha_1 \|v_1\|^2$$

Es decir $\alpha_1 = 0$, $v_1 \neq 0$, en forma análoga con los vectores $v_2, \ldots, v_n$ obtendremos que $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ y por lo tanto la ecuación solo se cumple si todos los coeficientes son nulos, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

2.8 VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS.

DEFINICIÓN 2.10.

Sea A una matriz de tamaño de $n \times n$.

i. Un número real λ es un valor propio de A si

$$Av = \lambda v \tag{2.5}$$

Para algún vector no nulo v de R^n.

ii. El vector no nulo v que satisface la ecuación (2.5) se llama vector propio de A asociado al valor propio λ.

TEOREMA 8:

Si A es una matriz de $n \times n$, entonces:

$\det(A - \lambda I)$ es un polinomio $p(\lambda)$ de grado n.

Los valores característicos de A son las soluciones de $p(\lambda) = 0$

Si λ_0 es un valor característico, cualquier solución no trivial de $(A - \lambda_0 I)v = 0$ es un vector característico de A correspondiente a λ_0.

i). Sea A una matriz de 2×2, entonces $\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$, el cual es un polinomio en λ de grado 2. Sea que para una matriz de $k \times k$ el determinante de $A-\lambda I$ es un polinomio de grado k. Si B es una matriz de $(k+1)\times(k+1)$, entonces $\det(B-\lambda I)$ usando la definición. En esta forma se ve que el determinante es un polinomio de grado $(k+1)$.

ii). Si λ es un valor característico si y sólo si $Av=\lambda v$ y $v\neq 0$. Por tanto, $Av-\lambda v=(A-\lambda I)v=0$, las ecuaciones homogéneas tienen soluciones no triviales si y sólo si el determinante de la matriz de coeficientes es cero. Inversamente, si $\det(A-\lambda I)=0$, entonces la ecuación $(A-\lambda I)v=0$ tiene soluciones no triviales y λ no es valor característico de A si y sólo si $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$.

iii). Supongamos v cualquier solución no trivial de $(A-\lambda I)v=0$. Entonces $Av=\lambda_0 vI=\lambda_0 v$.

La ecuación $\det(A-\lambda I)=0$ se llama ecuación característica de A. La expresión $\det(A-\lambda I)$ es siempre un polinomio (de grado n si A es de $n\times n$) y se llama el polinomio característico de A. Según el teorema fundamental de álgebra, cualquier polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos tiene exactamente n raíces (contando multiplicidades); por tanto, una matriz de $n\times n$ tiene exactamente n valores característicos, repetidos o no.

Para encontrar los valores característicos de una matriz A de $n\times n$ dada,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{11}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{11}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$p(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1\lambda + a_0\right] = 0 \tag{2.6}$$

La ecuación (1) tiene n raíces, repetidas o no. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ son las diferentes raíces de (1) con multiplicadores $r_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \ldots, \mathrm{r}_m$, respectivamente, entonces (1) se puede factorizar para obtener.

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{r_m} = 0 \tag{2.7}$$

Debemos encontrar las raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

En consecuencia, para hallar valores y vectores cara característicos de una matriz A de $n \times n$ dada, se halla $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, enseguida se encuentra las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ de $p(\lambda) = 0$ y por último se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda I_i)v = 0$, correspondiente a cada valor característico λ_i.

DEFINICIÓN 2.11.

Sea λ un valor característico de la matriz A; entonces la multiplicidad geométrica de λ es la dimensión del espacio propio correspondiente a $\lambda\left(E_{\lambda}\right)$.

Multiplicidad geométrica de $\lambda = \dim E_{\lambda}$.

2.9 MATRICES SEMEJANTES Y DIAGNOLIZACIÓN.

DEFINICIÓN 2.12.

Se dice que dos matrices A y B de $n \times n$ son semejantes si existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que:

$$B = C^{-1}AC \text{ o } CB = AC.$$

TEOREMA 9.

Si A y B son matrices semejantes de $n \times n$, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, tienen los mismos valores característicos.

DEMOSTRACIÓN.

Sea A y B son semejantes, existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que

$B = C^{-1}AC$ y $\det(B - \lambda I) = \det\left(C^{-1}AC - \lambda I\right) = \det\left[C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda I)C\right] =$

$$\det C^{-1} \det(A - \lambda I) \det C = \det C^{-1} \det C \det(A - \lambda I) = \det\left(C^{-1}C\right)\det(A - \lambda I) =$$

$$\det I \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I).$$

Entonces A y B tienen la misma ecuación característica y como los valores son raíces de la ecuación característica, tienen los mismos valores característicos.

DEFINICIÓN 2.13.

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D que es semejante a A.

TEOREMA 10.

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores característicos linealmente independientes. En tal caso, la matriz diagonal D semejante a A está dada por:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

de donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ son los valores característicos de A, y $Av_i = \lambda_i v_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$. Si C es una matriz cuyas columnas son vectores característicos linealmente independientes de A, entonces:

$$D = C^{-1} A C$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea A tiene n vectores característicos linealmente independientes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ que corresponden a los valores característicos (no necesariamente diferentes) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$.

Sea

$$v_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, v_n = \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix}$$

Y sea

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces C es invertible ya que sus columnas son linealmente independientes.

$$AC = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

y se ve que la columna i de AC es $A\begin{bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{bmatrix} = Av_i = \lambda v_i$. Asi AC es la matriz cuya columna i es $\lambda_i v_i$ y

$$AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & \cdots & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 c_{n1} & \lambda_2 c_{n2} & \cdots & \lambda_n c_{nn} \end{bmatrix}$$

Pero

$$CD=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Entonces

$$AC=CD$$

C es invertible, se pueden multiplicar ambos lados de la ecuación por la izquierda por C^{-1} para obtener

$$D=C^{-1}AC$$

Esto prueba que si A tiene n vectores característicos linealmente independientes, entonces A es diagonalizable. Inversamente, suponga que A es diagonalizable; esto es, suponga que $D=C^{-1}AC$ se cumple para alguna matriz invertible C. Sean $v_1, v_2, ..., v_n$ las columnas de C. Entonces $AC=CD$, e invirtiendo los argumentos anteriores, se ve de inmediato que $Av_i=\lambda v_i$ para $i=1,2,...,n$. Entonces, $v_1, v_2, ..., v_n$ son vectores característicos de A y son linealmente independientes porque C es invertible.

2.10 MATRICES SIMÉTRICAS Y DIAGNOLIZACIÓN ORTOGONAL.

Sea la diagonalización de matrices simétricas $\left(A=A^t\right)$.

En la teoría que hemos desarrollado acerca de los valores característicos de una matriz A, cuyos elementos son números reales, hemos venido suponiendo que los valores característicos de A son números reales. No se deduce, sin embargo, que las raíces de la ecuación característica sean números reales, puesto que las raíces de una ecuación polinómica con coeficientes reales pueden ser complejas.

Sin embargo, si A en la ecuación $Av = \lambda v$ es una matriz simétrica.

TEOREMA 11.

Todas las raíces del polinomio característico de una matriz simétrica son números reales.

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos λ un valor característico de A con un vector característico v; es decir, $Av = \lambda v$. El vector v está en C^n, el producto interno se defino como:

$$v \cdot w = v^T w$$

y como $\alpha \in R$ satisface:

$$av \cdot w = \alpha(v \cdot w) \text{ y } \qquad v \cdot aw = \overline{\alpha}(v \cdot w) \qquad (2.8)$$

Entonces, usando el hecho que $Av = \lambda v$ y (2.8) se tiene:

$$Av \cdot v = \lambda v \cdot v = \lambda(v \cdot v) \qquad (2.9)$$

Más aún, por propiedades de la multiplicación de matrices, (2.8)

$$A = A^t Av \cdot v = (Av)^T v = v^T A^T v = v^T Av = v \cdot Av = v \cdot \lambda v = \bar{\lambda}(v \cdot v) \qquad (2.10)$$

Igualando (2.9) y (2.10) se tiene:

$$\lambda(v \cdot v) = \bar{\lambda}(v \cdot v) \qquad (2.11)$$

Pero $v \cdot v = \|v\|^2 \neq 0$, ya que v es un vector propio. Entonces se puede dividir ambos lados de (2.11) entre $v \cdot v$ para obtener:

$$\lambda = \bar{\lambda} \qquad (2.12)$$

Si $\lambda = a + bi$, entonces $\bar{\lambda} = a - bi$ y de (2.12) se tiene:

$$a + bi = a - bi$$

Lo que se cumple sólo si $b = 0$. Esto muestra que $\lambda = a$; por lo tanto λ es real.

TEOREMA 12.

Si A es una matriz simétrica de $n \times n$, entonces los vectores característicos que corresponden a valores característicos distintos de A son ortogonales.

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos v_1 y v_2 vectores característicos de A, los cuales están asociados con los valores característicos distintos λ_1 y λ_2 de A. Entonces $Av_1 = \lambda_1 v_1$ y $Av_2 = \lambda_2 v_2$.

Ahora:

$$Av_1 \cdot v_2 = \lambda_1 v_1 \cdot v_2 = \lambda_1 (v_1 . v_2) \qquad (2.13)$$

y

$$Av_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot A^t v_2 = v_1 \cdot Av_2 = v_1 \cdot (\lambda_2 v_2) = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2) \qquad (2.14)$$

combinando (2.13) y (2.14), se tiene $\lambda_1 (v_1 \cdot v_2) = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2)$ y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se concluye que $(v_1 \cdot v_2) = 0$.

DEFINICIÓN 2.14.

Una matriz Q de $n \times n$ es ortogonal si $Q^t = Q^{-t}$. Desde luego, también podemos decir que Q es ortogonal si $Q^t Q = I^n$.

TEOREMA 13.

La matriz Q de $n \times n$, es ortogonal si y sólo si las columnas (y filas) de Q forman un conjunto ortogonal.

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos Q una matriz ortogonal de $n \times n$, es decir, $Q^t Q = I$ y veamos que las columnas de Q son mutuamente ortogonales.

Sea:

$$Q = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \ldots \quad u_n]$$

tal que los $\|u_i\|=1,\ i=1,2,...,n$.

Como $Q^tQ=I$, tenemos:

$$QQ^t=\begin{bmatrix} u_1\cdot u_1 & u_2\cdot u_1 & \dots & u_n\cdot u_1 \\ u_1\cdot u_2 & u_2\cdot u_2 & \dots & u_n\cdot u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1\cdot u_n & u_2\cdot u_n & \dots & u_n\cdot u_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices tenemos, $u_i\cdot u_i=1$, y $u_i\cdot u_j=0$, para todo $i\neq j$; por tanto los n vectores son ortonormales y cualquier n vectores mutuamente ortonormales forman un conjunto ortonormal.

Análogamente, supongamos que los n vectores:

$$u_1=\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{bmatrix}, \dots, u_n=\begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix}$$

forman un conjunto ortonormal; es decir,

$$u_i\cdot u_i=1,\ u_i\cdot u_j=0, \text{ para todo } i\neq j;\ \|u_i\|=1,\ i=1,2,...,n.$$

Y veamos que la matriz Q formada por los n vectores es ortonormal.

Sea

$$Q=[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots \quad u_n]$$

Si hacemos QQ^t y teniendo en cuenta que $u_i\cdot u_j=0$, para todo $i\neq j$, se tiene

$$QQ^t = \begin{bmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_1 & \dots & u_n \cdot u_1 \\ u_1 \cdot u_2 & u_2 \cdot u_2 & \dots & u_n \cdot u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 \cdot u_n & u_2 \cdot u_n & \dots & u_n \cdot u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Luego Q es ortogonal y como $\|u_i\| = 1,\ i = 1, 2, \dots, n$; se tiene que Q es ortonormal.

TEOREMA 14.

Si la matriz Q de $n \times n$ es ortogonal, entonces $\det(Q) = \pm 1$

Demostración.

$I = Q^{-1}Q = QQ^{-1}$. Por hipótesis, $Q^t = Q^{-1}$, entonces $I = Q^tQ = QQ^t$, por tanto, $\det(I) = \det(Q^tQ) = \det(QQ^t)$, o

$$\det(I) = \det(Q^t)\det(Q) = \det(Q)\det(Q^t) = (\det(\mathrm{Q}))^2.$$

Como $1 = \det(I) = (\det(\mathrm{Q}))^2$ (pues $\det(Q) = \det(Q^t)$)

Tenemos:

$(\det(\mathrm{Q}))^2 = 1$, entonces $\det(Q) = \pm 1$.

TEOREMA 15.

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica. Los valores característicos de A están localizados en la diagonal principal de D.

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos A, una matriz simétrica. Entonces por el teorema (6), A es diagonalizable ortogonalmente con la matriz Q cuyas columnas son los vectores característicos reales ortonormales de A.

Inversamente, suponga que A es diagonalizable ortogonalmente. Entonces, existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^t AQ = D$. Multiplicando esta ecuación a izquierda por Q y por la derecha por Q^t, y usando el hecho de que $Q^t Q = QQ^t = I$, se obtiene $A = QDQ^t$.

Entonces; $A^t = (QDQ^t)^t = (Q^t)^t D^t Q^t = QDQ^t = A$. Entonces, A es simétrica.

FORMAS CUADRÁTICAS.

DEFINICIÓN 2.15.

Una forma cuadrática en R^n es una función $Q : R^n \to R$ de la forma

$Q(x) = x^T A x = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, donde $a_{ij} \in R$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, con

$A \in R^{n \times n}$ simétrica siendo $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n$. [1]

2.11 EJES PRINCIPALES.

TEOREMA 16.

Sea $A \in R^{n\times n}$ simétrica. Entonces existe un cambio de variable ortogonal $x = \varphi x'$($\varphi \in R^{n\times n}$ es ortogonal) que transforma la forma cuadrática $\varphi(x) = x^T A x$ en una forma cuadrática sin productos cruzados, es decir.

$$\varphi(x) = \overline{\varphi}(x') = x'^T D x', \text{ si } x = \varphi x'$$

Con $D \in R^{n\times n}$ diagonal. Además, los elementos de la diagonal de D son los valores propios de A y las columnas de la matriz Q son vectores propios de A y forman una base ortonormal de R^n.

DEMOSTRACIÓN.

A es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal Q tal que $D = Q^T A Q$, $Q^T = Q^{-1}$

$$\begin{aligned}\varphi(x) = x^T A x = \langle A x, x\rangle &= \langle Q D Q^T x, x\rangle \\ = \langle Q\left(D Q^T x\right), x\rangle &= \langle D Q^T x, Q^T x\rangle \\ = \langle D x', x'\rangle &\end{aligned}$$

Donde.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$x' = Q^T x \to x = Q x'$$

$$\varphi(x)=\overline{\varphi}(x')=\langle Dx',x'\rangle=x'^{T}Dx'$$

$$=\begin{bmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

$$=\lambda_1 x_1'^2+\lambda_2 x_2'^2+\dots+\lambda_n x_n'^2$$

2.12 TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS EN R^n.

TEOREMA 16.

Sea $\varphi(x)=x^T Ax$ una forma cuadrática en un espacio vectorial de dimensión n. Con matriz asociada A, donde $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ son sus valores propios. Entonces se verifica.[1]

a. φ es definida positiva si y sólo si $\lambda_i>0$, $\forall i=1,2,\dots,n$. φ es definida negativa si y sólo si $\lambda_i<0$, $\forall i=1,2,\dots,n$.

b. φ es semidefinida positiva si y sólo si $\lambda_i\geq 0\ \forall i=1,2,\dots,n$ y existe i_k tal que $\lambda_{i_k}=0$.

c. φ es semidefinida negativa si y sólo si $\lambda_i\leq 0\ \forall i=1,2,\dots,n$ y existe i_k tal que $\lambda_h=0$.

d. φ es definida si y sólo si existen i_j e i_k tal que $\lambda_j<0$ y $\lambda_k>0$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\varphi(x)=x^T Ax$, $x\in R^n$ forma cuadrática sea $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ una base, sabemos por el teorema de los ejes principales que existe $\varphi\in M_{n\times n}(R)$ ortogonal tal que.

$$D = Q^t AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Haciendo el cambio de variables

$$x' = \varphi^T x = \varphi^{-1} x$$

Obtenemos $\varphi(x) = x^T A x = \overline{\varphi}(x') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2$ donde $[x']_B = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ luego $\varphi(v_i) = \lambda_i$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ ya que los vectores de B tiene por coordenadas $[v_1]_B^T = (1,0,0,\ldots,0)$, $[v_2]_B^T = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,[v_n]_B^T = (0,0,0,\ldots,1)$ entonces.

a. Si $\lambda_i > 0$ para $i = 1,2,\ldots,n$,entonces $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2 > 0$, $\forall x' \in R^n$, $x' \neq 0$, es decir definida positiva.

Recíprocamente si $\varphi(x)$ es definida positiva, así que $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2 > 0$, $x' \neq 0$, en particular para $x' = e_i = [0\ldots1\ldots0]^T$ $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ tendremos $\lambda_1 0^2 + \ldots + \lambda_i 1^2 + \ldots + \lambda_n 0^2 > 0$ por lo tanto $\lambda_i > 0$.

b. Si $\lambda_i < 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ entonces $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2 < 0$, $\forall x' \in R^n$, $x' \neq 0$,luego D es definida negativa recíprocamente si D es definida negativa $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2 < 0$, $\forall x' \in R^n$, $x' \neq 0$ en particular para

$x' = e_i = [0 \ldots 1 \ldots 0]^T$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ obtenemos

$\lambda_1 0^2 + \ldots + \lambda_i 1^2 + \ldots + \lambda_n 0^2 < 0$, por lo tanto $\lambda_i < 0$.

c. Si $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2 \geq 0$, $\forall x' \neq 0, \lambda_i = \varphi(v_i) \geq 0 \; \forall i$ como no es nula existe algún $\lambda_j > 0$ y como semidefinida positiva existe algún $\lambda_k = 0$. luego es semidefinida positiva.

Recíprocamente, si $\lambda_i \geq 0 \; \forall i$ con algún $\lambda_j > 0$ y algún $\lambda_k = 0$, se tiene que $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2 \geq 0 \; \forall x' \in R^n$ que $\overline{\varphi}(v_j) = \lambda_j > 0$, por lo que no es nula y que $\overline{\varphi}(v_k) = \lambda_k > 0$ por lo que semidefinida positiva.

d. Si $\lambda_i \leq 0$ y algún $\lambda_h = 0$ entonces $\varphi(x') \leq 0$ y para el vector $x' = (0, \ldots, x_h', \ldots, 0) \neq \vec{0}$ se obtiene $\varphi(x') = 0$ y por lo tanto la forma cuadrática es semidefinida negativa.

Recíprocamente si $\lambda_i \leq 0 \; \forall i$ algún $\lambda_j > 0$ y algún $\lambda_h = 0$ se tiene $\varphi(x') = \lambda_1 x_1'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2 \geq 0 \; \forall x' \in R^n$ que $\varphi(v_j) = \lambda_j < 0$ y que $\varphi(v_h) = \lambda_h = 0$.

e. Por ser indefinida $\varphi(x') \geq 0 \;\; \forall x' \in R^n$ luego $\lambda_i \geq 0$ para todo i por lo que $\lambda_j < 0$ y $\varphi(x') \leq 0$ para todo x'. Luego $\lambda_i \leq 0 \;\; \forall i$ por lo que existirá un $\lambda_k > 0$.En consecuencia es indefinida.

Recíprocamente si existe $\lambda_j < 0$ y $\lambda_k > 0$ serán $\varphi(v_j) = \lambda_j < 0$ y $\varphi(v_k) = \lambda_k > 0$.

2.13 CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS.

DEFINICIÓN 2.16.

Se llama cónica al lugar geométrico de puntos del plano euclídeo cuyas coordenadas verifican una ecuación de segundo grado. [1]

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0 \tag{2.15}$$

En forma matricial de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + a_{33} = 0 \tag{2.16}$$

La matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ es simétrica y por lo tanto existe una base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de R^2, formada por vectores propios de la matriz A. Si λ_1 y λ_2 son los correspondientes valores propios, cuyo cambio de coordenadas es.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

Transformando la ecuación (2.16) en la ecuación.

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + a_{33} = 0 \ ,$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + a_{33} = 0$$

Haciendo operaciones es.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 Y_1 & \lambda_2 Y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} (a_{12}c_{11} + a_{22}c_{21}) & (a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + a_{33} = 0$$

$$\lambda_1 Y_1^2 + \lambda_2 Y_2^2 + \underbrace{2(a_{12}c_{11} + a_{22}c_{21})}_{b_1} Y_1 + \underbrace{2(a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22})}_{b_2} Y_2 + a_{33} = 0$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + a_{33} = 0 \tag{2.17}$$

Donde cabe distinguir dos casos:

1. Ambos valores propios λ_1 y λ_2 son no nulos.

Entonces la ecuación (2.19) puede escribirse como.

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + \left(a_{33} - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} \right) = 0 \tag{2.18}$$

Haciendo ahora la traslación de ejes.

$$z_1 = y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}$$
$$z_2 = y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2}$$

se obtiene la ecuación

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + k = 0 \tag{2.19}$$

1.1 Si $k \neq 0$ la ecuación (2.19) puede escribirse como

$$m\, z_1^2 + n z_2^2 = 1 \tag{2.20}$$

donde $m = -\dfrac{\lambda_1}{k}$ y $n = -\dfrac{\lambda_2}{k}$

1.1.1. m y n son positivos. Llamando $a^2 = \dfrac{1}{m}$ y $b^2 = \dfrac{1}{n}$ la ecuación (2.20)se reduce a

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1 \ ,$$

que corresponde a una elipse

1.1.2. m y n tienen signos distintos. Entonces la ecuación (2.20) se reducirá a

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 1$$

o bien

$$-\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1,$$

Correspondientes a una hipérbola.

1.1.3. m y n son negativos. Entonces ningún punto satisface la ecuación (2.20), se trata de una cónica vacía a la que, por analogía con el primer caso se llama a veces elipse imaginaria.

1.2 Si $k = 0$ la ecuación (2.19) se reduce a.

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = 0 \tag{2.21}$$

Puede darse ahora dos casos:

1.2.1 Si $sig\lambda_1 = sig\lambda_2$, entonces la cónica se reduce a un punto, el $(z_1, z_2) = (0,0)$.

1.2.2 En cambio si los signos de λ_1 y λ_2 son distintos, como $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$, la ecuación (2.17) puede escribir como

$$z_2 = \pm\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}}\, z_1$$

que corresponde a dos rectas distintas que se cortan en un punto, precisamente en el $(z_1, z_2) = (0,0)$.

2. Uno de los dos valores propios es nulo.

Supondremos que $\lambda_1 = 0$, las mismas cónicas si fuera λ_2 el valor propio nulo.

En este caso la ecuación (2.17) queda

$$\lambda_2 y_2^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + a_{33} = 0$$

que puede escribirse como

$$\lambda_2 \left(y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + b_1 y_1 + \left(a_{33} - \frac{b_2{}^2}{4\lambda_2} \right) = 0$$

Llamando a_{00} a $a_{33} - \dfrac{b_2^2}{4\lambda_2}$ obtenemos la ecuación.

$$\lambda_2 \left(y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + b_1 y_1 + a_\infty = 0 \tag{2.22}$$

Distinguimos ahora dos casos en función de b_1.

2.1. Si $b_1 \neq 0$, entonces la ecuación (2.22) puede escribirse como.

$$\lambda_2 \left(y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + b_1 \left(y_1 + \frac{a_\infty}{b_1} \right) = 0 \tag{2.23}$$

Realizando la traslación.

$$z_1 = y_1 + \frac{a_\infty}{b_1}$$

$$z_2 = y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2}$$

La ecuación (2.23) se reduce a

$$\lambda_2 z_2^2 + b_1 z_1 = 0 \ ,$$

que corresponde a una parábola.

2.2. En cambio si $b_1 = 0$ entonces la ecuación (2.23) se reduce a

$$\lambda_2 \left(y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + a_\infty = 0$$

y realizando la traslación

$$z_1 = y_1$$
$$z_2 = y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2}$$

Se reduce $\lambda_2 z_2^2 + a_\infty = 0$ donde hay que distinguir los siguientes casos.

2.2.1. Si a_∞ la ecuación se reduce a $z_2 = 0$, es decir la cónica se reduce a una recta, que a veces se llama recta doble.

2.2.2. Si $a_\infty \neq 0$ y $sig\lambda_2 \neq siga_\infty$, como $\frac{-a_\infty}{\lambda_2} > 0$, la ecuación es

$$z_2 = \pm\sqrt{\frac{-a_\infty}{\lambda_2}},$$

que representa dos rectas paralelas.

2.2.3. Por último si $sig\lambda_2 = siga_\infty$ ningún punto verifica la ecuación y obtenemos otra cónica vacía, aunque en este caso, por analogía con los anteriores se dice, a veces, que se trata de dos rectas imaginarias.

2.14 CLASIFICACIÓN DE LAS CUÁDRICAS.

El estudio de las cuádricas es similar al de las cónicas pero en el espacio tridimensional, por lo que aparecerán términos adicionales en las ecuaciones. [1]

DEFINICIÓN 2.17.

Se llama cuádrica al lugar geométrico de puntos del espacio euclídeo R^3 cuyas coordenadas verifican una ecuación de segundo grado del tipo.

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a_0 = 0 \quad (2.24)$$

Para ver los distintos tipos de cuádricas escribiremos la ecuación (2.24) en la forma.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + a_0 = 0 \quad (2.25)$$

Como la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Es simétrica, podemos hallar una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de vectores propios, que suponemos asociados a los valores propios λ_1, λ_2 y λ_3 respectivamente. Entonces realizamos un cambio en el sistema de referencia del espacio R^3, de forma que, mediante un giro en la base, pasamos del sistema de referencia canónico $(O, \{e_1, e_2, e_3\})$ al sistema de referencia $(O, \{v_1, v_2, v_3\})$. La relación entre las nuevas coordenadas (y_1, y_2, y_3) de un punto P y las originales (x_1, x_2, x_3) está dada por.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en (2.24) se obtiene.

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + a_0 = 0$$

Como

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} + a_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Y_1\lambda_1 & Y_2\lambda_2 & Y_3\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} + 2\left[(a_1c_{11} + a_2c_{21} + a_3c_{31}) \quad (a_1c_{12} + a_2c_{22} + a_3c_{32}) \quad (a_1c_{13} + a_2c_{23} + a_3c_{33}) \right] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} + a_0 = 0$$

$$\lambda_1 Y_1^2 + \lambda_2 Y_2^2 + \lambda_3 Y_3^2 + 2(a_1c_{11} + a_2c_{21} + a_3c_{31})Y_1 + 2(a_1c_{12} + a_2c_{22} + a_3c_{32})Y_2 + 2(a_1c_{13} + a_2c_{23} + a_3c_{33})Y_3 + a_0 = 0$$

$$\lambda_1 Y_1^2 + \lambda_2 Y_2^2 + \lambda_3 Y_3^2 + \underbrace{2(a_1c_{11} + a_2c_{21} + a_3c_{31})}_{b_1}Y_1 + \underbrace{2(a_1c_{12} + a_2c_{22} + a_3c_{32})}_{b_2}Y_2 + \underbrace{2(a_1c_{13} + a_2c_{23} + a_3c_{33})}_{b_3}Y_3 + a_0 = 0$$

Se obtiene la ecuación.

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + a_0 = 0 \qquad (2.26)$$

Vamos a distinguir aquí tres grandes casos

1. Todos los valores propios son no nulos.

   Entonces la ecuación (2.26) puede escribirse en la forma

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \left(a_0 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - \frac{b_3^2}{4\lambda_3} \right) = 0$$

Haciendo la traslación

$$z_1 = y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}$$
$$z_2 = y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2}$$
$$z_3 = y_3 + \frac{b_3}{2\lambda_3}$$

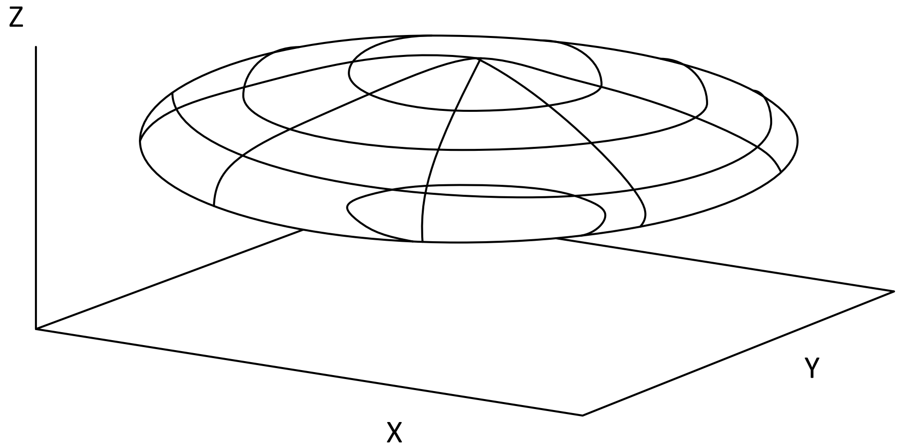

Figura 1: Elipsoide.

Se tiene la ecuación

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 + b_0 = 0 \tag{2.27}$$

Distinguimos ahora

1.1. $b_0 \neq 0$. La ecuación (2.27) puede escribirse, dividiendo por $-b_0$ como

$$m z_1^2 + n z_2^2 + p z_3^2 = 1 \tag{2.28}$$

que discutimos en función de los signos de m, n y p.

1.1.1. Los tres positivos. $m > 0$, $n > 0$ y $p > 0$. En este caso la ecuación (2.28) puede escribirse

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1 \tag{2.29}$$

Las intersecciones de esta cuádrica con plano de ecuación $z_i = k, i = 1,2,3$ son o vacías o elipses, a esta cuádrica se le llama elipsoide. (Ver figura 1). Cuando dos valores propios son iguales se trata de un elipsoide de revolución, y si fueran los tres iguales sería una esfera.

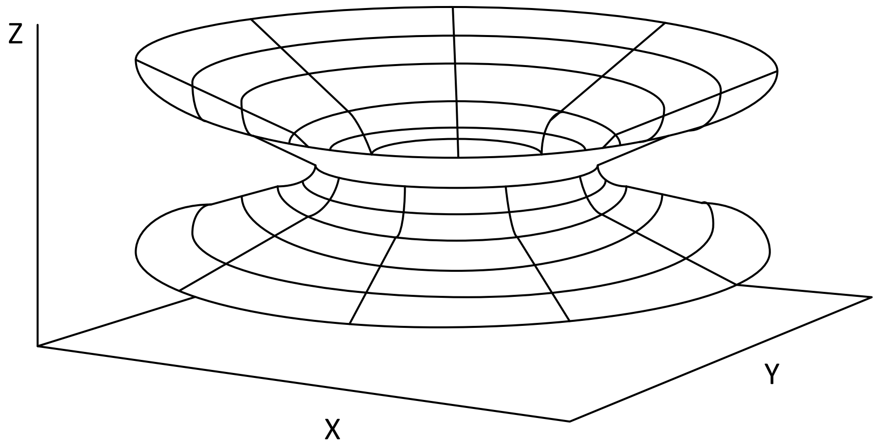

Figura 2: hiperboloide de una hoja

1.1.2. Dos positivos y uno negativo. Por ejemplo $m > 0$, $n > 0$ y $p < 0$. En este caso la ecuación (2.28) puede escribirse

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = 1 \qquad (2.30)$$

Las intersecciones de esta cónica con los planos de ecuación $z_1 = 0$ y $z_2 = 0$ son hipérbolas, las intersecciones con planos de ecuación $z_3 = k$ son elipses cuyo tamaño crece con $|k|$. Esta cuádrica se conoce con el nombre de hiperboloide de una hoja o alabeado o hiperbólico (ver figura 2). Si $a = b$, lo que ocurre cuando $\lambda_1 = \lambda_2$, se trata de un hiperboloide de revolución.

Esta superficie está formada por rectas. En efecto la ecuación (2.30) puede escribirse como

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = 1 - \frac{z_2^2}{b^2}$$

que a su vez puede escribirse como

$$\left(\frac{z_1}{a}-\frac{z_3}{c}\right)\left(\frac{z_1}{a}+\frac{z_3}{c}\right)=\left(1-\frac{z_2}{b}\right)\left(a+\frac{z_2}{b}\right) \tag{2.31}$$

o como

$$\frac{\frac{z_1}{a}-\frac{z_3}{c}}{1-\frac{z_2}{b}}=\frac{1+\frac{z_2}{b}}{\frac{z_1}{a}+\frac{z_3}{c}}=\lambda \tag{2.32}$$

Entonces si un punto está en el hiperboloide, sustituyendo sus coordenadas en la ecuación (2.32) se determina un valor de λ, al que corresponde la recta de ecuación

$$\frac{z_1}{a}-\frac{z_3}{c}=\lambda\left(1-\frac{z_2}{b}\right)$$
$$\frac{z_1}{a}+\frac{z_3}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{z_2}{b}\right)$$

Que está contenida en el hiperboloide. Recíprocamente, para cada λ la recta está contenida en el hiperboloide. Estas rectas se llaman generatrices del hiperboloide. Se puede comprobar que la familia de rectas

$$\frac{z_1}{a}-\frac{z_3}{c}=\lambda\left(1-\frac{z_2}{b}\right)$$
$$\frac{z_1}{a}+\frac{z_3}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{z_2}{b}\right)$$

También es una familia de rectas generatrices del hiperboloide. Cuando, como ocurre con el hiperboloide, una superficie está formada por rectas se dice que es reglada.

1.1.3. Dos negativos y uno positivo. Por ejemplo $m > 0$, $n < 0$ y $p < 0$. En este caso la ecuación (2.28) puede escribirse como

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = 1$$

Las intersecciones de esta cuádrica con planos de ecuación $z_1 = k$ son vacías si $|k| < a$ y elipses si $|k| \geq a$ cuyos semiejes aumentan con $|k|$. Las intersecciones con los planos $z_2 = 0$ y $z_3 = 0$ son hipérbolas. Esta cuádrica se llama hiperboloide de dos hojas o hiperboloide elíptico (ver figura 3). Si $\lambda_2 = \lambda_3$ (lo que equivale a decir que $b = c$) es un hiperboloide elíptico de revolución.

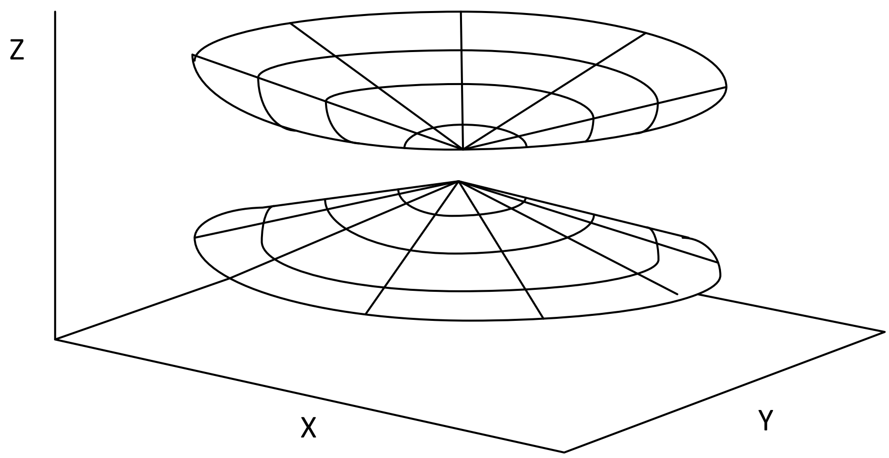

Figura 3: hiperboloide de dos hojas

1.1.4. Los tres son negativos. $m < 0$, $n < 0$ y $p < 0$.En este caso ningún punto verifica la ecuación (2.28), por lo que se trata de una cuádrica vacía.

1.2. $b_0 = 0$. En este caso la ecuación (2.27) se reduce a

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = 0 \qquad (2.33)$$

que estudiaremos en función de los signos de los valores propios λ_1, λ_2 y λ_3.

1.2.1. Todos los signos son iguales. Entonces la única solución de (2.33) es

$$(z_1, z_2, z_3) = (0,0,0)$$

por lo tanto la cuádrica se reduce a un punto.

1.2.2. No todos los signos son iguales. Por ejemplo $sign(\lambda_1) = sign(\lambda_2) \neq sign(\lambda_3)$. en este caso la ecuación (2.33) puede escribirse como

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = 0 \tag{2.34}$$

Notemos que el punto $(z_1, z_2, z_3) = (0,0,0)$ pertenece a la cuádrica, que su intersección con los planos de ecuación $z_3 = k$ son elipses y que si un punto (p_1, p_2, p_3) satisface la ecuación (2.34) también la verifica el punto de coordenadas (ap_1, ap_2, ap_3), cualquiera que sea el número real a. De todo ello deducimos que la cuádrica está formada por rectas que pasan por el origen y por los puntos de la elipse obtenida al cortarla con un plano de ecuación $z_3 = k$, con $k \neq 0$. Es por tanto una superficie reglada. Se trata de un cono (ver figura 4).

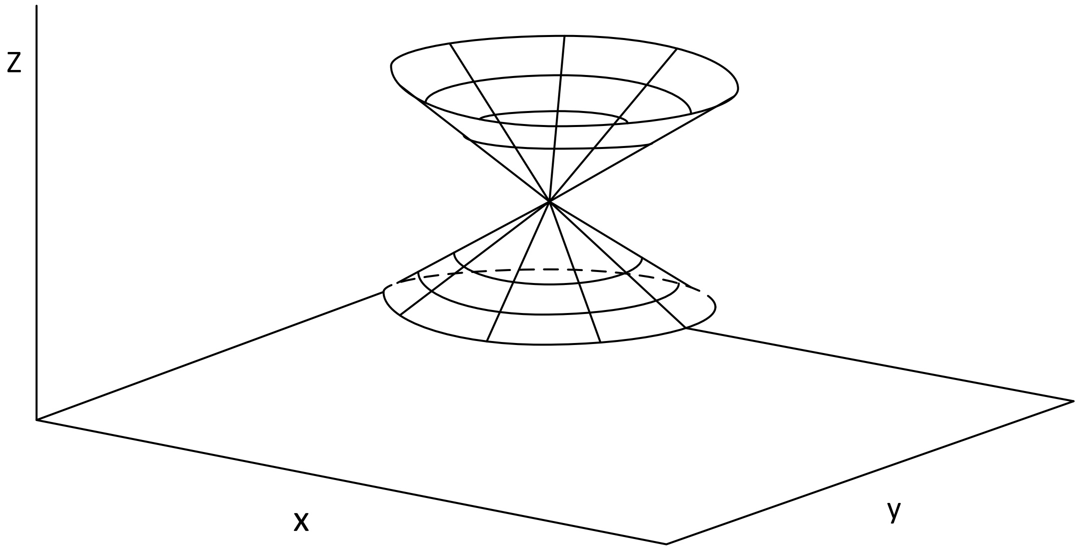

Figura 4: cono

2. Un valor propio es nulo.

Por ejemplo $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ y $\lambda_3 = 0$. La ecuación (2.26) se reduce ahora a

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + a_0 = 0$$

Distinguiremos en primer lugar según sea el coeficiente b_3.

2.1. $b_3 \neq 0$. Entonces la ecuación anterior puede escribirse como

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_1 \left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + b_3 \left(y_3 + \frac{\left(a_0 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} \right)}{b_3} \right) = 0$$

Si realizamos la traslación

$$z_1 = y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}$$
$$z_2 = y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2}$$
$$z_3 = y_3 + \frac{b_0}{b_3}$$

donde

$$b_0 = a_0 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2}$$

obtenemos la ecuación

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + b_3 z_3 = 0 \qquad (2.35)$$

Ahora distinguimos dos casos.

2.1.1. λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo. Podemos suponer además que dicho signo no coincide con el de b_3 , si así fuera se obtendría la misma cuádrica pero orientada hacia abajo.

En este caso $\frac{-\lambda_1}{b_3}$ y $\frac{-\lambda_2}{b_3}$ son dos números positivos a^2 y b^2 y la ecuación (2.35) puede escribirse

$$z_3 = \frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2}$$

Las intersecciones de esta cuádrica con los planos de ecuación $z_3 = k$ son vacías si $k < 0$, se reduce a un punto si $k = 0$ y son elipses si $k > 0$, cada vez de semiejes mayores si k aumenta. Las intersecciones con los planos $z_1 = 0$ y $z_2 = 0$ son parábolas. Esta cuádrica se llama paraboloide elíptico (ver figuras 5 y 6) y es de revolución cuando $\lambda_1 = \lambda_2$, o equivalentemente, cuando $a = b$.

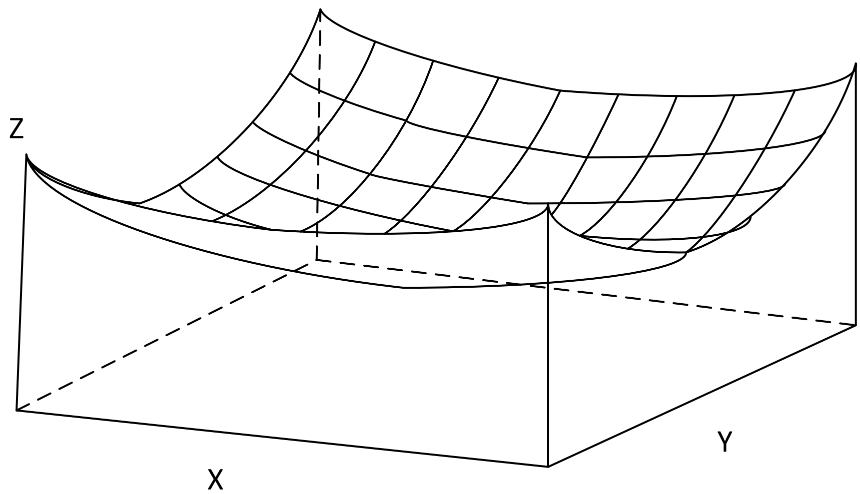

Figura 5: paraboloide elíptico

2.1.2. λ_1 y λ_2 tienen signos distintos. Suponemos que el signo de b_3 coincide con el de λ_2, en otro caso se obtiene la misma cuádrica pero invertida. La ecuación (2.35) se puede escribir ahora como

$$z_3 = \frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} \tag{2.36}$$

Las intersecciones con planos de ecuación $z_3 = k$ son hipérbolas, con planos de ecuación $z_1 = m$ y $z_2 = n$ son parábolas. Esta cuádrica se llama paraboloide hiperbólico o paraboloide alabeado (ver figura 7).

Se trata de una superficie reglada ya que la ecuación (2.36) también puede escribirse como.

$$z_3 = \left(\frac{z_1}{a} - \frac{z_2}{b}\right)\left(\frac{z_1}{a} + \frac{z_2}{b}\right)$$

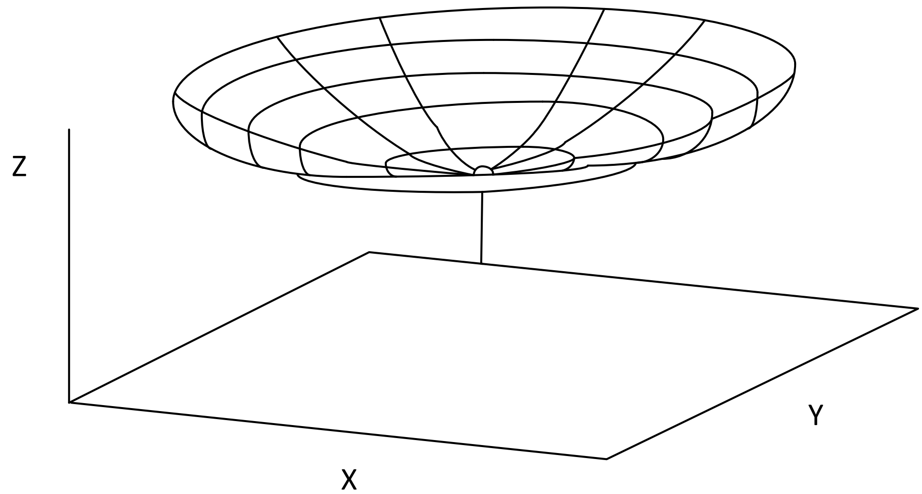

Figura 6: paraboloide elíptico

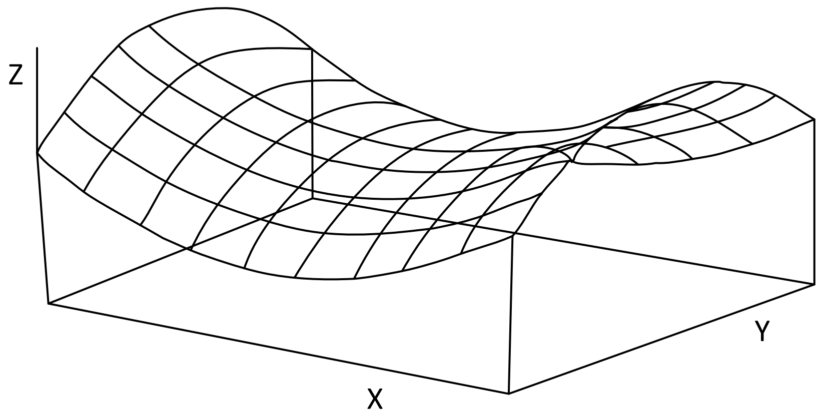

Figura 7: paraboloide hiperbólico

de donde se deduce que la familia de rectas

$$\left.\begin{aligned}\frac{z_1}{a}-\frac{z_2}{b}&=\lambda z_3\\ \frac{z_1}{a}+\frac{z_2}{b}&=\frac{1}{\lambda}\end{aligned}\right\},\lambda\neq 0$$

integran el paraboloide hiperbólico. También lo integra la familia de rectas

$$\left.\begin{aligned}\frac{z_1}{a}-\frac{z_2}{b}&=\mu\\ \frac{z_1}{a}+\frac{z_2}{b}&=\frac{1}{\mu}z_3\end{aligned}\right\},\mu\neq 0$$

2.2. $b_3=0$. La ecuación (2.26) se reduce en esta ocasión a

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+b_1 y_1+b_2 y_2+a_0=0 \tag{2.37}$$

Esta ecuación corresponde a una cónica del plano OY_1Y_2, de forma que si un punto de este plano de coordenadas $(p_1,p_2,0)$ verifica la ecuación (2.37) todos los puntos de la recta $\{(p_1,p_2,a),a\in R\}$ pertenecerán a la cuádrica. Obviamente es una superficie reglada, concretamente un cilindro, cuya naturaleza depende de la cónica resultante de hallar su intersección con el plano coordenado $y_3=0$. Veamos de que cónicas puede tratarse, para ello escribamos la ecuación (2.37) como

$$\lambda_1\left(y_1+\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y_2+\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2+a_0-\frac{b_1^2}{4\lambda_1}-\frac{b_2^2}{4\lambda_2}=0$$

Haciendo la traslación

$$z_1=y_1+\frac{b_1}{2\lambda_1}$$

$$z_2=y_2+\frac{b_2}{2\lambda_2}$$

$$z_3=y_3$$

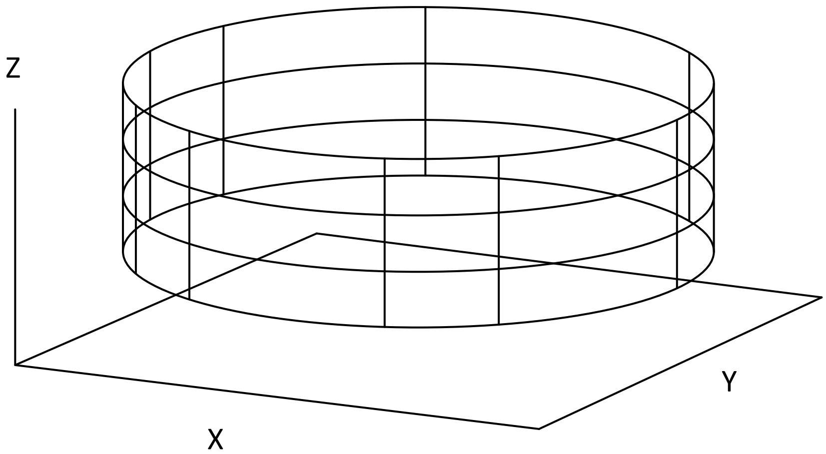

Figura 8: cilindro elíptico

La ecuación puede escribirse como

$$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+c_0=0 \tag{2.38}$$

donde

$$c_0=a_0-\frac{b_1^2}{4\lambda_1}-\frac{b_2^2}{4\lambda_2}$$

Recordando lo visto en la clasificación de cónicas tenemos varios casos:

2.2.1. $c_0 \neq 0$.

2.2.1.1. Si los signos de λ_1 y λ_2 coinciden entre sí pero no con el de c_0 la cónica es una elipse y la cuádrica es un cilindro elíptico (ver figura 8).

2.2.1.2. Si coinciden los signos de λ_1 , λ_2 y c_0 la cónica es vacía y por tanto también tenemos una cuádrica vacía, que en este caso se llama a veces cilindro imaginario.

2.2.1.3. Si λ_1 y λ_2 tienen signos distintos la cónica es una hipérbola y la cuádrica un cilindro hiperbólico (ver figura 9).

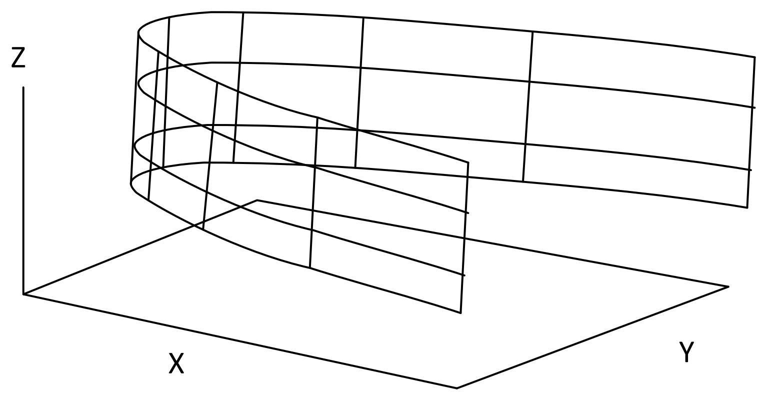

Figura 9: cilindro hiperbólico

2.2.2. $c_0 = 0$.

2.2.2.1. Si λ_1 y λ_2 tienen signos iguales la cónica se reduce a un punto y la cuádrica degenera a una recta, concretamente el eje OZ_3.

2.2.2.2. En cambio sí λ_1 y λ_2 tienen signos distintos la cónica degenera en dos rectas que se cortan y la cuádrica en dos planos que se cortan, concretamente se cortan en el eje OZ_3.

3. Dos valores propios son nulos.

Por ejemplo $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La ecuación (2.26) se reduce ahora a

$$\lambda_1 y_1^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + a_0 = 0 \quad (2.39)$$

Vamos a distinguir, en principio, tres casos.

3.1. $b_2 = b_3 = 0$. La ecuación (2.39) se reduce a

$$\lambda_1 y_1^2 + b_1 y_1 + a_0 = 0$$

que puede escribirse como

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + a_0 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} = 0$$

Haciendo la traslación

$$z_1 = y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}$$
$$z_2 = y_2$$
$$z_3 = y_3$$

se obtiene la ecuación

$$\lambda_1 z_1^2 + c_0 = 0 \tag{2.40}$$

donde

$$c_0 = a_0 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1},$$

que puede escribirse

$$z_1^2 = k, \tag{2.41}$$

que discutimos en función de k.

3.1.1. $k < 0$. Ningún punto satisface (2.41) y es una cuádrica vacía.

3.1.2. $k > 0$. La ecuación (2.41) es equivalente al par de ecuaciones

$$z_1 = \sqrt{k} \quad z_1 = -\sqrt{k}$$

Se trata por tanto de dos planos paralelos.

3.1.3. $k = 0$. En este caso se trata, obviamente de un plano, llamado a veces plano doble. Obsérvese que la ecuación (2.40) corresponde también a una cónica en el plano OZ_1Z_2, por lo que podíamos haber procedido como en el apartado anterior. Las cónicas que hubiéramos obtenido son: la cónica vacía, dos rectas paralelas y una recta (doble).

Los cilindros correspondientes son las cuádricas reseñadas anteriormente.

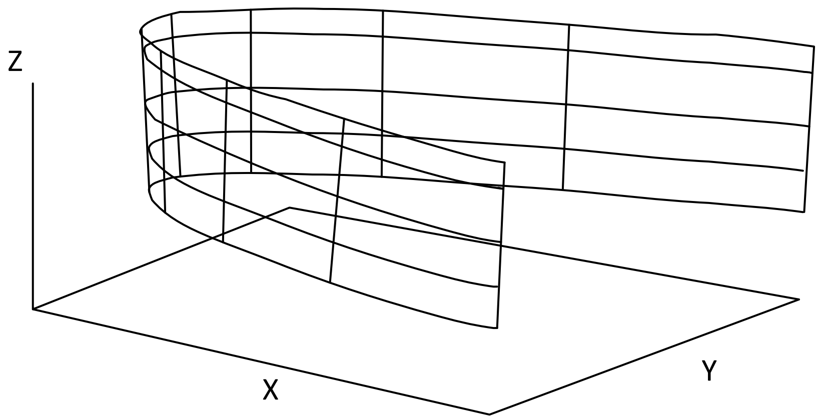

Figura 10: cilindro parabólico.

3.2. $b_2 \neq 0$ y $b_3 = 0$. En esta caso la ecuación (2.39) se puede escribir como

$$\lambda_1\left(y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1}y_1\right) + b_2 y_2 + a_0 = 0$$

Sumando y restando a esta ecuación el término $\dfrac{b_1^2}{4\lambda_1}$, se puede escribir

$$\lambda_1\left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}y_1\right)^2 + b_2\left(y_2 + \frac{a_0 - \dfrac{b_1^2}{4\lambda_1}}{b_2}\right) = 0$$

que haciendo la traslación oportuna se obtiene la ecuación reducida

$$\lambda_1 z_1^2 + b_2 z_2 = 0 \qquad (2.42)$$

que es un cilindro parabólico (ver figura 10) que contiene al eje OZ_3, ya que los cortes con los planos $z_3 = k$ producen parábolas.

3.3. $b_2 \neq 0$ o $b_3 \neq 0$. En este último caso la ecuación (2.39) puede escribirse de la forma

$$\lambda_1\left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}y_1\right)^2 + b_2\left(y_2 + \frac{a_0 - \dfrac{b_1^2}{4\lambda_1}}{b_2}\right) + b_3 y_3 = 0$$

Que con la traslación adecuada se obtiene la ecuación reducida

$$\lambda_1 z_1^2 + b_2 z_2 + b_3 z_3 = 0 \tag{2.43}$$

Si esta ecuación se corta por planos paralelos al eje OZ_1, $z_1 = k$, se obtiene: $b_2 z_2 + b_3 z_3 = -\lambda_1 k^2$, que son rectas oblicuas que pasan por el centro. Por otra parte si se corta por planos de la forma $z_2 = k$, se obtienen las parábolas: $\lambda_1 z_1^2 + b_3 z_3 = -b_2 k$.El mismo efecto se obtiene cortando por planos $z_3 = k$. Luego la cuádrica es un cilindro parabólico que pasa por el origen pero tiene una inclinación con respecto a los planos $z_1 = k$. Se podría realizar un giro en el sistema de coordenadas para obtener el mismo cilindro que en el caso anterior.

2.15 EXPRESIÓN DE LAS MAGNITUDES CINÉTICAS.

2.15.1 MOVIMIENTO DE ROTACIÓN INSTANTÁNEA.[8]

Consideremos un sólido B con un movimiento instantáneo de rotación, alrededor de un eje (O, e), con velocidad angular $\vec{w} = w\hat{e}$, siendo $\hat{e}$ un vector unitario. El eje de rotación de dicho movimiento será en general variable a lo largo del tiempo. En caso contrario se trataría de la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo, que da lugar como se sabe a un movimiento plano.

Al tratarse de una rotación instantánea la velocidad de los puntos del eje es nula, por lo que tomando origen de coordenadas en O la velocidad de un punto P cualquiera del sólido $\vec{r} = \overline{OP}$ es.

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} \tag{2.44}$$

El momento cinético conjunto del cuerpo se obtiene mediante la suma o la integral, según se trate de una distribución continua, de los momentos cinéticos de cada partícula:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H_0} &= \int_B \vec{r}\times\vec{v}\rho dv \\ &= \int_B \vec{r}\times\left(\vec{w}\times\vec{r}\right)\rho dv = \int_B\left[\vec{w}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)-\left(\vec{r}\cdot\vec{w}\right)\vec{r}\right]\rho dv \\ &= \int_B\left[r^2\vec{w}-\left(\vec{r}\cdot\vec{w}\right)\vec{r}\right]\rho dv\end{aligned} \tag{2.45}$$

En lo que sigue consideraremos un sólido continuo, por concretar las expresiones. Proyectando sobre el vector unitario $\hat{e}$ obtenemos el momento cinético áxico:

$$\begin{aligned}e.\overrightarrow{H_0} &= \int_B e.\left[\vec{r}\times\left(\vec{w}\times\vec{r}\right)\right]\rho dv = \int_B\left[\left(\vec{w}\times\vec{r}\right).\left(\hat{e}\times\vec{r}\right)\right]\rho dv \\ &= \int_B w\left(\hat{e}\times\vec{r}\right).\left(\hat{e}\times\vec{r}\right)\rho dv \\ &= \int_B w\left|\hat{e}\times\vec{r}\right|^2 \rho dv\end{aligned} \tag{2.46}$$

Sea $d_e = \left|\hat{e}\times\vec{r}\right|$

$$e.\overrightarrow{H_0} = w\int_B d_e^{\,2}\rho dv$$

Donde se ha empleado la propiedad de rotación del producto mixto. Asimismo, se denomina $d_e = \left|\vec{e}\times\vec{r}\right|$ a la distancia de cada punto al eje de rotación (O, e)

En la expresión anterior, la integral que aparece se define como momento de inercia del sólido respecto al eje (O, e):

$$I_{oe} = \int_B d_e^2\rho dv \tag{2.47}$$

Resultando por tanto a partir de (2.46) la expresión

$$H_{oe} = I_{oe} w \tag{2.48}$$

Donde $H_{oe} = \hat{e} \cdot \overrightarrow{H_0}$, momento cinético áxico del sólido respecto del eje (O, e)

De la misma manera, la energía cinética se puede expresar como.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v^2, \text{ pero } \rho = \frac{dm}{dv} \Rightarrow m = \int \rho dv \\ T &= \frac{1}{2} \int_B \rho dv v^2 = \int_B \frac{1}{2} v^2 \rho dv \\ &= \int_B \frac{1}{2} \left| \vec{w} \times \vec{r} \right|^2 \rho dv \\ &= \frac{1}{2} w^2 \int_B d_e^{\,2} \rho dv \end{aligned} \tag{2.49}$$

es decir

$$T = \frac{1}{2} I_{oe} w^2 \tag{2.50}$$

2.15.2 MOVIMIENTO GENERAL (ROTACIÓN Y TRASLACIÓN).

En el caso más general en que el movimiento no sea una rotación instantánea si no un movimiento general sin puntos de velocidad nula, el campo de velocidades se puede desarrollar en general a partir del centro de masas (G).

Definiendo la posición relativa al mismo por $r' = r - r_G$, y suponiendo que la velocidad instantánea de rotación es $\vec{w} = w\hat{e}$.

$$v = v_G + w \times r' \tag{2.51}$$

El momento cinético resulta

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_G &= \int_B r' \times (v_G + w \times r')\rho dv \\ &= \underbrace{\int_B r' \times v_G \rho dv}_{0} + \int_B r' \times (w \times r')\rho dv \end{aligned} \tag{2.52}$$

Proyectando sobre el versor e de la velocidad de rotación.

$$H_{G,e} = e \cdot H_G = \int_B e \cdot \left[r' \times (w \times r') \right] \rho dv = w I_{G,e} \tag{2.53}$$

Donde $I_{G,e}$ es el momento de inercia respecto del eje (G,e), que se define análogamente a (2.47).

El desarrollo de la energía cinética es en este caso.

$$\begin{aligned} T &= \int_B \frac{1}{2}(v_G + w \times r')^2 \rho dv \\ &= \int_B \frac{1}{2} v_G{}^2 \rho dv + \underbrace{\int_B V_G \cdot (w \times r')\rho dv}_{=0} + \int_B \frac{1}{2}(w \times r')^2 \rho dv \\ &= \frac{1}{2} M v_G{}^2 + \frac{1}{2} I_{G,e} w^2 \end{aligned} \tag{2.54}$$

2.15.3 MOVIMIENTO GENERAL (ROTACIÓN Y TRASLACIÓN).

De las expresiones anteriores se puede obtener de forma directa la ecuación dinámica del caso más sencillo de movimiento de rotación de un sólido, que es cuando el eje de rotación (o,e) es fijo. Puesto que se trata de un sólido rígido, $\mathrm{I}_{o,e}$ es una constante que refleja la distribución de masas del solido alrededor de dicho eje fijo. Teniendo en cuenta esto, si se deriva (2.48) y empleando $M_0 = \frac{d}{dt} H_0$ se obtiene.

$$\frac{d}{dt}H_{O\,e} = I_{O\,e}\dot{w} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{H_O}\,\vec{e}\right) = \overrightarrow{M_O}\,\vec{e} = M_{O\,e}$$

$$M_{O\,e} = I_{O\,e}\,\dot{w}\,. \tag{2.55}$$

2.15.4 EXPRESIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO.

El momento cinético de un sólido B con un punto fijo O, con velocidad de rotación instantánea w, viene dada por (2.45):

$$\overrightarrow{H_O} = \int_B \vec{r}\times\left(\vec{w}\times\vec{r}\right)\rho dv = \int_B \left[r^2\vec{w} - \left(\vec{r}\,\vec{w}\right)\vec{r}\right]\rho dv \tag{2.56}$$

Se observa fácilmente que esta expresión es lineal en $\vec{w}$; por tanto se puede interpretar que define $\overrightarrow{H_O}$ como una transformación lineal de $\vec{w}$, que identificaremos con un tensor I_O,

$$I_O\ :\vec{w} \to H_O\,(\vec{w}) = \int_B \left[r^2\vec{w} - (\vec{r}\,\vec{w})\vec{r}\right]\rho dv$$

Se trata de un tensor de segundo orden, que denominamos tensor de inercia del sólido B en el punto O.

En lenguaje tensorial, decimos que H_O es la actuación de I_O sobre $\vec{w}$:

$$H_0 = I_0\cdot\vec{w} \tag{2.57}$$

Donde el operador $(\cdot)$ indica la aplicación del tensor sobre un vector, obteniéndose como resultado otro vector.

2.15.5 COMPONENTES DEL TENSOR DE INERCIA.

La Inercia en física es la pertenencia que tienen los cuerpos que corresponden en su estado de reposo o desplazamientos, durante la fuerza sea igual a cero o a la resistencia que opone la materia a modificar su estado de reposo o desplazamiento.

En notación tensorial, a partir de (2.56) y teniendo en cuenta que $(r \otimes r)\, w = r(r \cdot w)$, el tensor de inercia se puede expresar de manera explícita mediante

$$I_O = \int_B \left(r^2 1 - r \otimes r \right) \rho dv \tag{2.58}$$

donde 1 es el tensor identidad, de componentes $\delta_{ij} = \begin{cases} 1\ ;\ i = j \\ 0\ ;\ i \neq j \end{cases}$ (delta de Kronecker) en una base ortonormal, y $(\otimes)$ indica producto tensorial o diádico.[ ]

Para clarificar el significado del tensor de inercia, desarrollaremos las componentes del mismo en una base ortonormal, a partir de (2.56).

$$\begin{aligned} (H_O)_i &= \int_B \left[r^2 w_i - (r_j w_j)\, r_i \right] \rho dv \\ &= \left[\int_B \left(r^2 \delta_{ij} - r_i r_j \right) \rho dv \right] w_j \\ &= I_{O,ij} w_j \end{aligned} \tag{2.59}$$

Los coeficientes $I_{O,ij}$ corresponden a las componentes del tensor de inercia I_O y queda definidos por

$$I_{O,ij} = \int_B \left(r^2 \delta_{ij} - r_i r_j \right) \rho dv \tag{2.60}$$

La ecuación (2.59) permite interpretar la actuación del tensor de inercia I_O como el producto tensorial contraído con w.

2.15.6 CAMBIO DE COORDENADAS.

Una de las propiedades esenciales de los tensores es el comportamiento de sus coordenadas frente a un cambio de base. Supongamos un tal cambio, asociado a un tensor de cambio A con matriz de componentes $[A]$, que transforma la base ortonormal $\{e_i\}$ en otra igualmente ortogonal $\{e_i'\}$:

$$e_i' = A \cdot e_i = \begin{cases} \|e_1' e_2' e_3'\| = \|e_1\ e_2\ e_3\| [A] \\ e_i' = e_j A_{ji} \end{cases} \tag{2.61}$$

Las coordenadas de un vector dado a cambian como

$$\{a\}' = [A]^T \{a\} \Leftrightarrow a_i' = A_{ji} a_j \tag{2.62}$$

Las coordenadas del tensor I_O en ambas bases están relacionadas por

$$[I_O]' = [A]^T [I_O][A] \Leftrightarrow I'_{O,ij} = A_{ki} I_{O,kl} A_{lj} \tag{2.63}$$

Recordamos que, al tratarse de un cambio entre bases ortonormales, A es ortogonal ($[A]^T = [A]^{-1}$, y $\det(A) = \pm 1$). Supondremos además que ambos triedros son a derecha, por lo que adicionalmente ha de ser $\det(A) = +1$.

Considerar un triedro (O, i, j, k) ligado al sólido, con origen en un punto O del mismo y direcciones (i, j, k) solidarias al cuerpo. En este triedro, un punto material del sólido tiene coordenadas constantes a lo largo del movimiento:

$$r = x^{\circ} i + y^{\circ} j + z^{\circ} k, \quad \text{Con } \left(x^{\circ}, y^{\circ}, z^{\circ}\right) \text{ constantes.} \tag{2.64}$$

Las componentes del tensor de inercia en este triedro, a partir de (2.60), son igualmente constantes. Empleando la notación indicial para las coordenadas $\left(r_1^{\circ}, r_2^{\circ}, r_3^{\circ}\right) = \left(x^{\circ}, y^{\circ}, z^{\circ}\right)$, estas componentes son

$$I_{O,ij}^{\circ} = \int_B \left(r^2 \delta_{ij} - r_i^{\circ} r_j^{\circ}\right) \rho dv \text{ (Constantes)} \tag{2.65}$$

Consideremos ahora el cambio de base que relaciona el triedro del cuerpo (O, i, j, k) con el triedro fijo (O, I, J, K),

$$\| i \quad j \quad k \| = \| I \quad J \quad K \| [R] \tag{2.66}$$

(El triedro fijo puede definirse como aquel que coincide con la posición del triedro del cuerpo en el instante de referencia o inicial, $[R]_{t=0} = [1]$.) la relación entre las componentes del tensor de inercia en ambos triedros es

$$[I_O]^{\circ} = [R]^T [I_O][R] \tag{2.67}$$

donde $[I_O]^{\circ}$ son las componentes del tensor de inercia en el triedro del cuerpo, e $[I_O]$ las componentes en el triedro fijo. Teniendo en cuenta $[R]^T = [R]^{-1}$, la relación anterior se puede invertir resultando

$$[I_O] = [R][I_O]^{\circ}[R]^T \tag{2.68}$$

Esta expresión matricial define las componentes del tensor de inercia en una base fija (inercial) a lo largo del movimiento, en función de la matriz $[R]$.

Se puede comprender fácilmente que las coordenadas $[I_O]$ por lo general no serán constantes. Si se desea evitar tener que considerar dicha variación en el cálculo, deberá expresarse el tensor de inercia en un triedro ligado al sólido ($[I_O]^{\circ}$).

2.15.7 EXPRESIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA.

La expresión de la energía cinética (2.49) se puede desarrollar como:

$$\begin{aligned} T &= \int_B \frac{1}{2}(w \times r).(w \times r)\rho dv \\ &= \frac{1}{2} w.\int_B r \times (w \times r)\rho dv \end{aligned} \tag{2.69}$$

Considerando (2.45) y (2.57) puede escribirse en función del tensor de inercia,

$$T = \frac{1}{2} w.(I_O w) \tag{2.70}$$

Otras maneras de expresar esta ecuación son:

$$T = \frac{1}{2} w_i I_{O,ij} w_j \text{(Notación indicial)} \tag{2.71}$$

$$T = \frac{1}{2}\|w\|[I_O]\{w\} \text{ (Notación matricial)} \tag{2.72}$$

La ecuación (2.70) es una expresión tensorial, por lo que el resultado es otro tensor, en este caso de orden cero, es decir, un escalar invariante. Por lo tanto, el valor de T es un invariante intrínseco del movimiento, que no depende del sistema de coordenadas elegido. En efecto, realizando el cambio de coordenadas definido por $[A]$ según (2.62) y (2.63) y teniendo en cuenta la ortogonalidad de la matriz de cambio:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}\|w\|'[I_O]'\{w\}' \\ &= \frac{1}{2}\left(\|w\|[A]\right)\left([A]^T[I_O][A]\right)\left([A]^T\{w\}\right) \\ &= \frac{1}{2}\|w\|[I_O]\{w\} = T \end{aligned} \tag{2.73}$$

2.16 PROPIEDADES DEL TENSOR DE INERCIA.

2.16.1 MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA.

Sea un eje (O, u) correspondiente a un vector u pasando por el punto $O \in B$. La distancia al eje de un punto cualquiera $P \in B$ definido por $r = \overrightarrow{OP}$ es $d = |u \times r|$. Según la definición de momento de inercia (2.47),

$$\begin{aligned} I_u &= \int_B d^2 \rho dv = \int_B (u \times r).(u \times r)\rho dv \\ &= u.\int_B r \times (u \times r)\rho dv \end{aligned} \tag{2.74}$$

La integral que aparece es análoga a la (2.56), que sirvió para definir el tensor de inercia, ocupando aquí u el lugar de w. Por tanto,

$$I_u = u.(I_O\, u) \tag{2.75}$$

Esta expresión define el momento de inercia como una forma cuadrática función de u, y permite calcular, conocido I_O, el momento de inercia para un eje cualquiera por O.

En general, es sabido que las componentes cartesianas (ij) del tensor I_O se obtienen mediante

$$I_{O,ij} = e_i \cdot (I_O\, e_j)$$

En concreto, tomando las direcciones de los versores del triedro (O, i, j, k) y empleando (2.75) y (2.58) obtenemos los momentos de inercia según las direcciones del triedro de referencia:

$$I_{xx} = i.(I_0.i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \int_B \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} \rho dv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \int_B (y^2+z^2)\rho dv$$

(2.76)

$$I_{yy} = j.(I_0.\mathrm{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \int_B \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} \rho dv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \int_B (\mathrm{x}^2+z^2)\rho dv$$

(2.77)

$$I_{zz} = k.(I_0.\mathrm{k}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \int_B \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} \rho dv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \int_B (\mathrm{x}^2+y^2)\rho dv$$

(2.78)

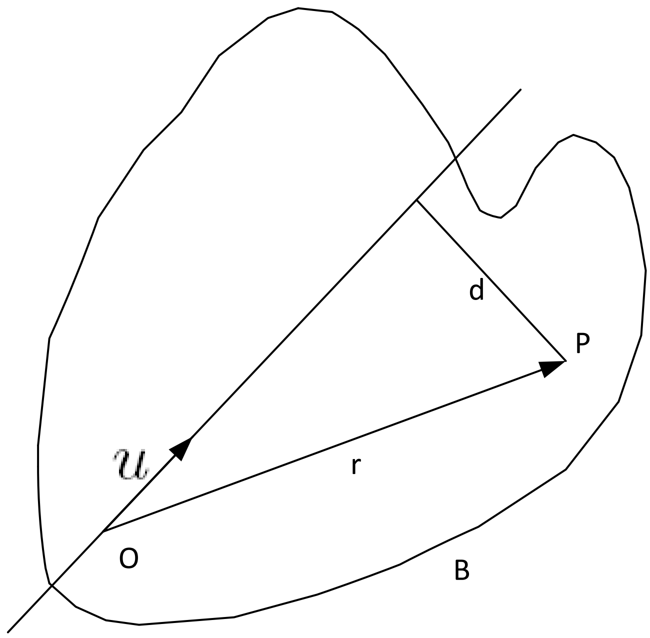

Figura 11: Momento de Inercia del Sólido B Respecto de un eje (O, u).

Estos momentos de inercia coinciden con las componentes de la diagonal principal de la matriz de coordenadas, como es fácil ver. La expresión completa de esta matriz es

$$[I_O] = \begin{pmatrix} \int_B \left(y^2 + z^2\right)\rho dv & -\int_B xy\rho dv & -\int_B zx\rho dv \\ -\int_B yx\rho dv & \int_B \left(z^2 + x^2\right)\rho dv & -\int_B yz\rho dv \\ -\int_B zx\rho dv & -\int_B yz\rho dv & \int_B \left(x^2 + y^2\right)\rho dv \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.79}$$

Las integrales de fuera de la diagonal, con signo positivo, se denominan productos de inercia:

$$P_{xy} \overset{def}{=} \int_B xy\rho dv \,;\; P_{yz} \overset{def}{=} \int_B yz\rho dv \,;\; P_{zx} \overset{def}{=} \int_B zx\rho dv$$

(2.80)

La matriz de componentes del tensor es simétrico cuando se cumple las siguientes condiciones:

i. Los autovalores son reales.

ii. Los autovectores son reales y ortogonales.

iii. Son ortogonalmente diagonalizable.

De la expresión (2.79) es inmediato comprobar que I_O es un tensor simétrico, por lo que para definirlo en un caso general bastaran 6 componentes (3 momentos de inercia y 3 productos de inercia).

Además, el tensor I_O es siempre definido positivo. Esto se deduce de forma inmediata de (2.70) que expresa T como una forma cuadrática de w definida por I_O. La energía cinética T, por su propia definición, es esencialmente positiva para cualquier movimiento de rotación no nulo $(w \neq 0)$, lo que caracteriza al tensor I_O como definido positivo. Análogamente, los momentos de inercia definidos por la forma cuadrática (2.75) deben ser mayores que cero, anulándose únicamente para sólidos degenerados (rectas o puntos).

Otras propiedades del tensor de inercia de fácil demostración son los siguientes:

- La contracción (traza) de un tensor de 2° orden es un invariante escalar. Por tanto

$$
\begin{aligned}
tr(I_O) = I_{\alpha\alpha} &= I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} \\
&= 2\int_B (x^2 + y^2 + z^2)\rho dv \\
&= 2\int_B r^2 \rho dv = 2I_O
\end{aligned}
$$

donde I_O es el denominado momento de inercia polar, invariante de B para un punto O dado.

- Se verifica la propiedad triangular, es decir, un momento de inercia es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia. Se comprueba inmediatamente,

$$I_{yy} + I_{zz} = \int_B (2x^2 + y^2 + z^2)\rho dv = I_{xx} + 2\underbrace{\int_B x^2 \rho dv}_{>0}$$

$$I_{yy} - I_{zz} = \int_B (z^2 - y^2)\rho dv = I_{xx} - 2\underbrace{\int_B y^2 \rho dv}_{>0}$$

2.16.2 ELIPSOIDE DE INERCIA.

Consideremos el haz de ejes que pasan por un punto O, con direcciones arbitrarias definidas por el versor unitario e. Definimos para cada dirección un punto situado sobre el eje (O, e) a una distancia $(I_e)^{-1/2}$ de O:

$$r = \pm \frac{e}{\sqrt{I_e}}$$

Si expresamos la forma cuadrática en r definida por I_O ,

$$r.(I_O . r) = \frac{e.(I_O . e)}{I_e} = 1 \tag{2.81}$$

Esta última ecuación caracteriza el lugar geométrico de los puntos considerados como una cuádrica con centro en O . La expresión (2.81) es una forma cuadrática definida positiva (en todos los casos de sólido no degenerados), por lo que geométricamente se trata de un elipsoide, llamado elipsoide de inercia. Su expresión desarrollada es

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2P_{xy}xy - 2P_{yz}yz - 2P_{zx}zx = 1$$

El elipsoide de inercia ofrece una manera alternativa de estudiar el movimiento del sólido, a través de procedimientos geométricos, en lugar de los procedimientos algebraicos mediante el tensor de inercia, de naturaleza más abstracta.

2.16.3 EJES PRINCIPALES DE INERCIA.

En un caso general, la velocidad instantánea de rotación w y el momento cinético $H_O = I_O . w$ no tienen por qué ser paralelos. Sin embargo, existen algunas direcciones privilegiadas en las que sí se cumple esta condición; estas se llaman direcciones principales de inercia en O .

Si w es paralela a una dirección principal de inercia, esto quiere decir que existirá un escalar λ que exprese la proporcionalidad,

$$H_0 = I_0 \cdot w = \lambda w$$

Si tomamos el versor e correspondiente a esta dirección $(w = we)$, se cumplirá

$$I_e = e.(I_O\, e) = e.(\lambda e) = \lambda$$

Es decir, el coeficiente de proporcionalidad es precisamente el momento de inercia según la dirección principal, $\lambda = I_e$. Estos de denominan momentos principales de inercia.

La obtención de las direcciones principales y momentos principales asociados a un tensor I_O constituye un problema de autovalores: Se trata de encontrar una dirección e tal que, para algún λ, se verifique

$$I_O\, e = \lambda e \tag{2.82}$$

Introduciendo el tensor unidad 1, cuyas componentes cartesianas son las deltas de Kronecker (δ_{ij}), resulta la igualdad

$$\left(I_O - \lambda 1\right) e = 0 \tag{2.83}$$

Esta expresión corresponde a un sistema de ecuaciones lineal y homogénea, de incógnitas $e \equiv \left\| e_1 e_2 e_3 \right\|$. Para que exista solución no trivial $\left(e \neq 0\right)$, la matriz de coeficientes de (2.83) ha de ser singular:

$$\det\left(I_O - \lambda 1\right) = 0 \tag{2.84}$$

Expresión que constituye la denominada ecuación característica del problema de autovalores (2.82). Se trata de una ecuación cúbica en λ, que posee tres raíces $(\lambda_I = A, \lambda_{II} = B, \lambda_{III} = C)$. Por ser I_O simétrico, estas tres raíces deben ser reales; como además es definido positivo, las tres serán además positivas, correspondiendo a los tres momentos principales de inercia.

Cada momento principal de inercia está asociado a una dirección principal de inercia, solución de (2.83) con el valor de λ apropiado: (e_I, e_{II}, e_{III}).

Admitamos en primer lugar que la ecuación característica tiene tres raíces distintas $(A \neq B \neq C)$, las tres direcciones principales se obtienen respectivamente de

$$I_O\, e_I = A\, e_I \tag{2.85}$$

$$I_O\, e_{II} = B\, e_{II} \tag{2.86}$$

$$I_O\, e_{III} = C\, e_{III} \tag{2.87}$$

Una propiedad esencial de las direcciones principales es que, si corresponden a autovalores distintos, han de ser mutuamente ortogonales. En efecto, multiplicando escalarmente (2.85) por e_{II} y (2.86) por e_I,

$$e_{II} \cdot (I_O\, e_I) = A\, e_{II}\, e_I$$
$$e_I \cdot (I_O\, e_{II}) = B\, e_I\, e_{II}$$

Restando estas dos expresiones y haciendo uso de la simetría del tensor de inercia, se obtiene

$$0 = (A - B)\, e_I\, e_{II}$$

Expresión que indica la ortogonalidad entre ambas direcciones, ya que por hipótesis antes realizada $(A - B) \neq 0$. Por lo tanto, el triedro de referencia $(O, e_I, e_{II}, e_{III})$ formado por las tres direcciones principales en O constituye una base ortonormal ligada al sólido. Las componentes del tensor de inercia en esta base son

$$I_{O,ij} = e_i . (I_O\, e_j) = \lambda_i \delta_{ij} (\,i \text{ no sumado}),$$

Lo que equivale a una matriz de componentes diagonal:

$$[I_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Los ejes principales de inercia corresponden a los ejes geométricos del elipsoide de inercia, cuya expresión en este triedro seria

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 = 1$$

Ecuación que corresponde a un elipsoide de semiejes $\left(1/\sqrt{A}, 1/\sqrt{B}, 1/\sqrt{C}\right)$.

En el caso en que existiera una raíz doble en la ecuación característica (2.86), habrá dos momentos principales iguales. Los ejes principales de inercia estarán constituidos por el correspondiente a la raíz única y otros dos ejes cualesquiera en el plano normal al primero y que sean ortogonales entre sí, adoptando entonces la matriz de componentes del tensor de inercia la forma

$$[I_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

En este caso es inmediato comprobar que cualquier dirección del plano (O, e_{II}, e_{III}) ortogonal al primer vector (es decir, un vector $u = \alpha e_{II} + \beta e_{III}$ para α y β arbitrarias) es también dirección principal de inercia.

Estamos ante un tensor de inercia cilíndrico. El momento de inercia cilindro depende no solo de la masa sino también de la forma del cuerpo con simetría de rotación.

Por último, en el caso en que exista una única raíz triple, análogamente al caso anterior, cualquier dirección del espacio es principal. Podremos escoger como ejes principales tres direcciones ortogonales cualesquiera. Diremos que el tensor de inercia es esférico, siendo su expresión en cualquier sistema cartesiano de coordenadas la misma:

$$[I_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

Veamos ahora que los momentos de inercia correspondientes a las direcciones principales son los máximos y mínimos de los momentos de inercia para cualquier dirección.

Las direcciones principales se obtienen de la siguiente forma.

$$l_0 \cdot u - I_u u = (l_0 - I_u 1) \cdot u = 0 \Rightarrow |l_0 - I_u 1| = 0$$

Basta plantear el problema de máximos /mínimos condicionados en el que se buscan los extremos de la función.

$$I_e(e) = e \cdot (I_0 \cdot e) \qquad (2.88)$$

Sujetos a la ligadura

$$\mathrm{e} \cdot \mathrm{e} = 1 \qquad (2.89)$$

Puesto que el versor e debe tener modulo unidad. El problema se soluciona mediante el método de los multiplicadores de lagrange. Tomando una variación infinitesimal de la primera expresión e igualando a cero, la condición de extremo (2.90) queda expresada como

$$2e \cdot (I_0 \cdot \delta e) = 0$$

(Donde se ha empleado la simetría de I_O) multiplicando la ecuación de ligadura (2.91) por un multiplicador arbitrario λ, y tomando igualmente su variación,

$$2\lambda e \delta e = 0$$

Restando ahora ambas expresiones,

$$(I_O\, e - \lambda e)\, \delta e = 0$$

Lo que, al ser δe arbitrario, obliga a

$$I_O \cdot e = \lambda e \tag{2.90}$$

Es decir, e debe ser una dirección principal, como queríamos demostrar. Por tanto, de las tres direcciones principales, una corresponderá al máximo momento de inercia, otra al mínimo, y la tercera a un valor intermedio.

CAPÍTULO III

MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

3.1 TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN.

3.1.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN.

La Investigación es analítica, explicativa y aplicada. Consiste en analizar, explicar y aplicar el Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en R^n. Toda Investigación explicativa y aplicada se caracteriza por que los resultados sirven para determinar las características del sólido analizado, además sirve para profundizar los conocimientos del tema de Investigación, incrementar los conocimientos para la aplicación en el área.

En la presente Investigación los resultados permiten conocer cómo se aplica el Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en R^n a la Dinámica del Sólido Rígido.

3.1.2 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN.

El Diseño de Investigación bajo el cual se trabaja, es de tipo descriptivo, de comprensión e interpretación, por lo que se hacen un estudio de libros, libros digitales, páginas web, etc.

3.2 TÉCNICA Y ESTRATEGIAS.

3.2.1 TÉCNICA.

La técnica que se utilizó para la presente Investigación es básicamente una técnica de lectura analítica, para leer los textos referentes al Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en R^n, para comprender e interpretar los conceptos acerca de su aplicación a la dinámica del Sólido Rígido, los cuales servirán para entender y aplicar el Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en R^n al respectivo análisis.

3.2.2 ESTRATEGIAS.

Las estrategias que se utilizaron para la presente Investigación son las siguientes:

- Búsqueda de información de la materia objeto de Investigación.
- Revisión de textos referentes al tema de Investigación en la biblioteca de la UNA y en internet los cuales son necesarios para la comprensión, el análisis y la interpretación acerca del Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en R^n y su respectiva aplicación para desarrollar adecuadamente este trabajo de Investigación.
- Análisis de teorías, con el fin de lograr la familiarización con la simbología empleada, para que una vez entendida, sea aplicada correctamente, en la redacción de cada parte que comprende el trabajo de investigación.
- Consultas al Director, Asesor y entendidos en la materia para consolidarlas ideas desarrolladas y absolver dudas que se presentan.

CAPÍTULO IV

EXPOSICIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

I.- OBTENCION DEL TENSOR DE INERCIA DE UN CUBO RESPECTO DEL VERTICE O, CON EJES (X,Y,Z) PARALELOS A LAS ARISTAS.

Sea un cubo homogéneo, de masa M y arista b. se desea calcular las componentes del tensor de inercia referido a un vértice del cubo con ejes paralelos a las aristas, así como los ejes principales de inercia.

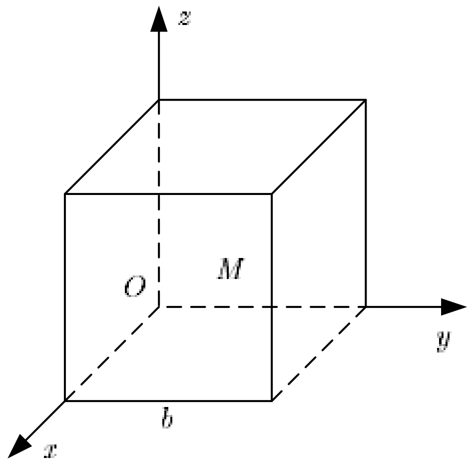

Figura 12: Cubo.

Calculamos directamente las integrales que definen las componentes del tensor de inercia (2.81) en ejes cartesianos ortonormales:

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \iiint_V \left(x^2 + z^2\right)\rho\, dx dy dz \\
&= \rho \int_0^b dz \int_0^b \left(y^2 + z^2\right) dy \int_0^b dx \\
&= \rho b \int_0^b dz \int_0^b \left(y^2 + z^2\right) dy \\
&= \rho b \int_0^b \left(\frac{b^3}{3} + b z^2\right) dz \\
&= \rho b \left(\frac{b^4}{3} + \frac{b^4}{3}\right) = \frac{2}{3} M\, b^2
\end{aligned}
$$

Ya que $M = b^3\rho$ .Análogamente

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} M b^2$$

Los productos de inercia valen

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \iiint_V xy\rho dxdydz \\ &= \rho \int_0^b dx \int_0^b xydy \int_0^b dz \\ &= \rho b \int_0^b dx \int_0^b xydy \\ &= \rho \frac{b^3}{2} \int_0^b xdx \\ &= \rho \frac{b^3}{2} \frac{b^2}{2} = \frac{1}{4} M b^2 \end{aligned}$$

Y de igual manera

$$P_{yz} = P_{zx} = \frac{1}{4} M b^2$$

Por lo tanto, la expresión del tensor de inercia es

$$\left[I_O \right] = M b^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

Calculemos ahora los ejes principales de inercia. La ecuación característica es:

$$\det(I_O - \lambda 1) = 0$$

Denominando $Mb^2 = \beta$, para simplificar las expresiones, resulta

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\beta - \lambda & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - \lambda & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante,

$$\det(I_o - \lambda 1) = \left(\frac{11}{12}\beta - \lambda\right)\left[\left(\frac{5}{12}\beta - \lambda\right)\left(\frac{2}{3}\beta - \lambda\right) - \frac{1}{8}\beta^2\right] = 0$$

Cuyas soluciones son $\lambda = \frac{1}{6}\beta$ y $\lambda = \frac{11}{12}\beta$ (doble).

Por lo tanto el tensor de inercia, expresado en los ejes principales, seria

$$[I_o] = M b^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 11/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/12 \end{pmatrix}$$

Para obtener las direcciones principales, sustituimos en (2.90) cada autovalor λ solución de la ecuación característica, y resolviendo para $\hat{e}$ obtendremos la dirección principal asociado. Conviene recordar que al ser la matriz de coeficientes singular, estas direcciones principales quedan indeterminadas en función de al menos un parámetro, lo que nos permite elegir las soluciones normalizadas, correspondientes a versores de módulo unidad.

Sustituyendo el primer autovalor $\lambda = \frac{1}{6}\beta$ en (2.90) y simplificando resulta:

$$\begin{aligned} 2e_1 - e_2 - e_3 &= 0 \\ -e_1 + 2e_2 - e_3 &= 0 \\ -e_1 - e_2 + 2e_3 &= 0 \end{aligned}$$

La solución función de un parámetro indeterminado μ ya que las tres ecuaciones no son independientes es $\mu(1,1,1)$, que corresponde a la diagonal del cubo.

Las otras dos direcciones principales hay que buscarlas en el plano normal a esta. Como el otro autovalor es una solución doble, serán cualesquiera dos direcciones de este plano que sean normales entre sí. (El tensor de inercia es por tanto cilíndrico)

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1 CONCLUSIONES.

PRIMERO.- La revisión bibliográfica sobre el teorema de clasificación de formas cuadráticas en R^n y aplicaciones en dinámica del sólido rígido, permitió afianzar algunos conocimientos y además establecer algunas relaciones entre ramas tan importantes de la matemática como el álgebra lineal y la geometría analítica y otros.

SEGUNDO.- En el proceso de revisión, se ha explorado por separado los conceptos de cónicas y superficies cuádricas correspondiente a los valores y vectores propios, para luego aplicarlos a la rotación de dichas cónicas y superficies

TERCERO.- En la parte correspondiente a la identificación de cónicas y superficies cuádricas, el trabajo permitió afianzar los conocimientos en algebra lineal relacionados a los valores y vectores propios y las bases ortogonales, por medio de los cuales logré describir en R^2 y R^3.

CUARTO.- En la tesis presentada se ha plasmado de una forma clara y concreta los conceptos e ideas fundamentales de la dinámica del solido rígido.

RECOMENDACIONES.

PRIMERO.- Antes de iniciar el estudio del Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en R^n, se recomienda adquirir conocimientos básicos del Algebra Lineal, como: Conceptos de Matrices, Espacios Vectoriales, Formas Cuadráticas, etc. De esta manera se puede entender sin ninguna dificultad presente investigación; sin estos requisitos la información que se brinda será de poca utilidad para el lector.

SEGUNDO.- La presente investigación sobre el Teorema de Clasificación de Formas Cuadráticas en R^n , puede ser utilizado como guía, por las personas que quieran hacer investigaciones sobre dicho Teorema, ya que pude ser aplicados en varios campos de las ciencias.

TERCERA.- los estudiantes de las carreras de ciencias, como los de Matemática y Física; requerimos programas para poder analizar mejor y en el menor tiempo posible nuestros trabajos de investigación; motivo por el cual, se recomienda emplear los programas Mathematica o Matlab que permiten visualizar gráficos en 3D (Cónicas).

BIBLIOGRAFIA

[1]. Rafael Bru, Joan – Joseph Climent Josep Mas, Ana Urbano. Álgebra Lineal. Editorial 2001 por Alfa Omega Grupo Editor S.A. de C.V. Postal 73 – 267, 03311, México.

[2].H. Antón. Introducción al Álgebra Lineal. Quinta Edición, Editorial Limusa Wiley, 1986.

[3].L.I Grossman. Aplicaciones del Algebra Lineal Mc Graw – Hill, México, 1992.

[4].J. García y M. López Pollicer. Algebra Lineal y Geometría, Ejercicios Editorial Marfil, Primera edición 1983.

[5].Lic. Teresita Noriega Sánchez, Lic. Héctor de Arazoza Rodríguez. Algebra Tomo I, Editorial Pueblo y Educación, 1986.

[6].George D. Mostow y Joseph H. Sampson. Álgebra Lineal y SUS Aplicacionais, Editorial 1969 McGraw – Hill, México.

[7].Lucia Contreras Caballero. Algebra Lineal (Séptima versión, 2012)

[8].Richard Hamilton Benavides Palacios, Claudia Milena Serpa Imbett Física Mecánica. Edición: 2008.

[9].H. Goldstein Mecánica Clásica, Barcelona – Bogotá, 2006.

[10]. Claudio Pita Ruiz. Álgebra Lineal, Editorial Mc Graw Hill, México 1980.

[11]. J.Ludlow – wiechers. Álgebra Lineal, Editorial Limusa, México 1987.

[12]. José Tola Pasquel. Álgebra Lineal y Multilineal Cuadricas y Tensores, Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú 1989.

[13]José Alfredo Jiménez Moscoso. Notas de Álgebra Lineal, Colombia 2004.