

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA



**MODELACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS ESPIRALES
NATURALES DE LA BOTÁNICA ALTOANDINA DEL SECTOR
JIPA DEL DISTRITO DE ATUNCOLLA PUNO 2018**

TESIS

PRESENTADA POR:

ROGER RONNY ZAPANA ROQUE

PARA OPTAR EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

CON MENCIÓN EN LA ESPECIALIDAD DE

MATEMÁTICA, COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA

PROMOCIÓN: 2017-II

PUNO - PERÚ

2018

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA**

**MODELACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS ESPIRALES
NATURALES DE LA BOTÁNICA ALTOANDINA DEL SECTOR
JIPA DEL DISTRITO DE ATUNCOLLA PUNO 2018**

ROGER RONNY ZAPANA ROQUE

**TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN
EDUCACIÓN SECUNDARIA, CON MENCIÓN EN LA ESPECIALIDAD DE
MATEMÁTICA, COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA**



APROBADA POR EL SIGUIENTE JURADO:

PRESIDENTE

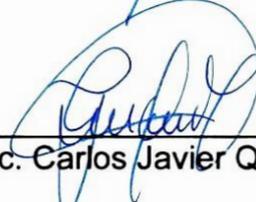
:



Dr. Felipe Gutiérrez Osco

PRIMER MIEMBRO

:



M.Sc. Carlos Javier Quiza Mamani

SEGUNDO MIEMBRO

:



Lic. Eulalia Ramos Chura

DIRECTOR / ASESOR

:



Dr. Germán Pedro Yabar Pilco

Área : Teoría y métodos de investigación de la didáctica de la matemática

Tema : Modelación geométrica de espirales naturales en botánica altoandina

Fecha de sustentación: 22 / Ago / 2018

DEDICATORIA

Dedico mi investigación al estimado lector que decidió abrir los folios de este humilde trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dios de Jacob, por concederme vida y todo lo que esto conlleva.

A mi abuelo@s, por dejarme su legado.

A mis padres, en especial a mi madre Ysabel, por su bondad y me sorprendí tanto cuando conocía mi investigación sobre las flores, alegrando mi corazón.

A mis herman@s, en especial a mi hermano Nitson, por su apoyo incondicional y poseedor de conocimiento superior y sublime; además, sé que el trabajo que viene haciendo es comparable a magnífico tesoro.

A mis sobrin@s, Giordano, Camila y Alison.

A mi asesor Germán, que se involucró maravillosamente en esta mi labor.

Al ingeniero agrónomo J. Rossel, por su valiosa aportación bibliográfica.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	7
ÍNDICE DE TABLAS	8
ÍNDICE DE ACRÓNIMOS.....	9
RESUMEN	10
ABSTRACT	11

CAPÍTULO I**INTRODUCCIÓN**

1.1. Planteamiento del Problema	13
1.2. Formulación del Problema	15
1.3. Hipótesis de la Investigación.....	15
1.3.1. Hipótesis General	15
1.3.2. Hipótesis Específicas	16
1.4. Justificación del Estudio	16
1.5. Objetivos de la Investigación	17
1.5.1. Objetivo General.....	17
1.5.2. Objetivos Específicos	17

CAPÍTULO II**REVISIÓN DE LITERATURA**

2.1. Antecedentes	18
2.2. Marco Teórico	20
2.2.1. Modelación Geométrica.....	20
2.2.2. Espiral	21
2.2.3. Sistema de Coordenadas Polares	25
2.2.4. Especies Botánicas Altoandina Espiraladas del Sector Jipa	26
2.3. Marco Conceptual.....	33

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Ubicación Geográfica del Estudio	34
3.2. Periodo de Duración del Estudio.....	34
3.3. Procedencia del Material Utilizado	34
3.4. Población y Muestra del Estudio.....	34
3.5. Diseño Estadístico	35
3.6. Procedimiento	35
3.7. Variables	36
3.8. Análisis de los Resultados	37

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	38
5.1. Resultados	38
5.1.1. Modelación Geométrica de Plantas Altoandinas con Forma Espiral	38
5.2. Discusión	49
5.2.1. Contrastación de la Hipótesis General	49
CONCLUSIONES	51
RECOMENDACIONES.....	52
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	53
ANEXOS	56

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1: Espiral Logarítmica	24
FIGURA 2: Espiral Hiperbólica.....	25
FIGURA 3: Sistema de Coordenada Polar.....	26
FIGURA 4: Vigüera Pflanzii Perkins	27
FIGURA 5: Erodium Cicutarium (L.) L'Her. ex Aiton.....	29
FIGURA 6: Echinopsis Maximiliana Heyder ex A. Dietrich.....	31
FIGURA 7: Cumulopuntia Boliviana (Salm-Dyck) F. Ritter.....	33
FIGURA 8: Modelación Geométrica: Espiral Logarítmica para Vigüera Pflanzii Perkins	38
FIGURA 9: Modelación Geométrica: Espiral Hiperbólica para Erodium Cicutarium (L.) L'Her. ex Aiton.....	40
FIGURA 10: Modelación Geométrica: Espiral Logarítmica para Echinopsis Maximiliana Heyder ex A. Dietrich	42
FIGURA 11: Modelación Geométrica: Espiral Logarítmica para Cumulopuntia Boliviana (Salm-Dyck) F. Ritter	43

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1: Propiedad 1: Ángulo tangencial constante.....	39
TABLA 2: Propiedad 2: Radio creciente en progresión geométrica	39
TABLA 3: Propiedad 3: Distancia del Punto siguiendo la curva es finita.....	39
TABLA 4: Propiedad 1: Distancia del Punto siguiendo la curva es infinita.....	40
TABLA 5: Propiedad 2: Existencia de Asíntota	40
TABLA 6: Propiedad 3: Es inversa de la Espiral Aritmética	41
TABLA 7: Propiedad 1: Ángulo tangencial constante.....	42
TABLA 8: Propiedad 2: Radio creciente en progresión geométrica	42
TABLA 9: Propiedad 3: Distancia del Punto siguiendo la curva es finita.....	42
TABLA 10: Propiedad 1: Ángulo tangencial constante.....	44
TABLA 11: Propiedad 2: Radio creciente en progresión geométrica	44
TABLA 12: Propiedad 3: Distancia del Punto siguiendo la curva es finita.....	44
TABLA 13: Especies botánicas Altoandinas con presencia espiralada.....	45
TABLA 14: Taxonomía: <i>Viguiera Pflanzii</i> Perkins	46
TABLA 15: Taxonomía: <i>Erodium Cicutarium</i> (L.) L'Her. ex Aiton.....	46
TABLA 16: Taxonomía: <i>Echinopsis Maximiliana</i> Heyder ex A. Dietrich.....	47
TABLA 17: Taxonomía: <i>Cumulopuntia Boliviana</i> (Salm-Dyck) F. Ritter.....	47
TABLA 18 Partes en la estructura vegetal con característica	
Espiral por especie localizada.....	48

ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

UNA Universidad Nacional del Altiplano

CAD Diseño Asistido por Computador

CAM Fabricación Asistida por Computadora

IPNI The International Plant Name Index

PMA Programa Mundial de Alimentos

ADN Ácido Desoxirribonucleico

UMC Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes

ECE Prueba de Evaluación Censal

RESUMEN

La presente investigación pretende establecer la modelación geométrica de curvas espirales naturales a partir de botánica altoandina situada en la extensión fitogeográfica del sector Jipa, distrito de Atuncolla, Puno a 3822 m.s.n.m. y con 241,87 has; mediante el empleo de software de matemática dinámica Geogebra. En el proceso de exploración, se identificaron y clasificaron 4 especies que calificaron para la modelación: *Viguiera Pflanzii* Perkins, *Erodium Cicutarium* (L.) L'Her. ex Aiton, *Echinopsis Maximiliana* Heyder ex A. Dietrich y *Cumulopuntia Boliviana* (Salm-Dyck) F. Ritter, de una población total de 77 especies. Los resultados del proceso de modelado muestran que las espirales naturales poseen una apariencia aproximada a la espiral logarítmica e hiperbólica, que sosteníamos como hipótesis primaria. Debido a que los ángulos que describe la recta tangencial (α_i) a la curva, no es constante, ni la progresión aritmética de los ángulos de giro (θ_i) producen radios (r_i) en progresión geométrica, ausencia de limite asintótico por la longitud finita de las curvas, y no hay presencia en las ecuaciones modeladas la inversa de la Espiral Aritmética que es de la forma $r = a\theta^{-1}$. Además, para todas las curvas modeladas se evidenció longitudes finitas. Mencionar también que, la utilidad de la investigación recae en contribuir como material educativo concreto para el aprendizaje significativo de la matemática.

Palabras Clave: Botánica altoandina, espirales naturales, modelación geométrica.

ABSTRACT

The present research intends to establish the geometric modeling of natural spiral curves from high Andean botany located in the phytogeography extension of the Jipa sector, district of Atuncolla, Puno at 3822 masl and with 241.87 has; through the use of dynamic mathematical software Geogebra. In the exploration process, 4 species that qualified for the modeling were identified and classified: *Viguiera Pflanzii* Perkins, *Erodium Cicutarium* (L.) L'Her. ex Aiton, *Echinopsis Maximiliana* Heyder ex A. Dietrich y *Cumulopuntia Bolivian* (Salm-Dyck) F. Ritter, out of a total population of 77 species. The results of the modeling process show that the natural spirals have an approximate appearance to the logarithmic and hyperbolic spiral, which we maintained as a primary hypothesis. Because the angles that the tangential line (α_i) describes to the curve, is not constant, nor the arithmetic progression of the angles of rotation (θ_i) produce radios (r_i) in geometric progression, absence of asymptotic limit by the finite length of the curves, and there is no presence in the modeled equations of the inverse of the Arithmetic Spiral which is of the form $r = a\theta^{-1}$. Besides, for all the modeled curves, finite lengths were evidenced. Mention also that, the usefulness of the research lies in contributing as concrete educational material for the meaningful learning of mathematics.

Keywords: High Andean botany, geometric modeling, natural spirals.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Partiendo del hecho de que en un proceso de enseñanza - aprendizaje de la matemática prima el carácter pedagógico tradicional, y donde las sesiones de aprendizaje no son desarrolladas a través de medios y materiales didácticos, provocando un desinterés continuo de los estudiantes por las matemáticas. Y que este desinterés produce serias deficiencias en el logro de aprendizajes significativos, tal como lo refleja los resultados difundido por la Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes UMC, a través de su Prueba de Evaluación Censal ECE. Es necesario generar propuestas educativas para la enseñanza de las matemáticas, tal como refiere Arrieta (1998) donde un material facilita la comprensión porque permite referirse a un soporte físico, favorece la visualización, la motivación y la actitud positiva hacia la matemática, convirtiéndose su uso en el punto inicial de la construcción del conocimiento. Por lo que nuestra investigación pretende complementar alguna información referida al proceso de realizar modelaciones geométricas asistida por medio de una computadora. Modelaciones que parten de fenómenos y objetos perceptibles de la realidad. Para el caso nuestro llegó a interesarnos mucho las curvas de las formas de la naturaleza, pero una curva bidimensional en especial, la llamada «*espiral*», la cual en el espacio tridimensional es una «*helicoides*». A lo que denominaremos en adelante «*espiral o helicoides natural*». Ésta curva natural describe un lugar geométrico aparentemente regular, es decir, puede ser prescrita con alguna ecuación o posee propiedad matemática. Sobre el particular, existieron notables personajes que trabajaron incansablemente en esta tarea, tales como: Arquímedes, Fermat, Descartes, Torricelli, Varignon,

Bernoulli, Cotes, Euler, Cornu, entre otros. Además, hubo quienes relacionaron esta curva natural con la sucesión de Fibonacci, el número áureo Φ , técnica artística de Durero, etc. Otorgándosele denominaciones como logarítmica, hiperbólica, parabólica, aritmética, clotoide. Pero, hasta qué punto, cualquier curva espiral natural que hallemos, contiene una notación matemática perfecta, será real que ya fue totalmente parametrizada y conocemos efectivamente su forma. Una verdadera investigación, se fundamenta justamente en esto, en tener que someter lo evidente al rigor de las pruebas científicas.

Finalmente señalar que en vista de que nuestro mundo natural está lleno de inteligencia, y su diseño posee belleza, genera en nosotros sentimientos profundos, que nos incita a descubrirlo, es porque pretendemos recrear la realidad a través de la modelación geométrica y tal vez sea el matemático probablemente el científico que se siente más cerca a sus predecesores remotos y a sus colegas contemporáneos porque todos comparten el afán de encontrar leyes formales objetivas que gobiernan la naturaleza y que pueden ser encontradas mediante la cooperación entre la intuición creativa y la comprobación objetiva de las consecuencias racionales que de ellas se derivan (Guzmán y Colera, 2003).

1.1. Planteamiento del Problema

En vista de que, existe abundante teoría referida a las curvas espirales halladas de manera natural y que algunos la hallen relacionadas necesariamente con la sucesión de Fibonacci y proporción áurea y porque a su vez vienen generando cierta confusión en estudiantes de matemáticas, es que decidimos analizar concienzudamente el carácter geométrico de dicha curva.

Por ejemplo, Thompson (2011), dice que las verdaderas espirales orgánicas como son los cuernos de rumiantes, conchas de los moluscos, flósculos de un girasol, bordes de una hoja cordiforme, en un mechón de pelo, en la lana, en la trompa enroscada de un elefante, en las espiras envolventes de una serpiente, en los enrollamientos del brazo de una sepia, en la cola de un mono o camaleón. Estas formas espirales mencionadas, son ejemplos de la notable curva conocida como espiral equiangular o espiral logarítmica.

Del mismo modo, Ferrando y Segura (2010) mencionan que, al observar detenidamente las semillas de un girasol o de una margarita es fácil distinguir los paristiquios. Los botánicos descubrieron que cada una de las partes de los frutos que forman los paristiquios se desarrollaban desde una zona central de la flor, a partir de los llamados primordios. Los primordios forman espirales más cerradas que la formada por los paristiquios y no son visibles a simple vista, y su número comprende la sucesión de Fibonacci. Los primordios aparecen a intervalos regulares en el espacio más grande disponible, obteniéndose espirales con ángulo áureo. Este hecho explicaría el crecimiento logarítmico de las espirales.

Finalmente, también Martín (2013) refiere que, en la naturaleza podemos encontrar numerosos ejemplos en los que está presente la proporción áurea. La espiral equiangular se encuentra representada en muchos organismos como la concha de Nautilus, los cuernos de los carneros, la curva de los colmillos de los elefantes, la disposición de las flores en los girasoles, asteráceas, escamas de las piñas. Y las relaciones numéricas encontradas en la naturaleza han sido descritas en términos de la sucesión de Fibonacci.

1.2. Formulación del Problema

Planteándonos en una pregunta el problema general, proceso que involucra a su vez otros problemas específicos. Como se muestra a continuación:

1.2.1. Problema General

¿Cuál es la modelación geométrica de las plantas altoandinas que presentan forma de espiral en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018?

1.2.2. Problemas Específicos

- a) ¿Existen plantas altoandinas que presenten forma de espiral, en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018?
- b) ¿Están clasificadas las plantas altoandinas que presentan forma de espiral, del sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018?
- c) ¿Qué parte de la estructura de las plantas altoandinas tiene forma de espiral, en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018?

Por tanto, constituirá finalidad primordial de ésta investigación la modelación geométrica de las espirales naturales de la flora altoandina para un sector fitogeográfico de estudio único y exclusivo, que se ubica en el sector denominado Jipa del Distrito de Atuncolla de la Provincia de Puno.

1.3. Hipótesis de la Investigación

1.3.1. Hipótesis General

La modelación geométrica de las plantas altoandinas con forma de espiral, es hiperbólica o logarítmica, en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.

1.3.2. Hipótesis Específicas

- a) Existen plantas altoandinas que presentan forma de espiral, en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.
- b) Las plantas altoandinas con forma de espiral se encuentran clasificadas para el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.
- c) Las plantas altoandinas con forma de espiral contienen dicha forma en una parte de su estructura, en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.

1.4. Justificación del Estudio

Una de las justificaciones razonables que hallamos para realizar el presente trabajo, se debe a que muchos estudiantes de educación básica regular incluso de pregrado aceptamos las teorías impartidas en los claustros como verdades; a veces por la complejidad de un asunto omitimos preguntar al iluminado; ¿Y cuáles fueron las pruebas que justifican un razonamiento?, o para el caso nuestro, como comprobamos la forma del átomo, la forma del ADN, la forma de la luz. Y otras veces por que no contamos con las herramientas científicas necesarias como laboratorios, donde se pueda recrear lo que ya está expreso por la comunidad científica. Perdiéndose el interés por saber la verdad y entrando al fraude científico como el recordado caso de la forma de los embriones de Haeckel.

Asimismo, esta investigación constituye fuente de información y además es contribuyente para emplearse como recurso didáctico para los docentes, porque fomenta una innovadora forma de hacer matemática. En los estudiantes acentuará su carácter reflexivo y crítico motivando el desarrollo de sus capacidades de observación, descubrimiento, razonamiento, e inteligencia.

Por último, los resultados permiten y aportan una mayor comprensión al tema de curvas espirales por medio de la representación geométrica modelada por computador y el uso de software especializado.

1.5. Objetivos de la Investigación

1.5.1. Objetivo General

Establecer la modelación geométrica de las plantas altoandinas con forma de espiral del sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.

1.5.2. Objetivos Específicos

- a) Identificar que plantas altoandinas muestran forma de espiral, en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.
- b) Clasificar las plantas altoandinas que presentan forma de espiral, para el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.
- c) Describir la parte de la estructura con forma de espiral, en plantas altoandinas, del sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. Antecedentes

Loera, Chávez, Carrillo y Valdez (2014) realizaron un trabajo sobre estimación de superficie de frutos con modelo geométrico tridimensional y proyección geométrica basados en imágenes digitales, con el objetivo de desarrollar dos técnicas basadas en procesamiento de imágenes digitales; una para generar un modelo geométrico tridimensional en CAD y otra para generar una proyección geométrica en tres especies frutales mango, naranja y pera. Resultando que en el volumen el error fue $<3\%$ para las tres especies. El área externa el menor error se obtuvo en los modelos con 32 divisiones y fue de 1.4%, 0,6% y 1.3%, mientras que en la proyección geométrica fue de 1.6%,1.1% y 5.4% respectivamente. Llegándose a la conclusión que las técnicas de modelado geométrico se adaptan a frutos con sección transversal elíptica o circular con superficie predominantemente lisa, sin importar su forma vertical.

Gómez (2012) realiza un estudio sobre representación matemática y modelo geométrico de un sistema de proporción, con el fin de desarrollar un tipo de equilibrio visual y constructivo entre las partes de los objetos. La investigación se basa en la existencia de principios geométricos que son importantes para determinar las condiciones de equilibrio, donde los conceptos básicos de escala, simetría y proporción. Concluyéndose que cuando cada polígono triangular isósceles durante la geometrización posee iguales ángulos menores. Los resultados iniciales de esta investigación, desde el punto de vista geométrico han contribuido con la construcción de caracoles y de geometrización.

Álvarez (2007) realiza un trabajo sobre la geometría de las formas de la naturaleza, cuyo objetivo es retomar la taxonomía de las formas más comunes en la naturaleza, recalcando su expresión matemática y analizando su funcionalidad estructura como elementos fundamentales que las han hecho prevalecer. Con conclusiones como, el sentido geométrico está presente en la totalidad de las formas de la naturaleza, prevaleciendo la esfera, de otro lado los polígonos regulares, el más simple que se reproduce a sí mismo es el pentágono; en el gineceo de las flores.

Sacristán (1998) realiza un estudio sobre las espirales y fractales y el estudio de sucesiones infinitas a través de modelado computacional, con el propósito de enseñar a los estudiantes a comprender a través de actividades de exploración de fractales y de sucesiones infinitas clásicas como espirales, histogramas, escaleras, rectas. La investigación concluye que, los estudiantes tuvieron que reconstruir mentalmente el dibujo coordinando sus observaciones con el código simbólico que describe al proceso.

En la revista del Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, se publica un trabajo de investigación sobre la sucesión Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza, con el objetivo de mostrar como la filotaxis, se ha ido entrelazando con distintas ramas de la matemática y de la física a lo largo del tiempo conforme los científicos intentaban encontrar explicaciones más profundas sobre una cuestión tan sencilla como el porqué de la disposición de las hojas en un tallo, repasando la historia desde la antigüedad hasta la actualidad (Ferrando y Segura, 2010).

2.2. Marco Teórico

2.2.1. Modelación Geométrica

Ramos (2009) refiere que el modelado geométrico constituye principalmente al conjunto de métodos utilizados para definir la forma y otras características de los objetos. La construcción de los objetos es normalmente, en sí misma, una operación asistida por ordenador. El propósito del modelado geométrico, consiste en la representación de los objetos existentes, el diseño de los objetos inexistentes y la visualización o interpretación (rendering) de los objetos. Los principales sistemas para el desarrollo del modelado geométrico, robótica, reconocimiento de formas, inteligencia artificial, y el cálculo estructural son el Diseño Asistido por Computador CAD y la Fabricación Asistida por Computadora CAM (p.2-3).

Dentro del modelo científico existe, el modelo gráfico, conocido también como modelo geométrico, porque las partes componentes de un sistema gráfico se representan con entidades geométricas como líneas, polígonos o circunferencias, que describen componentes con propiedades geométricas propias naturales o representadas gráficamente.

Para Khairy (2012) “un modelo geométrico 2D es un modelo geométrico de un objeto como figura bidimensional, por lo general sobre un plano euclidiano o cartesiano”. Además, un modelado geométrico comprende un conjunto de técnicas que se emplean para crear objetos a partir de primitivas. Técnicas utilizadas en varias disciplinas, como la Geometría Analítica y Descriptiva, la Topología, la Teoría de Conjuntos, el Análisis Numérico, las Estructuras de Datos, el Cálculo Vectorial y los Métodos Matriciales (Ramos, 2009, p.2).

2.2.2. Espiral

Una espiral es una curva que, empezando desde un punto de origen, disminuye continuamente su curvatura al alejarse de ese punto; o, en otras palabras, cuyo radio de curvatura crece sin cesar. Esta definición es lo bastante amplia como para incluir multitud de diferentes curvas, pero, por otra parte, excluye al menos una que, en términos populares, somos propensos a confundir con una verdadera espiral.

“La palabra espiral, en su sentido matemático, significa, propiamente hablando, una curva plana trazada por un punto que serpentea alrededor de un polo fijo desde el cual se aleja continuamente; pero el uso de la palabra se ha extendido a otras curvas, por ejemplo, las denominadas espirales sinusoidales, en las que el punto de referencia se mueve alternativamente hacia y desde el polo.” (Lockwood, 1961, p.173).

Ahora bien, “entre todas las espirales planas mostradas en conchas, se ha reconocido por mucho tiempo que el «*Nautilus pompilius*» exhibe la más bella de todas y una tan estrechamente relacionada con curvas matemáticas” (Cook, 1914). La espiral proviene del griego «*spyrax*», que significa caracol. Una espiral matemática, es una línea curva generada por un punto que se va alejando progresivamente del centro a la vez que gira alrededor de él. Normalmente se define con una función que depende de dos valores: el ángulo del punto respecto a un eje de referencia, y la distancia desde este punto al centro, situado en el vértice del ángulo.

2.2.2.1. Espiral Logarítmica

Si consideramos el movimiento de un punto que parte del polo en coordenadas polares y en vez de desplazarse con una velocidad uniforme nuestro punto se mueve a lo largo del radio vector con una velocidad que se incrementa conforme aumenta su distancia al polo, entonces el camino descrito se denomina espiral equiangular. Ahora, los ángulos del vector alrededor del polo son proporcionales a los logaritmos de los radios sucesivos; y es por esta circunstancia que se le dio el nombre alternativo de espiral logarítmica. Cabe mencionar también que esta curva como exhibe propiedades, recibe variadas denominaciones, por ejemplo James Bernoulli la llamó espiral logarítmica; P. Nicolás la denominó espiral geométrica, porque los radios a ángulos polares iguales están en progresión geométrica, Halley la llamó espiral proporcional porque las partes que un radio corta en vueltas sucesivas están en la misma proporción y por último Roger Cotes volvió a la primera de todas las definiciones a la de Descartes y la llamó la espiral equiangular (Thompson, 2011, p.176).

Una espiral logarítmica, es la curva definida por un objeto que se mueve con velocidad lineal constante y velocidad angular. Se le llama espiral equiangular porque el mismo ángulo de giro, puestos a construirla, crece en progresión aritmética y se llama espiral geométrica porque el radio es el que crece en progresión geométrica.

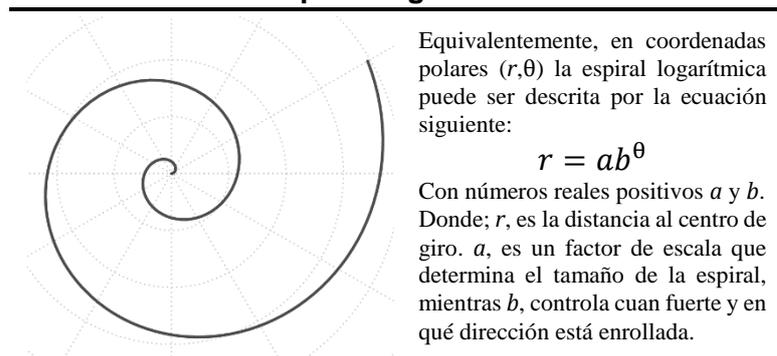
Martín (2013) nos dice que “la espiral logarítmica o equiangular toma este nombre porque proviene de la forma en que el radio cambia a medida que nos movemos alrededor de la curva y que tiene una propiedad fundamental única y es que su forma no se altera cuando aumenta su tamaño” (p.15).

Por otro lado, el término espiral logarítmica también se debe a Pierre Varignon y fue estudiada por Descartes en 1638 y Torricelli, pero la persona que le dedicó un libro a esta curva fue Jakob Bernoulli y la llamó «*Spira mirabilis*» o espiral maravillosa. D'Arcy Thompson le dedicó un capítulo de su tratado «*On Growth and Form*» en 1917.

Además, la espiral logarítmica se distingue de la espiral de Arquímedes por el hecho de que las distancias entre sus brazos se incrementan en progresión geométrica y si trazáramos cualquier línea recta al origen desde cualquier punto de la espiral, entonces cortará a la espiral con un mismo ángulo α , que se puede calcularse en radianes. Del mismo modo si comenzamos en un punto P y vamos moviéndolo hacia dentro, a lo largo de la espiral, hay que rodear el origen infinitas veces antes de alcanzarlo; sin embargo, la distancia total de este camino es finita, el primero en darse cuenta de esto fue Torricelli incluso antes de que se ideara el cálculo infinitesimal y cuya distancia total está dada por $r / \cos \alpha$, donde r , es la distancia en línea recta desde P al origen.

De otra forma también, Weisstein (2004) refiere que la espiral logarítmica también se le conoce como espiral de crecimiento. Cuya ecuación polar está dada por $r = ae^{b\theta}$ donde r , es la distancia desde el origen, θ es el ángulo del eje X, a y b son constantes arbitrarias. Ahora, las superficies de una espiral logarítmica, son notablemente menores que para una superficie plana puesto que esta última abarca mayor área (Arias, 2015).

FIGURA 1
Espiral Logarítmica



Elaboración: El ejecutor.

2.2.2.2. Espiral Hiperbólica

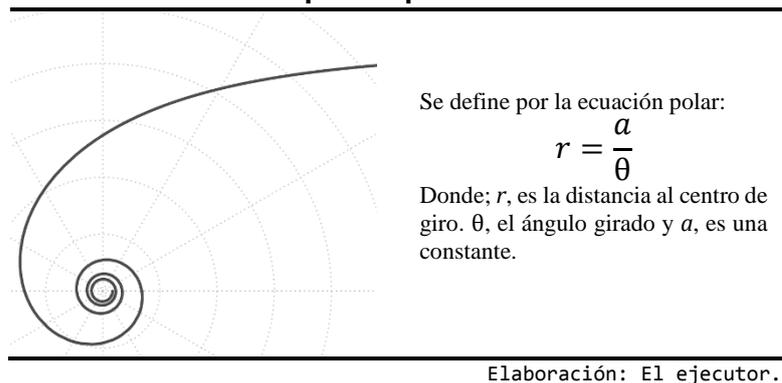
Weisstein (2004) nos dice que la espiral hiperbólica es una espiral de Arquímedes con la ecuación polar $r = a/\theta$. “La espiral hiperbólica, también llamada espiral inversa” (Whittaker, 1944), se originó con Pierre Varignon en 1704 y fue estudiada por Johann Bernoulli entre 1710 y 1713, así como por Cotes en 1722.

La espiral hiperbólica, tiene por ecuación $p\theta = a$ o $p = a/\theta$, siendo a un número real positivo, consta de una asíntota que es una recta paralela al eje polar y alejada de él una distancia a . La propiedad de la espiral hiperbólica es que tiene constante la subtangente. Si representamos por a esta subtangente, igualaremos este valor al de la subtangente de una curva polar (Boucharlat, 1834; Gómez, García, Pina y Navarro, 2003).

Fue descubierta por Pierre Varignon en 1704 y luego estudiada por Johann Bernoulli entre 1710 - 1713 y también por Roger Cotes en 1722. Una espiral hiperbólica es una curva plana trascendental, también conocida como espiral recíproca y es la inversa de la espiral de Arquímedes (Whittaker, 1944). Comienza en una distancia infinita del polo central (para θ comenzando desde

cero, $r = a/\theta$ comienza desde el infinito), y se enrolla cada vez más rápidamente mientras se aproxima al polo central, la distancia de cualquier punto al polo, siguiendo la curva, es infinito. Una propiedad de la espiral hiperbólica es que, esta curva tiene como asíntota una línea recta que dista a unidades del polo.

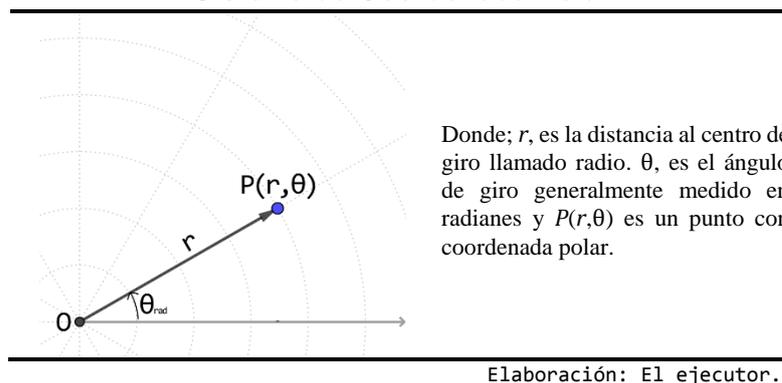
FIGURA 2
Espiral Hiperbólica



2.2.3. Sistema de Coordenadas Polares

El concepto abstracto de sistema de coordenada polar se debe a sir Isaac Newton, quien en su libro «*The Method of fluxions and infinite series*» de 1671 y publicado en 1736, introduce ocho nuevos sistemas de coordenadas, incluso las cartesianas, para resolver problemas relativos a tangentes y curvas, uno de los cuales, el séptimo, es el de coordenadas polares (Boyer, 2008). Un sistema polar representa coordenadas bidimensionales, en donde cada uno de los puntos se determina por una distancia y un ángulo. Villena (2007) dice que “si hacemos que un punto en un plano represente un vector de magnitud r que parte desde el origen y que tiene ángulo de giro θ , tendríamos una forma de definir un punto polar” (p.78).

FIGURA 3
Sistema de Coordenada Polar



Denotar un punto de esta manera, con el valor de r y de θ , indica el par ordenado (r,θ) , siendo una coordenada polar. Su localización especifica su posición relativa con respecto a una recta fija y a un punto fijo de esa recta. La recta fija se hace llamar eje polar; el punto fijo central O se llama polo.

2.2.4. Especies Botánicas Altoandina Espiraladas del Sector Jipa

2.2.4.1. Viguiera Pflanzii Perkins

Es una planta anual, tallos erectos, pubescentes laxamente hojosas de 1 - 1,5 cm de altura. Hojas alternas, cortamente pecioladas ovado - lanceoladas, acuminadas en el ápice y atenuadas en la base, aserradas, trinervadas, pubescentes en ambas caras de 45 - 110 mm de largo por 25 - 40 mm de ancho. Capítulos solitarios formando cimas laxas corimbiformes largamente pedunculados. Involucro anchamente acampanado de 15 - 25 mm agudas, estrigoso, pubescentes en el dorso y en el margen. Flores dimorfas, las marginales, amarillas, lígula oblonga asexual, tridentada en el ápice; flores de disco, amarillas hermafroditas con corola tubulosa, pentadentada de 9 mm de longitud. Paleas agudas de 7 mm de largo por 1 mm de ancho. Aquenio oblongo ligeramente comprimido. Pappus formado por 2 aristas caedizas de diferente dimensión. (Rossel, 1993).

Arbusto perennifolio, ramoso, tallo de consistencia semileñosa, de 120 x 150 cm de diámetro de cobertura, entrenudos de 1 - 10 cm Hojas opuesto - decusadas, oblongas, de 6 x 3 cm, aserradas, con nervadura reticulada e imperfecta, cubiertas de tricomas acúleos y blancos. Inflorescencia en capítulos terminales dispuestos en racimos; involucre de 15 x 20 mm, radiados, con tres series de brácteas imbricadas, lanceoladas, de 8 x 3 mm, receptáculo con páleas. Flores amarillas, dimorfas, las marginales de 10 - 14, labiadas, femeninas, 20 x 8 mm de limbo, cáliz reducido a pelos pequeños, blancos y simples que salen del tubo de la corola; flores las del disco, numerosas, tubulosas, pentadentadas, hermafroditas; estambres con anteras unidas; ovario ínfero y estilo dividido en dos ramas. Fruto, un aquenio. (Linares y Benavides, 1995).

FIGURA 4
Viguiera Pflanzii Perkins



Izq. Muestra del Herbario del Museo de París 1865
Der. Foto de la especie en el sector Jipa

2.2.4.2. *Erodium Cicutarium* (L.) L'Her. ex Aiton

Es una planta anual o perenne de 30 - 40 cm de altura, pubescente, con tallo tendidos o ascendentes; hojas bipinnatisectas, con frecuencia dividida nuevamente; estípulas agudas. Flores en umbelas definidas, 3 - 5 flores largamente pedunculadas, sépalos 3 - 4 mm de longitud, mucronados hirsutos; pétalos rosados, pequeños, caedizos, unguiculados de 5 mm de longitud; estambres 5, fértiles, con la base algo unidas alternado con estaminodios más cortos; ovario 5 lobado, 5 locular, rostrado; estilos que se enrollan espiralmente en la madurez; óvulos 2 por lóculo, madurando solo 1. Fruto formado por 5 esquizocarpos, monospermos cubierto por largas cerdas en su cara interior y separándose por el enroscamiento de sus rostros, pico del fruto que alcanza de 3 - 4 cm de longitud. Semilla exalbuminadas. (Rossel, 1994).

Planta anual, el tallo 0.3 - 3 dm alto, rojizo, los ganglios hinchados. Hojas principalmente basales, pinada - pinatinítico a pinar divididas y las divisiones finales muy estrechas; estipulaciones interpeciolar, aguda. Flores con inflorescencia de umbelas en pedúnculos largos y axilares; flores pocas, 10 - 15 mm ancho; sépalos 5, distintos, erizados, con una punta de aguja; pétalos 5, rosa, la garra con pelos marginales; filamentos 10, distintos, alternando largo y corto, solo los más largos con anteras; estilos 5, persistente 2,5 - 5 cm largo, en espiral torcida en la madurez. Frutos, carpelos 5, puntiagudas en la base. (Giblin, 2013). Y el lanzamiento de semillas se logra utilizando un mecanismo de resorte propulsado por cambios de forma a medida que los frutos se secan. (Evangelista, Hotton y Dumais, 2010).

FIGURA 5
Erodium Cicutarium (L.) L'Her. ex Aiton



Izq. Muestra del Herbario de la Universidad del Oeste de Alabama 2015
Der. Foto de la especie en el sector Jipa

2.2.4.3. *Echinopsis Maximiliana* Heyder ex A. Dietrich

Su nombre científico aceptado es *Echinopsis Maximiliana* Heyder ex A. Dietrich 1846 (Autores: Heyder, Edward; Ex Autores: Dietrich, Albert Gottfried). Sinónimos: *Lobivia maximiliana* (Heyder ex A. Dietrich) Backeberg 1937 (Autor: Backeberg, Curt); *Lobivia maximiliana* (Heyder ex A. Dietrich) Backeberg ex Rausch 1975 (Autor: Backeberg, Curt; Ex Autor: Rausch, Walter) entre otros muchos. Nombres comunes que adopta: Sink'ayu - Sank'ayu, Khiska.

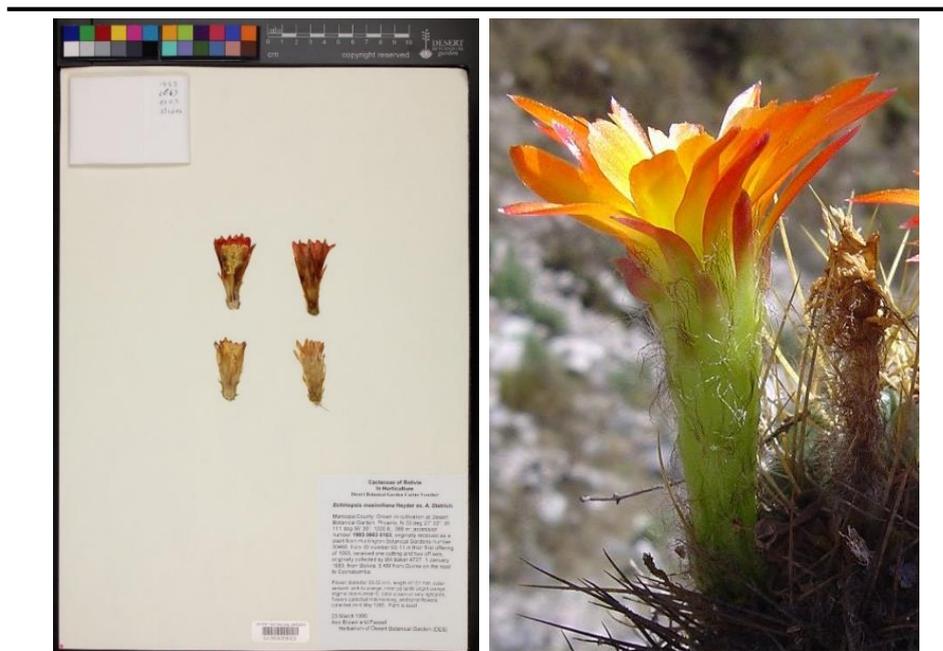
Es una planta nativa, perenne, verde, de tallo depreso - globosa de 8 - 10 cm de diámetro. Raíz napiforme frecuentemente en agrupaciones, conformando muchos tallos esféricos, algunos de más de 10 cm de diámetro costillas escalonadas 14 - 20; espinas curvadas de 1 - 2 cm de longitud. Algunas matas con espinas rígidas hasta de 10 cm de longitud. Espinas de color amarillo pálido a rojo fuego en el extremo apical. Flores vistosas, diurnas, hermafroditas, sésiles,

de 4 - 5,5 cm de altura con un diámetro superior de 3 - 4 cm; pétalos de color bermellón más intenso; estambres numerosos, insertos en la pared interna del receptáculo en fascículos 3 - 4 o más niveles, filamentos delgados, anteras bitecas, pistilo con estilo delgado de 23 mm de altura, estigma dispuesto en lóbulos delgados. Fruto de baya globosa de 15 - 20 mm de diámetro. Semillas pequeñas negras, punctuladas. (Rossel, 1994).

Echinopsis Maximiliana, es una especie de cactus ampliamente distribuida y muy variable que comúnmente forma racimos. Tiene cabezas globulares de color verde oscuro a cabezas cilíndricas cortas de unos 5 cm de diámetro; cada cabeza tiene hasta 20 costillas. El color de la columna vertebral varía de blanco roto y amarillo a marrón. Las flores son muy hermosas, de color rojo anaranjado con gargantas amarillo anaranjado y de larga duración. Se reconocen tres subespecies (Hunt et al., 2006), a saber, la forma nominada, subsp. *caespitosa* (JA Pupus) M. Lowry y subsp. *Westii* (Hutchison) M. Lowry. Tallos deprimido - esférico, a ovoide, a cilíndrico corto, verde hierba a verde oscuro, brillante, 7 - 20 cm de altura y 5 - 7.5 cm de diámetro. Costillas: 12 - 20 o más, recto, agudo, con tubérculos en forma de hacha entre las areolas. Areolas blanquecinas con poca lana, a 2 cm de distancia. Espinas extremadamente variables, generalmente no claramente diferenciadas como centrales y radiales. Espinas radiales de 4 - 12, a 1.25 - 5 cm de largo, curvadas, desiguales, de color amarillo pardusco. Espinas centrales; ausente o 1 - 2, hasta 7 cm de largo, curvado, desigual, de pardusco a amarillento, 3 - 5 cm de largo; ausente central o 1 a 7 cm, curvado hacia arriba. Flores, en forma de embudo, escarlata con gargantas de color amarillo anaranjado de 5 - 8 cm de largo y de diámetro, a veces los tépalos internos se vuelven más oscuros. Tépalos internos algo reducidos más o menos erectos.

Estambres agrupados alrededor del estilo. Tubo muy peludo. (Anderson, 2001; Britton y Rose, 1922; Cullen, Knees y Cubey, 2011; Cullmann et al, 1984; Haustein, 1983; Hecht, 1982; Hunt, 2006; Lamb, 1991; Lowry, Ostalaza, Cáceres, y Roque, 2013; Rausch, 1975).

FIGURA 6
Echinopsis Maximiliana Heyder ex A. Dietrich



Izq. Muestra del Herbario de la Jardín Botánico del Desierto, Arizona 1995
Der. Foto de la especie en el sector Jipa

2.2.4.4. *Cumulopuntia boliviana* (Salm-Dyck) F. Ritter

Nombres comunes que adopta Copana, Espina, Kepo, Puscaya, Puskayo, Pulla Pulla. La *Cumulopuntia Boliviana* es un cactus amortiguador densamente armado con espinas de color marrón dorado. Forma grandes montículos de hasta 100 cm de diámetro, comprende varias formas locales o morfológicas que difieren ligeramente en apariencia de un lugar a otro a lo largo de su rango. En el cultivo parece un poco complicado, no desarrolla las espinas densas y generalmente no florece. El complejo a menudo se evalúa como una sola especie. Raíz, tiene una raíz napiforme gruesa. Segmentos del tallo alargados a

ovoides, verde claro, tuberculados apicalmente 3,5 - 7 cm de largo 3,5 - 4 cm de diámetro. Tubérculos al principio bien delimitados, más tarde apenas discernibles, principalmente en las partes superiores de los segmentos. Areolas, alrededor de 15, cerca de las puntas del segmento, redondeadas, de unos 4 mm de ancho, con un anillo de gloquidios amarillo pardusco, con un pequeño centro de color blanco o amarillento. Arenas basales sin espinas. Hojas minuto y efímero. Espinas 1 a 10 o más, solo en las areolas más altas cerca de las puntas del segmento, erectas o ligeramente extendidas, rectas, redondeadas o ligeramente comprimidas, algunas delgadas a flexibles, de color amarillo a marrón rojizo, y a veces muy pocas espinas secundarias más cortas 3 - 10 mm de largo, blancuzco y erizado, todo se vuelve gris e incluso negro con la edad. Flores amarillo raramente naranja, rosa o rojo, hasta 4 - 5,5 cm de largo, 5 - 6 cm de diámetro; pericarpelos erizados arriba. Los tépalos pequeños espátula más o menos mucronato. Tépalos exteriores de color amarillo pálido o ligeramente. (Anderson, 2001; Cullen, Knees y Cubey, 2011; Egli y Newton, 2010; Hunt, Taylor y Charles, 2006; Ritter, 1980; Trevisson, Lowry, Kiesling, Cáceres, Faundez y Ostalaza, 2013).

Género de plantas de crecimiento bajo que se ramifican lateralmente o en el ápice, con tallos más o menos compactos, segmentados, esféricos, elipsoides o en forma de huevo, formando generalmente cojines muy espinosos. Raíces tuberosas o fibrosas. Diminutas hojas que pronto caen. Areolas con pelos y gloquidios. Las espinas a menudo se concentran en la parte superior de los tallos. Flores diurnas, autoestériles, en forma de embudo a forma de campana, amarillas, naranjas o rojas, polinizadas por himenópteros o dípteros, también por escarabajos. Los frutos varían en forma, globulares a ovoides, espinosos y

cubiertos de gloquidios, gruesos y carnosos, aunque las semillas permanecen secas en el interior. Semillas comprimidas, suborbiculares, de color pajizo a café. (Lodé, 2015).

FIGURA 7
Cumulopuntia Boliviana (Salm-Dyck) F. Ritter



Izq. Muestra del Herbario de la Jardín Botánico del Desierto, Arizona 2004 Der. Foto de la especie en el sector Jipa

2.3. Marco Conceptual

Altoandina: Región situada por encima de los 3800 m.s.n.m. y con un clima frío de montaña subhúmedo.

Botánica: Proviene del griego *botano*, que significa hierba. Ciencia que se ocupa del estudio de los vegetales bajo todos sus aspectos forma, estructura, reproducción, fisiología, metabolismo, identificación, distribución.

Espiral: Proviene del griego *spyrax*, que significa caracol. Línea curva generada por un punto que se va alejando progresivamente del centro a la vez que gira alrededor de él.

Modelación: Método de investigación teórica consistente en la reproducción natural o artificial de un objeto original para el estudio de sus particularidades.

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Ubicación Geográfica del Estudio

El sector fitogeográfico de estudio es conocido como Jipa, del Distrito de Atuncolla, de la Provincia de Puno, Región Puno de la República del Perú. Con una superficie total de 241,87 has.; situada a unos 3822 m.s.n.s.m. y localizada a 70°5'42" W y 15°39'36" S, Anexo A.

3.2. Periodo de Duración del Estudio

El estudio de investigación se extendió por 2 años aproximadamente. La exploración se llevó a cabo en marzo del año 2017, en la estación fluvial. Y la modelación geométrica fue en noviembre del mismo año y durante el año 2018 se efectuó la interpretación de los resultados.

3.3. Procedencia del Material Utilizado

Todo material, herramienta e instrumento utilizado en la presente investigación corresponde al propio ejecutor.

3.4. Población y Muestra del Estudio

La población asciende a 77 especies de flora (botánica) altoandina Anexo F y la muestra está constituida por 4 especies de flora altoandina *Viguiera Pflanzii* Perkins, la *Erodium Cicutarium* (L.) L'Her. ex Aiton, la *Echinopsis Maximiliana* Heyder ex A. Dietrich y la *Cumulopuntia Boliviana* (Salm-Dyck) F. Ritter, que poseen la característica de forma de espiral.

3.5. Diseño Estadístico

La estadística utilizada fue la descriptiva a través del uso de estadígrafos como la media aritmética y la desviación estándar. En general, la media aritmética es un promedio razonablemente estable que no es afectada hondamente por algunos pocos valores moderadamente pequeñas o moderadamente grandes y su estabilidad aumenta con la frecuencia total; está dada por la siguiente expresión: $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x/n$. Mientras que, la desviación estándar es una medida de dispersión para variables de razón y de intervalo; está dada por la siguiente expresión: $s = \sqrt{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})^2/n - 1]}$. La media aritmética se utilizó en los valores de los ángulos tangenciales. Y la desviación estándar, en los valores de los ángulos tangenciales y en la razón geométrica de los radios.

3.6. Procedimiento

El procedimiento efectuado en la presente investigación se extiende por etapas:

- Al principio se llevó a cabo la exploración en la zona fitogeográfica señalada Anexo A. Luego se hizo un registro de todas las especies de flora altoandina Anexo F, al mismo tiempo se seleccionaba aquellas especies que mostraban curvas naturales en forma de espiral, empleándose para esto el Instrumento 01, Anexo C.
- Después, se procede al reconocimiento de la nomenclatura formal, proceso que es conocido como de clasificación (taxonomía), por medio del Instrumento 02, Anexo D, pero solo de las especies que presenten la característica.
- Luego, se hace una breve descripción de la parte estructural de la planta donde se observa la forma buscada, es decir, la forma de espiral está

dispuesta en una o varias partes del vegetal, realizándose por medio del Instrumento 03, Anexo E.

- Finalmente, realizados los descubrimientos de las especies botánicas con forma de espiral, clasificadas y descrita la forma en medio de su estructura vegetal, se procedió a modelar geoméricamente las especies, el cual era nuestro objetivo principal de investigación. Para lograr esto, se utilizó el software de matemática dinámica Geogebra (Anexo B), por medio de curvas Bézier, y el empleo de múltiples instrucciones expresiones y fórmulas.

3.7. Variables

La variable de investigación es: Modelación geométrica de espirales naturales. Con las siguientes dimensiones: Espiral logarítmica y espiral hiperbólica que abarca los siguientes indicadores para la primera dimensión: Cualquier línea recta al origen cortará a la espiral logarítmica con el mismo ángulo tangencial. Si el ángulo de giro, crece en progresión aritmética el radio crece en progresión geométrica y la distancia de cualquier punto al polo, siguiendo la curva, es finita. Y con los siguientes indicadores para la segunda dimensión: La distancia de cualquier punto al polo, siguiendo la curva, es infinito. La curva tiene como asíntota una línea recta que dista a unidades del polo y es la inversa de la espiral de Arquímedes. Finalmente, para ambas dimensiones la categoría y escala de medición son: El metro, el radián y constantes de números reales.

3.8. Análisis de los Resultados

Para la modelación geométrica de las espirales naturales de la botánica altoandina, se fotografió las especies y mediante el software de matemática dinámica Geogebra, se importa este archivo digital. Procediéndose a realizar el trazado de curvas, rectas, ángulos y radios, generándose valores cuantitativos, que son sometidos a la prueba de propiedades geométricas, para espirales logarítmicas e hiperbólicas. Permittiéndonos elaborar nuestras Figuras 8 a 11 y Tablas 1 a 12.

Para la identificación de las plantas altoandinas, se utilizó el Anexo C, que consiste en registrar por medio de la realización de un trabajo de campo, en una Ficha de Observación las especies de botánica altoandina que presenten la característica en estudio, o sea, la forma de espiral natural. Lo cual nos permite elaborar nuestra Tabla 13.

Para la clasificación de las plantas altoandinas, se recurre a: The International Plant Name Index IPNI, quien contiene una extensa fuente de información de las especies de botánica a nivel mundial. Descargamos dicha información que nos proporciona características taxonómicas inherentes a cada especie. Y nos permite la elaboración de nuestras Tablas 14 a 17.

Para la descripción de las plantas altoandinas, se utilizó el Anexo E, que es un cuadro de doble entrada en donde brindamos una transcripción literaria en detalle de parte específica del vegetal donde se encuentra la forma estudiada, o sea la forma de espiral. Que nos ayuda a elaborar la Tabla 18.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

5.1. Resultados

5.1.1. Modelación Geométrica de Plantas Altoandinas con Forma Espiral

Porque nuestro objetivo general expresa: Establecer la modelación geométrica de las plantas altoandinas con forma de espiral y para contrastar la hipótesis general donde propusimos que: La modelación geométrica de las plantas altoandinas con forma de espiral, son necesariamente hiperbólica o logarítmica. Presentamos a continuación la operación de la variable, dimensiones e indicadores con ayuda de la herramienta Geogebra, Anexo B.

FIGURA 8
Modelación Geométrica: Espiral Logarítmica
para *Viguiera Pflanzii* Perkins

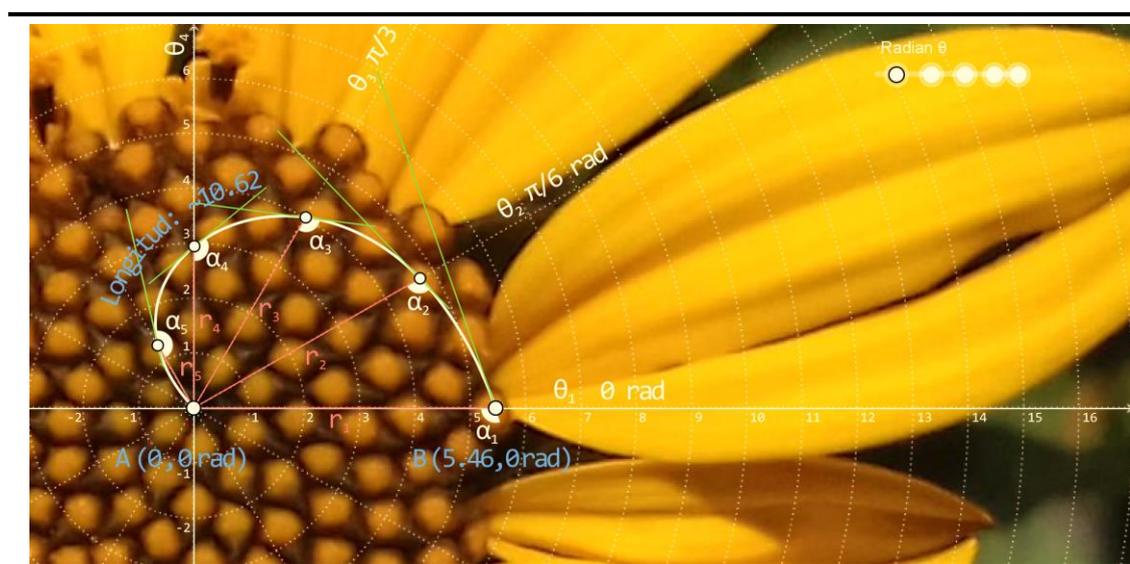


Foto: Ing. Nitson Zapana.
Modelación Geogebra: El ejecutor.

TABLA 1
Propiedad 1: Ángulo tangencial constante
Radianes θ *Ángulo Tangencial α*

$\theta_1 =$	$= 0.00$ rad	$\alpha_1 = 1.89$ rad
$\theta_2 = \pi/6 =$	0.52 rad	$\alpha_2 = 1.81$ rad
$\theta_3 = \pi/3 =$	1.04 rad	$\alpha_3 = 1.97$ rad
$\theta_4 = \pi/2 =$	1.57 rad	$\alpha_4 = 2.26$ rad
$\theta_5 = 2\pi/3 =$	2.09 rad	$\alpha_5 = 2.85$ rad
Media = 2.16		
Desviación típica = 0.42		

TABLA 2
Propiedad 2: Radio creciente en progresión geométrica
Radianes θ *Radio r*

$\theta_1 =$	$= 0.00$ rad	$r_1 = 5.46$
$\theta_2 = \pi/6 =$	0.52 rad	$r_2 = 4.72$
$\theta_3 = \pi/3 =$	1.04 rad	$r_3 = 4.02$
$\theta_4 = \pi/2 =$	1.57 rad	$r_4 = 2.93$
$\theta_5 = 2\pi/3 =$	2.09 rad	$r_5 = 1.31$
Razón geométrica = 2.24, 1.37, 1.17, 1.16		
Desviación típica = 0.51		

TABLA 3
Propiedad 3: Distancia del Punto siguiendo la curva es finita
Puntos (r, θ) *Distancia*

A = (0.00, 0.00 rad)	$L_{AB} = \sim 10.62$
B = (5.46, 0.00 rad)	
Donde: L: Longitud	

Interpretación:

De la Figura 8 y Tablas 1 a 3, se puede decir que los resultados contravienen 2 propiedades matemáticas, la primera que explica que el ángulo que describe (α_i) la recta tangencial en cualquier punto de la espiral logarítmica con el radio en ese punto, permanece siempre constante.

Aparece una dispersión de (0.42), cuando lo ideal es que tienda a (0). Ahora, en la segunda propiedad de la progresión geométrica de los radios (r_i) presenta una

desviación de (0.51) para ángulos de giro en progresión aritmética (θ_i). Finalmente, si cumple la tercera propiedad, porque la distancia es finita ascendiendo a (10.62) unidades. Por los resultados, podemos afirmar que, la disposición de las flores de la especie *Viguiera Pflanzii Perkins*, posee una forma parecida a la espiral logarítmica conocida con la ecuación $r = a^\theta$.

FIGURA 9
Modelación Geométrica: Espiral Hiperbólica para *Erodium Cicutarium* (L.) L'Her. ex Aiton

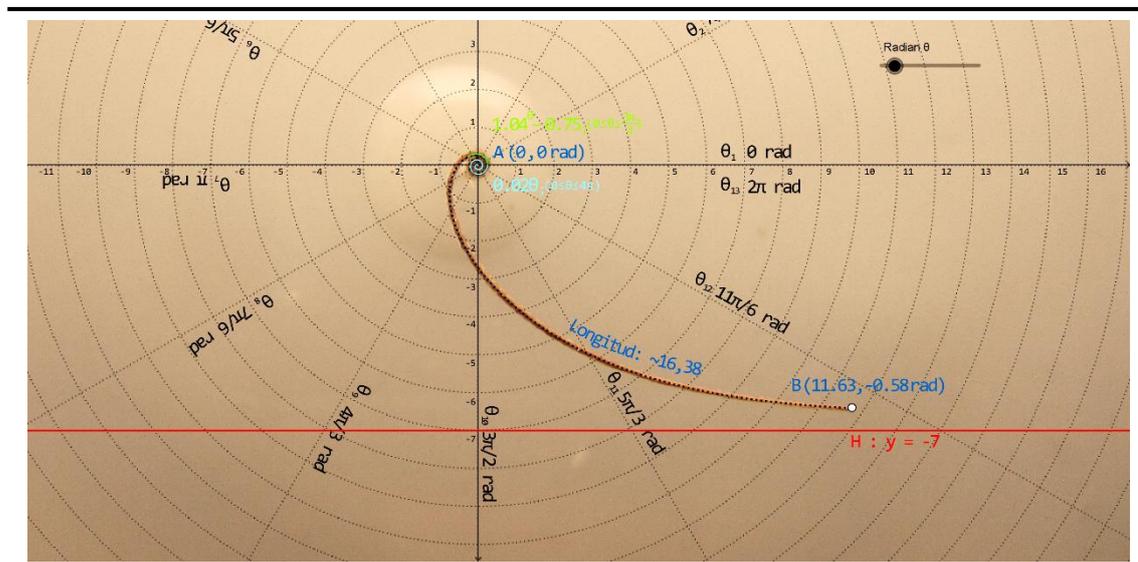


Foto: El ejecutor.
Modelación Geogebra: El ejecutor.

TABLA 4
Propiedad 1: Distancia del Punto siguiendo la curva es ∞

Puntos (r, θ)	Distancia
A = (00.00, 0.00 rad)	$L_{AB} = \sim 16.38$
B = (11.63, -0.58 rad)	

Donde:
L: Longitud

TABLA 5
Propiedad 2: Existencia de Asíntota Recta H

$$y = -7$$

Ecuación en coordenadas cartesianas

TABLA 6

Propiedad 3: Es Inversa de la Espiral Aritmética
Ecuación modelada en coordenadas polares

$$\left[\begin{array}{l} 0.02\theta; (0 \leq \theta \leq 4\pi) E. Arq^* \\ 1.04^\theta - 0.75; \left(0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\right) E. log^{**} \end{array} \right]$$

*Espiral Arquímedes; ** Espiral Logarítmica

Interpretación:

De la Figura 9 y Tablas 4 a 6, decimos que primera propiedad define que, la distancia de cualquier punto de la espiral hiperbólica al origen es infinita, sin embargo, en la especie botánica *Erodium Cicutarium* (L.) L'Her. ex Aiton, se demuestra que la longitud de la curva tiene medida finita, para este caso aproximadamente (16.38) unidades, contraviniendo a la propiedad. Ahora respecto a la segunda propiedad, la recta H con ecuación cartesiana $y = -7$, no puede ser una posible asíntota para la curva espiral, porque la definición de asíntota, la describe como una recta límite a una curva infinita. Por último, la tercera propiedad refiere que una espiral hiperbólica es una inversa de la Espiral Aritmética, es decir, su ecuación es de la forma $r = a\theta^{-1}$, y como podemos apreciar la ecuación modelada tiene la forma de Arquímedes $r = a\theta$ y Logarítmica $r = a^\theta$. Por tanto, la espiral de esta especie es solo aparente a una espiral hiperbólica.

FIGURA 10
Modelación Geométrica: Espiral Logarítmica
para Echinopsis Maximiliana Heyder ex A. Dietrich

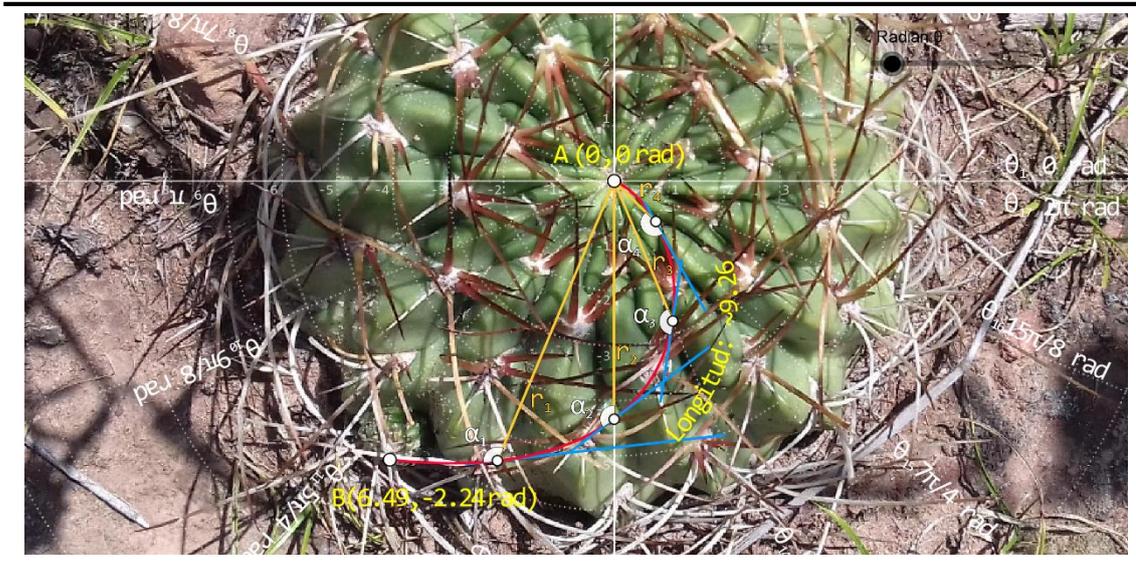


Foto: Ing. Nitson Zapana.
 Modelación Geogebra: El ejecutor.

TABLA 7

Propiedad 1: Ángulo tangencial constante

Radianes θ	Ángulo Tangencial α
$\theta_1 = 11\pi/8 = 4.32 \text{ rad}$	$\alpha_1 = 2.08 \text{ rad}$
$\theta_2 = 3\pi/2 = 4.71 \text{ rad}$	$\alpha_2 = 2.22 \text{ rad}$
$\theta_3 = 13\pi/8 = 5.11 \text{ rad}$	$\alpha_3 = 2.06 \text{ rad}$
$\theta_4 = 7\pi/4 = 5.50 \text{ rad}$	$\alpha_4 = 2.86 \text{ rad}$

Media = 2.31
 Desviación típica = 0.38

TABLA 8

Propiedad 2: Radio creciente en progresión geométrica

Radianes θ	Radio r
$\theta_1 = 11\pi/8 = 4.32 \text{ rad}$	$r_1 = 5.51$
$\theta_2 = 3\pi/2 = 4.71 \text{ rad}$	$r_2 = 4.32$
$\theta_3 = 13\pi/8 = 5.11 \text{ rad}$	$r_3 = 2.75$
$\theta_4 = 7\pi/4 = 5.50 \text{ rad}$	$r_4 = 1.06$

Razón geométrica = 2.59, 1.57, 1.28
 Desviación típica = 0.69

TABLA 9

Propiedad 3: Distancia del Punto siguiendo la curva es finita

Puntos (r, θ)	Distancia
$A = (0.00, 0.00 \text{ rad})$	$L_{AB} = \sim 9.26$
$B = (6.49, -2.24 \text{ rad})$	

Donde:
 L: Longitud

TABLA 10
Propiedad 1: Ángulo tangencial constante
Radianes θ *Ángulo Tangencial α*

$\theta_1 =$	$= 0.00$ rad	$\alpha_1 = 1.80$ rad
$\theta_2 = \pi/4$	$= 0.79$ rad	$\alpha_2 = 1.74$ rad
$\theta_3 = \pi/2$	$= 1.57$ rad	$\alpha_3 = 1.62$ rad
$\theta_4 = 3\pi/4$	$= 2.36$ rad	$\alpha_4 = 1.58$ rad
$\theta_5 = \pi$	$= 3.14$ rad	$\alpha_5 = 1.57$ rad
$\theta_6 = 5\pi/4$	$= 3.93$ rad	$\alpha_6 = 1.58$ rad
$\theta_7 = 3\pi/2$	$= 4.71$ rad	$\alpha_7 = 1.55$ rad
$\theta_8 = 7\pi/4$	$= 5.50$ rad	$\alpha_8 = 1.88$ rad
$\theta_9 = 2\pi$	$= 6.28$ rad	$\alpha_9 = 2.54$ rad

Media = 1.76
 Desviación típica = 0.31

TABLA 11
Propiedad 2: Radio creciente en progresión geométrica
Radianes θ *Radio r*

$\theta_1 =$	$= 0.00$ rad	$r_1 = 7.67$ rad
$\theta_2 = \pi/4$	$= 0.79$ rad	$r_2 = 6.43$ rad
$\theta_3 = \pi/2$	$= 1.57$ rad	$r_3 = 5.92$ rad
$\theta_4 = 3\pi/4$	$= 2.36$ rad	$r_4 = 5.79$ rad
$\theta_5 = \pi$	$= 3.14$ rad	$r_5 = 5.78$ rad
$\theta_6 = 5\pi/4$	$= 3.93$ rad	$r_6 = 5.77$ rad
$\theta_7 = 3\pi/2$	$= 4.71$ rad	$r_7 = 5.80$ rad
$\theta_8 = 7\pi/4$	$= 5.50$ rad	$r_8 = 5.44$ rad
$\theta_9 = 2\pi$	$= 6.28$ rad	$r_9 = 2.79$ rad

Razón geométrica = 1.95, 1.07, 0.99, 1.00, 1.00, 1.02, 1.09, 1.19
 Desviación típica = 0.32

TABLA 12
Propiedad 3: Distancia del Punto siguiendo la curva es finita
Puntos (r, θ) *Distancia*

A = (0.00, 0.00 rad)	$L_{AB} = \sim 40.49$
B = (7.67, 0.00 rad)	

Donde:
 L: Longitud

Interpretación:

De la Figura 11 y Tablas 10 a 12, nos dice que la especie de botánica altoandina *Cumulopuntia Boliviana (Salm-Dyck) F. Ritter*, posee una forma parecida a la espiral logarítmica, ya que existe desviación en los ángulos tangenciales (α_i) de (0.31) para la primera propiedad. Mientras, los ángulos de giro (θ_i) en progresión aritmética no generan radios (r_i) en progresión geométrica porque hay una desviación de (0.32) esto para la segunda propiedad. Y para la tercera propiedad si se cumple porque la longitud de la curva espiral es de (40.49) unidades. Por tanto, la forma espiral logarítmica es solo aparente.

5.1.1.1. Identificación de las Plantas Altoandinas con Forma Espiral

Porque nuestro primer objetivo específico expresa: Identificar que plantas altoandinas muestran forma de espiral y para contrastar la primera hipótesis específica donde propusimos que: Si existían plantas altoandinas que presentan forma de espiral. Presentamos a continuación el siguiente resultado con ayuda del Instrumento 01, Anexo C.

TABLA 13
Especies botánicas Altoandinas con presencia espiralada
Jipa-Atuncolla (3822 msnm - 241,87 Has)
Nombres Científicos

Viguiera Pflanzii Perkins
Erodium Cicutarium (L.) L'Her. ex Aiton
Echinopsis Maximiliana Heyder ex A. Dietrich
Cumulopuntia Boliviana (Salm-Dyck) F. Ritter

Fuente: Instrumento 01 Anexo C

Interpretación:

De la Tabla 13, se puede verificar que existen plantas altoandinas con forma espiral, en este caso asciende a 4 especies de un total de 77 que es la población total para el sector de estudio.

5.1.1.2. Clasificación de las Plantas Altoandinas con Forma Espiral

Debido a que nuestro segundo objetivo específico expresa: Clasificar las plantas altoandinas que presentan forma de espiral y para contrastar la segunda hipótesis específica donde propusimos que: Las plantas altoandinas con forma de espiral si se encuentran clasificadas para el sector en estudio, Presentamos a continuación los siguientes resultados con ayuda del Instrumento 02, Anexo D.

TABLA 14
Taxonomía: *Viguiera Pflanzii* Perkins

Dominio	Eukarya
Reino	Plantae
Subreino	Tracheobionta
División (filo)	Magnoliophyta
Clase	Magnoliopsida
Subclase	Asteridae
Orden	Asterales
Familia	Asteraceae
Subfamilia	Asteroideae
Tribu	Heliantheae
Subtribu	Helianthinae
Género	Viguiera
Especie	Viguiera Pflanzii
Nombre	Viguiera Pflanzii Perkins

Fuente: Instrumento 02 Anexo D
IPNI The International Plant Names Index

TABLA 15
Taxonomía: *Erodium Cicutarium* (L.) L'Her. ex Aiton

Dominio	Eukarya
Reino	Plantae
Subreino	-
División (filo)	-
Clase	-
Subclase	-
Orden	Geraniales
Familia	Geraniaceae
Subfamilia	-
Tribu	-
Subtribu	-
Género	Erodium
Especie	Erodium Cicutarium
Nombre	Erodium Cicutarium (L.) L'Her. ex Aiton

Fuente: Instrumento 02 Anexo D
IPNI The International Plant Names Index

TABLA 16

Taxonomía: *Echinopsis Maximiliana* Heyder ex A. Dietrich

Dominio	Eukarya
Reino	Plantae
Subreino	-
División (filo)	-
Clase	Equisetopsida
Subclase	Magnoliidae
Superorden	Caryophyllanae
Orden	Caryophyllales
Familia	Cactaceae
Subfamilia	-
Tribu	-
Subtribu	-
Género	<i>Echinopsis</i>
Especie	<i>Echinopsis Maximiliana</i>
Nombre	<i>Echinopsis Maximiliana</i> Heyder ex A. Dietrich

Fuente: Instrumento 02 Anexo D
IPNI The International Plant Names Index

TABLA 17

Taxonomía: *Cumulopuntia Boliviana* (Salm-Dyck) F. Ritter

Dominio	Eukarya
Reino	Plantae
Subreino	-
División (filo)	Tracheophyta
Clase	Magnoliopsida
Subclase	-
Orden	Caryophyllales
Familia	Cactaceae
Subfamilia	-
Tribu	-
Subtribu	-
Género	<i>Cumulopuntia</i>
Especie	<i>Cumulopuntia Boliviana</i>
Nombre	<i>Cumulopuntia Boliviana</i> (Salm-Dyck) F. Ritter

Fuente: Instrumento 02 Anexo D
IPNI The International Plant Names Index

Interpretación:

De las Tablas 14 a 17, se puede observar que las 4 especies altoandinas halladas que tienen una forma de espiral, están debidamente catalogadas (taxonomizadas), es decir, clasificadas por la comunidad científica.

5.1.1.3. Descripción de las Plantas Altoandinas con Forma Espiral

Porque nuestro tercer objetivo específico expresa: Describir la parte de la estructura con forma de espiral, en plantas altoandinas y para contrastar la tercera hipótesis específica donde propusimos que: Las plantas altoandinas con forma de espiral contienen dicha forma en una parte de su estructura. Presentamos a continuación el siguiente resultado con ayuda del Instrumento 03, Anexo E.

TABLA 18
Partes en la estructura vegetal con característica
Espiral por especie localizada

Part [\] Esp	<i>Viguiera Pflanzii</i>	<i>Erodium Cicutarium</i>	<i>Echinopsis Maximiliana</i>	<i>Cumulopuntia Boliviana</i>
<i>Flor</i>	La disposición de las minúsculas flores en el centro de la flor mayor posee una forma de espiral.			
<i>Fruto</i>	La semilla al desprenderse gira en sentido antihorario formando una helicoide y espiral en 2D.			
<i>TalLo</i>	En el tallo globular de este cactus la disposición de las espinas se encuentran en forma espiral.			Alrededor del tallo alargado de este cactus las espinas se distribuyen en forma espiral.

Fuente: Instrumento 03 Anexo E

Interpretación:

De la Tabla 18, se puede observar que las 4 especies altoandinas halladas con una forma de espiral, presentan esta característica en una parte específica de su estructura vegetal, una en la flor, otra en el fruto y dos en el tallo.

5.2. Discusión

5.2.1. Contrastación de la Hipótesis General

De las 4 especies de flora altoandina del sector Jipa, distrito de Atuncolla, de la provincia de Puno, que presentan forma de espiral, 3 de ellas: La *Viguiera Pflanzii Perkins*, la *Echinopsis Maximiliana Heyder ex A. Dietrich* y la *Cumulopuntia Boliviana (Salm-Dyck) F. Ritter*, al tener una forma parecida a la espiral logarítmica, se les aplicó las propiedades geométricas de la espiral logarítmica: Ángulos tangenciales constantes, ángulos de giro en progresión aritmética provocan radios en progresión geométrica y distancia de un punto siguiendo la curva hasta el polo es finita. Solo cumplieron la tercera propiedad. Y la cuarta especie *Erodium Cicutarium (L.) L'Her. ex Aiton*, al tener una forma parecida a la espiral hiperbólica, se le aplicó las propiedades geométricas de espiral hiperbólica: Distancia de un punto siguiendo la curva hasta el polo es infinita, existencia de asíntota y es inversa de la espiral aritmética. No cumplió ninguna propiedad. Ahora, la hipótesis general propone que: La modelación geométrica de las plantas altoandinas con forma de espiral, son necesariamente hiperbólica o logarítmica, lo cual es rechazada. Por tanto, solo podemos aseverar que la forma, de las espirales naturales de estas especies solo se aproximan en apariencia a una espiral logarítmica e hiperbólica.

5.2.1.1. Contrastación de la Primera Hipótesis Específica

En vista que se hallaron 4 especies altoandinas para el sector fitogeográfico de estudio como son la *Viguiera Pflanzii Perkins*, la *Erodium Cicutarium (L.) L'Her. ex Aiton*, la *Echinopsis Maximiliana Heyder ex A. Dietrich* y la *Cumulopuntia Boliviana (Salm-Dyck) F. Ritter*, con forma espiral. Y como, la primera hipótesis específica proponía su existencia, entonces la hipótesis queda aceptada.

5.2.1.2. Contrastación de la Segunda Hipótesis Específica

A razón de que las 4 especies altoandinas con forma espiral están clasificadas taxonómicamente y por consiguiente poseen una nomenclatura. Y en vista que la segunda hipótesis específica presuponía que ya estaban clasificadas, entonces la hipótesis queda aceptada.

5.2.1.3. Contrastación de la Tercera Hipótesis Específica

Como se pudo comprobar la forma de espiral recae en una parte específica de la estructura vegetal de las especies en estudio, entonces se puede realizar la descripción de esa zona explícitamente. Y como la tercera hipótesis específica presumía que estas plantas tenían esta forma en una parte de su estructura, entonces la hipótesis queda aceptada.

CONCLUSIONES

PRIMERA: Respecto a la modelación geométrica con el software de matemática dinámica Geogebra de las especies botánicas altoandinas con forma de espiral del sector territorial en estudio, aseveraremos que, en cuanto a su forma bidimensional, estas espirales naturales solo se aproximan en apariencia a una espiral logarítmica e hiperbólica, en parte porque no cumplieron algunas propiedades geométricas establecidas por las matemáticas. Esto no quiere decir que no posean características matemáticas, sino que poseen más bien un carácter aleatorio dentro de la naturaleza. Pero, es notable y meritorio reconocer la presencia de «inteligencia» en esta curva natural.

SEGUNDA: En la mayoría de las referencias bibliográficas se hace alusión a la presencia de la curva espiral en la naturaleza en objetos reconocidos por todos, como alcachofas, piñas, girasoles, conchas, y muchos más. Pero quedaba, siempre abierta la idea de que si podíamos encontrar esta forma de curva en zonas donde habitamos, proponiéndose la hipótesis de que si existía. Y resultó ser cierta, porque la identificación de estas maravillosas especies se aunará a todas las demás especies u objetos hallados por nuestra humanidad.

TERCERA: Las especies de botánica altoandina con forma de espiral ya se encontraban clasificadas en base de datos de la comunidad científica especializada por reconocidos botánicos de mucha trayectoria. Es decir, estos vegetales ya gozaban de características taxonómicas.

CUARTA: Las especies de botánica altoandina presentan la forma de curva espiral en diversas partes de su estructura vegetal, no siempre en una sola parte. Por lo que, debe ser descrito de manera precisa y explícita para llevar a cabo el proceso de modelación.

RECOMENDACIONES

PRIMERA: Debido a controversias y hasta confusiones durante mucho tiempo respecto a que, si las formas de la naturaleza y principalmente el de las flores poseían una organografía cercana o perfecta a una ecuación matemática, es que se hizo la modelación geométrica. Pero lo cierto de todo esto, es que la perfección y la complejidad de estos maravillosos diseños de la creación son difíciles de ser definidas desde un lenguaje matemático o de una modelación geométrica. Porque, la matemática siempre será una idealización simbólica humana de la realidad, y la realidad es superior, porque resguarda la verdad y la verdad ya es divina. Y, pensamos, que cuanto más humilde sea el corazón de un hombre, puede comprender cosas que jamás se conocieron.

SEGUNDA: Con la identificación de las plantas altoandinas con forma de espiral en el sector fitogeográfico señalado por medio de un proceso de exploración indica solo una cosa, que en cualquier zona de nuestra región podemos hallar flora con esta característica. Por lo que resultaría siempre interesante emprender más investigaciones de este tipo.

TERCERA: Encontrar una especie altoandina con forma de espiral, que no esté clasificada por ningún botánico o comunidad científica especializada produce sensaciones gratificantes.

CUARTA: La descripción que hagamos de la espiral natural, inmediatamente luego de un proceso de detección, en una o varias partes de la estructura vegetal en las especies de flora altoandina resulta siempre estimulante. Porque para una nueva especie corresponderá también una nueva parte que merece ser descrita. Esta vez puede ser la raíz, disposición de las ramas, en hojas, un mundo botánico lleno de posibilidades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez, Y. (2007). La geometría de las formas de la naturaleza. Medellín: Universidad Nacional de Colombia. *Tecno Lógicas*, (18), 103-136.
- Anderson, E. (2001). *The Cactus family*. Timber Press.
- Arias, J. (2015). *Presiones dinámicas en estructuras de contención* (tesis doctoral). Universidad de Castilla la Mancha, Ciudad Real, España.
- Arrieta, M. (1998). Medios materiales en la enseñanza de la matemática. *Psicodidáctica*, (5), 107-114.
- Boucharlat, J. L. (1834). *Elementos del cálculo diferencial y de cálculo integral*. Madrid, España: Imprenta Real.
- Boyer, C. B. (2008). Newton as an Originator of Polar Coordinates. *American Mathematical Monthly*, (56), 73-78.
- Britton, N. L. y Rose, J. N. (1922). *Las Cactaceae. Descripciones e ilustraciones de plantas de la familia Cactus*.
- Cook, T. A. (1914). *The curves of life being an account of spiral formations and their application to growth in nature, to science and to art*. London.
- Cullen, J., Knees, S. G. y Cubey, H. S. (2011). *The European Garden Flora Flowering Plants: A Manual for the Identification of Plants Cultivated in Europe, Both Out-of-Doors and Under Glass*. Cambridge University Press.
- Cullmann et al. (1984). *Kakteen*.
- Eggl, U. y Newton, L. E. (2010). *Diccionario etimológico de nombres de plantas suculentas*. Berlín.
- Evangelista, D., Hotton, S. y Dumais, J. (2010). The mechanics of explosive dispersal and self-burial in the seeds of the filaree, *Erodium cicutarium* (Geraniaceae). *The Journal of Experimental Biology*, (214), 521-529.

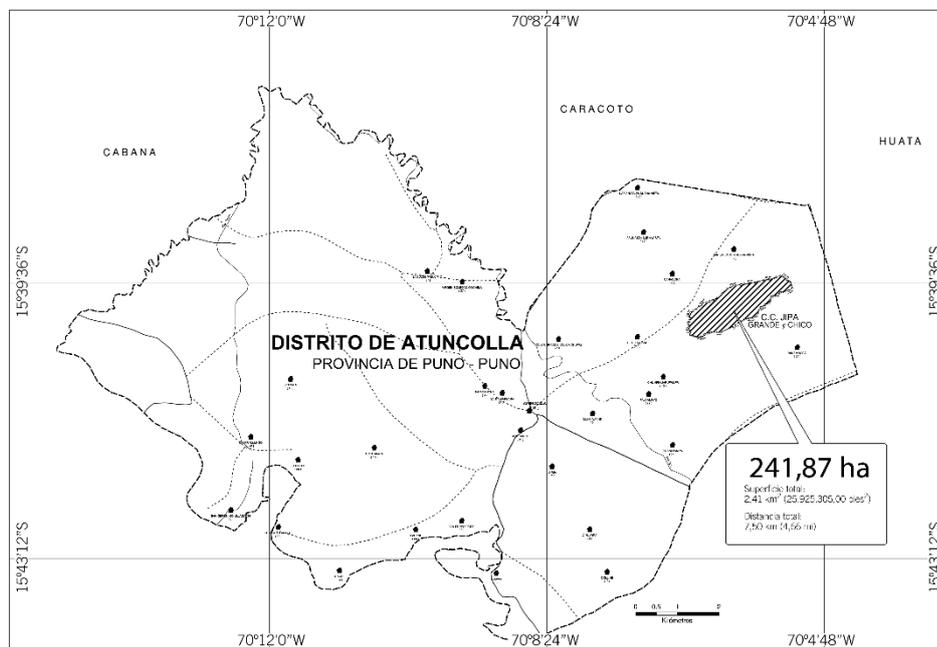
- Ferrando, I. y Segura, C. (2010). La sucesión Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza. *Modelling in Science Education and Learning*, 3(5), 45-54.
- Giblin, D. (2013). *Erodium cicutarium*.
- Gómez, J. (2012). Representación matemática y geométrica de un sistema de proporción. *Scientia Et Technica*, 17(50), 103-111.
- Gómez, J., García, F., Pina, E. y Navarro, J. (2003). *Matemáticas Volumen II*. Sevilla, España: MAD.
- Guzmán, M. y Colera, J. (2003). El impacto de la matemática en nuestra cultura. Universidad Complutense de Madrid.
- Haustein. (1983). *Der Kosmos-Kakteenfuhrer*.
- Hecht. (1982). *BLV Handbuch der Kakteen, Lobivia chrysochete*.
- Hunt, D. R., Taylor, N. P. y Charles, G. (2006). *The New Cactus Lexicon*.
- Khairy, H. (2012). Geometric Modeling. Guiza: Cairo University. Architectural Engineering Department.
- Lamb, B. (1991). *Letts guía a los cactus del mundo*.
- Linares, E. y Benavides, M. (1995). Flora silvestre del transecto Yura-Chivay, Departamento de Arequipa.
- Lockwood, E. H. (1961). *A book of curves*. Cambridge University Press.
- Lodé, J. (2015). *Taxonomy of the Cactaceae*.
- Loera, G., Chávez, S., Carrillo, J. y Valdez, J. (2014). Estimación de superficie de frutos con modelo geométrico tridimensional y proyección geométrica basados en imágenes digitales. *Revista Iberoamericana Postcosecha*, 15(2), 119-126.

- Lowry, M., Ostalaza, C., Cáceres, F. y Roque, J. (2013). *Echinopsis maximiliana*. Lista roja de especies amenazadas de la UICN.
- Martín, J. J. (2013). *Análisis morfológico de las semillas mediante modelos basados en la curva cardioide*. Salamanca, España: EUS.
- Ramos, R. (2009). *Introducción al Modelado Sólido*. Oviedo, España: Universidad de Oviedo.
- Rausch, W. (1975). *Lobivia. El día floreciente echinopsidinae desde un punto de vista de distribución geográfica*.
- Ritter, F. (1980). *Kakteen in Südamerika*.
- Rossel, J. (1993). *Flora medicinal nativa y cosmovisión campesina en comunidades de Puno*. Puno, Perú: UNA-EPG.
- Rossel, J. (1994). *Flora medicinal nativa y cosmovisión campesina en comunidades de Puno Parte II*. Puno, Perú: UNA-EPG.
- Sacristán, A. (1998). Espirales y fractales: Visualización y estudio de sucesiones infinitas. *Memorias del IX Seminario*, 114-123.
- Trevisson, M., Lowry, M., Kiesling, R., Cáceres, F., Faundez, L. & Ostalaza, C. (2013). *Cumulopuntia boliviana*. Lista roja de especies amenazadas de la UICN.
- Thompson, D. (2011) *On growth and Form*. Cambridge University Press, ed. 1917, 1961, 1980, 2003 y 2011.
- Villena, M. (2007) *Coordenadas Polares*.
- Weisstein, E. W. (2004). Hyperbolic spiral and logarithmic spiral. *Wolfram MathWorld*. Illinois: EU.
- Whittaker, E. T. (1944). *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*. Cambridge University Press.

ANEXOS

ANEXO A

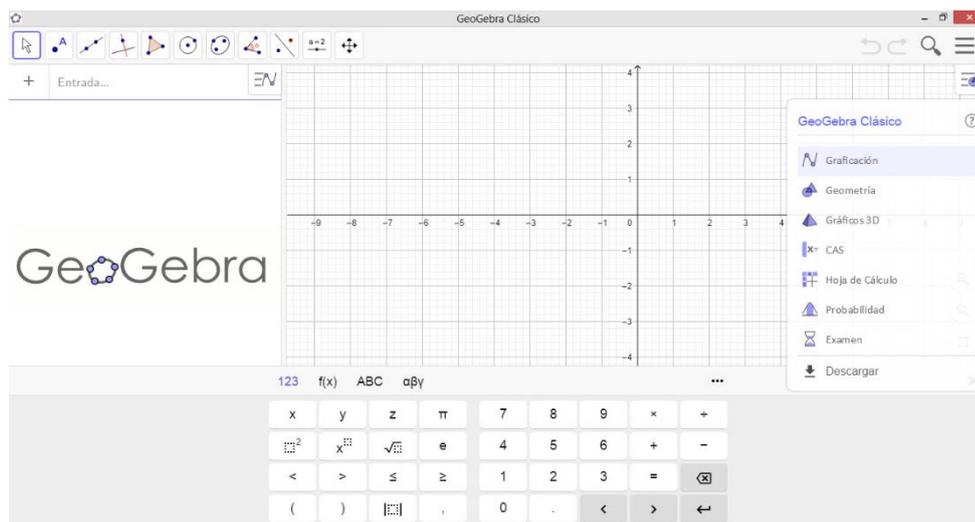
Área y extensión del lugar de la investigación
Ubicación en coordenadas geográficas



Fuente: PMA - Perú, enero 2008

ANEXO B

Software de matemática dinámica Geogebra
Interfaz gráfica



Versión 6.0.549

ANEXO C

Ficha de Observación

INFORMACIÓN GENERAL

Institución de la investigación:	
Investigador observador:	
País / Región / Provincia / Distrito	
Sector fitogeográfico:	
Extensión territorial en (has):	
Fecha de recojo de información:	
Hora de recojo de la información:	

CATEGORÍAS TAXONÓMICAS DEL VEGETAL

Dominio	
Reino	
Filo o división	
Clase	
Orden	
Familia	
Genero	
Especie	
Nombre científico	
Nombre común	

ASPECTOS A TENER EN CUENTA EN LA OBSERVACIÓN DEL INVESTIGADOR

Indicador Único	Parte de la estructura vegetal donde se muestra la forma de Espiral	[MARCAR CON UNA X]
Raíz		
Tallo		
Hoja		
Flor		
Fruto		
Semilla		
Total de frecuencia de reactivos - TFR		

Elaborado por: El ejecutor.
Instrumento 01

.....
INVESTIGADOR

ANEXO D

Cuadro Sinóptico

TAXONOMÍA	DENOMINACIÓN
Dominio Reino Subreino División (filo) Clase Subclase Orden Familia Subfamilia Tribu Subtribu Género Especie Nombre	<i>[Clasificar en este recuadro]</i>

Elaborado por: El ejecutor.
Instrumento 02

ANEXO E

Cuadro de Doble Entrada

Part ^{Esp}	Especie 1	Especie 2	Especie 3	Especie 4
Parte A Parte B Parte C Parte D Parte E Parte F Parte G	<i>[Describir en este recuadro]</i>			

Elaborado por: El ejecutor.
Instrumento 03

ANEXO F

Lista de Especies por Nombre Común (Jipa-Atuncolla-Puno)

1. Algodonero.	27. Queñua.	53. Ciprés.
2. Ortiga Hembra.	28. Canola.	54. Flor de papa.
3. Ortiga Macho.	29. Cebada.	55. Aya papa.
4. Quiza de Guano.	30. Avena.	56. Quinua.
5. Bolillero.	31. Alfalfa.	57. Cañigua.
6. Sillu Sillu.	32. Qora Hembra.	58. Mamacañua.
7. Clavel silvestre.	33. Qora Macho.	59. Mamaquinua.
8. Clavel cebolla.	34. Pasto Thapa.	60. Helecho de piedra.
9. Colle.	35. Cebadilla.	61. Cohetillo.
10. Chijchipa.	36. Capulí.	62. Pasto de agua macho.
11. Pequeña azul.	37. Pasto escalera.	63. Pasto de agua hembra.
12. Layu trebolillo.	38. Limonero.	64. Llachu.
13. Clavel amarillo.	39. Eucalipto.	65. Salvia.
14. Estrella amarilla.	40. Diente de león.	66. Pasto quemillo.
15. Sunchu.	41. Pilli kururu.	67. Pasto thapa grama.
16. Pasto cepillo.	42. Enrosada.	68. Helecho grumo gordo.
17. Tomatina.	43. Estrellita Blanca.	69. Kururu blanco.
18. Pulla Pulla.	44. Ichu andino.	70. Campanilla peluda.
19. Ayrapmu.	45. Ichu puya.	71. Wera Wera.
20. Remolino.	46. Puntiguda azul.	72. Qanachu.
21. Sanqayu.	47. Chiriro.	73. Platanero.
22. Payqo.	48. Pasto andino.	74. Pasto marroní.
23. Quillu tika.	49. Chiji chiji.	75. Nabo arveja.
24. Muña Macho.	50. Cactus maguey.	76. Anis silvestre.
25. Muña Hembra.	51. Flor de Santa maría.	77. Thola.
26. Pino.	52. Dalia roja.	

Elaborado por: El ejecutor.

Fecha: Trabajo de campo llevado a cabo el 25 de marzo 2017.

.....

INVESTIGADOR

ANEXO G

Matriz de Consistencia del Problema de Investigación
TÍTULO: MODELACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS ESPIRALES NATURALES DE LA BOTÁNICA ALTOANDINA DEL SECTOR JIPA DEL DISTRITO DE ATUNCOLLA, PUNO, 2018

PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN		HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN	OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	VARIABLE	OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES		CATEGORÍA O ESCALA	TIPO Y DISEÑO	DISEÑO METODOLÓGICO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS
					DIMENSIONES	INDICADORES			POBLACIÓN Y MUESTRA	
<p>GENERAL: ¿Cuál es la modelación geométrica de las plantas altoandinas que presentan forma de espiral en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018?</p> <p>ESPECÍFICOS: ¿Existen plantas altoandinas que presenten forma de espiral, en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018?</p> <p>¿Están clasificadas las plantas altoandinas que presentan forma de espiral, del sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018?</p> <p>¿Qué parte de la estructura de las plantas altoandinas tiene forma de espiral, en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018?</p>	<p>GENERAL: La modelación geométrica de las plantas altoandinas que presentan forma de espiral, es hiperbólica o logarítmica, en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.</p> <p>ESPECÍFICAS: Existen plantas altoandinas que presentan forma de espiral, en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.</p> <p>Las plantas altoandinas con forma de espiral se encuentran clasificadas para el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.</p> <p>Las plantas altoandinas con forma de espiral contienen dicha forma en una parte de su estructura, en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.</p>	<p>GENERAL: Establecer la modelación geométrica de las plantas altoandinas con forma de espiral en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.</p> <p>ESPECÍFICOS: Identificar que plantas altoandinas muestran forma de espiral, en el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.</p> <p>Clasificar las plantas altoandinas que presentan forma de espiral, para el sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.</p> <p>Describir la parte de la estructura con forma de espiral, en plantas altoandinas, del sector Jipa, del distrito de Atuncolla, Puno, 2018.</p>	<p>1. MODELACIÓN GEOMÉTRICA DE ESPIRALES NATURALES</p> <p>1.1. ESPIRAL LOGARÍTMICA</p> <p>1.2. ESPIRAL HIPERBOLICA</p>	<p>Cualquier línea recta al origen cortará a la espiral logarítmica con el mismo ángulo tangencial.</p> <p>- Si el ángulo de giro, crece en progresión aritmética el radio crece en progresión geométrica.</p> <p>- La distancia de cualquier punto al polo, siguiendo la curva, es finita.</p> <p>- La distancia de cualquier punto al polo, siguiendo la curva, es infinito.</p> <p>- La curva tiene como asíntota una línea recta que dista a unidades del polo.</p> <p>- Es la inversa de la espiral de Arquímedes.</p>	<p>Metro Radián Constantes</p>	<p>TIPO: Cuantitativa.</p> <p>MÉTODO-DISEÑO: Modelación Exploratorio Descriptivo</p>	<p>POBLACIÓN: 77 Especies de Botánica del sector.</p> <p>MUESTRA: 4 Especies con forma de espiral.</p> <p>INSTRUMENTO - Ficha de observación - Cuadro sinóptico - Cuadro de doble entrada</p>	<p>TÉCNICA: Observación</p>		