

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - PUNO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA**



**“MODELO ESTOCÁSTICO MARKOVIANO PARA  
PREDECIR LAS DESCARGAS DEL RÍO ILAVE,  
PERIODO 1970-2010”**

**TESIS**

PRESENTADA POR:

**YANINA MARITZA CHAMBI ARUCUTIPA**

PARA OPTAR EL TÍTULO DE:

**INGENIERO ESTADÍSTICO E INFORMÁTICO**

**PUNO - PERÚ**

**2012**



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO – PUNO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA**



**“MODELO ESTOCÁSTICO MARKOVIANO PARA PREDECIR LAS DESCARGAS DEL RÍO ILAVE, PERIODO 1970-2010”**

**TESIS**



PRESENTADA POR:

**YANINA MARITZA CHAMBI ARUCUTIPA**

A LA COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA, COMO REQUISITO PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

**INGENIERO ESTADÍSTICO E INFORMÁTICO**

APROBADA POR:

PRESIDENTE

:   
M.C. CONFESOR M. VARGAS VALVERDE

PRIMER MIEMBRO

:   
M.Sc. ERNESTO N. TUMI FIGUEROA

SEGUNDO MIEMBRO

:   
Ing. EDGAR VILLAHERMOSA QUISPE

DIRECTOR DE TESIS

:   
M.C. SANTOS O. MORILLOS VALDERRAMA

Área: Estadística  
Tema: Modelos predictivos  
Fecha de sustentación: 28/09/2012

## DEDICATORIA

A Dios Todo Poderoso por iluminar mi camino y bendecirme con una profesión, en quien confió y mantengo la fe por ser nuestro único camino en la vida.

Con mucho cariño a mis padres Enrique y Candelaria, y a mis hermanos Rodrigo Edgar, Peter David y Cinthia Milagros, Quienes con su comprensión y permanente apoyo incondicional inculcaron en mi persona la importancia de la perseverancia y el deseo de vivir para servir a los demás.

A Alcides por sus consejos positivos y apoyo constante para la culminación de la tesis, de quien aprendí que con mucho esfuerzo y paciencia siempre se logra el éxito.

## AGRADECIMIENTO

A la Escuela Profesional de Ingeniería Estadística e Informática de la Universidad Nacional del Altiplano – Puno y a sus autoridades que la conducen, por darnos la oportunidad de formarnos profesionales al servicio de nuestro país.

Yanina.

## ÍNDICE

DEDICATORIA.....	i
AGRADECIMIENTO .....	ii
ÍNDICE .....	iii
ÍNDICE DE CUADROS .....	vii
ÍNDICE DE GRAFICOS .....	ix
RESUMEN .....	x
ABSTRACT .....	xi
INTRODUCCIÓN .....	xii

### CAPITULO I

#### EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Formulación y Definición del Problema .....	1
1.2. Definición del Problema .....	2
1.3. Justificación .....	2
1.4. Objetivos de la Investigación .....	3
1.4.1. General .....	3
1.4.2. Específicos .....	3
1.5. Hipótesis de Investigación .....	4

### CAPITULO II

#### MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de la Investigación .....	5
2.2. Sustento Teórico.....	6
2.2.1. Cadenas de Markov .....	6
2.2.2. Proceso Estocástico.....	7
2.2.3. Modelo Markoviano o Autorregresivo.....	9

2.2.4.	Modelos Estacionarios .....	10
2.2.5.	Modelado Estocástico .....	10
2.2.6.	Modelos Estocásticos en Hidrología .....	10
2.2.7.	Descripción del Proceso Físico .....	12
2.2.8.	Proceso Determinístico .....	12
2.2.9.	Proceso no Determinístico .....	12
2.2.10.	Definición e Importancia del Agua .....	13
2.2.11.	Hidrología y Ciclo Hidrológico .....	13
2.2.12.	Aplicación e Importancia de los Estudios Hidrológicos .....	15
2.2.13.	Registro de Datos del Caudal .....	15
2.2.14.	Modelos Hidrológicos .....	16
2.2.15.	Descripción de Procesos Estocásticos en hidrología .....	17
2.2.16.	Estimación de Parámetros .....	18
2.2.17.	Modelo Markoviano de Primer Orden .....	21
2.2.18.	Modelo Markoviano de Segundo Orden .....	22
2.2.19.	Modelo Markoviano de Tercer Orden .....	23
2.2.20.	Pruebas del Modelo .....	24
2.2.21.	Distribución de Probabilidad de la Variable Independiente .....	25
2.2.22.	Función de Distribución y Estimación de Parámetros .....	26
2.2.23.	Distribución Log-Normal 3 Parámetros .....	27
2.2.24.	Pruebas de Bondad de Ajuste .....	28
2.2.25.	Prueba de Smirnov – Kolmogorov .....	29
2.2.26.	Generación de Números Aleatorios .....	30
2.2.27.	Generación de Series .....	31
2.3.	Definición de Términos Básicos .....	32

2.4. Operacionalización de Variables .....	35
--	----

### **CAPITULO III**

#### **MATERIALES Y MÉTODOS**

3.1. Materiales .....	36
3.1.1. Población .....	36
3.1.2. Muestra .....	36
3.2. Métodos .....	37
3.2.1. Métodos de Recolección de Datos .....	37
3.2.2. Métodos de Tratamiento de Datos .....	37
3.2.3. Material Experimental .....	39

### **CAPITULO IV**

#### **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

4.1. La Información Hidrológica .....	41
4.2. Modelamiento Estocástico .....	43
4.3. Estandarización de la Serie Histórica .....	44
4.4. Cálculo de los Coeficientes de Autocorrelación .....	45
4.5. Coeficientes de los Modelos Autorregresivos .....	47
4.6. Los Modelos Markovianos .....	48
4.7. Calculando los Errores de los Modelos Autorregresivos .....	49
4.8. Prueba de los Modelos Markovianos .....	50
4.9. Calculo de los Correlogramas del Error .....	55
4.10. Eleccion del modelo Adecuado .....	62
4.11. Prueba de Bondad de Ajuste .....	64
4.11.1. Estimación de Parámetros en Distribuciones Teóricas .....	64
4.12. Modelamiento del Proceso Estocástico .....	66

4.12.1. Generación de Números Aleatorios .....	66
4.12.2. Generación de 10 Series sintéticas de 41 años .....	67
4.12.3. Consolidación del Modelo Markoviano.....	67
4.12.4. Pronostico de Descargas Hidrológicas .....	69
4.12.5. Comparación entre los datos pronosticados y datos del SENAMHI en los últimos 5 años .....	71
CONCLUSIONES .....	74
RECOMENDACIONES Y SUGERENCIAS.....	76
BIBLIOGRAFÍA .....	77
WEBGRAFÍA.....	79
ANEXOS .....	81
ANEXO 01: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN t.....	82
ANEXO 02: TABLA DISTRIBUCIÓN DE F.....	83
ANEXO 03: TABLA DE KOLMOGOROV-SMIRNOV .....	84
ANEXO 04: FOTOGRAFÍAS DEL RÍO ILAVE.....	85
ANEXO 05: PLANO HIDROGRÁFICO DE LA CUENCA DEL RÍO ILAVE ...	86
ANEXO 06: GENERACIÓN DE 10 SERIES SINTÉTICAS CON LA DISTRIBUCIÓN NORMAL .....	87
ANEXO 07: GENERACIÓN DE 10 SERIES SINTÉTICAS CON LA DISTRIBUCIÓN LOG-NORMAL DE 3 PARÁMETROS .....	88



## ÍNDICE DE CUADROS

CUADRO 1:	Operacionalización de las variables de estudio .....	35
CUADRO 2:	Descargas Medias Anuales Río Ilave (1970-2010).....	37
CUADRO 3:	Serie Histórica de Descargas Hidrológicas (m <sup>3</sup> /s) Río Ilave.....	41
CUADRO 4:	Estadísticos descriptivos de la serie histórica Río Ilave .....	44
CUADRO 5:	Componente estocástica estandarizada de la Serie Histórica.....	45
CUADRO 6:	Coefficientes de autocorrelación de la componente Estocástica .....	46
CUADRO 7:	Coefficientes de los Modelos Markovianos.....	48
CUADRO 8:	Coefficientes de los Modelos Markovianos.....	50
CUADRO 9:	Autocorrelaciones para los Modelo Markov I, II y III .....	51
CUADRO 10:	Autocorrelaciones para Errores del Modelo Markov I.....	55
CUADRO 11:	Autocorrelaciones para Errores del Modelo Markov II .....	56
CUADRO 12:	Autocorrelaciones para Errores del Modelo Markov III .....	57
CUADRO 13:	Autocorrelaciones Residuales para los Modelos Markovianos .....	59
CUADRO 14:	Cuadro de Análisis de Varianza (ANOVA).....	63
CUADRO 15:	Correlaciones entre las autocorrelaciones de los modelos .....	63
CUADRO 16:	Parámetros de la Distribución Normal .....	64
CUADRO 17:	Parámetros de la Distribución Log-Normal 3 parámetros ....	64
CUADRO 18:	Parámetros de las Distribuciones Ajustadas .....	65

CUADRO 19: Ajuste de la serie estocástica independiente a una función de distribución de probabilidad teórica, mediante la prueba de Kolmogorov - Smirnov.....	65
CUADRO 20: Prueba de comparación de medias y desviaciones estándar con la distribución Normal.....	68
CUADRO 21: Prueba de comparación de medias y desviaciones estándar con la distribución Log-Normal de 3 parámetros.....	69
CUADRO 22: Predicción de descargas medias anuales para los próximos cinco años.....	70
CUADRO 23: Comparación entre datos pronosticados .....	72
CUADRO 24: Prueba de comparación de medias y desviaciones para las series en comparación: serie de predicción y serie del SENAMHI.....	73

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1:	Descargas Hidrológicas Medias anuales, Rio llave 1970-2010.....	43
GRÁFICO 2:	Autocorrelación de la componente Estocástica de descargas medias anuales del Río llave, 1970-2010 .....	47
GRÁFICO 3:	Correlograma de la Componente Estocástica de descargas medias anuales del Rio llave, 1970-2010 .....	52
GRÁFICO 4:	Correlograma del Modelo Markov-1 de Descargas medias anuales del Rio llave, 1970-2010 .....	53
GRÁFICO 5:	Correlograma del Modelo Markov-2 de Descargas medias anuales del Rio llave, 1970-2010 .....	53
GRÁFICO 6:	Correlograma del Modelo Markov-3 de Descargas medias anuales del Rio llave, 1970-2010 .....	54
GRÁFICO 7:	Correlograma de los Modelos Markovianos de Descargas medias anuales del Rio llave, 1970-2010.....	54
GRÁFICO 8:	Correlograma Residual del Modelo Markov-1 de descargas medias anuales del Rio llave, 1970-2010 .....	60
GRÁFICO 9:	Correlograma Residual del Modelo Markov-2 de Descargas medias anuales del Rio llave, 1970-2010.....	61
GRÁFICO 10:	Correlograma Residual del Modelo Markov-3 de Descargas medias anuales del Rio llave, 1970-2010.....	61
GRÁFICO 11:	Predicción de Descargas medias anuales para cinco años del Río llave, 1970-2010.....	71

## RESUMEN

En razón de no contar con un modelo de pronóstico de las descargas hidrológicas medias anuales del Rio llave, el presente trabajo de investigación se realizó bajo el siguiente objetivo: “Determinar un Modelo Estocástico Markoviano de mejor ajuste para pronosticar las descargas hidrológicas medias anuales del Rio llave para el periodo 2011 al 2015”.

La serie estuvo constituida por las descargas hidrológicas medias anuales del Rio llave, con datos anuales desde 1970 hasta 2010, para el análisis de la serie se utilizó la metodología estadística de Andrei Andrevich Markov el cual proporciona modelos de pronóstico y se validó mediante la prueba de autocorrelaciones de Ljung-Box para los residuales.

Finalmente se concluyó que, el mejor Modelo Estocástico Markoviano fue el de tercer orden:  $X_t = 0.19691144X_{t-1} + 0.18994567X_{t-2} - 0.16402799X_{t-3} + 0.95291325\varepsilon_t$  y con el cual se pronosticó las descargas medias anuales del Rio llave para el periodo 2011 al 2015.

**Palabras claves:** Modelo, estocástico, markoviano, pronóstico, descarga e hidrología.

## ABSTRACT

Due to not having a forecast model of mean annual discharge of the Rio hydrological llave, the present research work was performed under the following objective: "Setting a Markovian Stochastic Model of best fit to predict the average annual discharge of the Rio hydrological llave for the period 2011 to 2015".

The series consisted of the average hydrological downloads annual Rio llave, with annual data from 1970 to 2010 for the analysis of the series statistical methodology Andrei Andrevich Markov which provides models forecast was used and validated by testing Ljung-Box autocorrelation for the residuals.

Finally concluded what, best Stochastic Markov Model was the third order:  $X_t = 0.19691144X_{t-1} + 0.18994567X_{t-2} - 0.16402799X_{t-3} + 0.95291325\varepsilon_t$  and with which the average annual discharge of the Rio llave was predicted for period 2011 to 2015.

**Keywords:** Model, stochastic, Markovian, forecast, download and hydrology.

## INTRODUCCIÓN

El Proceso Estocástico es la abstracción matemática de un proceso real, físico, tecnológico, económico, u otros, cuyo desarrollo es gobernado por leyes probabilísticas. Aproximadamente todos los procesos hidrológicos pueden ser caracterizados como procesos estocásticos o una combinación de proceso determinístico y estocástico. Las cadenas de Markov, como Modelos Lineales Autorregresivos, o Modelos Markovianos, pueden ser adecuados para describir la estructura de dependencia de la serie anual, series no anuales (mensuales, semanales o diarias). En tal sentido fue necesario determinar un Modelo Estocástico que permita pronosticar eventos hidrológicos anuales para los próximos años y así se tome decisiones para el buen uso y aprovechamiento de este recurso hídrico además de la prevención de desastres.

La presente tesis titulada “Modelo Estocástico Markoviano para predecir las descargas del Río Ilave, Periodo 1970-2010”, se desarrolló para el pronóstico de los próximos cinco años desde 2011 hasta el 2015, siendo de utilidad a los pobladores y autoridades de la Provincia de Ilave.

El trabajo de investigación está estructurado en seis capítulos, el primer capítulo, está referido al problema de investigación, el cual consta de la formulación y definición del problema, justificación, objetivos e hipótesis de la investigación; en el segundo capítulo, se presenta el marco teórico que comprende los antecedentes de la investigación, el sustento teórico, la definición de términos básicos y la operacionalización de variables; en el tercer capítulo, se describe los materiales y métodos empleados en la

investigación; en el cuarto capítulo, se encuentran los resultados y la discusión, donde se mostraron gráficos estadísticos; que permitan apreciar los resultados en forma representativa y visual; finalmente se tiene las conclusiones, recomendaciones y sugerencias.

## CAPÍTULO I

### EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

#### 1.1. Formulación y Definición del Problema

En los últimos años existió un inadecuado manejo y aprovechamiento del recurso hídrico, así como la falta de prevención de desastres naturales, debido a la incertidumbre y desconocimiento de la disponibilidad de este vital elemento, por parte de los pobladores y autoridades, ya que dicho recurso es considerado como fuente de vida entre todos y es fundamental en la vida del hombre, en especial para el poblador del altiplano, así como para el consumo humano, riego y generación de energía; por lo que es necesario dar un adecuado manejo y aprovechamiento racional de los recursos hídricos a través de estudios hidrológicos y pronósticos adecuados.

En la región del altiplano y en especial en la cuenca del Titicaca, año tras año estuvieron presentándose desbordes e inundaciones en sus afluentes, y que uno de ellos es el Rio llave, ubicado en la Provincia de llave, donde los pobladores y autoridades vienen siendo afectados tanto en la agricultura y ganadería además de hacer uso irracional del recurso hídrico disponible, sea para el consumo humano, riego y generación de energía eléctrica. Ante este problema es necesario



conocer el pronóstico de las descargas hidrológicas medias anuales del Río llave. Razón por el cual la presente tesis lleva por título “Modelo Estocástico Markoviano para predecir las descargas del Río llave, periodo 1970-2010”

Los eventos hidrológicos, tales como aguaceros, caudales, niveles de embalse, etc. son eventos estocásticos, porque de un lado tienen un patrón medio de comportamiento a largo plazo, y por otro el pronóstico de sus magnitudes en un momento dado tiene un mayor o menor grado de incertidumbre. El patrón medio corresponde a la componente determinística y la incertidumbre a la componente aleatoria.

En el presente estudio, se utilizó el Modelo Markoviano de parámetros constantes, para escribir la estructura de dependencia de las descargas medias anuales del Río llave; este tipo de modelos consideran que el valor de una variable en el tiempo presente depende de los valores del tiempo precedente, esto se debe al denominado fenómeno de persistencia.

## **1.2. Definición del Problema**

¿Cuál es el Modelo Estocástico Markoviano de mejor ajuste para pronosticar las descargas hidrológicas medias anuales del Río llave, período 1970-2010?

## **1.3. Justificación**

El presente trabajo de investigación se realizó con la finalidad de aportar con un Modelo Markoviano para el pronóstico de los próximos

cinco años (2011-2015) de las descargas hidrológicas medias anuales del Río llave, bajo el siguiente objetivo: “Determinar el Modelo Estocástico Markoviano de mejor ajuste para pronosticar las descargas hidrológicas medias anuales del Río llave en el periodo, 1970-2010”.

El Modelo Estocástico Markoviano de pronóstico, está basado en las cadenas de Markov que pertenece a la división de los modelos matemáticos y a la sub división de los modelos estocásticos.

Los resultados de la presente investigación son de utilidad para la toma de decisiones de los pobladores y autoridades de la Provincia de llave, ya que les permitirá prevenir y conocer a futuro la disponibilidad y demanda del recurso hídrico.

#### **1.4. Objetivos de la Investigación**

##### **1.4.1. General**

Determinar el Modelo Estocástico Markoviano de mejor ajuste para pronosticar las descargas hidrológicas medias anuales del Río llave en el periodo, 1970-2010.

##### **1.4.2. Específicos**

1. Establecer el orden del Modelo Estocástico Markoviano mediante el análisis de la autocorrelación respectiva que se adecue a la estructura de dependencia de la serie de descargas hidrológica medias anuales del Río llave.

2. Determinar la función de distribución de probabilidad que mejor se ajuste a la serie residual independiente del modelo establecido de la serie de descargas hidrológicas medias anuales del Río Ilave.
3. Consolidar el Modelo Estocástico Markoviano, mediante la generación de series sintéticas de descargas medias anuales del Río Ilave, de una longitud similar a la serie histórica verificando la bondad del modelo.
4. Pronosticar las descargas hidrológicas medias anuales para los próximos cinco años del 2011 al 2015 de la serie histórica, empleando el Modelo Estocástico Markoviano de orden tres.

### **1.5. Hipótesis de Investigación**

El Modelo Estocástico Markoviano de tercer orden, es el modelo de mejor ajuste para pronosticar las descargas hidrológicas medias anuales del Río Ilave para el período 2011 al 2015.

## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO

#### 2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Entre los estudios anteriores a la investigación se puede nombrar a: MARTÍNEZ, O. y SÁNCHEZ, T. *Modelamiento estocástico en la determinación de la oferta hídrica del río Source Matelas*. [Tesis Doctoral]. Facultad de Ciencias Físicas y Matemática, Chile. Donde el objetivo fue: el Modelado Estocástico y Determinación de la oferta hídrica la cual varía con la profundidad y la función de autocorrelación dependiendo de los tiempos y no de la diferencia de tiempos. En dicho estudio se llegó a la conclusión: que se pudo determinar, a partir de información hidrológica escasa, la oferta hídrica del río Source Matelas en un punto escogido para el pre dimensionamiento de un embalse, aguas arriba del poblado de Source Matelas al occidente de Puerto Príncipe en Haití. Dicha oferta hídrica corresponde a un caudal medio diario de 26 L/s.

Así mismo FLORES, W. (2001). *Análisis Estocástico y Simulación de sequias con la aplicación del Sams 2000 en la cuenca del río Ramis*. [Tesis Ingeniería Agrícola]. Facultad de Ingeniería Agrícola, Universidad Nacional del Altiplano Puno, Perú. En donde el objetivo

fue: Determinar el periodo de retorno o probabilidad de ocurrencia de las sequias criticas históricas en la cuenca del rio Ramis. Llegando a la conclusión de que el prototipo de simulación y modelamiento estocástico del caudal del Río Ramis periodo 1960-2000 ayuda en la toma de decisiones a los profesionales del área de Ingeniería Agrícola, ya que según la encuesta realizada el 100% respondieron que las simulaciones se ajustan a la realidad.

Por otra parte SÁNCHEZ DELGADO M. y SÁNCHEZ TUYA J.(2001). *Generación de series sintéticas mensuales del rio Chira mediante el uso de Modelos Markovianos*. Cuyo objetivo fue generar series sintéticas medias mensuales del río Chira mediante el uso de modelos Markovianos y luego determinar la capacidad de embalse óptimo, para lo cual empleo el método Range, y a su vez de los estudios realizados, la represa Poechos tiene actualmente una vida de 20 años aproximadamente, como alternativa se propone el diseño de un embalse en la quebrada de San Francisco, ubicada en la cuenca del río Chira. En el estudio se determinó experimentalmente la distribución de probabilidades de la capacidad de embalse, las cuales se ajustaron a una distribución log-normal de dos parámetros.

## 2.2. SUSTENTO TEÓRICO

### 2.2.1. Cadenas de Markov

SALAS, J.D. (1976). *Modelos de Simulación Estocástica*. Define, a las cadenas de Markov, como: “Modelos Lineales Autorregresivos, o Modelos Markovianos, que pueden ser

adecuados para describir la estructura de dependencia de la serie anual, series no anuales (mensuales, semanales o diarias) son procesos estocásticos no estacionarios debido a que presentan periodicidades en la media, en la desviación estándar, en algunos casos en coeficientes de autocorrelación, y además una estructura de dependencia que también puede ser descrita por modelos Markovianos”.

Por otra parte según CHOW, V. (1979). *Análisis Estocástico de Sistemas Hidrológicos*. El Modelo de Markov pertenece a la división de modelos matemáticos y a la subdivisión de modelos estocásticos, debido a que se basa en conceptos probabilísticos. Este tipo de modelos es el más extendido en la literatura, estos modelos se pueden realizar mediante distintas aproximaciones que dan lugar a diferentes técnicas.

Es así que el método de Markov denominado cadena de Markov, trata sobre procesos probabilísticos, en los cuales el resultado de cierto estado depende de estado inmediatamente anterior y solamente de estos.

### **2.2.2. Proceso Estocástico**

Según lo afirma YEVJEVICH, V. (1972). *La Probabilidad y Estadística en Hidrología*. Publicaciones de Recursos del Agua Fort Collins. Colorado, USA. La palabra “estocástico” es de origen griego e inicialmente tuvo el significado de “to conjeture” en inglés, por lo que un proceso estocástico es la abstracción

matemática de un proceso real, físico, tecnológico, económico, u otros, cuyo desarrollo es gobernado por leyes probabilísticas. Aproximadamente todos los procesos hidrológicos pueden ser caracterizados como proceso estocástico o una combinación de proceso determinístico y estocástico.

Así mismo indica que un proceso estocástico aplicado a los recursos de agua, tiene tres componentes, que son:

1. Componente determinístico, como la media, la desviación estándar, covarianza principalmente.
2. Componente de estructura dependiente, en donde la dependencia de un dato con respecto a los datos previos se dan en forma sucesiva.
3. Componente aleatoria, que es descrito en términos de distribución de probabilidad.

Una forma de analizar un proceso estocástico en el dominio del tiempo, es a través de la función de autocorrelación representada por el correlograma.

Por afirmaciones de CHOW, V., Op. Cit., "Si la causa de ocurrencia de las variables es tomada en cuenta y el concepto de probabilidad es introducida en la formulación del proceso y su modelo son descritos como estocásticos. En un proceso estocástico se observa una cierta estructura de dependencia

en el tiempo a diferencia del proceso probabilístico, donde las ocurrencias o eventos son independientes”.

Estos aportes nos permiten concluir que un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias asociada a un conjunto índice de números reales: es decir a cada elemento del conjunto de números índices, le corresponde una y solo una variable aleatoria.

### 2.2.3. Modelo Markoviano o Autorregresivo

Según SALAS J.D. (1985). *Modelamiento Estocástico de Series Hidrológicas*. Lima - Perú, Los modelos autorregresivos o markovianos han sido usados en hidrología desde los años 60, para representar series de tiempo anuales y periódicas. La aplicación de estos modelos han sido empleados en hidrología principalmente por las siguientes razones:

1. La magnitud de un flujo tiene cierta dependencia en el tiempo (el valor de una variable en el tiempo presente depende de los del tiempo precedente).
2. El valor de un flujo en particular no solo depende de una componente autorregresiva sino también de una componente aleatoria.

Los modelos autorregresivos se pueden esquematizar de dos modos: el modelo AR con parámetros constantes, que es típicamente usado por la modelación de series de tiempo



anuales, y el modelo AR con parámetros periódicos o una combinación de las constantes que se aplican a la serie de tiempo mensual, semanal y diario.

#### 2.2.4. Modelos Estacionarios

Diferentes técnicas que serán expuestas con mayor detalle a continuación:

- Modelado estocástico.
- Modelos que utilizan un filtro lineal e invariante.
- Modelos Transductor/material
- Modelos paramétricos.

#### 2.2.5. Modelado Estocástico

SALAS, J.D. (1976). Op. Cit., El modelado estocástico se basa en una descripción del proceso aleatorio apoyándose en sus estadísticos, generalmente mediante la función de densidad de probabilidad (fdp) y los momentos conjuntos de segundo orden. Este tipo de modelos consideran a la señal ultrasónica procedente de la estructura como un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio.

#### 2.2.6. Modelos Estocásticos en Hidrología

- **Modelo**

FAO. (1973). *Mathematical Models in Hydrology*. Un modelo es una representación simplificada de un sistema

complejo que expresa relaciones entre variables y parámetros pudiendo ser físicos, analógicos y matemáticos.

SALAS, J.D. (1985). Op. Cit., Es la representación numérica de un problema físico en el cual el comportamiento del sistema está representado por un conjunto de ecuaciones acompañado de relaciones lógicas cuya solución es con la ayuda de una computadora.

- **Modelo estocástico**

LINSLEY. (1979). *Hidrología para Ingenieros*. México. Segunda edición Editorial McGraw-Hill Latinoamérica, S.A., conceptualiza como un modelo de series de tiempo, al modelo matemático que representa a un proceso estocástico. Y las técnicas y procedimientos para estimar los modelos y sus parámetros desde los datos disponibles son denominados como "Modelamiento Estocástico" de series de tiempo.

YEVJEVICH, V.(1972). *La Probabilidad y Estadística en Hidrología*. Define como la abstracción matemática de un proceso real físico, tecnológico, económico u otros cuyo desarrollo es gobernado por leyes probabilísticas. Aproximadamente todos los procesos hidrológicos pueden ser caracterizados como procesos estocásticos o una combinación de procesos determinísticos, estocásticos.

### 2.2.7. Descripción del Proceso Físico

En general, todos los procesos naturales en el tiempo son periódicos-estocásticos cuyas periodicidades son causados por los ciclos astronómicos, y la aleatoriedad o estocasticidad resulta de los procesos causales en el medio ambiente.

ALIAGA, A. V. (1985). *Hidrología Estadística*. Lima Perú: Tomo I, Editorial Juventud. Las periodicidades son el resultado de procesos determinísticos astronómicos, y las aleatoriedades son el resultado de variaciones geofísicas causales; por lo que, un proceso físico puede ser categorizado como determinístico y no determinístico.

### 2.2.8. Proceso Determinístico

PAULET, M. (1974). *Análisis de Frecuencias de Fenómenos en Hidrología Método de Gumbel*. Lima Perú: Publidrat N°34. UNA, la Molina. Define un proceso determinístico como un proceso descrito razonable por una relación matemática explícita, en forma tal que su comportamiento futuro puede ser predicho bajo condiciones dadas; por lo tanto, los datos son representados por series determinísticas dadas todas en el tiempo.

### 2.2.9. Proceso no Determinístico

PAULET, M. (1974). Op. Cit., un proceso no determinístico es aquel cuyo comportamiento en un instante del tiempo no puede

ser exactamente predecido, la precipitación, descargas, avenidas, transporte de sedimentos y otros fenómenos en ciencias físicas, naturales, biológicas, sociales, etc. Son ejemplos de procesos no determinísticos, es decir son todos ellos aleatorios.

La propiedad más importante de un proceso aleatorio es la carencia de la regularidad determinística en sus resultados. En otras palabras, los resultados pueden ser totalmente diferentes aún bajo mismas circunstancias.

Un proceso aleatorio, el cual puede ser analizado y descrito en términos de leyes de probabilidad es llamado proceso estocástico.

#### **2.2.10. Definición e Importancia del Agua**

FLORES, W. (2001). Op. Cit., el agua no es un elemento aislado por la naturaleza, que se encuentra en un delicado estado de equilibrio con todos los recursos, especialmente al suelo vegetación y atmósfera lo que implica que cualquier modificación o intervención de uno de ellos repercutiría en mayor o menor grado, favorable o desfavorable en los demás.

#### **2.2.11. Hidrología y Ciclo Hidrológico**

ALIAGA, A. V. (1985). Op. Cit., la hidrología, como la ciencia o disciplina que tiende al conocimiento del medio físico, que tiene una doble finalidad, la primera, es autónoma y su actividad

principal es de análisis e interpretación del funcionamiento del ciclo hidrológico.

Su objetivo es alcanzar a través de la planificación y aplicación de "técnicas, metodológicas y análisis" y en base de los datos suministrados por los sistemas de información hídrica.

SALAS, J. D. (1976). Op. Cit., la segunda finalidad se concreta a través de actividades que pueden ordenarse secuencialmente en distintos niveles. Un primer nivel está dado por la evaluación de los recursos hídricos, por ejemplo, la determinación de la precipitación media anual de una región, determinación de la probabilidad y almacenamiento de los acuíferos, entre otros. Un segundo nivel comprende los requerimientos de la planificación de sistemas hídricos que permita la selección de alternativas de control, de modo de que se considere adecuadamente los efectos de las actividades sobre otras; el tercer nivel se refiere a la respuesta de la hidrología a los requerimientos de proyectos de aprovechamiento hídrico, como estudio de los fenómenos hidrológicos para el dimensionamiento de estructuras particulares de obras hidráulicas y un cuarto nivel iterativo con el anterior es la operación de las obras de aprovechamiento con la finalidad de usar optativamente su capacidad, ejemplo de la consideración de la hidrología en este nivel, son los métodos de pronóstico de aporte y crecidas de sistemas de

alarma de inundaciones, plan de operaciones de sistemas de embalses, etc.

### **2.2.12. Aplicación e Importancia de los Estudios Hidrológicos**

PAULET, M. (1974). Op. Cit., la importancia de los estudios hidrológicos, se constituye una herramienta para establecer hasta qué punto es factible económicamente y seguro un proyecto desarrollo. El estudio de todo proyecto de aprovechamiento del recurso agua, deberá incluir un análisis hidrológico que establecen las características, del comportamiento y de la disponibilidad del recurso, para evitar el fracaso en el momento de la implantación y puesta en marcha de la obra.

### **2.2.13. Registro de Datos del Caudal**

- **Caudales medios diarios**

Son los que se obtienen del promedio de 2 ó 3 lecturas diarias de altura de agua del río. Se expresa en  $m^3/s$  o  $lt/s$ .

- **Caudales medios mensuales**

Son los que se obtienen del promedio de los caudales medios diarios dentro de un mes.

- **Caudales medios anuales**

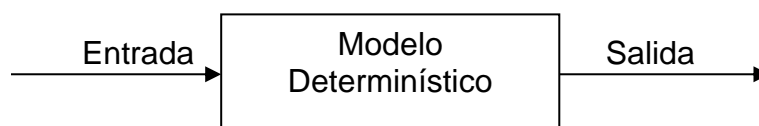
Son los caudales obtenidos del promedio de los caudales correspondientes a los 12 meses del año.

#### 2.2.14. Modelos Hidrológicos

PAREDES, J.R. (1992). *Modelamiento Estocástico de la Precipitación Pluvial en el Distrito de Puno, Periodo 1966-1990*. [Tesis Ingeniería Estadística]. Universidad Nacional del Altiplano, Facultad ingeniería Estadística, Perú. Es una aproximación al sistema real; sus entradas y salidas son variables hidrológicas mensurables y su estructura es un conjunto de ecuaciones que conectan las entradas y salidas del sistema. Existen diferentes tipos de Modelos Hidrológicos. Pueden ser Determinísticos o Estocásticos, de Simulación o de Optimización.

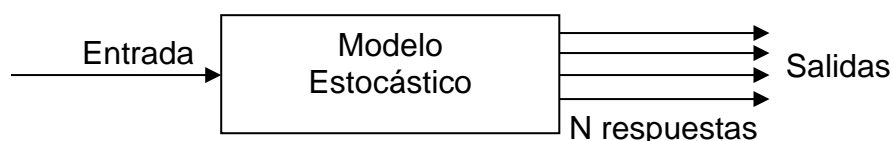
Es una representación simplificada de un sistema hidrológico, por medio de un conjunto de conceptos hidrológicos expresados mediante ecuaciones matemáticas, buscando una relación aproximada que corresponda a un fenómeno natural hidrológico.

Dado un valor de entrada se obtiene un único valor de salida cada vez que se corre el modelo.



En los Modelos Estocásticos el algoritmo de cálculo incluye una o varias componentes probabilísticas. Con los Modelos Estocásticos se generan series futuras de lluvias, de caudales, de niveles de embalses, o de eventos extremos.

De un valor de entrada se obtiene una respuesta diferente cada vez que se corre el modelo.



### 2.2.15. Descripción de Procesos Estocásticos en Hidrología

#### Tipos de Secuencias Hidrológicas

YEVJEVICH, V. (1972). Op. Cit., las secuencias hidrológicas son de los siguientes tipos:

- **Unidimensionales:** Secuencia asociada a una dimensión y pueden ser. Las series de tiempo, son las principales secuencias en hidrología para todas las variables, los caudales son registrados en el tiempo. Así como las descargas de los ríos, descargas de sedimentos, calidad del agua y otros, son procesos estocásticos hidrológicos unidimensionales.
- **Bidimensionales:** Son secuencias asociadas en dos dimensiones, en hidrología son variables asociadas con el área o simultáneamente a lo largo de una línea y en el



tiempo. Una secuencia asociada como el área es representada por la precipitación o evaporación como ellos cambian con la latitud y longitud; el contenido de oxígeno en el agua que cambia a lo largo de un río.

- **Tridimensionales:** Son secuencias asociadas en tres dimensiones, estas secuencias están generalmente asociadas con cambios de una variable en el espacio. Esto puede ser ilustrado por el proceso de evaporación de gotas de agua en el aire sobre un área entre la nube base y el suelo.
- **Multidimensionales:** Secuencias asociadas con cuatro o más dimensiones. Una secuencia con cuatro dimensiones son los cambios de magnitudes hidrológicas en el espacio y el tiempo simultáneamente.

#### 2.2.16. Estimación de Parámetros

YEVJEVICH, V. (1972). Op. Cit., afirma que para la estimación de los parámetros, el modelo estocástico Markoviano general considerado para una serie anual hidrológica, está dada por las ecuaciones:

$$Y_t = M_y + S_y X_t \quad (1)$$

$$X_t = \sum_{K=1}^m \alpha_K X_{t-K} + b\varepsilon_t \quad (2)$$

Ello también puede ser representado por:

$$Y_t = M_y + S_y \left( \sum_{K=1}^m \alpha_K X_{t-K} + b \varepsilon_t \right)$$

De la ecuación anterior se desprende lo siguiente:

$$b = \left( 1 - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_i \alpha_j \rho_{i-j} \right)^{1/2}$$

y  $f(\varepsilon) = f(a, b, c, \varepsilon)$

Dónde:

- $Y_t$  : Serie hidrológica anual
- $M_y$  : Media de  $Y_t$  (parámetro)
- $S_y$  : Desviación estándar de  $Y_t$  (parámetro)
- $\alpha_k$  : Coeficiente de auto regresión de orden k (parámetro)
- $\rho_k$  : Coeficiente de autocorrelación de orden k (parámetro)
- $X_t$  : Componente estocástica dependiente estandarizada
- $\varepsilon_t$  : Componente estocástica independiente estandarizada
- $f(\varepsilon)$  : Densidad de probabilidad de  $\varepsilon$
- a,b,c : Parámetros de la función de distribución  $f(\varepsilon)$
- t : Tiempo en años

Los parámetros  $\alpha_k$ ,  $k=1.....m$  se estiman a partir de los estimados de los coeficientes de autocorrelación  $\rho_k$  de la variable dependiente  $X_t$ .

Asimismo YEVJEVICH, V. (1972). Op. Cit., indica que los parámetros constantes para el modelo son calculados a partir de las siguientes ecuaciones:

**Media**

$$M_y = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t \quad (3)$$

**Desviación**

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{t=1}^N (Y_t - M_y)^2} \quad (4)$$

**Variable estandarizada**

Realizando un despeje en la ecuación (1) se tiene:

$$X_t = \frac{Y_t - M_y}{S_y} \quad (5)$$

**Coefficiente de autocorrelación**

El coeficiente de autocorrelación para  $X_t$  se define como:

$$\rho_k(X) = \frac{\sum_{t=1}^{N-K} X_t X_{t+K} - \frac{1}{(N-K)} \left( \sum_{t=1}^{N-K} X_t \right) \left( \sum_{t=1}^{N-K} X_{t+K} \right)}{\left[ \sum_{t=1}^{N-K} X_t^2 - \frac{1}{(N-K)} \left( \sum_{t=1}^{N-K} X_t \right)^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{t=1}^{N-K} X_{t+K}^2 - \frac{1}{(N-K)} \left( \sum_{t=1}^{N-K} X_{t+K} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (6)$$

Dónde: K es el intervalo considerado, N es el tamaño total de la serie y  $\rho_k(x)$  toma un valor entre 1 y -1, es decir que:  $-1 \leq \rho_k \leq 1$  para  $k \neq 0$ .

SALAS, J. D. (1976). Op. Cit., Estas series se caracterizan por qué no presentan periodicidades y la componente estocástica

puede ser dependiente o independiente. Así, las series anuales de descargas generalmente son dependientes.

En la práctica el modelo de orden 1 ( $m=1$ ) es más comúnmente utilizado, sobre todo en series de corta longitud de registros.

### 2.2.17. Modelo Markoviano de Primer Orden

Para un modelo Markoviano de orden 1 es decir el máximo valor que puede tomar  $m$  es 1, cuando  $k=1$ , el modelo se escribe como:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + (1 - \alpha_1^2)^{1/2} \varepsilon_t \quad (7)$$

Dónde:

$\alpha_1$  : Coeficiente de Markov 1, que toma el primer valor de los coeficientes de autocorrelación:

$$\alpha_1 = \rho_1 \quad (8)$$

$\rho_1$  : Es el primer coeficiente de autocorrelación de  $X_t$  entonces el valor de la componente estocástica para el modelo Markoviano de orden 1 ( $\varepsilon_t$ ) es calculada por:

$$\varepsilon_t = \frac{X_t - \alpha_1 X_{t-1}}{[1 - \alpha_1^2]^{1/2}} \quad (9)$$

El cual debe probarse que sea independiente.

### 2.2.18. Modelo Markoviano de Segundo Orden

Para un modelo Markoviano de orden 2 es decir el máximo valor que puede tomar  $m$  es 2, cuando  $k=1, \dots, m$ . el modelo se escribe como:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + [1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_1]^{1/2} \varepsilon_t \quad (10)$$

Dónde:

$\alpha_1$  : Primer coeficiente de Markov 2, que es calculado mediante la siguiente ecuación:

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2} \quad (11)$$

$\alpha_2$  : Segundo coeficiente de Markov 2, que es calculado mediante la siguiente ecuación:

$$\alpha_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \quad (12)$$

Si este es el modelo adecuado, entonces el valor de la componente estocástica para el modelo markoviano de orden 2 ( $\varepsilon_t$ ) es calculada por:

$$\varepsilon_t = \frac{X_t - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2}}{[1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_1]^{1/2}} \quad (13)$$

El cual viene a ser una serie independiente.

### 2.2.19. Modelo Markoviano de Tercer Orden

Para un modelo Markoviano de orden 3 es decir el máximo valor que puede tomar  $m$  es 3, cuando  $k=1, \dots, m$ . el modelo se escribe como:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \alpha_3 X_{t-3} + \left[ 1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_1 - 2\alpha_1\alpha_3\rho_2 - 2\alpha_2\alpha_3\rho_1 \right]^{1/2} \varepsilon_t \quad (14)$$

Dónde:

$\alpha_1$  : Primer coeficiente de Markov 3, que es calculado mediante la siguiente ecuación:

$$\alpha_1 = \frac{(1 - \rho_1^2)(\rho_1 - \rho_3) - (1 - \rho_2)(\rho_1\rho_2 - \rho_3)}{(1 - \rho_2)(1 - 2\rho_1^2 + \rho_2)} \quad (15)$$

$\alpha_2$  : Segundo coeficiente de Markov 3, que es calculado mediante la siguiente ecuación:

$$\alpha_2 = \frac{(1 - \rho_2)(\rho_2 + \rho_2^2\rho_1^2 - \rho_1\rho_3)}{(1 - \rho_2)(1 - 2\rho_1^2 + \rho_2)} \quad (16)$$

$\alpha_3$  : Tercer coeficiente de Markov 3, que es calculado mediante la siguiente ecuación:

$$\alpha_3 = \frac{(\rho_1 - \rho_3)(\rho_1^2 - \rho_2) - (1 - \rho_2)(\rho_1\rho_2 - \rho_3)}{(1 - \rho_2)(1 - 2\rho_1^2 + \rho_2)} \quad (17)$$

Donde  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  son el primer, segundo y tercer coeficiente de autocorrelación de  $X_t$  respectivamente, entonces el valor de la componente estocástica para el modelo Markoviano de orden 3 ( $\varepsilon_t$ ) es calculada por:

$$\varepsilon_t = \frac{X_t - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2} - \alpha_3 X_{t-3}}{\left[ 1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_1 - 2\alpha_1\alpha_3\rho_2 - 2\alpha_2\alpha_3\rho_1 \right]^{1/2}} \quad (18)$$

El cual debe ser una serie independiente.

### 2.2.20. Pruebas del Modelo

Si la serie  $X_t$  es independiente, entonces la función de autocorrelación  $\rho_k^*$  es igual a cero para todos los valores de  $k$  diferentes de cero. Así mismo si  $X_t$  sigue un modelo Markoviano de orden  $n$ , entonces la función de autocorrelación de  $\rho_k^*$  tiene la forma siguiente.

$$\rho_k^* = \sum_{j=1}^m \alpha_j \rho_{k-j}^* \quad (19)$$

✓ **Para el modelo Markoviano de orden 1,  $\rho_k^*$  es:**

$$\rho_k^* = \alpha_1^k \quad (20)$$

Con  $\alpha_1 = \rho_1$  y  $\rho_1$  es calculado por Ec. (6)

✓ **Para el modelo Markoviano de orden 2,  $\rho_k^*$  es:**

$$\rho_k^* = \alpha_1 \rho_{k-1}^* + \alpha_2 \rho_{k-2}^* \quad (21)$$

Con  $\rho_1^* = \rho_1$  y  $\rho_2^* = \rho_2$  donde  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son calculados por Ec. (6)

✓ **Para el modelo Markoviano de orden 3,  $\rho_k^*$  es:**

$$\rho_k^* = \alpha_1 \rho_{k-1}^* + \alpha_2 \rho_{k-2}^* + \alpha_3 \rho_{k-3}^* \quad (22)$$

Con  $\rho_1^* = \rho_1$ ,  $\rho_2^* = \rho_2$  y  $\rho_3^* = \rho_3$  y donde  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\rho_3$  son calculados por Ec. (6)

### 2.2.21. Distribución de Probabilidad de la Variable Independiente

Para definir completamente el modelo estocástico específico, es necesario encontrar la distribución de probabilidad de la variable independiente  $\varepsilon_t$ . En el trabajo se mencionan las funciones de distribución normal, log-normal 1-3 (de 3 parámetros) La selección de la distribución se puede hacer gráficamente o analíticamente con una determinada prueba de bondad de ajuste.

En resumen la distribución de probabilidad al usarse en el modelo se determinará considerando lo siguiente:

- Si la serie  $X_t$  es independiente, hallar la distribución de  $\varepsilon_t$ .
- Si  $X_t$  es dependiente, determinar la distribución de probabilidad de la serie  $\varepsilon_t$  que debe ser calculada según el modelo escogido.
- Hacer el ajuste de la distribución de la variable independiente ya sea gráficamente o analíticamente.
- Escoger la distribución de probabilidad con un criterio de bondad de ajuste.

El ajuste de los valores de la distribución empírica, Normal y Log Normal de 3 parámetros, se puede realizar con el análisis de la distribución de frecuencias respectivas, utilizando los métodos de datos agrupados como de datos no agrupados,



dependiendo de la frecuencia muestral y de la longitud de los registros.

### 2.2.22. Función de Distribución y Estimación de Parámetros

#### ✓ Distribución Normal:

La función de distribución normal tiene la siguiente forma:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\varepsilon - \mu)^2\right] \quad (24)$$

Dónde:

$f(\varepsilon)$  : Función de densidad Normal.

$\varepsilon$  : Variable aleatoria Normal.

$\mu$  : Parámetro de posición, o media aritmética.

$\sigma$  : Parámetro de escala, o desviación estándar de  $\varepsilon$ .

$\pi$  : 3.14159....

Exp : Función exponencial con base de los logaritmos neperianos. (e=2,718281)

Los parámetros estimados  $\mu$  y  $\sigma$  se calculan mediante:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \quad (25)$$

$$\sigma = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i - \mu)^2 \right]^{1/2} \quad (26)$$

Donde N es el tamaño de la muestra

La Función de Distribución Normal Acumulada:

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\varepsilon} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\varepsilon - \mu)^2\right] d\varepsilon \quad (27)$$

**2.2.23. Distribución Log-Normal 3 Parámetros**

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{(\varepsilon - C)\sqrt{2\pi}\sigma_y} \text{Exp} \left[ -\frac{(\text{Ln}(\varepsilon - C) - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (28)$$

Dónde:

$f(\varepsilon)$  : Función de densidad

$C$  : Parámetro de posición límite inferior  $C \leq \varepsilon \leq +\infty$

$\mu_n$  : Parámetro de localización o media de  $\text{Ln}(\varepsilon - C)$ .

$\sigma_n$  : Parámetro de forma o desviación estándar de  $\text{Ln}(\varepsilon - C)$ .

$\text{Exp}$  : Función exponencial con base de los logaritmos neperianos. ( $e=2,718281$ )

Si se toma:  $t = (\varepsilon - C)/S$ ; para representarlo en forma resumida se tiene.

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{tS\sqrt{2\pi}\sigma_y} \text{Exp} \left[ -\frac{(\text{Ln } tS - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (29)$$

Dónde:

$0 \leq t \leq +\infty$

$C$  : Parámetro de posición: límite inferior

$\sigma_n$  : Parámetro de forma

$S$  : Parámetro de escala, positiva diferente de cero

**Función de Distribución Acumulada**

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{tS\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_0^t \text{Exp} \left[ -\frac{(\text{Ln } tS - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (30)$$

Estimación de parámetros:

$$\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Ln}(\varepsilon_i - C) \quad (31)$$

$$\sigma_n = \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{(\text{Ln}(\varepsilon_i - C) - \mu_n)^2}{N} \right) \right]^{1/2} \quad (32)$$

El parámetro de ubicación C se calculó por un proceso iterativo, como solución de la siguiente expresión resumida

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{(\varepsilon_i - C)} (\sigma_n^2 - \mu_n) + \sum_{i=1}^N \frac{\text{Ln}(\varepsilon_i - C)}{(\varepsilon_i - C)} = 0 \quad (33)$$

Donde N es el tamaño de muestra.

La función de distribución log-Normal de 3 parámetros ajustada se calculó en forma similar a la distribución normal.

#### 2.2.24. Pruebas de Bondad de Ajuste

Las pruebas de bondad de ajuste consisten, en comprobar gráficamente y/o estadísticamente si la frecuencia empírica de la serie analizada se ajusta a una determinada función de probabilidad.

Las pruebas estadísticas, tienen como objeto medir la certidumbre que se obtiene a hacer una hipótesis estadística sobre una población, es decir califica el hecho de suponer que una variable se distribuya según una cierta función de probabilidad. El ajuste estadístico que se emplea para estos casos son: prueba de Chi Cuadrado y prueba de Smirnov Kolmogorov.

### 2.2.25. Prueba de Smirnov – Kolmogorov

La prueba de Smirnov-Kolmogorov consiste en comparar las diferencias existentes entre la probabilidad de los datos agrupados y la probabilidad ajustada tomando la distancia más grande entre el valor observado y la recta del modelo vale decir.

$$D = \max |F(x) - P(x)| \quad (34)$$

Donde:

- D : Es el estadístico de Smirnov-Kolmogorov  
 F(x) : Probabilidad de la distribución de ajuste  
 P(x) : Probabilidad de los datos no agrupados, denominado también frecuencia acumulada.

El estadístico D tiene una distribución muestral. Si  $D_0$  es un valor crítico para un valor  $\alpha$  seleccionado, se tiene que:

$$P[\max |F(x) - P(x)| \geq D_0] = \alpha \quad (35)$$

Calcular para cada punto la distribución teórica F(x) y la distribución empírica P(x) y luego hacer las diferencias y obtener el valor máximo.

1. Obtención del valor crítico del estadístico  $D_0$  el cual se encuentra tabulada con diferentes valores del error tipo I para valores de N (tamaño muestral). YEVJEVICH, V. (1972).  
Op. Cit.

2. Comparar el valor estadístico  $D$  con el valor crítico  $D_0$  de las tablas, con los siguientes criterios de decisión:

Si:  $D < D_0 \Rightarrow$  Ajuste bueno.

Si:  $D \geq D_0 \Rightarrow$  El ajuste no es bueno a nivel significancia seleccionado.

### 2.2.26. Generación de Números Aleatorios

Para la generación de la variable aleatoria en el Intervalo  $[-1, 1]$  se utilizó la siguiente fórmula:

$$\varepsilon_i = ALEATORIO() * (b - a) + a \quad (36)$$

Dónde.

$ALEATORIO()$ : Función que genera el numero aleatorio.

$a$ : Es el límite inferior.

$b$ : Es el límite superior.

Para obtener números aleatorios normales con parámetros ajustados  $\mu_n$  y  $\sigma_n$ , bastara sumar y multiplicar dichos valores a  $N_i$  y  $N_{i+1}$  de la siguiente forma:

$$\varepsilon_i = \mu_n + \sigma_n(N_i) \quad (37)$$

$$\varepsilon_{i+1} = \mu_n + \sigma_n(N_{i+1}) \quad (38)$$

Donde;  $\varepsilon_i$  y  $\varepsilon_{i+1}$ , son dos números normales independientes con media  $\mu_n$  y desviación estándar  $\sigma_n$ .

Para generar números aleatorios log-normales, basta utilizar la siguiente transformación exponencial

$$LN_i = Exp(N_i) \quad (39)$$

Donde:

$N_i$  : Número aleatorio normal e independiente (0,1)

$LN_i$  : Número log-normal independiente (0,1)

### 2.2.27. Generación de Series

Para la generación de series hidrológicas se requiere del conocimiento del modelo estocástico así, como sus parámetros. En el presente caso la generación se basa en uno de los modelos Markovianos.

En las series históricas, por lo general son de periodos cortos y los eventos sean máximo ó mínimo pueden ser bastante diferente aún en series largas; por lo que el problema consiste en evaluar en que medida un evento de magnitud extrema es representativo del periodo histórico.

Para hacer cierta estimación de la probabilidad de ocurrencia de secuencias severas, se simula el proceso estocástico para generar varias secuencias. Si la generación se realiza correctamente, se deduce que las secuencias pueden ocurrir probablemente en el futuro, como puede ser una repetición de la serie histórica.

$$Y_t = M_y + S_y X_t$$

$$X_t = \sum_{K=1}^m \alpha_K X_{t-K} + \left( 1 - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_i \alpha_j \rho_{i-j} \right)^{1/2} \varepsilon_t$$

Donde:  $M_y$ ,  $S_y$ ,  $\rho_{i-j}$ ,  $\alpha_k$ , son los parámetros conocidos del modelo, así como se conoce la distribución de probabilidad  $f(\varepsilon)$  de la parte aleatoria de  $\varepsilon_t$  ya sea como función empírica o ajustada:

Los pasos a seguir son los siguientes son:

- a. Generar  $N+N'$  números aleatorios de la distribución  $f(\varepsilon)$
- b. Hacer  $X_t = \varepsilon_t$  para  $t = 1, \dots, m$ .
- c. Para  $t > m$  se genera  $X_t$  en función de los  $m$  valores precedentes  $X_{t-1}, \dots, X_{t-m}$  y de la variable aleatoria  $\varepsilon_t$
- d. Desechar los  $N'$  primeros valores de  $X_t$  y hacer  $X_t = X_{t+N'}$  par  $t = 1, \dots, N$ .
- e. Los valores de  $Y_t$  se encuentran a partir de los valores generados  $X_t$  indicados en d.

### 2.3. DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS

#### **Caudal:**

Es el volumen total del líquido expresado comunmente en metros cubicos por segundo que atraviesa una seccion perpendicular al lecho y al curso del agua durante un intervalo de tiempo determinado, ello puede estar en: horas, dias, años.

**Descarga:**

Descarga es el volumen del agua que pasa por un punto del río por una unidad de tiempo, constituye una descarga en ese punto.

**Estocástico:**

Es un concepto matemático que sirve para caracterizar la ocurrencia o no de un fenómeno; es una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente, el tiempo. Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y, entre ellas, pueden estar correlacionadas o no.

**Hidrología:**

Es la ciencia de la naturaleza que estudia el agua dentro del planeta Tierra, tanto en los aspectos de ocurrencia como acumulación y circulación desde el punto de vista cualitativo, cuantitativo y estadístico.

**Modelo:**

Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, como las descargas medias anuales en una cuenca, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.



**Río:**

Corriente de agua continua y más o menos caudalosa que va a desembocar en otra, en un lago o en el mar.

**Serie anual:**

Conjunto de descargas que se suceden unas a otras en un periodo de un año, recogidas en una estación de estudio y que están relacionadas entre sí en el tiempo.

**Serie histórica:**

Conjunto de descargas ocurridas en el tiempo y registradas en una estación meteorológica de estudio hidrológico.

**Serie sintética:**

Conjunto de descargas simuladas en el tiempo y que son generadas con la ayuda de un modelo apropiado en la computadora.

**Toma de decisiones:**

Proceso para la solución de problemas o situaciones, los cuales se resuelven jerarquizándolos para definir entre los involucrados la decisión más adecuada.

## 2.4. OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

CUADRO 1: Operacionalización de las variables de estudio

VARIABLE	INDICADOR	ÍNDICE
<b>Variable independiente</b> Tiempo	Periodo en años del 1970-2010	Años consecutivos desde 1970 hasta 2010
<b>Variable dependiente</b> Descargas de agua	Cantidad de descargas medias	m <sup>3</sup> /s

## CAPÍTULO III

### MATERIALES Y MÉTODOS

#### 3.1. MATERIALES

##### 3.1.1. Población

La población motivo de estudio, estuvo constituida por el conjunto de las descargas hidrológicas medias anuales que se han producido a través del tiempo, según lo registrado en la estación meteorológica Puente Carretera de la Provincia de El Collao y distrito de llave pertenecientes al Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología.

##### 3.1.2. Muestra

La muestra de estudio lo conformo el conjunto de datos de la serie histórica de las descargas hidrológicas medias anuales producidas en el tiempo y registradas en el periodo de 1970 al 2010 en el Río llave, para dicho proceso se empleó el muestreo no probabilístico; se eligió este tipo de muestreo por la disponibilidad de la serie de datos. Los datos de la muestra se presentan en el siguiente cuadro:

**CUADRO 2: Descargas Medias Anuales Río llave (1970-2010)**

Años (t)	$Y_t$	Años (t)	$Y_t$	Años (t)	$Y_t$	Años (t)	$Y_t$
1970	32.38	1980	25.36	1990	14.35	2000	32.04
1971	40.93	1981	36.78	1991	27.96	2001	82.86
1972	53.46	1982	30.43	1992	9.15	2002	37.42
1973	42.58	1983	10.99	1993	19.66	2003	19.49
1974	71.42	1984	66.76	1994	32.94	2004	32.74
1975	45.56	1985	61.55	1995	14.31	2005	22.65
1976	50.70	1986	89.50	1996	23.19	2006	64.89
1977	30.46	1987	38.18	1997	46.11	2007	24.95
1978	42.97	1988	36.77	1998	9.51	2008	29.58
1979	26.11	1989	36.25	1999	30.53	2009	20.46
						2010	31.95

Fuente: Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología (SENAMHI)

## 3.2. MÉTODOS

### 3.2.1. Métodos de Recolección de Datos

#### a. Fuente de información

Los datos de información tienen como fuente al Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología (SENAMHI).

### 3.2.2. Métodos de Tratamiento de Datos

#### a. Preparación de datos

Se empleó una preparación computarizada, ya que se contó con registros de datos correspondientes a las descargas hidrológicas medias anuales en el Río llave, todo ello se

consiguió empleando diferente software como: MS-Excel, SPSS y Minitab.

#### **b. Técnica estadística a usar**

De acuerdo a los objetivos se emplearon las técnicas estadísticas como: análisis y prueba de hipótesis para contrastar la validez del Modelo Markoviano frente a la serie de información hidrológica, así mismo como también medidas descriptivas y gráficos estadísticos.

#### **c. Tipo de análisis**

En la presente tesis se empleó el análisis cuantitativo que consistió en explicar e interpretar los datos desde los cuadros y gráficos, porque tiene un sustento estadístico que permitió formular juicios valorativos apoyados en el resultado de la investigación. Además respondió en forma ordenada y secuencial, las interrogantes planteadas en el estudio. Este análisis permitió afirmar o descartar la inferencia, de igual manera el análisis de los resultados, por lo que fue factible identificar las posibles causas del problema y las soluciones más viables.

#### **d. Presentación de datos**

La información recabada se presentó de manera organizada en tablas estadísticas unidimensionales, gráficos de diagramas de dispersión y correlogramas que permitieron

mostrar la evolución de los datos en el tiempo, ellos reflejaron los datos históricos como los datos simulados.

#### **e. Diseño de prueba de hipótesis**

Para el diseño de la prueba de hipótesis se tomó las pruebas de bondad de ajuste, pruebas de forma de correlograma, pruebas de independencia de la variable residual, prueba de Smirnov - Kolmogorov, así como la verificación del modelo.

### **3.2.3. Material Experimental**

#### **a. El registro de datos**

El registro de datos, respondió al conjunto de datos de corte longitudinal que se adecuó para el análisis estocástico para series de tiempo en datos hidrológicos, ya que se buscó establecer el mejor modelo que describa la serie de datos en el tiempo.

#### **b. Ubicación de la cuenca del Río llave - Puno**

El río llave se encuentra situada en los paralelos  $15^{\circ} 50'$  y  $17^{\circ}08'$  de latitud y los meridianos  $69^{\circ}27'$  y  $70^{\circ}21'$  de longitud oeste. Por el norte limita con la cuenca del río Illpa y el Lago Titicaca, por el sur con la cuenca del río Maure (Perú-Bolivia), por el este con las cuencas del río Zapatilla y Desaguadero, y por el oeste con la cuenca del río Tambo.

### c. Ubicación de la estación puente carretera

La ubicación de la estación hidrológica puente carretera del Río llave es la siguiente:

- Río : llave
- Longitud Oeste : 70°21'
- Distrito : llave
- Provincia : El Collao
- Departamento : Puno

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### 4.1. La Información de las descargas hidrológicas

La serie histórica de las descargas hidrológicas medias anuales del Río llave, periodo 1970 – 2010, fue la información básica para realizar el modelamiento estocástico, los que fueron registrados por el Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología (SENAMHI) Puno, los datos se presentan en el siguiente cuadro:



**CUADRO 3: Serie Histórica de Descargas Hidrológicas  
(m<sup>3</sup>/s) Río Ilave**

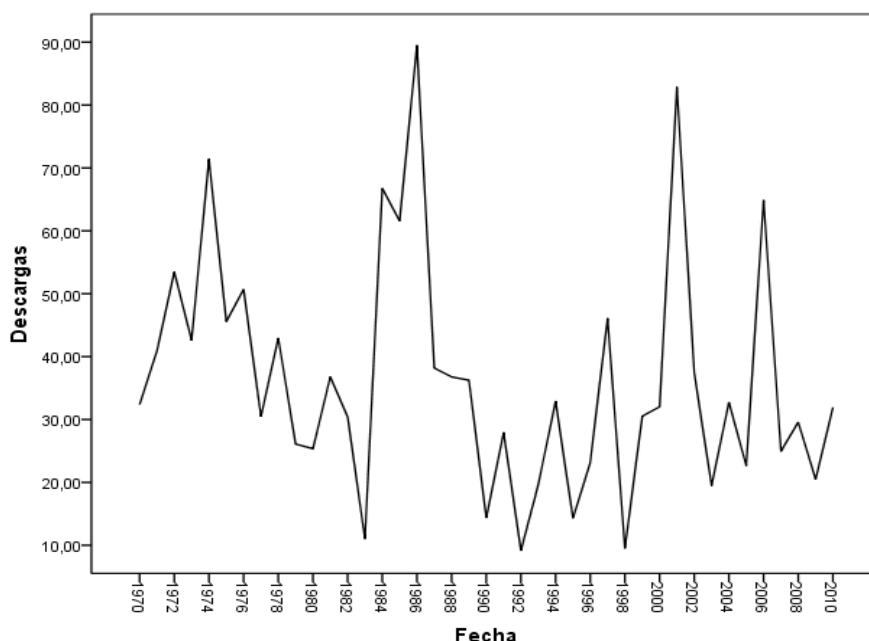
Nº	Años	Y <sub>t</sub>	Nº	Años	Y <sub>t</sub>
1	1970	32.38	22	1991	27.96
2	1971	40.93	23	1992	9.15
3	1972	53.46	24	1993	19.66
4	1973	42.58	25	1994	32.94
5	1974	71.42	26	1995	14.31
6	1975	45.56	27	1996	23.19
7	1976	50.70	28	1997	46.11
8	1977	30.46	29	1998	9.51
9	1978	42.97	30	1999	30.53
10	1979	26.11	31	2000	32.04
11	1980	25.36	32	2001	82.86
12	1981	36.78	33	2002	37.42
13	1982	30.43	34	2003	19.49
14	1983	10.99	35	2004	32.74
15	1984	66.76	36	2005	22.65
16	1985	61.55	37	2006	64.89
17	1986	89.50	38	2007	24.95
18	1987	38.18	39	2008	29.58
19	1988	36.77	40	2009	20.46
20	1989	36.25	41	2010	31.95
21	1990	14.35			

Fuente: Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología (SENAMHI)

Así mismo el comportamiento de la serie histórica a través del tiempo se aprecia en el siguiente gráfico:

**GRAFICO 1: Descargas Hidrológicas Medias anuales, Rio llave 1970-2010**

(Metros cúbicos por segundo)



Fuente: Elaborado con los datos del cuadro N° 03

**4.2. Modelamiento estocástico**

Para el modelamiento estocástico de la serie histórica se procedió, a utilizar las cadenas de Markov I, II y III detalladas en la parte del marco teórico, ello para determinar si las descargas medias anuales se ajustan a un Modelo Markoviano, los estadísticos de la serie fueron calculados por las ecuaciones (3) y (4):

Media

$$M_y = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t$$

Desviación

$$S_y = \left[ \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (Y_t - M_y)^2 \right]^{1/2}$$

Dando como resultado los datos del siguiente cuadro:

**CUADRO 4: Estadísticos descriptivos de la serie histórica Río llave**

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típ.
Descargas de la serie hidrológica	41	9,15	89,50	36,4849	18,89572
N válido (según lista)	41				

Fuente: Elaborado con los datos del cuadro N° 03

#### 4.3. Estandarización de la serie histórica

Una vez calculado los estadísticos de la serie anual del río llave, se realizó la estandarización de la serie histórica, lo cual sirvió para encontrar los modelos autorregresivos.

Estos datos estandarizados son los que conformaron la componente estacionaria  $X_t$  de la serie de descargas hidrológicas medias anuales en el Río llave, lo cual se calculó con la ecuación (5):

$$X_t = \frac{Y_t - M_y}{S_y}$$

La estandarización de la serie se muestra en el siguiente cuadro:

**CUADRO 5: Componente estocástica estandarizada de la Serie Histórica**

Nº	Años	Xt	Nº	Años	Xt
1	1970	-0.217	22	1991	-0.451
2	1971	0.235	23	1992	-1.447
3	1972	0.898	24	1993	-0.890
4	1973	0.323	25	1994	-0.188
5	1974	1.849	26	1995	-1.174
6	1975	0.480	27	1996	-0.704
7	1976	0.752	28	1997	0.509
8	1977	-0.319	29	1998	-1.428
9	1978	0.343	30	1999	-0.315
10	1979	-0.549	31	2000	-0.235
11	1980	-0.589	32	2001	2.454
12	1981	0.016	33	2002	0.049
13	1982	-0.320	34	2003	-0.899
14	1983	-1.349	35	2004	-0.198
15	1984	1.602	36	2005	-0.732
16	1985	1.326	37	2006	1.503
17	1986	2.806	38	2007	-0.610
18	1987	0.090	39	2008	-0.365
19	1988	0.015	40	2009	-0.848
20	1989	-0.012	41	2010	-0.240
21	1990	-1.171			

Fuente: Elaborado con los datos del cuadro N° 03

#### 4.4. Cálculo de los coeficientes de autocorrelación

El cálculo de los coeficientes de autocorrelación, se realizó mediante el análisis de desfases de 1,2,3,...,12; ya que se trata de una serie anual ( $0.3 \cdot n$ ) aunque pudiendo realizarse hasta el tamaño de muestra, pero

esto pierde importancia (Salas 1985). En el siguiente cuadro se muestran los coeficientes de autocorrelación, donde k es el número de desfases  $\rho_k(x)$ . Ello se calculó mediante la ecuación (6):

$$\rho_k(X) = \frac{\sum_{t=1}^{N-K} X_t X_{t+k} - \frac{1}{(N-K)} \left( \sum_{t=1}^{N-K} X_t \right) \left( \sum_{t=1}^{N-K} X_{t+k} \right)}{\left[ \sum_{t=1}^{N-K} X_t^2 - \frac{1}{(N-K)} \left( \sum_{t=1}^{N-K} X_t \right)^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{t=1}^{N-K} X_{t+k}^2 - \frac{1}{(N-K)} \left( \sum_{t=1}^{N-K} X_{t+k} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

**CUADRO 6: Coeficientes de autocorrelación de la componente Estocástica**

Retardo	Autocorrelación	Típ. Error <sup>a</sup>	Estadístico de Box-Ljung		
			Valor	Gl	Sig. <sup>b</sup>
1	0,203	0,151	1,814	1	0,178
2	0,191	0,149	3,470	2	0,176
3	-0,089	0,147	3,840	3	0,279
4	-0,041	0,145	3,921	4	0,417
5	0,008	0,143	3,924	5	0,560
6	-0,259	0,141	7,299	6	0,294
7	-0,155	0,139	8,538	7	0,288
8	-0,166	0,137	10,003	8	0,265
9	-0,137	0,135	11,035	9	0,273
10	0,098	0,133	11,579	10	0,314
11	0,037	0,130	11,659	11	0,390
12	0,164	0,128	13,294	12	0,348

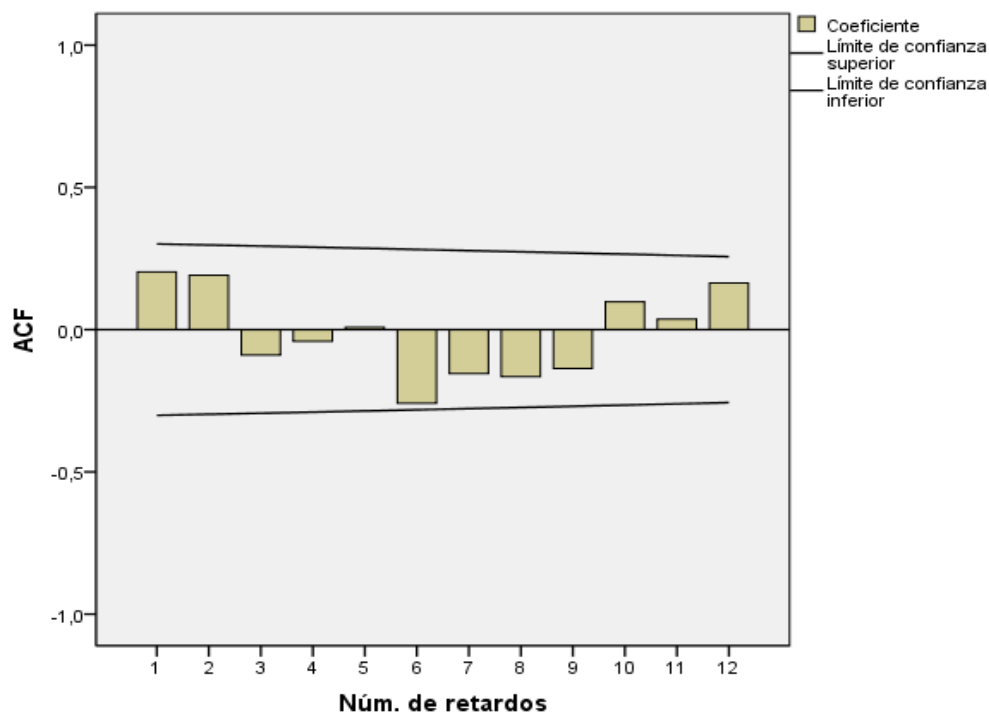
a. El proceso subyacente asumido es la independencia (ruido blanco).

b. Basado en la aproximación chi cuadrado asintótica

Los coeficientes de autocorrelación se emplearon para determinar los coeficientes de los Modelos autorregresivos o Markovianos, según el orden I, II y III.

De forma similar se puede apreciar el gráfico del correlograma de la componente estocástica, ello en el siguiente gráfico:

**GRAFICO 2: Autocorrelación de la componente Estocástica de descargas medias anuales del Río Ilave, 1970-2010**



Fuente: Elaborado con los datos del cuadro N° 06

Como se puede observar en el gráfico N° 02, las barras de función de autocorrelación se encuentran dentro de los límites de confianza garantizando la proximidad a la serie histórica de los datos, en el cual existen al principio una serie de valores no nulos que se van amortiguando a lo largo del tiempo.

#### 4.5. Coeficientes de los modelos autorregresivos

Con los coeficientes de autocorrelación, se obtuvieron los coeficientes autorregresivos de los Modelos Markov I, II y III, donde se calculó el coeficiente de Markov I con la ecuación (8), los coeficientes de Markov

II con las ecuaciones (11) y (12) y los coeficientes de Markov III con las ecuaciones (15), (16) y (17) todas ellas fueron descritas en el marco teórico.

En el siguiente cuadro, se muestran los coeficientes para los modelos Markov I, Markov II y Markov III.

**CUADRO 7: Coeficientes de los Modelos Markovianos**

Coeficiente	Markov I	Markov II	Markov III
$\alpha_1$	0.203	0.171	0.170
$\alpha_2$		0.156	0.190
$\alpha_3$			-0.164

**4.6. Los Modelos Markovianos**

Luego de la estimación de los coeficientes que corresponden a cada Modelo Markoviano, se procedió a escribir los modelos, con los coeficientes calculados, el Modelo de Markov I con la ecuación (7), el Modelo Markov II con la ecuación (10) y el Modelo de Markov III con la ecuación (14).

Luego los modelos autorregresivos fueron definidos como se muestra a continuación:

**Modelo Markoviano de Primer Orden:**

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + (1 - \alpha_1^2)^{1/2} \varepsilon_t \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$X_t = 0.203X_{t-1} + 0.97917874\varepsilon_t$$

**Modelo Markoviano de Segundo Orden:**

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + [1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_1]^{1/2} \varepsilon_t \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$X_t = 0.171285504X_{t-1} + 0.15622904X_{t-2} + 0.96715526\varepsilon_t$$

**Modelo Markoviano de Tercer Orden:**

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \alpha_3 X_{t-3} + [1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_1 - 2\alpha_1\alpha_3\rho_2 - 2\alpha_2\alpha_3\rho_1]^{1/2} \varepsilon_t \quad (14)$$

$$X_t = 0.19691144X_{t-1} + 0.18994567X_{t-2} - 0.16402799X_{t-3} + 0.95291325\varepsilon_t$$

**4.7. Calculo de errores de los modelos autorregresivos**

Una vez obtenido los Modelos autorregresivos o Markovianos se procedió a estimar los errores para cada Modelo Markoviano.

Para el Modelo de Markov I con la ecuación (9):

$$\varepsilon_t = \frac{X_t - \alpha_1 X_{t-1}}{[1 - \alpha_1^2]^{1/2}}$$

Para el Modelo de Markov II con la ecuación (13):

$$\varepsilon_t = \frac{X_t - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2}}{[1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_1]^{1/2}}$$

Y para el Modelo de Markov III con la ecuación (18):

$$\varepsilon_t = \frac{X_t - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2} - \alpha_3 X_{t-3}}{[1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_1 - 2\alpha_1\alpha_3\rho_2 - 2\alpha_2\alpha_3\rho_1]^{1/2}}$$

En el siguiente cuadro se observan los errores de cada Modelo Markoviano respectivamente.



**CUADRO 8: Coeficientes de los Modelos Markovianos**

t	X <sub>t</sub>	Markov I	Markov II	Markov III	t	X <sub>t</sub>	Markov I	Markov II	Markov III
1	-0.217				22	-0.451	-0.2178	-0.2573	-0.2580
2	0.235	0.2850			23	-1.447	-1.3843	-1.2274	-1.1999
3	0.898	0.8684	0.9218		24	-0.890	-0.6089	-0.5916	-0.7830
4	0.323	0.1437	0.1373	0.0940	25	-0.188	-0.0075	0.1964	0.1714
5	1.849	1.8214	1.7097	1.7344	26	-1.174	-1.1600	-1.0370	-1.2629
6	0.480	0.1069	0.1173	0.2625	27	-0.704	-0.4756	-0.4900	-0.6414
7	0.752	0.6685	0.3944	0.3883	28	0.509	0.6658	0.8400	0.8567
8	-0.319	-0.4817	-0.5402	-0.2450	29	-1.428	-1.5639	-1.4528	-1.6418
9	0.343	0.4164	0.2897	0.3476	30	-0.315	-0.0257	-0.1553	-0.2968
10	-0.549	-0.6318	-0.5768	-0.4418	31	-0.235	-0.1747	0.0430	0.1809
11	-0.589	-0.4877	-0.5672	-0.6399	32	2.454	2.5549	2.6294	2.4206
12	0.016	0.1384	0.2092	0.2887	33	0.049	-0.4587	-0.3453	-0.3915
13	-0.320	-0.3301	-0.2387	-0.3139	34	-0.899	-0.9283	-1.3339	-1.4736
14	-1.349	-1.3113	-1.3407	-1.4549	35	-0.198	-0.0158	-0.0537	0.3631
15	1.602	1.9157	1.9463	1.9773	36	-0.732	-0.7065	-0.5768	-0.5421
16	1.326	1.0221	1.3052	1.3122	37	1.503	1.6867	1.7152	1.5837
17	2.806	2.5908	2.4082	2.1444	38	-0.610	-0.9346	-0.7783	-0.7919
18	0.090	-0.4898	-0.6169	-0.3926	39	-0.365	-0.2463	-0.5119	-0.6960
19	0.015	-0.0033	-0.4530	-0.3297	40	-0.848	-0.7904	-0.7138	-0.4420
20	-0.012	-0.0154	-0.0296	0.4472	41	-0.240	-0.0693	-0.0393	-0.1320
21	-1.171	-1.1934	-1.2109	-1.2074					

**4.8. Prueba de los Modelos Markovianos**

Para cada Modelo Markoviano se calculó la autocorrelación  $\rho_k^*$ , ello permitió verificar que la serie  $X_t$  fue dependiente o independiente para todos los valores de k. Las funciones de autocorrelación para los

modelos fueron calculados con las ecuaciones (20, 21 y 22) detallados en el marco teórico.

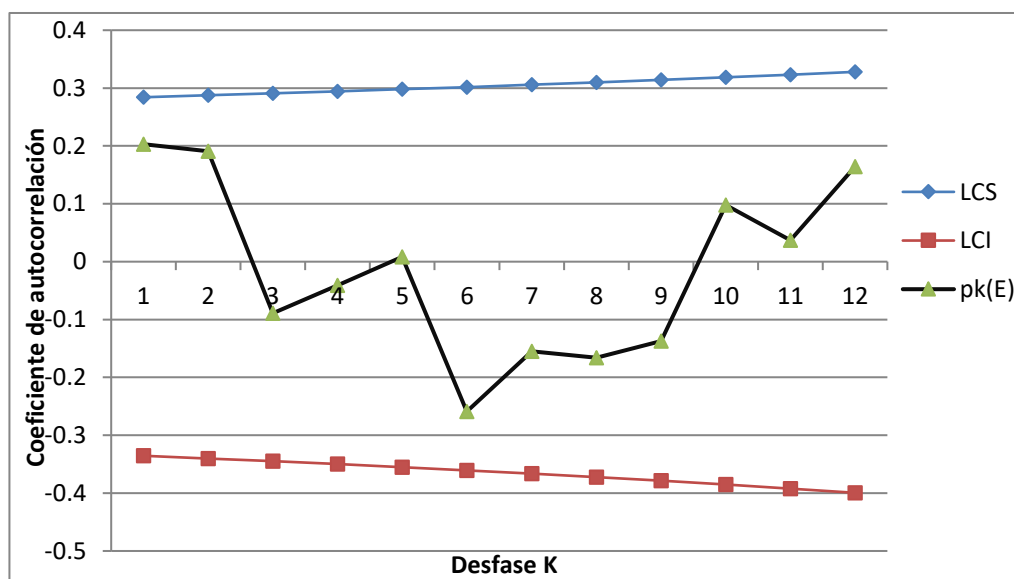
En el siguiente cuadro se aprecian las autocorrelaciones para los Modelos Markovianos del orden 1, 2 y 3, así como los límites de confianza calculados con la ecuación (23):

**CUADRO 9: Autocorrelaciones para los Modelos Markov I, II y III**

K	$\rho_k(X_t)$	Markov	Markov	Markov	Límite de confianza	
		I	II	III	95%	
		$\rho_k(1)$	$\rho_k(2)$	$\rho_k(3)$	LCS	LCI
1	0.203	0.2030	0.2030	0.2030	0.28416	-0.33544
2	0.191	0.0412	0.1910	0.1910	0.28743	-0.34006
3	-0.089	0.0084	0.0643	-0.0890	0.29081	-0.34486
4	-0.041	0.0017	0.0408	-0.0121	0.29432	-0.34988
5	0.008	0.0003	0.0170	-0.0503	0.29796	-0.35510
6	-0.259	0.0001	0.0093	0.0037	0.30175	-0.36057
7	-0.155	0.0000	0.0042	-0.0069	0.30568	-0.36629
8	-0.166	0.0000	0.0022	0.0078	0.30978	-0.37228
9	-0.137	0.0000	0.0010	-0.0006	0.31404	-0.37856
10	0.098	0.0000	0.0005	0.0025	0.31850	-0.38516
11	0.037	0.0000	0.0002	-0.0010	0.32315	-0.39212
12	0.164	0.0000	0.0001	0.0004	0.32802	-0.39944

De forma similar podemos apreciar los correlogramas para cada uno de los modelos y en forma conjunta:

**GRAFICO 3: Correlograma de la Componente Estocástica de descargas medias anuales del Rio llave, 1970-2010**

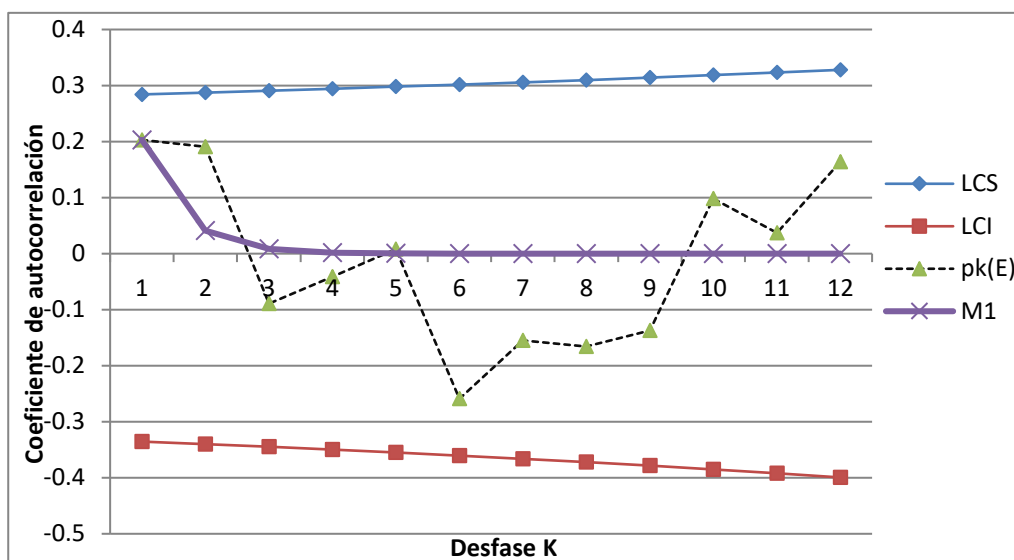


Fuente: Elaborado con los datos del cuadro N° 09

El gráfico N° 03, muestra el comportamiento de la componente estocástica de descargas medias anuales del Río llave en el periodo 1970 al 2010, con un desfase de 12, por tratarse de datos anuales, lo cual sirvió para comparar y analizar frente a la serie histórica.

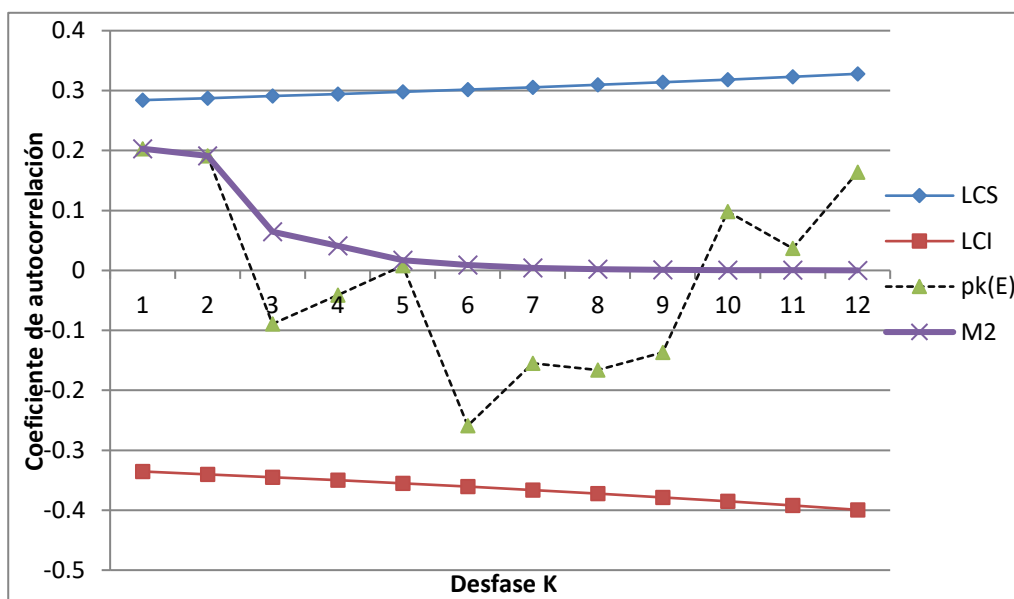
Así mismo, en el gráfico N° 04 se observa que el Modelo Markov-1, se encuentra muy alejado de la componente estocástica.

**GRAFICO 4: Correlograma del Modelo Markov-1 de Descargas medias anuales del Rio Ilave, 1970-2010**



Fuente: Elaborado con los datos del cuadro N° 09

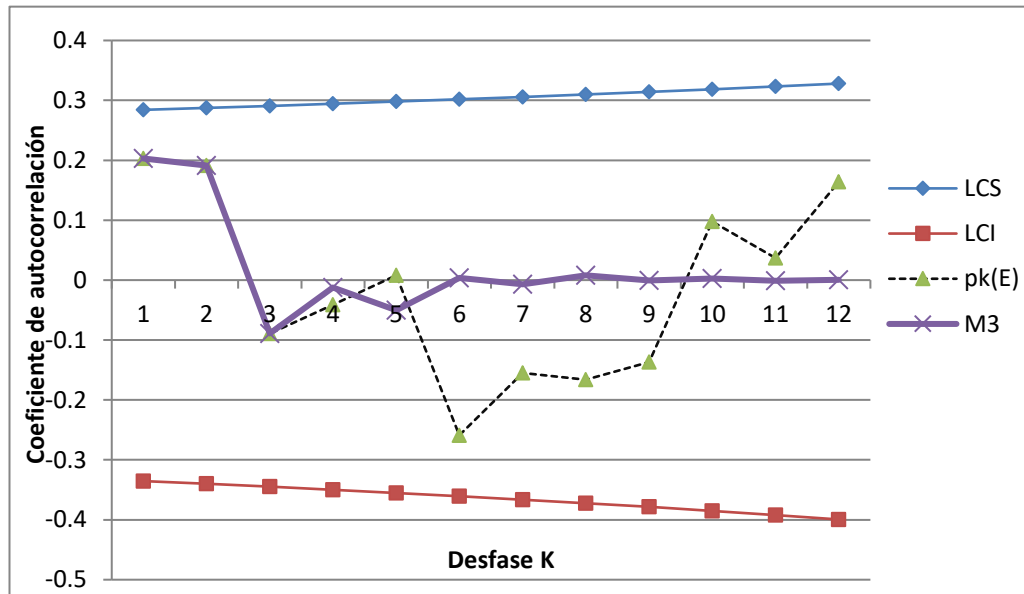
**GRAFICO 5: Correlograma del Modelo Markov-2 de Descargas medias anuales del Rio Ilave, 1970-2010**



Fuente: Elaborado con los datos del cuadro N° 09

En el gráfico N° 05 se observa que el Modelo Markov-2, también se encuentra alejado de la componente estocástica.

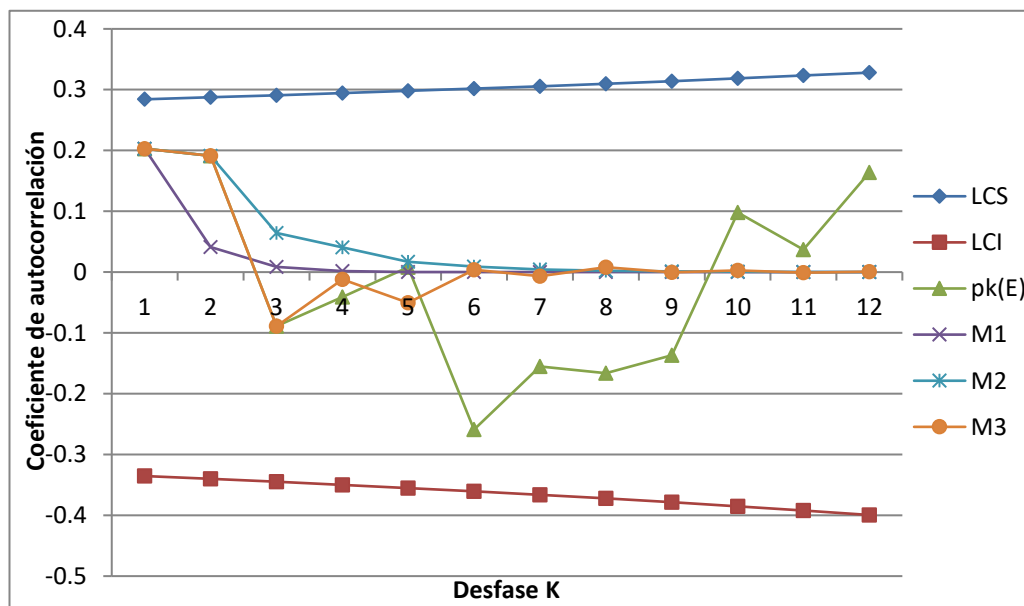
**GRAFICO 6: Correlograma del Modelo Markov-3 de Descargas medias anuales del Rio Ilave, 1970-2010**



Fuente: Elaborado con los datos del cuadro N° 09

En el gráfico N° 06 se observa que a diferencia de los otros modelos, el Modelo Markov-3 tuvo mayor aproximación al correlograma estimado por la componente estocástica ( $X_t$ ).

**GRAFICO 7: Correlograma de los Modelos Markovianos de Descargas medias anuales del Rio Ilave, 1970-2010**



Fuente: Elaborado con los datos del cuadro N° 09

Mediante el análisis de los correlogramas se concluyó que el Modelo Markoviano de orden 3 es el mejor para pronosticar las descargas hidrológicas medias anuales del Río Ilave.

#### 4.9. Cálculo de correlogramas del error

Para el cálculo de correlogramas del error o residuales se procedió a desfasar en los errores, y luego se calculó con las ecuaciones citadas en el marco teórico, tanto para los modelos I, II, y III, respectivamente.

**CUADRO 10: Autocorrelaciones para Errores del Modelo Markov I**

Retardo	Autocorrelación	Típ. Error <sup>a</sup>	Estadístico de Box-Ljung		
			Valor	GI	Sig. <sup>b</sup>
1	-0,030	0,152	0,040	1	0,842
2	0,190	0,150	1,633	2	0,442
3	-0,128	0,148	2,375	3	0,498
4	-0,016	0,146	2,387	4	0,665
5	0,071	0,144	2,629	5	0,757
6	-0,245	0,142	5,606	6	0,469
7	-0,081	0,140	5,936	7	0,547
8	-0,115	0,138	6,627	8	0,577
9	-0,137	0,136	7,648	9	0,570
10	0,122	0,134	8,480	10	0,582
11	-0,014	0,131	8,492	11	0,669
12	0,139	0,129	9,645	12	0,647

**CUADRO 11: Autocorrelaciones para Errores del Modelo Markov II**

Retardo	Autocorrelación	Típ. Error <sup>a</sup>	Estadístico de Box-Ljung		
			Valor	GI	Sig. <sup>b</sup>
1	0,021	0,154	0,018	1	0,893
2	0,046	0,152	0,108	2	0,947
3	-0,168	0,150	1,365	3	0,714
4	-0,010	0,148	1,369	4	0,850
5	0,087	0,146	1,722	5	0,886
6	-0,229	0,144	4,259	6	0,642
7	-0,092	0,141	4,684	7	0,699
8	-0,104	0,139	5,236	8	0,732
9	-0,121	0,137	6,015	9	0,738
10	0,110	0,135	6,680	10	0,755
11	0,000	0,132	6,680	11	0,824
12	0,156	0,130	8,128	12	0,775

**CUADRO 12: Autocorrelaciones para Errores del Modelo Markov III**

Retardo	Autocorrelación	Típ. Error <sup>a</sup>	Estadístico de Box-Ljung		
			Valor	GI	Sig. <sup>b</sup>
1	0,152	0,156	0,010	1	0,922
2	0,186	0,154	0,027	2	0,987
3	-0,072	0,152	0,250	3	0,969
4	-0,011	0,150	0,256	4	0,992
5	0,012	0,147	0,980	5	0,964
6	-0,283	0,145	4,785	6	0,572
7	-0,123	0,143	4,983	7	0,662
8	-0,147	0,140	5,262	8	0,729
9	-0,151	0,138	6,464	9	0,693
10	0,126	0,136	7,325	10	0,694
11	0,000	0,133	7,325	11	0,772
12	0,138	0,131	8,432	12	0,750

De los correlogramas calculados en los cuadros 10, 11 y 12 se observa que el correlograma del Modelo Markov III tuvo mayor aproximación al correlograma estimado por la componente estocástica ( $X_t$ ); también se observa en el cuadro N° 13, el correlograma de los residuos, se encuentran dentro de los límites de confianza. Siguiendo la metodología de la prueba de independencia de la variable residual, descrito a continuación:



- **Para la serie residual Markov I**

Número de valores calculados del correlograma = 12

Número mínimo de valores que caen dentro de los L.C. =11

Número de valores que caen dentro de los L.C. =12

- **Para la serie residual Markov II**

Número de valores calculados del correlograma = 12

Número mínimo de valores que caen dentro de los L.C. =11

Número de valores que caen dentro de los L.C. =12

- **Para la serie residual Markov III**

Número de valores calculados del correlograma = 12

Número mínimo de valores que caen dentro de los L.C. =11

Número de valores que caen dentro de los L.C. =12

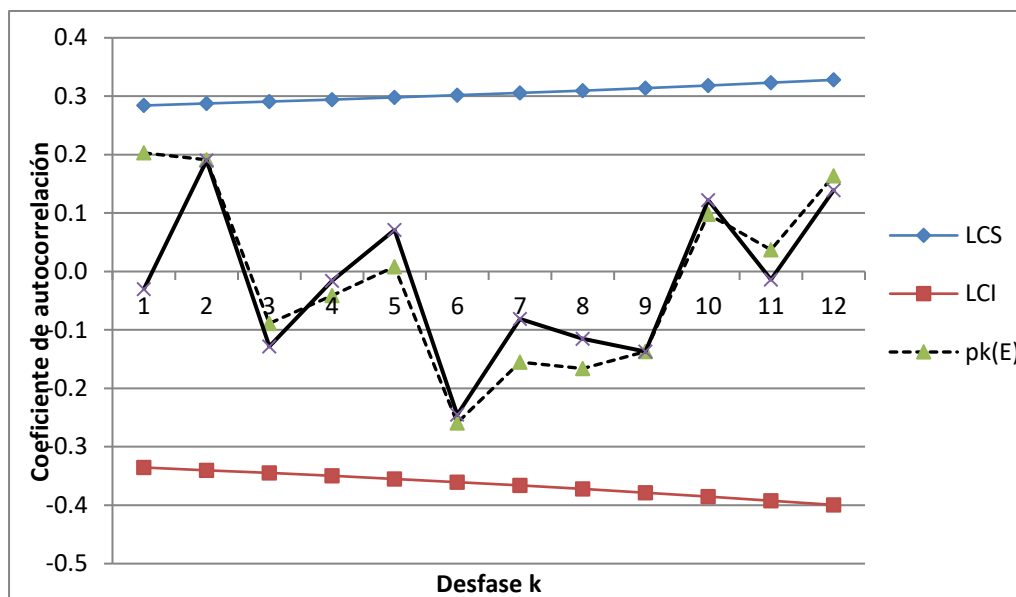
Dónde: L.C. representa el límite de confianza.

**CUADRO 13: Autocorrelaciones Residuales para los Modelos Markovianos**

K	$\rho_K(X_t)$	Markov	Markov	Markov	Límite de confianza	
		I	II	III	95%	
		$\rho_K(1)$	$\rho_K(2)$	$\rho_K(3)$	LCS	LCI
1	0,203	-0,030	0,021	0,152	0,284	-0,335
2	0,191	0,190	0,046	0,186	0,287	-0,340
3	-0,089	-0,128	-0,168	-0,072	0,291	-0,345
4	-0,041	-0,016	-0,010	-0,011	0,294	-0,350
5	0,008	0,071	0,087	0,012	0,298	-0,355
6	-0,259	-0,245	-0,229	-0,283	0,302	-0,361
7	-0,155	-0,081	-0,092	-0,123	0,306	-0,366
8	-0,166	-0,115	-0,104	-0,147	0,310	-0,372
9	-0,137	-0,137	-0,121	-0,151	0,314	-0,379
10	0,098	0,122	0,110	0,126	0,318	-0,385
11	0,037	-0,014	0,000	0,000	0,323	-0,392
12	0,164	0,139	0,156	0,138	0,328	-0,399

En los siguientes gráficos se observan estas diferencias y aproximaciones de los correlogramas para los residuos Markovianos y la correspondiente componente estocástica de la serie anual.

**GRAFICO 8: Correlograma Residual del Modelo Markov-1 de descargas medias anuales del Rio llave, 1970-2010**

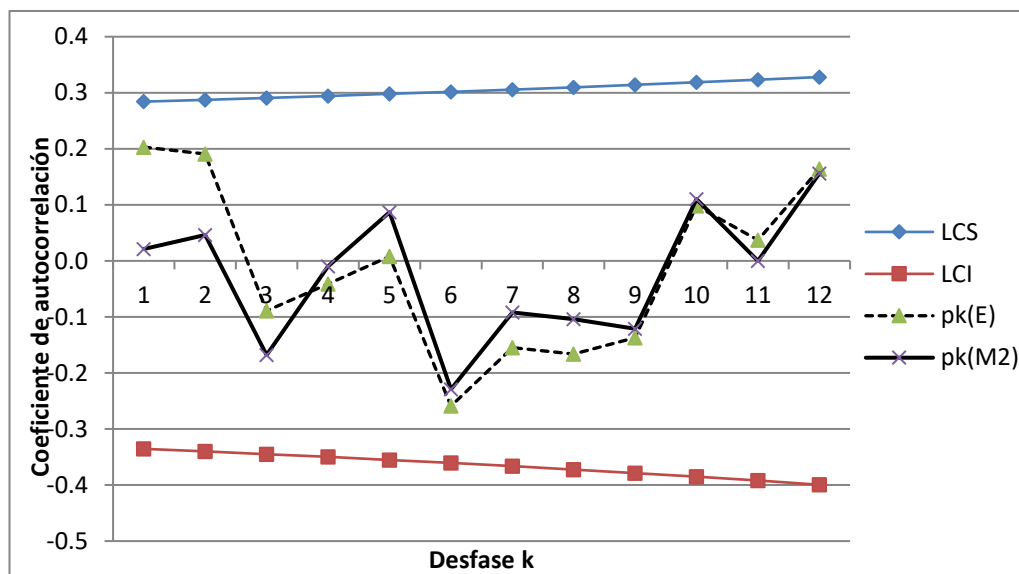


Fuente: Elaborado con los datos del cuadro N°13

En el gráfico N° 08, se observan que las autocorrelaciones del residuo del Modelo Markov-1, se encuentran alejados del modelo de la componente estocástica de la serie de datos.

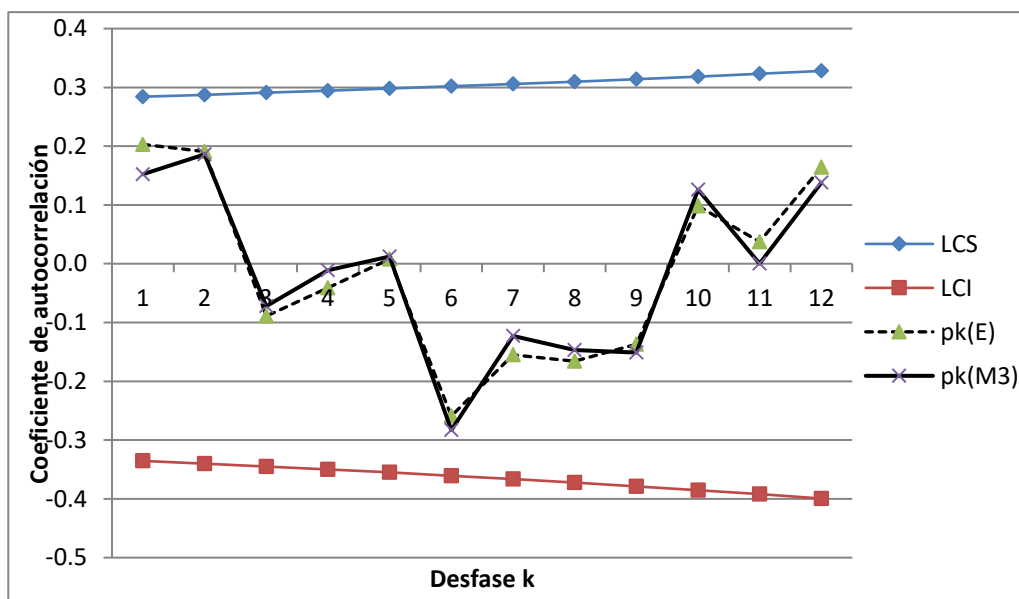
De forma muy similar en el gráfico N° 09 así como en el caso anterior las autocorrelaciones del residuo del Modelo Markov-2, se encuentran alejadas del modelo de la componente estocástica de la serie de datos, esta vez fue mucho mayor que los residuales del Modelo Markov-1.

**GRAFICO 9: Correlograma Residual del Modelo Markov-2 de Descargas medias anuales del Rio Ilave, 1970-2010**



Fuente: Elaborado con los datos del cuadro N° 13

**GRAFICO 10: Correlograma Residual del Modelo Markov-3 de Descargas medias anuales del Rio Ilave, 1970-2010**



Fuente: Elaborado con los datos del cuadro N° 13

Como se observa en el gráfico anterior las autocorrelaciones de los residuos del Modelo Markov-3, se asemeja bastante y muestra una pequeña diferencia frente al modelo de la componente estocástica de la serie de datos.

#### 4.10. Elección del modelo adecuado

En esta sección se eligió el modelo más adecuado y el más óptimo para que represente la realidad de los caudales del Río Ilave y así realice los futuros pronósticos y para ello se planteó la siguiente hipótesis:

1. Planteamiento de las hipótesis de prueba

$H_0$  :  $\rho_{\kappa(i)}$  es independiente.

$H_a$ :  $\rho_{\kappa(i)}$  no es independiente

2. Nivel de significancia para la prueba

$\alpha = 0.05$  (nivel significativo)

3. Cálculo de los correlogramas para los residuos

4. Cálculo de los límites de confianza

5. Criterio de decisión

Si el 95% de los valores calculados para el correlograma, o más caen dentro de los límites de confianza, entonces se acepta la hipótesis nula.

Si menos del 95% de los valores calculados para el correlograma, caen dentro de los límites de confianza, entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alterna. En esta situación se debe optar por otro orden del Modelo Markoviano.

En los gráficos 08, 09 y 10 se observó que los errores no salen de los límites de confianza, ya que los resultados son similares, para lo cual

se realizó una prueba de análisis de varianza entre los coeficientes encontrados:

**CUADRO 14: Cuadro de Análisis de Varianza (ANOVA)**

	Suma de cuadrados	GI	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	0,001	3	0,000	0,022	0,995
Intra-grupos	0,836	44	0,019		
Total	0,838	47			

En el cuadro N° 14, se observa que en el análisis de varianza, no existe diferencia significativa en cuanto al promedio de datos, pero sí una ligera diferencia en la varianza de los coeficientes de autocorrelación.

Para la elección del mejor modelo, se realizó la prueba de correlación para determinar cuál de los modelos es el más adecuado y más próximo a la serie de datos.

**CUADRO 15: Correlaciones entre las autocorrelaciones de los modelos**

			Coeficientes de autocorrelación		
			Markov-1	Markov-2	Markov-3
Componente Estocástica	Correlación de Pearson	1	,852**	,845**	,984**
	Sig. (bilateral)		,000	,001	,000
	N	12	12	12	12

\*\* . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

En el cuadro N° 15 se observa la correlación que existe entre los coeficientes de autocorrelación para los residuos de los Modelos Markovianos y los coeficientes de autocorrelación de la componente estocástica de la serie de datos, donde se mostró que el Modelo Markoviano de orden 3 tiene una alta correlación ( $r=0.984$ ), el cual indica que fue el mejor para representar las series sintéticas.

#### 4.11. Prueba de bondad de ajuste

En el cuadro N° 08, se realizó el ajuste mediante la distribución de frecuencias, en el cual se probaron la función normal y log normal de tres parámetros.

##### 4.11.1. Estimación de parámetros en distribuciones teóricas

La estimación de parámetros de la distribución Normal y Log normal, de la serie residual independiente se presenta en el siguiente cuadro:

**CUADRO 16: Parámetros de la Distribución Normal**

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típ.
Markov-3	38	-2,2683	2,3391	-0,063791	1,0080039

**CUADRO 17: Parámetros de la Distribución Log-Normal 3 parámetros**

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típ.	C
Markov-3	38	1,7249	2,3243	2,04790	0,1316958	-7,880

**CUADRO 18: Parámetros de las Distribuciones Ajustadas**

Función de Distribución	Parámetros		
	$\mu$	$\sigma$	C
Normal	-0,063791	1,0080039	
Log Norma 3 Parámetros	2,04790	0,1316958	-7,880

El tercer parámetro de la distribución Log normal, fue calculado por un proceso iterativo con la ecuación (33), donde se buscó que la ecuación satisfaga la igualdad planteada.

**CUADRO 19: Ajuste de la serie estocástica independiente a una función de distribución de probabilidad teórica, mediante la prueba de Kolmogorov - Smirnov**

Función de distribución	Desviación máxima calculada D	Desviación crítica D <sub>0</sub>	Ajuste
Normal	0.0620	0.22062	Bueno
Log-Normal-3P	0.0870	0.22062	Bueno

En el cuadro N° 19, se calculó los valores de D de la prueba de Smirnov – Kolmogorov, para contrastar con la D<sub>0</sub>, donde se obtuvo una D=0.0620 para la función de distribución normal y que fue menor a la D<sub>0</sub>=0.22062, por consiguiente se concluyó que el ajuste es bueno. Para la función de distribución Log-normal se obtuvo una D=0.0870 menor a la D<sub>0</sub>=0.22062, concluyéndose también que el ajuste es bueno a un nivel de significancia del 5%, para ambas distribuciones.



#### 4.12. Modelamiento del proceso estocástico

Para modelar el proceso estocástico hidrológico del modelo autorregresivo de tercer orden, se mantuvieron los parámetros del modelo determinístico matemático, luego se procedió a la generación de números aleatorios para el modelamiento.

##### 4.12.1. Generación de números aleatorios

Para la generación de números aleatorios uniformemente distribuidos con media 0 y varianza 1 (0,1) se obtuvo por medio de la función aleatoria que la computadora lo realizó.

Una vez obtenido los números aleatorios normales con parámetros ajustados  $\mu$  y  $\sigma$  según las ecuaciones (37,38) para la generación de números aleatorios Log-normales independientes se realizó la transformación exponencial con la ecuación (39).

Con todo este proceso de generación de números aleatorios se simuló el proceso estocástico para el modelo autorregresivo de tercer orden.

El modelo general resultante utilizado para el modelamiento de la generación de descargas del Río llave fue:

$$Y_t = M_y + S_y X_t$$

$$X_t = \sum_{K=1}^m \alpha_K X_{t-K} + b\varepsilon_t$$

Los componentes de estas ecuaciones están descritos en el Modelo Markov de tercer orden, como el siguiente:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \alpha_3 X_{t-3} + [1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_1 - 2\alpha_1\alpha_3\rho_2 - 2\alpha_2\alpha_3\rho_1]^{1/2} \varepsilon_t \quad (14)$$

En dicho modelo, se reemplazó los coeficientes Markovianos, donde se obtuvo:

$$X_t = 0.19691144X_{t-1} + 0.18994567X_{t-2} - 0.16402799X_{t-3} + 0.95291325\varepsilon_t$$

#### 4.12.2. Generación de 10 series sintéticas de 41 años

La generación de series sintéticas fueron guiadas aleatoriamente por las ecuaciones descritas, las cuales mostraron valores que se ajustan a la serie histórica de descargas hidrológicas medias anuales del Río Ilave.

En los anexos 06 y 07 se observó a las series generadas por el Modelo Markov de tercer orden con la generación de números aleatorios para una distribución Normal y Log-Normal de 3 Parámetros.

#### 4.12.3. Consolidación del Modelo Markoviano

Para consolidar el Modelo Markoviano, se procedió con la prueba de hipótesis para la diferencia de medias y varianzas con el estadístico “t” de Student, cuyo planteamiento fue el siguiente:

1. Planteamiento de las hipótesis de prueba

$H_0$  : No existe diferencia entre el promedio de la serie histórica y la serie sintética.

$H_a$  : Existe diferencia entre el promedio de la serie histórica y la serie sintética.

2. Nivel de significancia para la prueba

$\alpha = 0.05$  (nivel significativo)

3. Cálculo de comparación de medias y desviaciones estándar.

4. Criterio de decisión

Si la significancia bilateral es menor a 0.05, entonces se rechaza la  $H_0$  y se acepta la  $H_a$ , caso contrario se acepta  $H_0$  y se rechaza la  $H_a$ .

Los cálculos muestran los siguientes resultados:

**CUADRO 20: Prueba de comparación de medias y desviaciones estándar con la distribución Normal**

	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias				
	F	Sig.	T	GI	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia
Normal	0,000	1,000	-0,015	80,000	0,928	-0,0630000	4,1733661
			-0,015	80,000	0,928	-0,0630000	4,1733661

**CUADRO 21: Prueba de comparación de medias y desviaciones estándar con la distribución Log-Normal de 3 parámetros**

	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias				
	F	Sig.	T	GI	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia
Log-Normal de 3 Parametros	0,000	1,000	-0,013	80,000	0,989	-0,0560000	4,1733661
			-0,013	80,000	0,989	-0,0560000	4,1733661

En los cuadros N° 20 y 21, se observó que no hay diferencia significativa entre la serie histórica y la serie sintética, ya que la significancia bilateral (0.989) fue mayor a 0.05, en la comparación de medias, así mismo no existió diferencia de significancia en las desviaciones estándar, dado que la significancia fue 1.000 mayor que 0.05.

**4.12.4. Predicción de descargas hidrológicas**

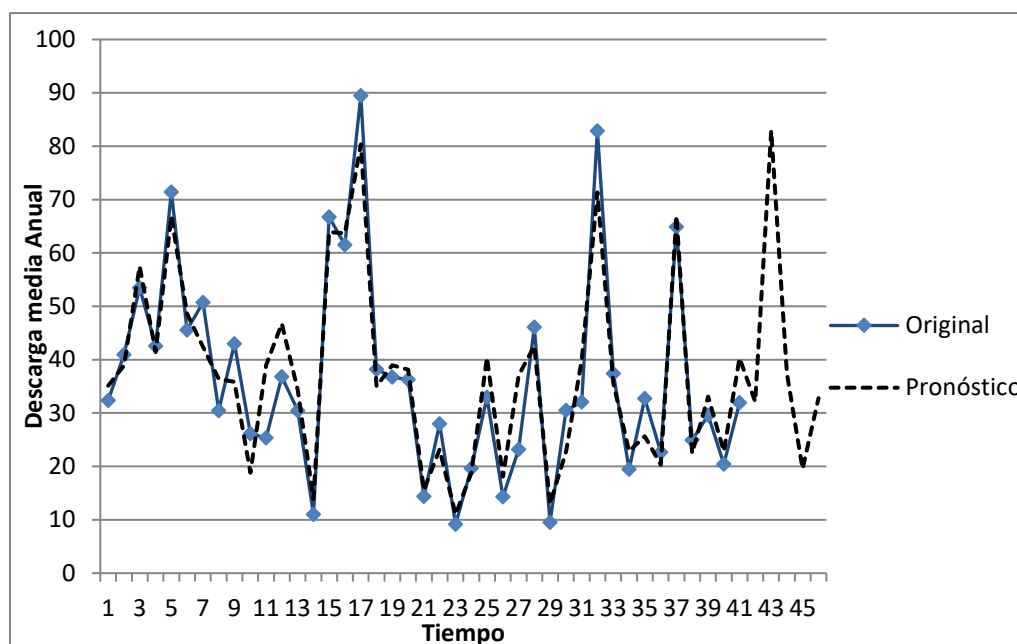
Para realizar el pronóstico para los próximos cinco años (2011 - 2015) se generó cinco datos y ellos fueron modelados con el Modelo Markoviano de orden 3, cuyo resultado se muestra:

**CUADRO 22: Predicción de descargas medias anuales para los próximos cinco años.**

N	T	Y <sub>t</sub>	serie1	N	T	Y <sub>t</sub>	serie1
1	1970	32,38	35,120	24	1993	19,66	18,764
2	1971	40,93	38,904	25	1994	32,94	40,430
3	1972	53,46	57,488	26	1995	14,31	18,100
4	1973	42,58	41,425	27	1996	23,19	37,047
5	1974	71,42	66,856	28	1997	46,11	42,536
6	1975	45,56	48,609	29	1998	9,51	12,968
7	1976	50,70	42,414	30	1999	30,53	22,800
8	1977	30,46	36,365	31	2000	32,04	39,933
9	1978	42,97	35,838	32	2001	82,86	71,345
10	1979	26,11	18,831	33	2002	37,42	35,511
11	1980	25,36	38,972	34	2003	19,49	22,847
12	1981	36,78	46,758	35	2004	32,74	25,675
13	1982	30,43	34,285	36	2005	22,65	20,327
14	1983	10,99	13,871	37	2006	64,89	66,991
15	1984	66,76	63,943	38	2007	24,95	22,484
16	1985	61,55	63,661	39	2008	29,58	33,109
17	1986	89,50	80,342	40	2009	20,46	22,817
18	1987	38,18	35,037	41	2010	31,95	40,316
19	1988	36,77	38,969	42	2011	---	32,102
20	1989	36,25	38,123	43	2012	---	82,922
21	1990	14,35	15,577	44	2013	---	37,482
22	1991	27,96	23,177	45	2014	---	19,552
23	1992	9,15	11,010	46	2015	---	32,802

El cuadro N° 22, se muestra el pronóstico para los próximos 5 años (2011-2015), estos datos también fueron representados en un gráfico que se muestra a continuación:

**GRAFICO 11: Predicción de Descargas medias anuales para cinco años del Río llave, 1970-2010**



En el gráfico N° 11, se observa que las descargas generadas con el Modelo Markoviano de tercer orden tuvieron un buen ajuste a la serie histórica original.

#### 4.12.5. Comparación entre datos pronosticados y datos del SENAMHI en los últimos 5 años

Para la comparación de los datos pronosticados y los datos del SENAMHI para los últimos cinco años, se realizó una prueba de hipótesis para las diferencias de medias y varianzas con el estadístico "t" de Student, cuyo planteamiento fue el siguiente:

##### 1. Planteamiento de las hipótesis de prueba

$H_0$  : No existe diferencia entre el promedio de las dos series en comparación: serie de predicción y serie del SENAMHI.

$H_a$  : Existe diferencia entre el promedio de las serie en comparación serie de predicción y serie del SENAMHI.

2. Nivel de significancia para la prueba

$\alpha = 0.05$  (nivel significativo)

3. Cálculo de comparación de medias y desviaciones estándar.

4. Criterio de decisión

Si la significancia bilateral es menor a 0.05, entonces se rechaza la  $H_0$  y se acepta la  $H_a$ , caso contrario se acepta  $H_0$  y se rechaza la  $H_a$ .

Para ello se contó con los datos pronosticados y los datos del SENAMHI, los cuales se presentan en el siguiente cuadro:

**CUADRO 23: Comparación entre datos pronosticados**

Años	1	2	3	4	5
Pronóstico	32,102	82,922	37,482	19,552	32,802
Datos del SENAMHI	35,43	78,87	40,29	21,64	35,34

Al realizar una prueba de medias entre los datos, los cálculos mostraron los siguientes resultados:

**CUADRO 24: Prueba de comparación de medias y desviaciones para las series en comparación: serie de predicción y serie del SENAMHI.**

	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias				
	F	Sig.	T	Gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia
Serie de Datos	0,053	0,824	-0,092	8,000	0,929	-1,33400	14,56136
			-0,092	7,885	0,929	-1,33400	14,56136

En el cuadro N° 24, se observa que no hay diferencia significativa entre la serie pronosticada y la serie de datos del SENAMHI, ya que en la comparación de medias la significancia bilateral (0.929) fue mayor a 0.05, así mismo no existió diferencias significativa en las desviaciones estándar, dado que la significancia fue 0.824 mayor que 0.05, por lo tanto se consolidó que el modelo puede realizar pronósticos muy similares a las originales con un nivel de confianza muy alto.



## CONCLUSIONES

1. El orden del Modelo estocástico Markoviano mediante el análisis de la autocorrelación, fue de orden tres ya que mostró una mejor aproximación en el análisis de correlograma frente a los modelos de orden inferior; esto quedo sustentado en el gráfico N° 10 y el cuadro N° 13.
2. La función de distribución de probabilidad log-normal de 3 parámetros, fue la que mejor se ajustó a la serie residual del modelo establecido de la serie de descargas hidrológicas medias anuales del Río llave en el periodo 1970 - 2010.
3. Mediante la generación de series sintéticas de descargas hidrológicas medias anuales para el Río llave, se logró consolidar que el Modelo estocástico Markoviano de orden tres, fue el modelo de mejor ajuste para Pronosticar las descargas hidrológicas medias anuales del Río llave (2011-2015).
4. El Modelo estocástico Markoviano de tercer orden permitió realizar el pronóstico de las descargas medias anuales para los próximos cinco años (2011 – 2015) de la serie histórica; así como se observó en el cuadro N° 22.
5. El Modelo estocástico Markoviano de mejor ajuste para Pronosticar las descargas hidrológicas medias anuales del Río llave en el periodo 1970-2010, fue el Modelo Markoviano de tercer orden; cuyos coeficientes de autorregresión fueron:  $\alpha_1=0.19691144$ ,  $\alpha_2=0.18994567$  y  $\alpha_3=-0.16402799$ , por lo que el modelo representativo fue dado por:  $X_t=0.19691144X_t$ .

$1+0.18994567X_{t-2}-0.16402799X_{t-3}+0.95291325\varepsilon_t$ , lo cual se validó mediante la prueba autocorrelaciones de Ljung-Box para los residuales.

## RECOMENDACIONES Y SUGERENCIAS

En el planeamiento, diseño y operación de los recursos hídricos del río llave, se recomienda utilizar los resultados del modelamiento y simulación de descargas de la presente Investigación, ya que mostraron una alta confiabilidad al generar mayor número de series sintéticas de diferentes longitudes de muestra, para determinar el tamaño representativo de la serie correspondiente a la serie histórica.

Así mismo se sugiere realizar investigaciones similares, en los principales ríos afluentes a la cuenca del Lago Titicaca, usando la metodología de las cadenas Markov, así como efectuar trabajos de investigación, utilizando estos modelos para datos semanales y diarios, incluyendo los modelos estocásticos multivariados.

Al Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología (SENAMHI), se recomienda dotar de personal permanente y especializado, para realizar los aforos en forma regular sin interrupciones, para garantizar y facilitar los trabajos de investigación.

## BIBLIOGRAFÍA

- ALIAGA, A. V. (1985). *Hidrología Estadística*. Lima Perú: Tomo I, Editorial Juventud.
- AVALOS, (1971). *Simulación de Descargas Promedios Anuales de los Principales Ríos de la Costa del Perú, por el Método de Cadenas de Markov*. [Tesis Ingeniería Agrícola]. Facultad de Ingeniería Agrícola, UNA La Molina, Lima – Perú.
- CHOW, V. (1979). *Análisis Estocástico de Sistemas Hidrológicos*. Traducido por Jaime Velazco Linares. Publicación N° 76.
- FAO, (1973). *Mathematical Models in Hydrology*. Roma, Estudio sobre riego y avenamiento N° 17
- FLORES, W. (2001). *Análisis Estocástico y Simulación de sequías con la aplicación del Sams 2000 en la cuenca del río Ramis*. [Tesis Ingeniería Agrícola]. Facultad de Ingeniería Agrícola, Universidad Nacional del Altiplano Puno, Perú
- LINSLEY. (1979). *Hidrología para Ingenieros*. México. Segunda edición Editorial McGraw-Hill Latinoamérica, S.A.
- MARTÍNEZ, O. y SÁNCHEZ, T. *Modelamiento estocástico en la determinación de la oferta hídrica del río Source Matelas*. [Tesis Doctoral]. Facultad de Ciencias Físicas y Matemática, Chile.

- PAREDES, J.R. (1992). *Modelamiento Estocástico de la Precipitación Pluvial en el Distrito de Puno, Periodo 1966-1990*. [Tesis Ingeniería Estadística]. Universidad Nacional del Altiplano, Facultad Ingeniería Estadística, Perú.
- PAULET, M. (1974). *Análisis de Frecuencias de Fenómenos en Hidrología Método de Gumbel*. Lima Perú: Publidrat N°34. UNA, la Molina.
- SALAS, J.D. (1976). *Modelos de Simulación Estocástica*. Centro Interamericano de Desarrollo Integral de Tierras.
- SALAS, J.D. (1985). *Modelamiento Estocástico de Series Hidrológicas*. Lima-Perú.
- SÁNCHEZ DELGADO M. y SÁNCHEZ TUYA J. (2001). *Generación de series sintéticas mensuales del río Chira mediante el uso de Modelos Markovianos*.
- YEVJEVICH, V. (1972). *La Probabilidad y Estadística en Hidrología*. Publicaciones de Recursos del Agua Fort Collins. Colorado, USA.

## WEBGRAFÍA

GARCÍA, F. (2010). *Modelación Hidrológica Estocástica: Desarrollo de un Modelo de Generación Sintética de Series Temporales*. Consultado 18 de agosto 2011, 6:47:57 pm de:

<http://es.scribd.com/doc/138830181/MODELACION-HIDROLOGICA-ESTOCASTICA-por-Garcia-Gutierrez-Francisco-Pablo>

DUQUE, P. (2008). *Modelamiento Estocástico de Series Hidrológicas en las Estaciones La Argelia, Celica, Macara*. Consultado 20 de agosto del 2011, 7:15:14 pm de:

[http://memorias.utpl.edu.ec/sites/default/files/documentacion/incolei\\_c2008/utpl-congreso-ingenieria-civil-2008-PONENCIA-05.pdf](http://memorias.utpl.edu.ec/sites/default/files/documentacion/incolei_c2008/utpl-congreso-ingenieria-civil-2008-PONENCIA-05.pdf)

CHEREQUE, W. *Hidrología*. Consultado 25 de agosto del 2011, 5:15:10 pm de:

[http://biblioteca.pucp.edu.pe/docs/elibros\\_pucp/chereque\\_wendor/hidrologia\\_estudiantes\\_ing\\_civil.pdf](http://biblioteca.pucp.edu.pe/docs/elibros_pucp/chereque_wendor/hidrologia_estudiantes_ing_civil.pdf)

OCAÑA, J. *Simulación Numérica de Modelos Estocásticos*. Consultado 25 de agosto 2011, 6:25:10 pm de:

<http://www.ub.edu/stat/docencia/material/Montecarlo/GENERACION%20DE%20PROCESOS%20ESTOCASTICOS.pdf>

SILVA, G. (2007). *Hidrología Estocástica*. Consultado 25 de agosto del 2011, 7:15:14 pm de: <http://www.geocities.com/gsilvam/estocastica.htm>

ANA. *Estudios Hidrológicos*. Consultado 26 de agosto del 2011, 8:00:10  
pm de:

<http://www.ana.gob.pe/biblioteca/estudios/hidrol%C3%B3gicos.asp>

X

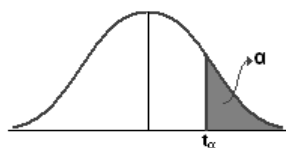
*Conceptos Hidrológicos Básicos*. Consultado 28 de agosto del 2011,  
10:15:46 pm de:

<http://demo.dokeos.com/courses/HIDROLOGIA/document/ConceptosHidrologicosBasicos.pdf?cidReq=HIDROLOGIA>

# ANEXOS



**ANEXO 01: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN t**



V	A				
	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
Inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

ANEXO 02: TABLA DISTRIBUCIÓN DE F

DISTRIBUCIÓN DE F  
P = .05

$n_2$	$n_1$									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	$\infty$
1	161.40	199.50	215.70	240.60	230.20	234.00	238.90	243.90	249.00	254.30
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.84	8.74	8.64	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.77	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.53	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.84	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.12	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.74	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.61	2.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.50	2.30
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.77	2.60	2.42	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.35	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.48	2.29	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.42	2.24	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.38	2.19	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.34	2.15	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.31	2.11	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.08	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.25	2.05	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.23	2.03	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.38	2.20	2.00	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.18	1.98	1.73
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.16	1.96	1.71
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.15	1.95	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.30	2.13	1.93	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.29	2.12	1.91	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.28	2.10	1.90	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	1.89	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.10	1.92	1.70	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.02	1.83	1.61	1.25
$\infty$	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	1.94	1.75	1.52	1.00

Los valores de  $n_1$  y  $n_2$  representan los grados de libertad de la mayor y menor estimación de la variancia respectivamente.

FUENTE: R.A. Fisher y F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Londres, Oliver and Boyd, 1938.

**ANEXO 03: TABLA DE KOLMOGOROV - SMIRNOV**

**Test de Kolmogorov-Smirnov sobre Bondad de Ajuste**

<i>n</i>	<i>Nivel de significación α</i>							
	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	0.90000	0.95000	0.97500	0.99000	0.99500	0.99750	0.99900	0.99950
2	0.68337	0.77639	0.84189	0.90000	0.92929	0.95000	0.96838	0.97764
3	0.56481	0.63604	0.70760	0.78456	0.82900	0.86428	0.90000	0.92065
4	0.49265	0.56522	0.62394	0.68887	0.73424	0.77639	0.82217	0.85047
5	0.44698	0.50945	0.56328	0.62718	0.66853	0.70543	0.75000	0.78137
6	0.41037	0.46799	0.51926	0.57741	0.61661	0.65287	0.69571	0.72479
7	0.38148	0.43607	0.48342	0.53844	0.57581	0.60975	0.65071	0.67930
8	0.35831	0.40962	0.45427	0.50654	0.54179	0.57429	0.61368	0.64098
9	0.33910	0.38746	0.43001	0.47960	0.51332	0.54443	0.58210	0.60846
10	0.32260	0.36866	0.40925	0.45562	0.48893	0.51872	0.55500	0.58042
11	0.30829	0.35242	0.39122	0.43670	0.46770	0.49539	0.53135	0.55588
12	0.29577	0.33815	0.37543	0.41918	0.44905	0.47672	0.51047	0.53422
13	0.28470	0.32549	0.36143	0.40362	0.43247	0.45921	0.49189	0.51490
14	0.27481	0.31417	0.34890	0.38970	0.41762	0.44352	0.47520	0.49753
15	0.26589	0.30397	0.33750	0.37713	0.40420	0.42934	0.45611	0.48182
16	0.25778	0.29472	0.32733	0.36571	0.39201	0.41644	0.44637	0.46750
17	0.25039	0.28627	0.31796	0.35528	0.38086	0.40464	0.43380	0.45540
18	0.24360	0.27851	0.30936	0.34569	0.37062	0.39380	0.42224	0.44234
19	0.23735	0.27136	0.30143	0.33685	0.36117	0.38379	0.41156	0.43119
20	0.23156	0.26473	0.29408	0.32866	0.35241	0.37451	0.40165	0.42085
25	0.20790	0.23768	0.26404	0.29518	0.31657	0.33651	0.36104	0.37743
30	0.19032	0.21756	0.24170	0.27023	0.28986	0.30818	0.33072	0.34672
35	0.17659	0.20185	0.22425	0.25073	0.26897	0.28600	0.30597	0.32187
40	0.16547	0.18913	0.21012	0.23494	0.25205	0.26803	0.28772	0.30171
41	0.16349	0.18687	0.20760	0.23213	0.24904	0.26482	0.28429	0.29811
42	0.16158	0.18468	0.20517	0.22941	0.24613	0.26173	0.28097	0.29465
43	0.15974	0.18257	0.20283	0.22679	0.24332	0.25875	0.27778	0.29130
44	0.15795	0.18051	0.20056	0.22426	0.24060	0.25587	0.27468	0.28806
45	0.15623	0.17856	0.19837	0.22181	0.23798	0.25308	0.27169	0.28493
46	0.15457	0.17665	0.19625	0.21944	0.23544	0.25038	0.26880	0.28190
47	0.15295	0.17481	0.19420	0.21715	0.23298	0.24776	0.26600	0.27896
48	0.15139	0.17301	0.19221	0.21493	0.23059	0.24523	0.26328	0.27611
49	0.14987	0.17128	0.19028	0.21281	0.22832	0.24281	0.26069	0.27339
50	0.14840	0.16959	0.18841	0.21068	0.22604	0.24039	0.25809	0.27067
<i>n</i> > 50	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.73}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.85}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.95}{\sqrt{n}}$

**ANEXO 04: FOTOGRAFÍAS DEL RÍO ILAVE**

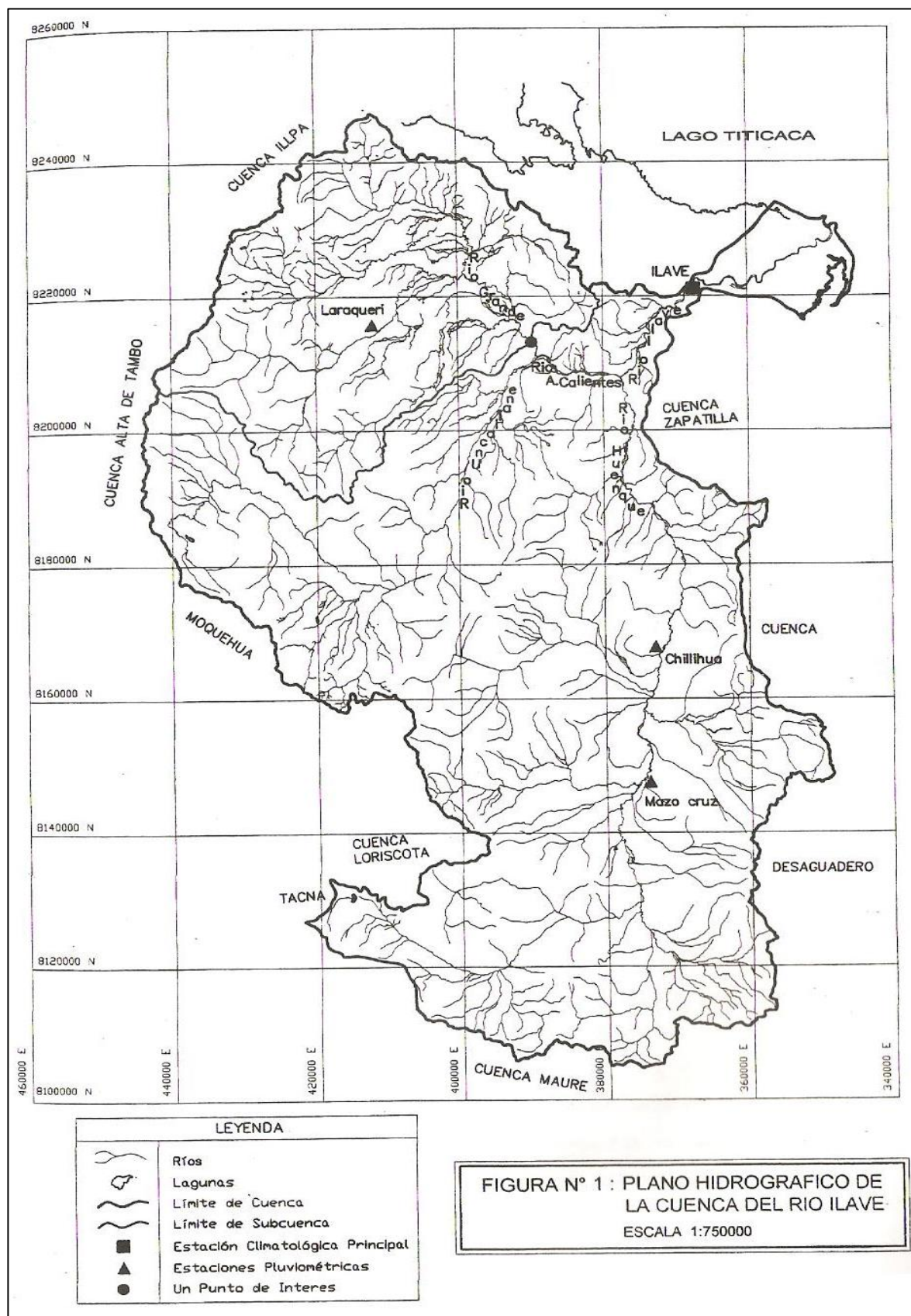
**FOTOGRAFÍA DEL RÍO ILAVE: ESTACIÓN PUENTE CARRETERA**



**FOTOGRAFÍA DEL RÍO ILAVE: VISTA PANORÁMICA**



**ANEXO 05: PLANO HIDROGRÁFICO DE LA CUENCA DEL RÍO ILAVE**



### ANEXO 06: GENERACIÓN DE 10 SERIES SINTÉTICAS CON LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

t	Y <sub>t</sub>	serie1	serie2	serie3	serie4	serie5	serie6	serie7	serie8	serie9	serie10
1	32.38	32.465	32.288	32.341	32.442	32.436	32.517	32.271	32.280	32.371	32.268
2	40.93	41.015	40.838	40.891	40.992	40.986	41.067	40.821	40.830	40.921	40.818
3	53.46	53.545	53.368	53.421	53.522	53.516	53.597	53.351	53.360	53.451	53.348
4	42.58	42.665	42.488	42.541	42.642	42.636	42.717	42.471	42.480	42.571	42.468
5	71.42	71.505	71.328	71.381	71.482	71.476	71.557	71.311	71.320	71.411	71.308
6	45.56	45.645	45.468	45.521	45.622	45.616	45.697	45.451	45.460	45.551	45.448
7	50.70	50.785	50.608	50.661	50.762	50.756	50.837	50.591	50.600	50.691	50.588
8	30.46	30.545	30.368	30.421	30.522	30.516	30.597	30.351	30.360	30.451	30.348
9	42.97	43.055	42.878	42.931	43.032	43.026	43.107	42.861	42.870	42.961	42.858
10	26.11	26.195	26.018	26.071	26.172	26.166	26.247	26.001	26.010	26.101	25.998
11	25.36	25.445	25.268	25.321	25.422	25.416	25.497	25.251	25.260	25.351	25.248
12	36.78	36.865	36.688	36.741	36.842	36.836	36.917	36.671	36.680	36.771	36.668
13	30.43	30.515	30.338	30.391	30.492	30.486	30.567	30.321	30.330	30.421	30.318
14	10.99	11.075	10.898	10.951	11.052	11.046	11.127	10.881	10.890	10.981	10.878
15	66.76	66.845	66.668	66.721	66.822	66.816	66.897	66.651	66.660	66.751	66.648
16	61.55	61.635	61.458	61.511	61.612	61.606	61.687	61.441	61.450	61.541	61.438
17	89.50	89.585	89.408	89.461	89.562	89.556	89.637	89.391	89.400	89.491	89.388
18	38.18	38.265	38.088	38.141	38.242	38.236	38.317	38.071	38.080	38.171	38.068
19	36.77	36.855	36.678	36.731	36.832	36.826	36.907	36.661	36.670	36.761	36.658
20	36.25	36.335	36.158	36.211	36.312	36.306	36.387	36.141	36.150	36.241	36.138
21	14.35	14.435	14.258	14.311	14.412	14.406	14.487	14.241	14.250	14.341	14.238
22	27.96	28.045	27.868	27.921	28.022	28.016	28.097	27.851	27.860	27.951	27.848
23	9.15	9.235	9.058	9.111	9.212	9.206	9.287	9.041	9.050	9.141	9.038
24	19.66	19.745	19.568	19.621	19.722	19.716	19.797	19.551	19.560	19.651	19.548
25	32.94	33.025	32.848	32.901	33.002	32.996	33.077	32.831	32.840	32.931	32.828
26	14.31	14.395	14.218	14.271	14.372	14.366	14.447	14.201	14.210	14.301	14.198
27	23.19	23.275	23.098	23.151	23.252	23.246	23.327	23.081	23.090	23.181	23.078
28	46.11	46.195	46.018	46.071	46.172	46.166	46.247	46.001	46.010	46.101	45.998
29	9.51	9.595	9.418	9.471	9.572	9.566	9.647	9.401	9.410	9.501	9.398
30	30.53	30.615	30.438	30.491	30.592	30.586	30.667	30.421	30.430	30.521	30.418
31	32.04	32.125	31.948	32.001	32.102	32.096	32.177	31.931	31.940	32.031	31.928
32	82.86	82.945	82.768	82.821	82.922	82.916	82.997	82.751	82.760	82.851	82.748
33	37.42	37.505	37.328	37.381	37.482	37.476	37.557	37.311	37.320	37.411	37.308
34	19.49	19.575	19.398	19.451	19.552	19.546	19.627	19.381	19.390	19.481	19.378
35	32.74	32.825	32.648	32.701	32.802	32.796	32.877	32.631	32.640	32.731	32.628
36	22.65	22.735	22.558	22.611	22.712	22.706	22.787	22.541	22.550	22.641	22.538
37	64.89	64.975	64.798	64.851	64.952	64.946	65.027	64.781	64.790	64.881	64.778
38	24.95	25.035	24.858	24.911	25.012	25.006	25.087	24.841	24.850	24.941	24.838
39	29.58	29.665	29.488	29.541	29.642	29.636	29.717	29.471	29.480	29.571	29.468
40	20.46	20.545	20.368	20.421	20.522	20.516	20.597	20.351	20.360	20.451	20.348
41	31.95	32.035	31.858	31.911	32.012	32.006	32.087	31.841	31.850	31.941	31.838
	36.485	37.569	36.392	35.446	36.547	37.141	36.622	37.376	35.385	36.476	36.373
	18.896	19.896	17.465	18.777	17.996	18.880	18.365	17.455	18.223	16.235	18.996

**ANEXO 07: GENERACIÓN DE 10 SERIES SINTÉTICAS CON LA  
DISTRIBUCIÓN LOG-NORMAL DE 3 PARÁMETROS**

t	$Y_t$	serie1	serie2	serie3	serie4	serie5	serie6	serie7	serie8	serie9	serie10
1	32.38	32.443	32.461	32.324	32.402	32.461	32.337	32.312	32.410	32.393	32.314
2	40.93	40.993	41.011	40.874	40.952	41.011	40.887	40.862	40.960	40.943	40.864
3	53.46	53.523	53.541	53.404	53.482	53.541	53.417	53.392	53.490	53.473	53.394
4	42.58	42.643	42.661	42.524	42.602	42.661	42.537	42.512	42.610	42.593	42.514
5	71.42	71.483	71.501	71.364	71.442	71.501	71.377	71.352	71.450	71.433	71.354
6	45.56	45.623	45.641	45.504	45.582	45.641	45.517	45.492	45.590	45.573	45.494
7	50.70	50.763	50.781	50.644	50.722	50.781	50.657	50.632	50.730	50.713	50.634
8	30.46	30.523	30.541	30.404	30.482	30.541	30.417	30.392	30.490	30.473	30.394
9	42.97	43.033	43.051	42.914	42.992	43.051	42.927	42.902	43.000	42.983	42.904
10	26.11	26.173	26.191	26.054	26.132	26.191	26.067	26.042	26.140	26.123	26.044
11	25.36	25.423	25.441	25.304	25.382	25.441	25.317	25.292	25.390	25.373	25.294
12	36.78	36.843	36.861	36.724	36.802	36.861	36.737	36.712	36.810	36.793	36.714
13	30.43	30.493	30.511	30.374	30.452	30.511	30.387	30.362	30.460	30.443	30.364
14	10.99	11.053	11.071	10.934	11.012	11.071	10.947	10.922	11.020	11.003	10.924
15	66.76	66.823	66.841	66.704	66.782	66.841	66.717	66.692	66.790	66.773	66.694
16	61.55	61.613	61.631	61.494	61.572	61.631	61.507	61.482	61.580	61.563	61.484
17	89.50	89.563	89.581	89.444	89.522	89.581	89.457	89.432	89.530	89.513	89.434
18	38.18	38.243	38.261	38.124	38.202	38.261	38.137	38.112	38.210	38.193	38.114
19	36.77	36.833	36.851	36.714	36.792	36.851	36.727	36.702	36.800	36.783	36.704
20	36.25	36.313	36.331	36.194	36.272	36.331	36.207	36.182	36.280	36.263	36.184
21	14.35	14.413	14.431	14.294	14.372	14.431	14.307	14.282	14.380	14.363	14.284
22	27.96	28.023	28.041	27.904	27.982	28.041	27.917	27.892	27.990	27.973	27.894
23	9.15	9.213	9.231	9.094	9.172	9.231	9.107	9.082	9.180	9.163	9.084
24	19.66	19.723	19.741	19.604	19.682	19.741	19.617	19.592	19.690	19.673	19.594
25	32.94	33.003	33.021	32.884	32.962	33.021	32.897	32.872	32.970	32.953	32.874
26	14.31	14.373	14.391	14.254	14.332	14.391	14.267	14.242	14.340	14.323	14.244
27	23.19	23.253	23.271	23.134	23.212	23.271	23.147	23.122	23.220	23.203	23.124
28	46.11	46.173	46.191	46.054	46.132	46.191	46.067	46.042	46.140	46.123	46.044
29	9.51	9.573	9.591	9.454	9.532	9.591	9.467	9.442	9.540	9.523	9.444
30	30.53	30.593	30.611	30.474	30.552	30.611	30.487	30.462	30.560	30.543	30.464
31	32.04	32.103	32.121	31.984	32.062	32.121	31.997	31.972	32.070	32.053	31.974
32	82.86	82.923	82.941	82.804	82.882	82.941	82.817	82.792	82.890	82.873	82.794
33	37.42	37.483	37.501	37.364	37.442	37.501	37.377	37.352	37.450	37.433	37.354
34	19.49	19.553	19.571	19.434	19.512	19.571	19.447	19.422	19.520	19.503	19.424
35	32.74	32.803	32.821	32.684	32.762	32.821	32.697	32.672	32.770	32.753	32.674
36	22.65	22.713	22.731	22.594	22.672	22.731	22.607	22.582	22.680	22.663	22.584
37	64.89	64.953	64.971	64.834	64.912	64.971	64.847	64.822	64.920	64.903	64.824
38	24.95	25.013	25.031	24.894	24.972	25.031	24.907	24.882	24.980	24.963	24.884
39	29.58	29.643	29.661	29.524	29.602	29.661	29.537	29.512	29.610	29.593	29.514
40	20.46	20.523	20.541	20.404	20.482	20.541	20.417	20.392	20.490	20.473	20.394
41	31.95	32.013	32.031	31.894	31.972	32.031	31.907	31.882	31.980	31.963	31.884
	36.485	37.548	36.566	36.429	36.444	36.565	36.442	36.317	36.515	36.498	36.419
	18.896	18.880	18.800	18.000	18.877	18.154	18.890	18.666	17.998	18.789	18.532