UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA, COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO ALGEBRAICO EN DOCENTES DEL ÁREA DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE LA CIUDAD DE PUNO – 2017

TESIS

PRESENTADO POR:

BEATRIZ BELIZARIO QUISPE

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN EDUCACIÓN, CON MENCIÓN EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA, COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA.

PROMOCIÓN: 2016 - I

PUNO – PERÚ

2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO ALGEBRAICO EN DOCENTES DEL ÁREA DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE LA CIUDAD DE PUNO – 2017

BEATRIZ BELIZARIO QUISPE

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN, CON MENCIÓN EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA, COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA.

APROBADA POR EL SIGUIENTE JURADO:

PRESIDENTE: Dr. Julio Adalberto Tumi Quispe

PRIMER MIEMBRO: Mg. Godofredo Huaman Monroy

SEGUNDO MIEMBRO: D. Sc. Julio Cesar Laura Huanca

DIRECTOR / ASESOR: Dr. Wenceslao Quispe Yapo

Área: Interdisciplinaria en la Dinámica Educativa

Tema: Teoría y Métodos de Investigación de la Didáctica de la Matemática

Fecha de sustentación: 18 / Jul / 2018

DEDICATORIA

La presente tesis está dedicada primeramente a Dios, por no dejarme caer, dándome fortaleza y sabiduría para seguir con el cumplimiento de este objetivo.

A mis queridos padres, porque siempre han estado ahí brindándome su apoyo y sus consejos de manera incondicional y hacer de mí una mejor persona cada día.

A mis hermanos, por sus palabras y enseñanzas, en especial a Fredy, aunque no esté físicamente con nosotros, pero sé que desde el cielo siempre me cuida y me guía para que todo salga bien.

A todas las personas que de una u otra forma me ayudaron durante toda mi carrera universitaria.

AGRADECIMIENTO

La vida se encuentra plagada de retos y uno de ellos es la universidad. Tras verme dentro de ella, me he dado cuenta que más allá de ser un reto, es una base no solo para mi entendimiento del campo en el que me he visto inmerso, sino para lo que concierne a la vida y mi futuro.

Te agradezco a ti, no solo por la ayuda desinteresada que me has brindado, sino por los buenos momentos. Eres una gran persona y me encanta tenerte a mi lado.

Le agradezco a la universidad, a mis queridos docentes y al personal que allí labora por haberme acogido en su seno científico para cultivar en mí, la actitud y el conocimiento necesario para desempeñarme en la sociedad como una buena profesional, al Dr. Wenceslao Quispe Yapo por su buena y oportuna asesoría en la realización de esta tesis.

¡Muchas gracias!

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

CDM: Conocimiento Didáctico Matemático.

EOS: Enfoque Ontosemiotico.

RAE: Razonamiento Algebraico Elemental.

RA: Razonamiento Algebraico.

RESUMEN

El objetivo del estudio es evaluar el conocimiento algebraico de los docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno - 2017, se consideró como variable, de estudio el conocimiento algebraico, concretamente el dominio del álgebra escolar y como dimensiones de estudio se consideró los niveles de algebrización planteado por Godino. Con ello se buscó responder a la siguiente interrogante ¿Cómo son los conocimientos algebraicos de los docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno - 2017? Desde el punto metodológico la investigación por la naturaleza de su desarrollo, pertenece al tipo descriptivo y diseño diagnóstico, sustentado en el análisis cuantitativo. Para lograr una efectividad de los resultados se optó por la técnica de pruebas escritas con el instrumento denominado, pruebas de desarrollo, el mismo que se logró obtener tomando en cuenta los indicadores de cada dimensión planteados en nuestra matriz de investigación (niveles de algebrización), dichas pruebas de desarrollo se aplicaron a 25 docentes de educación secundaria del área de matemática de la ciudad de Puno, los cuales fueron seleccionados de manera aleatoria. Debido a que la investigación abraza el enfoque cuantitativo el análisis de los resultados se realizó aplicando tablas, gráficos y estadígrafos. La base teórica que fundamenta esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática de Godino y colaboradores. Los resultados muestran un nivel regular (con una nota de 15, 31) de conocimiento algebraico, con diferencias significativas entre los niveles de algebrización 1, 2 y 3, 4. Es por ello que se sugiere realizar cursos formativos específicos sobre los contenidos algebraicos elementales, a fin de capacitar a los docentes para que puedan promover en los alumnos el progresivo desarrollo del pensamiento algebraico.

Palabras clave: Conocimiento algebraico, evaluación, niveles de algebrización.

ABSTRACT

The objective of the study is to evaluate the algebraic knowledge of teachers in the secondary school mathematics area of the city of Puno - 2017, algebraic knowledge was considered as a variable, specifically the domain of school algebra and as dimensions of study considered the levels of algebrization raised by Godino. The aim was to answer the following question: How are the algebraic knowledge of teachers in the secondary school mathematics area of the city of Puno - 2017? From the methodological point of view, the research by the nature of its development, belongs to the descriptive type and diagnostic design, sustained in the quantitative analysis. To achieve an effectiveness of the results, we opted for the technique of written tests with the instrument called development tests, the same one that was obtained considering the indicators of each dimension raised in our research matrix (levels of algebrization), These development tests were applied to 25 teachers of secondary education in the area of mathematics of the city of Puno, who were selected at random. Because the research embraces the quantitative approach, the analysis of the results was done by applying tables, graphs and statisticians. The theoretical base that bases this investigation is the Ontosemiotic Approach of the knowledge and the mathematical instruction of Godino and collaborators. The results show a regular level (with a grade of 15, 31) of algebraic knowledge, with significant differences between the levels of algebrization 1, 2 and 3, 4. That is why it is suggested to carry out specific training courses on the elementary algebraic contents, in order to train teachers so that they can promote in the students the progressive development of algebraic thinking.

Keywords: Algebraic knowledge, Evaluation, levels of algebrization.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

La formación matemática (específicamente el álgebra que está presente en gran parte de los contenidos de la educación escolar por lo que es un tema de interés para múltiples investigaciones desde diversas perspectivas) y didáctica de los maestros de educación secundaria es un aspecto de gravitante importancia, es por ello que la comunidad didáctica de la matemática ha puesto de manifiesto, en las últimas décadas, un gran interés en esclarecer el tipo de conocimiento didáctico – matemáticos que debe tener el profesor de matemática de estos tiempos, investigadores como son: Godino, Font, Batanero buscan por medio de sus investigaciones responder a dicha interrogante y de esa forma lograr armar un perfil de docente competente a los tiempos actuales.

En el caso del sistema educativo peruano, son bien conocidas las carencias de los planes de formación de maestros de educación secundaria en relación a la identificación, evaluación y desarrollo de las competencias, particularmente en las áreas de contenido científico, y de manera especial en matemáticas. El Marco de Buen Desempeño Docente aprobado por la Resolución Ministerial No. 0547-2012-ED., establece las competencias profesionales mínimas que un profesor en ejercicio debe ostentar, la competencia relacionadas con esta investigación es "Conoce y comprende las características de todos sus estudiantes y sus contextos, los contenidos disciplinares que enseña, los enfoques y procesos pedagógicos, con el propósito de promover capacidades de alto nivel y su formación integral" la cual tiene como muestras de desempeño, las que servirán para la evaluación, las siguientes:

- Demuestra conocimientos actualizados y comprensión de los conceptos fundamentales de las disciplinas comprendidas en el área curricular que enseña.

- Demuestra conocimiento actualizado y comprensión de las teorías y prácticas pedagógicas y de la didáctica de las áreas que enseña. (p. 23)

En consecuencia, el maestro de educación secundaria, debe tener una competencia matemática, es decir, conocer y ser capaz de realizar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas didáctico-matemáticos usualmente abordables en educación secundaria, y articularlos con los otros bloques temáticos de la matemática.

Desde el punto de vista de la enseñanza y aprendizaje, el maestro debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando los objetos y procesos algebraicos, y las variables que intervienen en los enunciados, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a otras circunstancias. El desarrollo de dichas competencias es un desafío para los formadores de profesores por la diversidad de dimensiones y componentes a tener en cuenta. Una de ellas es el análisis de los propios conocimientos matemáticos, e implica adoptar una visión amplia que reconozca el papel central de la resolución de problemas en la generación del conocimiento. En consecuencia, es necesario tener un conocimiento sistemático y cabal de los conocimientos tanto matemático y didácticos del maestro de educación matemática, con esta intensión se plantea el siguiente problema de investigación que es el núcleo de esta investigación ¿Cómo son los conocimientos álgebraicos de los docentes del área de matemática del nivel de educación secundaria de la ciudad de Puno - 2017?

La investigación tuvo como objetivo general: *Evaluar el conocimiento algebraico de los docentes del área de matemática del nivel de educación secundaria de la ciudad de Puno - 2017*, de igual forma se planteó los siguientes objetivos específicos: Los objetivos específicos fueron: *Evaluar los conocimientos algebraicos de los docentes del área de matemática del nivel de educación secundaria de la ciudad de Puno – 2017, según los* *niveles de algebrización. Categorizar según los niveles de algebrización a los docentes del área de matemática del nivel de educación secundaria de la ciudad de Puno- 2017.*

La investigación consta de siete capítulos.

En el Capítulo I, se presenta la introducción, descripción, definición, justificación, objetivos y aspectos que posibilitan fundamentar la investigación.

En el Capítulo II, se considera la revisión de la literatura; antecedentes y sustento teórico en función a las variables, dimensiones e indicadores, aspectos que posibilitan la secuencia lógica del desarrollo de la investigación.

En el Capítulo III, se explica los materiales, métodos de la investigación, tipo de investigación, diseño, población, muestra y técnica de recolección de datos, aspectos que posibilitaron alcanzar los objetivos previstos de la investigación.

En al Capítulo IV, se detalla el análisis y discusión de resultados los cuales fueron obtenidos tras la aplicación de las pruebas.

En la parte V, se describe la conclusión en función a los objetivos planteados en la presente investigación.

En la parte VI, se presenta las recomendaciones pertinentes de acuerdo a los resultados de la investigación, los cuales están bien ligados a los objetivos.

En la parte VII, se considera las referencias bibliográficas empleadas en el desarrolla de la investigación. Como parte complementaria al informe de tesis se acompaña los Anexos, los cuales demuestran la veracidad de la investigación.

1.1 Planteamiento del problema

En base a los estudios realizados por:

Godino, Wilhelmi y Neto (2015) en su artículo titulado “Evaluación de conocimientos didáctico – matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros” en donde analizan los resultados de aplicar un cuestionario de evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental a una muestra de estudiantes del grado en maestro en educación primaria. Donde el objetivo fue la elaboración de un diagnóstico sobre la competencia algebraica elemental y su didáctica de los futuros maestros, que permita enmarcar un programa formativo para estos, que garantice finalmente procesos de estudio efectivos en la educación primaria, en donde los resultados muestran un bajo nivel de conocimientos generalizado en los distintos componentes del conocimiento didáctico - matemático, con diferencias significativas entre las universidades.

Mohamed (2012) En su tesis de nominada “Evaluación del Conocimiento de los Futuros Profesores de Educación Primaria Sobre Probabilidad” el cual tuvo como objetivo evaluar *el conocimiento que tienen los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*, llegando a la conclusión de que la mayoría de los futuros profesores tienen grandes dificultades para responder de forma correcta a los problemas de probabilidad propuestos

Pasera (2017) en su tesis: “Conocimiento didáctico matemático que deben manifestar profesores de educación secundaria en relación a tareas sobre ecuaciones”, el cual tuvo como objetivo identificar el conocimiento didáctico matemático que debe manifestar un profesor en la educación secundaria para reconocer la complejidad o la progresión de características algebraicas en tareas sobre ecuaciones que se presentan en textos escolares.

Llega a la conclusión de que el docente debe manifestar los conocimientos didácticos – matemáticos.

- Identifica los conocimientos que se requieren para la solución de una tarea sobre ecuaciones.
- Identifica los lenguajes que se usan para hacer las representaciones de las ecuaciones de primer y segundo grado.
- Identifica los conceptos que se ponen en juego para el estudio de las ecuaciones de primer y segundo grado.
- Identifica los tipos de situaciones que involucran resolver ecuaciones de primer y segundo grado.
- Identifica los diferentes procedimientos que se emplean para la resolución de una tarea sobre ecuaciones. - Identifica las propiedades que se ponen en juego en la resolución de una tarea sobre ecuaciones.
- Identifica qué conocimientos matemáticos justifican o generalizan los procesos de solución de tareas sobre ecuaciones de primer y segundo grado que se resuelven por tanteo numérico, inducción numérica o propiedades.
- Identifica en otros campos que movilizan a otros objetos matemáticos las ecuaciones de primer y segundo grado que están presentes en los problemas de modelización.

Por otro lado, la investigación presentada por Aké (2013) determina que los profesores en formación de México no son conscientes de los procesos presentes en el desarrollo de ideas algebraicas, así mismo dicho estudio revela las necesidades formativas requeridas para identificar las relaciones y propiedades que están presentes en una determinada actividad algebraica, tal investigación realiza un estudio general abarcando distintos objetos algebraicos.

Tomando en cuenta a los parámetros que nos establecen los siguientes:

En el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) establece que el profesor debe ser capaz de prever posibles soluciones de las tareas matemáticas, distinguiendo las posibles secuencias de prácticas operativas y discursivas que el resolutor podría implementar en cada caso. También debe poder identificar la trama de objetos ostensivos (lenguajes y artefactos) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) imbricados en las prácticas matemáticas, así como las relaciones potencialmente conflictivas entre los diversos tipos de lenguajes movilizados y los procesos matemáticos involucrados. Este análisis es complejo y requiere el desarrollo de una competencia específica en los profesores, mediante intervenciones formativas específicas: la competencia de análisis epistémico y cognitivo de tareas matemáticas.

El Marco de Buen Desempeño Docente (2012) aprobado por la Resolución Ministerial No. 0547-2012-ED., establece las competencias profesionales mínimas que un profesor en ejercicio debe ostentar, es "Conoce y comprende las características de todos sus estudiantes y sus contextos, los contenidos disciplinares que enseña, los enfoques y procesos pedagógicos, con el propósito de promover capacidades de alto nivel y su formación integral" la cual tiene como muestras de desempeño, las que servirán para la evaluación, las siguientes:

- Demuestra conocimientos actualizados y comprensión de los conceptos fundamentales de las disciplinas comprendidas en el área curricular que enseña.
- Demuestra conocimiento actualizado y comprensión de las teorías y prácticas pedagógicas y de la didáctica de las áreas que enseña. (p. 23)

En consecuencia, el maestro de educación secundaria, debe tener una competencia matemática, para resolver los problemas didáctico-matemáticos usualmente abordables en educación secundaria, y articularlos con los otros bloques temáticos de la matemática.

Desde el punto de vista de la enseñanza y aprendizaje, el maestro debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando los objetos y procesos algebraicos, y las variables que intervienen en los enunciados, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a otras circunstancias. El desarrollo de dichas competencias es un desafío para los formadores de profesores por la diversidad de dimensiones y componentes a tener en cuenta. Una de ellas es el análisis de los propios conocimientos matemáticos, e implica adoptar una visión amplia que reconozca el papel central de la resolución de problemas en la generación del conocimiento. Por lo que es necesario tener un conocimiento sistemático y cabal de los conocimientos tanto matemático y didácticos del maestro de educación matemática, con esta intensión se plantea el siguiente problema de investigación que es el núcleo de esta investigación.

1.2 Formulación del problema

Se propuso la siguiente pregunta de investigación que oriento el estudio:

Problema general

¿Cuál es el nivel de conocimiento algebraico que poseen los docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno - 2017?

Problemas específicos

¿Cuál es el nivel de conocimiento algebraico que poseen los docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno – 2017, según los niveles de algebrización?

¿Cómo se categorizan según los niveles de algebrización los docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno- 2017?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Evaluar el conocimiento algebraico de los docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno – 2017.

1.3.2 Objetivos específicos

- Evaluar los conocimientos algebraicos de los docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno – 2017, según los niveles de algebrización.
- Categorizar según los niveles de algebrización a los docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno- 2017.

1.4 Hipótesis

El conocimiento matemático sobre niveles de razonamiento algebraico de los profesores se caracteriza por alcanzar un nivel de tratamiento analítico de las expresiones algebraicas basado en propiedades estructurales, teniendo en cuenta procesos de generalización matemática, la articulación de diversas presentaciones y los procesos de modelización matemática. La hipótesis tiene su sustento teórico en las investigaciones de, Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014).

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

La siguiente investigación se apoya con los siguientes antecedentes:

2.1 Antecedentes de la investigación

La investigación se apoya en las investigaciones previas realizadas en el seno de la línea de investigación "Teoría de la Educación Matemática" de la Universidad de Granada, más concretamente en resultados del proyecto de investigación EDU2012-31869 sobre "Evaluación y desarrollo de competencias matemáticas y didácticas en la formación de profesores en el campo del razonamiento algebraico elemental". Así mismo, el planteamiento del problema está apoyado en el modelo de conocimiento del profesor de matemáticas descrito en Godino (2009) como "conocimiento didáctico - matemático" (CDM), el cual desarrolla otros modelos existentes, en particular el Marketing (MKT), mediante la aplicación de las herramientas conceptuales y metodológicas propuesta por el Enfoque Ontosemiotico (EOS) Godino, Batanero y Font (2007).

En el modelo del CDM se establece que el profesor debe ser capaz de prever posibles soluciones de las tareas matemáticas, distinguiendo las posibles secuencias de prácticas operativas y discursivas que el resolutor podría implementar en cada caso. También debe poder identificar la trama de objetos ostensivos y no ostensivos en las prácticas matemáticas, así como las relaciones potencialmente conflictivas entre los diversos tipos de lenguajes movilizados y los procesos matemáticos involucrados. Este análisis es complejo y requiere el desarrollo de una competencia específica en los profesores, mediante intervenciones formativas específicas: la competencia de análisis epistémico y cognitivo de tareas matemáticas.

Respecto al razonamiento algebraico, en trabajos previos Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014); Aké (2013) se ha propuesto un modelo de pensamiento algebraico para la Educación Primaria en el que se distinguen tres niveles de razonamiento algebraico, estableciendo además criterios para identificar la actividad matemática puramente aritmética (nivel 0 de algebrización) y distinguirla de los progresivos niveles de algebrización. A la actividad claramente algebrizada se asigna un nivel 3 y se establecen otros dos niveles intermedios de actividad proto-algebraica. En Godino y otros (2015)se extiende el modelo de los niveles de algebrización a la actividad matemática que se realiza en la Educación Secundaria (ESO y Bachillerato). Esta extensión se apoya también en las distinciones ontosemióticas sugeridas por el EOS, particularmente en la presencia, uso y tratamiento de parámetros, tanto en actividades de tipo estructural como funcional.

Mohamed (2012) En su tesis de nominada "Evaluación del Conocimiento de los Futuros Profesores de Educación Primaria Sobre Probabilidad" tuvo como objetivo evaluar *el conocimiento que tienen los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*, llegando a la conclusión de que la mayoría de los futuros profesores tienen grandes dificultades para responder de forma correcta a los problemas de probabilidad propuestos. Aunque la proporción de futuros profesores que respondieron de forma correcta ha sido alta en los problemas relacionados con asignación de probabilidades simples (89.4%, 77% y 85.2% de aciertos), probabilidad condicional (88.7% de aciertos), probabilidad frecuencial (85.9% de aciertos) y juegos equitativos (68.9% y 79.2% de aciertos). Hay otros problemas donde los porcentajes de respuestas correctas de los futuros profesores son inferiores al 50%, como ocurre en los problemas sobre espacio muestral (46.3%), juegos equitativos (41.74%), aleatoriedad (40%), probabilidad compuesta (36.7%) y probabilidad frecuencial (30.7%). Finalmente, los problemas de mayor dificultad, donde la proporción de futuros profesores que respondieron de forma correcta es muy baja, son los relacionados con los conceptos de variable aleatoria (11.7%) y muestreo (4.9%).

Godino, Wilhelmi y Neto (2015) en su artículo titulado “Evaluación de conocimientos didáctico – matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros” analizan los resultados de aplicar un cuestionario de evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental a una muestra de estudiantes del Grado en Maestro en Educación Primaria. El objetivo fue la elaboración de un diagnóstico sobre la competencia algebraica elemental y su didáctica de los futuros maestros, que permita enmarcar un programa formativo para estos, que garantice finalmente procesos de estudio efectivos en la educación primaria, en donde los resultados muestran un bajo nivel de conocimientos generalizado en las distintas componentes del conocimiento didáctico - matemático, con diferencias significativas entre las universidades. Se concluye que es necesario revisar los programas de formación y planificar el diseño de acciones formativas específicas sobre los contenidos algebraicos elementales, a fin de capacitar a los futuros maestros para que puedan promover en los alumnos de primaria el progresivo desarrollo del pensamiento algebraico.

Pasera (2017) en su tesis: “Conocimiento didáctico matemático que deben manifestar profesores de educación secundaria en relación a tareas sobre ecuaciones”, el cual tuvo como objetivo identificar el conocimiento didáctico matemático que debe manifestar un profesor en la educación secundaria para reconocer la complejidad o la progresión de características algebraicas en tareas sobre ecuaciones que se presentan en textos escolares. Llega a la conclusión de que el docente debe manifestar los conocimientos didácticos – matemáticos.

- Identifica los conocimientos que se requieren para la solución de una tarea sobre ecuaciones.

- Identifica los lenguajes que se usan para hacer las representaciones de las ecuaciones de primer y segundo grado.
- Identifica los conceptos que se ponen en juego para el estudio de las ecuaciones de primer y segundo grado.
- Identifica los tipos de situaciones que involucran resolver ecuaciones de primer y segundo grado.
- Identifica los diferentes procedimientos que se emplean para la resolución de una tarea sobre ecuaciones. - Identifica las propiedades que se ponen en juego en la resolución de una tarea sobre ecuaciones.
- Identifica qué conocimientos matemáticos justifican o generalizan los procesos de solución de tareas sobre ecuaciones de primer y segundo grado que se resuelven por tanteo numérico, inducción numérica o propiedades.
- Identifica en otros campos que movilizan a otros objetos matemáticos las ecuaciones de primer y segundo grado que están presentes en los problemas de modelización.

Por otro lado, la investigación presentada por Aké (2013) determina que los profesores en formación de México no son conscientes de los procesos presentes en el desarrollo de ideas algebraicas, así mismo dicho estudio revela las necesidades formativas requeridas para identificar las relaciones y propiedades que están presentes en una determinada actividad algebraica, tal investigación realiza un estudio general abarcando distintos objetos algebraicos. En ese mismo sentido Aké (2013) señala que, es necesario hacer un estudio para identificar una tipología de tareas que de acuerdo a investigaciones en didáctica de la matemática promuevan el razonamiento algebraico sobre un tema específico, en un determinado nivel educativo, a partir de la caracterización del razonamiento algebraico proporcionada por el EOS. Señala también la importancia de diseñar acciones formativas que aborden las facetas de los conocimientos didáctico – matemáticos propuestos por Godino (2009).

2.2 Sustento Teórico

La investigación se sustenta teóricamente con los siguientes:

2.2.1 Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática

El Enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS), que ha sido desarrollado por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994, 1998; Godino, 2002,2012; Godino, Batanero y Font, 2007;). Se trata de un marco teórico integrativo para la didáctica de las matemáticas que aborda el problema de la articulación de teorías desde supuestos semióticos, ontológicos y antropológicos.

Este enfoque surge a razón del interés en la problemática descrita de fundamentación de la investigación de didáctica de las matemáticas, a raíz de ellos desarrollan diversas herramientas teóricas que permiten abordar diversas cuestiones sobre didáctica y conocimiento matemático, dichas herramientas se han desarrollado en tres etapas. En sus primeros trabajos, publicados en el periodo 1993 – 1998, Carmen Batanero y Juan Diaz Godino, desarrollaron y precisaron progresivamente las nociones de “significado institucional y personal de un objeto matemático” y su relación con la noción de comprensión. En un una segunda etapa, Godino, Font, Contreras, Luque y Ordoñez, consideran elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados que los elaborados hasta esa fecha. En una tercera etapa, Godino, Contreras y Font, se interesan por los modelos teóricos propuestos en el seno de la didáctica de las matemáticas sobre la instrucción matemática y proponen distinguir en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones, cada una modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias: epistémica, docente, discente, mediacional, cognitiva y emocional. El modelo ontológico y semiótico de la cognición proporciona criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva, y la adopción de la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las trayectorias didácticas. Los constructos teóricos elaborados durante estos tres periodos constituyen el modelo ontológico – semiótico que se sintetiza en lo siguiente. Dicho modelo trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo. Así mismo, se tienen en cuenta facetas del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

Godino (2012) determina un conjunto de nociones teóricas que componen al EOS y la clasifica en cinco grupos cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas.

1.- Sistema de prácticas (operativas, discursivas y normativas), que asume una concepción pragmatista—antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). La actividad de resolución de problemas se adopta como elemento central de la construcción del conocimiento matemático.

2.- Configuraciones de objetos y procesos matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. Se asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas) articulando de manera coherente la concepción antropológica (Wittgestein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos lenguajes desempeñan el doble papel de instrumentos de trabajo matemático y representación de los restantes objetos matemáticos.

3.- Configuración didáctica, como sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación-problema, constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémicas, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático.

4.- Dimensión normativa, sistema de reglas, hábitos, normas que registran y soportan las prácticas matemáticas y didácticas; generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es el principal factor explicativo de los fenómenos didácticos.

5.- Idoneidad didáctica, como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

2.2.2 Herramientas teóricas que componen el EOS

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas.

Los objetos matemáticos emergen de los sistemas de prácticas matemáticas ya sean personales (significado personal) o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones Godino y Batanero (1994).

En el EOS se identifica una tipología de significados personales e institucionales Godino, Batanero y Font (2007):

Los significados personales propuestos son:

Global: Corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.

Declarado: Da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.

Logrado: Corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los *significados iniciales o previos* de los estudiantes y los que *finalmente alcancen*.

Los significados institucionales propuestos son:

Referencial: Sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación referencial del significado global exige de un estudio histórico y epistemológico sobre el origen y evolución del objeto considerado, así como de la consideración de la diversidad de contextos de uso en donde se manifiesta dicho objeto.

Pretendido: Sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

Implementado: Sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente en un proceso de estudio específico.

Evaluado: El subsistema de prácticas utilizado por el docente para evaluar los aprendizajes.

Figura 1: Tipos de significados institucionales y personales.
Fuente: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/

2.2.3 Emergencia de los objetos matemáticos

2.2.3.1 Configuraciones de objetos y procesos matemáticos primarios

El EOS propone una tipología de objetos primarios emergentes de las prácticas matemáticas Godino, Batanero y Font (2007):

Situaciones-problema: problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios; son las tareas que inducen la actividad matemática.

Elementos lingüísticos: Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas. En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros.

Conceptos: entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición.

Propiedades: atributos de los objetos matemáticos, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

Procedimientos: técnicas de cálculo operaciones y algoritmos.

Argumentos: justificaciones, demostraciones o pruebas de las proposiciones usadas.

Los seis tipos de entidades primarias se relacionan entre sí, formando configuraciones que se definen como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Las configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales), que se construyen a partir del planteamiento y resolución de una situación problema.

2.2.3.2 Atributos contextuales

Los anteriores seis tipos de objetos primarios se complementan y enriquecen con la consideración de cinco facetas o dimensiones duales. Según las circunstancias contextuales y del juego del lenguaje en que participan, las entidades matemáticas pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal e institucional, ostensiva y no ostensiva, ejemplar y tipo, elemental y sistémica, expresión y contenido. A continuación, se explica el uso que se da a esos términos:

Personal - institucional: Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" Godino y Batanero (1994). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las causas se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ente una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del dialogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.

Ostensivo - no ostensivo: Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, ...). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).

Extensivo - intensivo: Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular y una clase más general. La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos. Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático.

Unitario - Sistémico: En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas, …) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

Expresión - contenido: La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

2.2.3.3 Procesos

Tanto las dualidades como las configuraciones de objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos indicados en la figura 3. La emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/ epistémicos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.

La consideración de las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico permiten la delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización Font y Contreras (2008) y de estos con los de reificación y descomposición. Se trata de una delimitación importante que permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y de su presencia combinada en la actividad matemática, y, por tanto, clarificar la naturaleza del "objeto matemático" usualmente considerado como una entidad abstracta o ideal.

En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso" ya que hay muchas clases diferentes de procesos; se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, de procesos cognitivos, metacognitivos, procesos de instrucción, procesos de cambio, procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que la única característica común a muchos de ellos puede ser la consideración del factor “tiempo” y, en menor medida, el de “secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente”. Por tanto, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (los incluidos en la figura 3), sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización) más que procesos son hiper o mega procesos, puesto que implican procesos más elementales: representación, argumentación, idealización, generalización, etc.

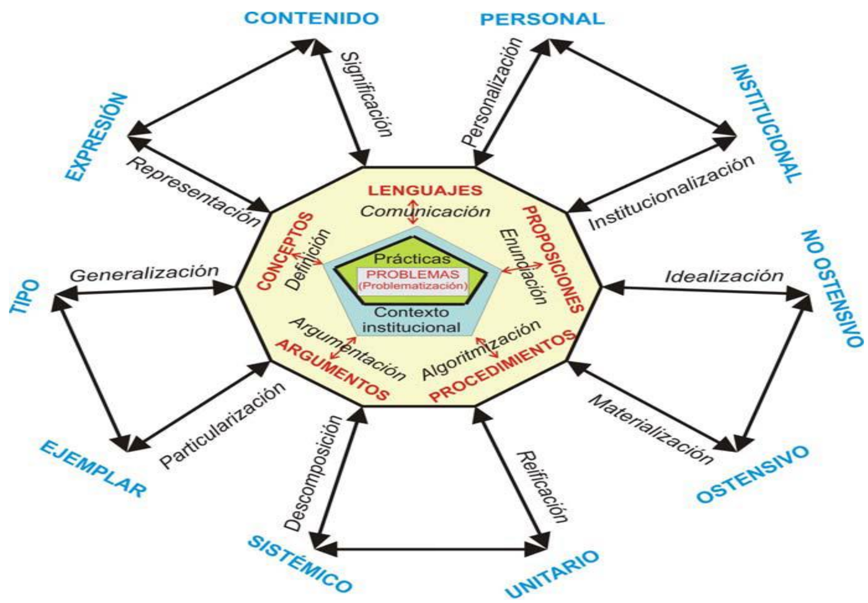


Figura 2: Configuración de objetos y procesos.
Fuente: Godino, Batanero y Font (2007, p. 10)

2.2.4 Comprensión y conocimiento en el EOS

Básicamente hay dos maneras de entender la “comprensión”: como proceso mental o como competencia Font (2001). Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental". Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental.

Ahora bien, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas, permite entender en el EOS la comprensión también en términos de funciones semióticas Godino (2003). En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

2.2.5 Naturaleza del razonamiento algebraico desde la perspectiva del EOS

Aké (2013) “Son diversas las investigaciones que critican la existencia de diferentes puntos de vista sobre el razonamiento algebraico en la Educación secundaria, que no solo conllevan a una difícil distinción entre el razonamiento algebraico y pensamiento matemático o simplemente pensamiento sino también impiden tener una visión clara de su naturaleza. De hecho, las diversas perspectivas que apoyan la acción de “algebrizar” el currículo de la escuela elemental, son una de las razones por la que esta reforma del álgebra, no ha progresado.” Carrahen y Schliemann (2007) citados en Aké (2013) “afirman que son relativamente pocas las investigaciones que han tratado de caracterizar el campo de manera exhaustiva y señalan que “cuando se ha intentado, la estructura categórica ocasionalmente exhibe inconsistencias y solapamientos. Por ejemplo, el desglose del álgebra en generalización, resolución de problemas, modelización, y funciones, mezcla procesos de razonamiento no disjuntos (generalización y resolución de problemas) con tópicos de matemáticas (funciones) y otro (modelización)" Bednarz (1996) citado en Aké (2013) determinan que el RA "puede ser entendido, bien como tema matemático o un conjunto de procesos de razonamiento" (p. 676). Tampoco parece que hay consenso en que uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico es su manera de abordar los procesos de generalización matemática, esto es, el estudio de situaciones en las que se pasa de considerar casos particulares de situaciones, conceptos, procedimientos, etc., (objetos determinados) a las clases o tipos de tales objetos. Esta observación lleva a los autores citados a considerar que posiblemente el análisis del pensamiento algebraico está todavía en su infancia.

Avanzar en la clarificación de la naturaleza del razonamiento algebraico es un tema complejo pero necesario desde el punto de vista educativo. Como afirma Radford (2000) citado en Aké (2013), "necesitamos profundizar en nuestra propia comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización". De las descripciones del pensamiento algebraico y de la actividad algebraica realizadas en las diversas investigaciones se puede concluir que la consideración de una actividad como algebraica tiene contornos difusos. En algunos casos puede haber un claro consenso, como en las actividades generacionales y transformacionales, es decir, formación y manipulación de expresiones simbólico-literales, pero no así en otras actividades, como modelización, resolución de problemas, o con actividades típicas del "early algebra", como las equivalencias de expresiones aritméticas. Parece pertinente considerar que en el proceso de transición desde la aritmética hasta el álgebra existe una "zona transicional" en la que se admite que las tareas matemáticas pueden exhibir objetos y procesos algebraicos con una presencia gradual pero creciente.

De este modo la elaboración de un modelo comprensivo, puede ayudar a articular coherentemente el currículo matemático escolar con los distintos niveles escolares, y facilitar el diseño de actividades instruccionales que favorezcan el surgimiento y consolidación progresivos del razonamiento algebraico. En este sentido, la perspectiva pragmatista, antropológica y semiótica del EOS Godino, Batanero y Font (2007),Godino (2002) citados en Aké (2013) aportan herramientas teóricas para analizar la actividad matemática en general y, en particular, para el tipo de actividad que caracteriza el álgebra. El EOS permite caracterizar el álgebra en términos de los tipos de objetos y procesos que intervienen en la práctica matemática. La actividad algebraica tiene lugar cuando una persona aborda la solución de cierto tipo de problemas o tareas, realizando determinadas prácticas operativas y discursivas. En dichas prácticas intervienen elementos de naturaleza diversa, en particular, medios de expresión, reglas conceptuales, procedimentales, proposiciones y justificaciones. En consecuencia, la caracterización de una práctica, y el pensamiento que la acompaña, como de índole algebraica habrá que hacerla en términos de la presencia de los tipos de objetos y de procesos que intervienen en la misma. La presencia de los objetos y procesos reconocidos como algebraicos es gradual, sistemática y progresiva; se encuentran vinculados a las prácticas e interrelacionados formando configuraciones.

En este sentido, se plantea una concepción del razonamiento algebraico que surge por una parte de las investigaciones realizadas en torno a la inclusión del algebra y la algebrización del currículo. Por otro lado, también consideramos desde la perspectiva del EOS las herramientas de análisis que nos permiten distinguir qué objetos matemáticos tienen una naturaleza algebraica y en qué medida pueden ser introducidos en la escuela elemental.

Aké (2013) "las características que propone para el RAE, en términos de tipos de tareas, objetos y procesos algebraicos implicados, permite incluir en esta noción el álgebra de secundaria, reforzando de esta manera una visión integrada del álgebra escolar. Considera de igual forma las expresiones "razonamiento algebraico", "sentido algebraico" y "pensamiento algebraico" como perspectivas equivalentes del mismo objeto "álgebra escolar" desde un enfoque transdisciplinar, como se indica en la figura 3"

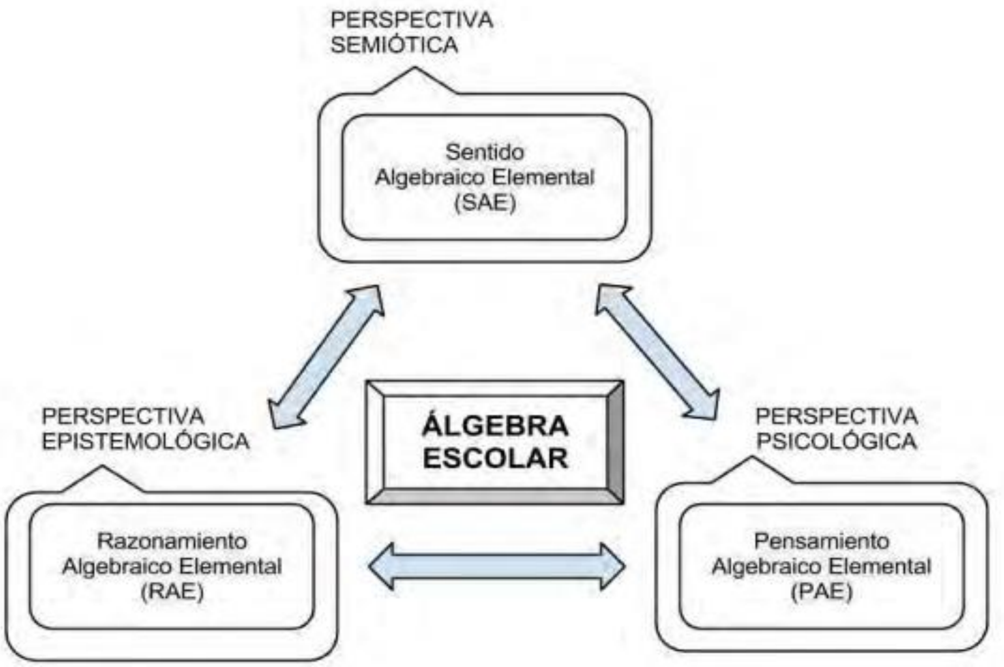


Figura 3: Enfoque transdisciplinar del álgebra escolar.
Fuente: Aké, (2013, p.100)

2.2.6 Concepciones del razonamiento algebraico

Aké (2013)Junto con diversos autores como son: Mason((1996), Mason y Pimm (1984), Carreher, Martínez y Schliemann (2008) y Cooper y Warren (2008), consideran que la generalización es un rasgo característico del razonamiento algebraico, así como los medios para expresar, tanto las situaciones de generalización, como las de indeterminación (uso de incógnitas y ecuaciones para modelizar situaciones) a través de un lenguaje específico.

Para algunos autores como Raford (2011) citado por Aké (2013) determina que, es posible expresar la generalidad a través de un lenguaje gestual, hasta llegar a la consolidación de un lenguaje propiamente algebraico. Así nuestra concepción de razonamiento algebraico asume tres supuestos básicos sobre la naturaleza de lo algebraico que también han sido explicitados por autores como Radford (2003); Kaput, Carraher y Blanton (2008); Filloy, Puig y Rojano (2008). Estos supuestos se refieren al papel esencial de la generalización, el uso del lenguaje alfanumérico (o simbólico-literal) y el cálculo analítico, esto es, el cálculo sujeto a la aplicación de unas reglas sintácticas.

Aké (2013) También considera que los trabajos sobre el pensamiento relacional Carpenter, Frankle y Levi (2003); Molina y Castro (2009); las funciones y los patrones Castro (1994) y las estructuras Chaiklin y Lesgold (1984); Usiskin (1989) marcan la pauta para establecer tipologías de tareas a través de las cuales es posible el desarrollo del razonamiento algebraico. Los objetos algebraicos inmersos en el pensamiento relacional, funcional y estructural van adquiriendo un significado diferente conforme haya una "evolución" en los procesos de generalización y simbolización. De modo que el conocimiento de propiedades estructurales, en un nivel elemental, comprende el conocimiento de y entre los objetos, de propiedades como la asociativa, conmutativa, etc. Kieran (1989); Morris (1999); Warren (2001). En los grados más avanzados se reconoce como parte de un conocimiento de la estructura, la equivalencia de las ecuaciones subsecuentes que se obtienen al resolver una ecuación Palarea (1998) reconociendo "formas" matemáticas existentes entre los elementos Hoch y Dreyfus (2004). El tratamiento de la equivalencia, en los niveles elementales, puede realizarse a través de "ecuaciones numéricas" enmarcadas dentro el pensamiento relacional Stephens (2006); Molina (2007).

2.2.7 El EOS y la concepción del razonamiento algebraico

Aké (2013) considera que una práctica matemática es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, gestual, etc.) realizada por alguien para resolver un problema matemático, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas, de modo que una práctica matemática puede ser "más algebraica o menos algebraica" en función que incluya algunas características y en función del nivel educativo en el cual se discuta. De este hecho también se desprende que es posible argumentar que los problemas algebraicos no existen y que sólo podemos hablar de métodos o soluciones algebraicas, en el mismo sentido que Ameron (2002) menciona que no es la naturaleza de la tarea, sino el método de solución el que importa.

Aké (2013) De igual forma defiende al razonamiento algebraico elemental determinando que este puede ser desarrollado a través de actividades/tareas matemáticas cuyas soluciones conlleven prácticas matemáticas con diferentes niveles de algebrización. Los niveles de algebrización están definidos en función de objetos, significados y procesos que se requieren y surgen en la solución de una actividad/tarea matemática en la escuela primaria, estableciendo para la actividad una configuración algebraica.

2.2.7.1 Objetos algebraicos

En el EOS se propone una tipología de objetos que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas. La Figura 4 resume los seis tipos de objetos primarios y vamos a utilizarlos como pauta para indagar los tipos de "objetos algebraicos".

Figura 4: Tipos de objetos implicados en la práctica algebraica.
Fuente: Aké, 2013 (p.100)

La consideración de una práctica matemática como de índole algebraica puede hacerse con base en la presencia de cierto tipo de objetos, usualmente considerados en la literatura como algebraicos. Estos pueden ser conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos, expresados preferentemente con un lenguaje alfanumérico. En una primera aproximación vamos a considerar como tipos de objetos algebraicos primarios los siguientes:

1) *Relaciones binarias* —de equivalencia o de orden— y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica). Estas relaciones son usadas para definir nuevos conceptos matemáticos.

Ejemplo usado de la tesis de Aké (2013, pág. 101) : Dos fracciones se dicen que son equivalentes cuando aplicadas a una misma cantidad se obtiene la misma cantidad fraccionaria. De otra forma, cuando el producto cruzado de numeradores y denominadores son iguales; formalmente,

$a, b, c, d\ \epsilon\ \ ; b, d\ \neq 0{:}\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad ad = bc.\ Por\ ejemplo{:} \frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$ El conjunto de todas las fracciones equivalentes entre sí, $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \dots\right\}$da lugar a la consideración de un nuevo objeto más general que cada una de dichas fracciones, que es un número racional particular, usualmente representado por la fracción irreducible $\frac{2}{3}$. Este número racional es un objeto intensivo que se puede definir de una manera más formal indicando la propiedad que caracteriza la formación de todas las fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$: es el conjunto de todas las fracciones en las que el numerador es de la forma 2k, y el denominador de la forma 3k, siendo k cualquier número entero diferente de 0.

$$\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\frac{n}{m} | n = 2k; m = 3k; k \in 0\right\}"$$

2) *Operaciones y sus propiedades*, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.). El denominado cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades tales como: asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de elemento neutro y de un inverso. Asimismo, pueden intervenir también otros conceptos como ecuación, inecuación e incógnita, y procedimientos tales como: eliminación, trasposición de términos, factorización, desarrollo de términos, entre otros.

Ejemplos usados de la tesis de Aké (2013, p. 103):

Aplicar la propiedad distributiva a la expresión 3(2+x) para producir la expresión equivalente 6 + 3x; o bien a la expresión 24x + 18y para producir la expresión equivalente 6(4x + 3y).

Usar variables para representar números y expresiones en la resolución de un problema del mundo real; comprender que una variable puede representar un número desconocido, o cualquier número en un conjunto específico.

3) Funciones. Es necesario considerar los distintos tipos de funciones y álgebra asociada a ellos, es decir, las operaciones y sus propiedades. Asimismo, es preciso distinguir los diferentes objetos involucrados: funciones; variables, fórmulas, parámetros, etc., y contemplar las distintas representaciones de una función: tabular, gráfica, como fórmula, analítica.

Ejemplo usado de la tesis de Aké (2013, p. 104): ¿En la figura 5, ¿cuántos cuadrados tendrá el dibujo de la sexta posición 6ª? ¿Y el dibujo situado en la posición n–ésima?

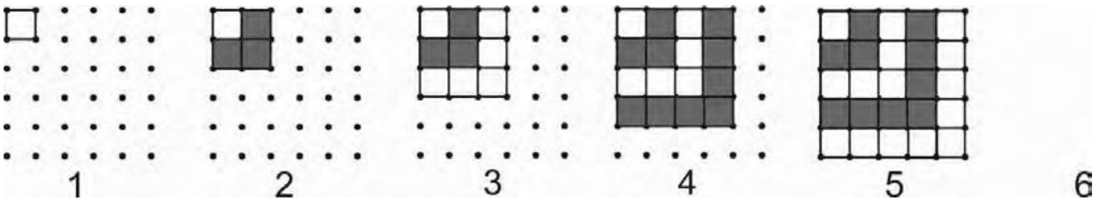


Figura 5: Secuencia de cuadros.
Fuente: Aké, 2013 (p.104)

En este ejemplo, el número de cuadrados que se van formando para cada posición de la figura viene dado por la función cuadrática, $y = n^2$. Intervienen los conceptos algebraicos de función, variable independiente (n), variable dependiente (y), criterio o regla de correspondencia, n^2.

4) Estructuras, sus tipos y propiedades (semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc.) características del álgebra superior o abstracta.

El estudio de estas estructuras algebraicas corresponde a niveles educativos superiores, aunque es posible encontrar en libros de primaria contenidos que corresponden a un primer contacto con las propiedades algebraicas que caracterizan al semianillo (N, +, x) de los números naturales.

Estos tipos de objetos algebraicos básicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico si nos atenemos al sentido “clásico” del álgebra que describe Kieran (1989). Pero en el contexto escolar también se usan otros medios de expresión, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, tabular, incluso gestual Radford (2003); Arzarello (2006). Un tipo de actividad algebraica primaria será la traducción o transformación entre distintos lenguajes (registros de representación), particularmente la conversión entre el registro de la lengua natural al registro alfanumérico Duval (2008).

2.2.7.2 Procesos algebraicos

En el marco del EOS las prácticas matemáticas y los objetos que intervienen en las mismas se pueden contemplar desde distintos puntos de vista, según el contexto o el juego del lenguaje en que tienen lugar dichas prácticas. La figura 6 resume dichos puntos de vista, representados como pares de dualidades para indicar las relaciones dialécticas que se establecen entre las mismas. De estás dualidades se potencian el uso de tres de ellas, dado su relación íntima con la actividad algebraica, que a continuación se explican:

Figura 6: Relatividad contextual de la práctica algebraica.
Fuente: Aké. 2013 (p.105)

En el caso de la práctica o actividad algebraica los procesos de *particularización – generalización* tienen una importancia especial, dado el papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico Mason y Pimm (1984);Carraher, Martínez y Schliemann (2008); Cooper y Warren (2008). El EOS considera a la generalización en términos de la identificación de objetos intensivos y objetos extensivos que intervienen en las prácticas, los cuales proporcionan un análisis más profundo. Un objeto se dice que es extensivo si interviene en una práctica matemática como un ejemplar particular, mientras que se dice que es un intensivo si interviene como un tipo, clase o generalidad Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011).

La dualidad *unitaria – sistémico* permite describir los procesos mediante los cuales una entidad compuesta o sistémica pasa a ser vista como una entidad unitaria. Una vez que un intensivo es visto como una entidad unitaria podrá participar en otros procesos de generalización y dar lugar a intensivos de orden superior.

Asimismo, la dualidad *ostensiva – no ostensivo* aporta una nueva comprensión de los procesos de generalización, a los objetos intensivos resultantes, y a los "artefactos" que necesariamente deben intervenir para que tenga lugar la generalización. Con la ostensión nos referimos a los medios semióticos de objetivación Radford (2003), a los recursos perceptivos de expresión. Usualmente los objetos matemáticos se consideran objetos ideales o mentales, o sea, objetos no ostensivos. Sin embargo, su "producción" y comunicación tiene que hacerse con la intervención de objetos perceptibles como lo sería a través del uso de palabras, de representaciones gráficas o figurativas, imágenes, iconos, sistemas alfanuméricos y algebraicos, de figuras geométricas y representaciones sinónimas. Las generalidades o abstracciones, sean conceptos, procedimientos, propiedades, son en sí mismas no ostensivas, pero su toma de conciencia y manipulación por el sujeto requiere el uso de símbolos ostensivos. En este sentido la simbolización, parte esencial del razonamiento algebraico permite que los objetos matemáticos sean más asequibles a la reflexión NCTM (2000). En el estudio de la función $y = 2x + 1$, el conjunto de los números reales R está representado (aquí de manera tácita) por las letras x e y, las cuales se consideran como variables que "toman" valores en R. Dado que R es un conjunto estructurado con unas operaciones que cumplen determinadas propiedades, la expresión simbólica, *2x + 1* interpretable en el cuerpo algebraico R, ha producido un objeto de un nuevo orden de generalidad que es la función lineal.

Aké (2013) determina que la presencia de objetos intensivos en una práctica matemática nos sirve para reconocer indicios de un cierto nivel de generalización. Considera que la emergencia de los objetos intensivos atraviesa por distintos momentos o etapas cada una de las cuales le aporta distintos niveles o capas de generalidad Raford (2011). Un número, 3, una figura geométrica, el triángulo, se presenta como entidad unitaria, ideal, abstracta, general; pero al mismo tiempo su construcción, idealización, abstracción, reificación, pasa por distintos momentos y contextos, cada uno de los cuales le impregna de significados parciales.

La presencia de objetos intensivos, en alguno de sus niveles o capas de generalidad, será un rasgo característico de actividad algebraica elemental. Entendida el álgebra de esta manera, supone ampliar su presencia en las matemáticas escolares, ya que, en las primeras actividades matemáticas, como pueden ser las de conteo de colecciones de objetos realizados por niños de preescolar hay procesos de generalización - conceptualización.

2.2.7.3 Configuraciones algebraicas

Los objetos y procesos algebraicos descritos aportan criterios para distinguir distintos tipos de configuraciones algebraicas. Habrá tareas matemáticas que pongan en juego de manera específica relaciones binarias, operaciones, funciones, estructuras. También habrá tareas cuyo foco de atención será la transformación entre distintos modos de expresión, particularmente entre los lenguajes natural, icónico, gestual, etc., a lenguaje simbólico – literal, así como prácticas matemáticas orientadas al objetivo de generar nuevos objetos intensivos, o simplemente a la aplicación de objetos intensivo. A continuación, describimos diferentes tipos de configuraciones algebraicas:

a) Configuración intencional

A un niño se le propone la siguiente tarea:

"Pinta de color rojo los triángulos, de verde los círculos, de azul los cuadrados, de amarillo los rectángulos y de negro los rombos".

Si el estudiante la resuelve correctamente podemos afirmar que ha generalizado o abstraído aspectos figurativos de los conceptos generales de triángulo, círculo, cuadrado, rectángulo y rombo, y los está aplicando al caso particular de los dibujos que se le presentan.

Asimismo, el niño que responde a la pregunta, ¿Cuántas canicas tienes?, mostrando cinco dedos, pronunciando la palabra "cinco", o escribiendo el símbolo 5, ha realizado un proceso de generalización o abstracción, por lo que podríamos decir que ha alcanzado un cierto nivel de "razonamiento algebraico". Ciertamente que aún puede que no sea capaz de relacionar y operar con tales objetos intensivos usando el recurso de los símbolos numéricos, pero no se puede negar que ha desarrollado una cierta capacidad de generalización. En un primer grado de algebrización se debe reconocer, por tanto, la presencia de objetos intensivos.

No es necesario representar con símbolos literales los objetos intensivos para que dichos objetos intervengan en una práctica matemática. El uso de símbolos literales será necesario, o al menos, de gran utilidad para representar intensivos de mayor nivel de generalidad. Por ejemplo, el número 428 es una forma eficiente de representar cuatro centenas, dos decenas y ocho unidades, esto es, $4\times100 + 2\times10 + 8$. Si esta expresión se presenta a los estudiantes como un ejemplo de la expresión más general, $a\times10^2 + b\times10+c$, estamos introduciéndoles en un primer nivel de razonamiento algebraico. A su vez la expresión polinómica, $a\times10^2+ b\times10 +c$, se puede presentar como un caso particular de la expresión polinómica general de cualquier número en base 10, o en otra base diferente. También se puede generalizar al caso en que las potencias de la base sean negativas, esto es, para representar números decimales

b) Configuración relacional

Veamos el siguiente problema resuelto de dos maneras diferentes. En ambos casos se moviliza una configuración de tipo relacional, pero la primera solución se puede calificar como “más algebraica”:

Problema 1 tomado de la tesis de Aké (2013): ¿Qué número hay que poner en lugar de [] en la expresión, 67 + 83 = [] +82?

Solución. Un estudiante puede resolver el problema sumando 1 y restando 1 al primer miembro de la igualdad, 67+1+83-1, y obtendrá 68 + 82; para luego restar 82 a ambos miembros y así obtener [] = 68.

De este modo aplica propiedades generales de la relación de equivalencia y la propiedad asociativa de la adición. Este modo de pensar y de resolver tareas con expresiones numéricas se conoce en la bibliografía sobre “Early Algebra” como características del pensamiento relacional. Esto no tiene lugar si un alumno realiza la suma del primer término y después resta 82; obtiene el resultado 68, pero en este caso pone en juego hechos numéricos particulares. Se trata de una configuración mayoritariamente relacional expresada con lenguaje ordinario y numérico.

Problema 2 tomado de la tesis de Aké (2013): Encuentra los valores que hacen cada una de las siguientes sentencias numéricas verdaderas: 44 + 29 = 45 +a; 65 + 38 = 62 + b; 99 + 87 = 98 + 86 + c.

Este ejemplo pone en juego también una configuración mayoritariamente relacional, pero introduciendo el uso de notación simbólica literal.

c) Configuración operacional

Problema 4 tomado de la tesis de Aké (2013): Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

Solución. Una estudiante, Beatriz, resolvió el problema de la siguiente manera:

Sea *x* el dinero recibido de los padres. Representamos por *x* el gasto diario previsto por

los padres para comer 40 días. $x = \frac{x}{40}$

Sea *y* el gasto diario real, que permitió comer 60 días: $y = \frac{x}{60}$

$40x = 60y$; además $y = x - 4$;

$40x = 60(x - 4)$; $20x = 240$; $x = 12$; cantidad recibida:12.40; 480€

El problema anterior pone en juego una configuración de tipo operacional. En donde se utilizan letras para representar las incógnitas, las relaciones se establecen mediante una ecuación, se opera con las incógnitas aplicando las definiciones y propiedades de las operaciones aritméticas.

Se puede calificar de configuración operacional, aplicativa, implicando la transformación del enunciado dado en lenguaje natural a lenguaje alfanumérico.

d) Configuración funcional

El concepto central es el de función, vinculado a un patrón que se expresa gráficamente pero que puede ser expresado usando otros objetos ostensivos. En la solución al problema siguiente se pueden reconocer los conceptos de variación, variable independiente, variable dependiente.

Problema 5 tomado de la tesis de Aké (2013): Una bacteria se reproduce por reproducción celular. De cada una se obtienen dos. ¿Cuántas bacterias formarán parte de la cuarta generación? ¿Y en la quinta generación? ¿Y en la generación número 100?

Solución. Un estudiante puede abordar la tarea del siguiente modo:

Generación	Bacterias	
1	2	2x1
2	4	2x2
3	8	2x2x2
4	16	2x2x2x2
5	32	2x2x2x2x2

Se establece una dependencia funcional entre la generación y el número de bacterias correspondiente. El lenguaje es aritmético y se pretende generar la regla general, o criterio de la correspondencia, al cual se puede llegar por multiplicaciones sucesivas y subsecuentemente, por el reconocimiento del uso de potencias. Lo que podría desembocar en la expresión funcional que establece que a la generación “n” le corresponde 2^n bacterias.

Califícamos esta configuración como de tipo funcional, generativo, expresada con lenguaje natural y numérico.

e) Configuración estructural

Intervienen como objetos centrales las propiedades estructurales de las operaciones.

En libros de educación primaria se encuentra elementos teóricos que muestran el inicio de una reflexión sobre lo que es la estructura algebraica de los conjuntos y operaciones con números. Como son los casos en donde se emplean enunciados generales de las propiedades como son: conmutativa, asociativa y distributiva de las operaciones aritméticas y sus aplicaciones en las soluciones de problemas.

Las propiedades de la suma

Propiedad conmutativa	*Propiedad asociativa*
En donde el orden de los sumandos no altera a resultado.	En una suma de 3 sumandos se puede empezar sumando el segundo y el tercero y al resultado sumarle el primero.

Relaciones entre los términos de la resta

Para la comprobación de una resta se suma el sustraendo con la diferencia y el resultado debe ser siempre el minuendo.	**M – S = D** **S + D = M** **M – D = S**
En una resta, la diferencia no varía cuando se suman o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo.	

Propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de una multiplicación.

Propiedad conmutativa	*Propiedad asociativa*	*Propiedad distributiva*
En una multiplicación, el orden de los factores no altera el resultado.	Para multiplicar tres números, se multiplican primero dos de ellos y el resultado por el tercero.	El producto de una suma por un número es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número. El producto de una diferencia por un número es igual a la diferencia de los productos de cada termino por ese número.

Es en esta sección que describe la frontera entre la aritmética y el álgebra en términos de las dualidades y procesos descritos. Pero esta frontera no está establecida, porque esta dualidades y procesos son muy relativos y se dan de acuerdo al contexto donde se da la práctica matemática.

2.2.8 El modelo de algebrización

Aké (2013) Establece que su modelo de algebrización se basa en la interpretación de la *práctica algebraica* como resultado de un proceso de generalización del cual se obtiene un tipo de objeto matemático al cual denomina objeto *intensivo*, que viene a ser la regla que genera la clase, el tipo o generalidad implicada. Luego, la formulación de esta regla, pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen o describen, como una entidad unitaria emergente del sistema. Además de la generalización que da lugar al conjunto, también hay un proceso de *unitarización*. De igual forma, la nueva entidad unitaria tiene que ser hecha ostensiva o *materializada* mediante un nombre, icono, gesto o un símbolo, a fin de que pueda participar de otras prácticas, procesos y operaciones. El objeto ostensivo que materializa al objeto unitario emergente de la generalización es otro objeto que refiere a la nueva entidad intensiva, por lo que tiene lugar un proceso de *representación* que acompaña a la generalización y materialización. Finalmente, el símbolo se desprende de los referentes a los cuales representa/sustituye para convertirse en objeto sobre el cual se realizan acciones (*proceso de reificación).* Estos símbolos - objetos forman nuevos conjuntos sobre los cuales se definen operaciones, propiedades y estructuras, esto es, sobre los cuales se opera de manera sintáctica, analítica o formal (figura 7).

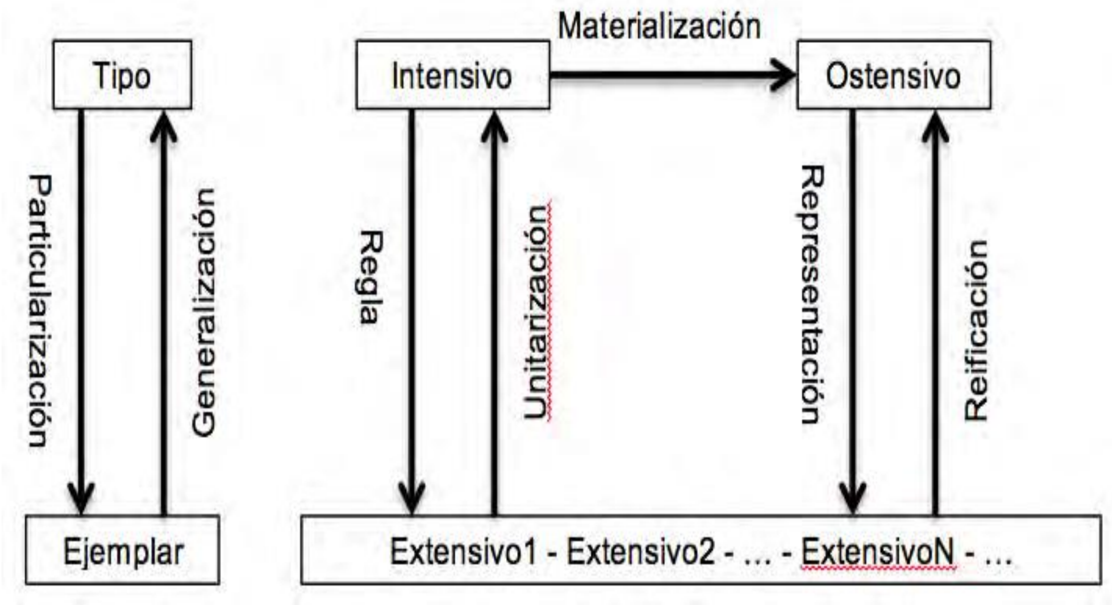


Figura 7: Procesos asociados a la dualidad generalización-particularización en una práctica algebraica.

Fuente: Aké, 2013 (p.114)

"Los tipos de objetos y procesos algebraicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico en los niveles superiores de algebrización. Pero los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, incluso gestual" Radford (2003) citado por Aké (2013).

- Se propone utilizar tres criterios para distinguir los niveles de razonamiento algebraico elemental.
- La presencia de "objetos algebraicos" intensivos.
- Tipo de lenguajes usados para expresar dichos objetos.
- El tratamiento que se aplica (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales).

2.2.9 Definición de niveles de algebrización en la actividad matemática escolar

Aké (2013) En su tesis describe las características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas, abordables en educación primaria, que permiten definir distintos niveles de algebrización, y proponemos distinguir dos niveles de algebrización primarios, a los cuales los llama proto-algebraicos. Estos niveles están determinados desde un nivel 0 de algebrización hasta un nivel 3 en el que la actividad matemática se considera propiamente algebraica.

De igual forma determina que “El nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro. No se trata de niveles exclusivamente matemáticos, sino de estadios del funcionamiento del conocimiento matemático en la resolución de problemas. Además, el cambio en alguna de las variables del problema puede dar lugar a nuevas prácticas matemáticas con progresivo nivel de algebrización.”

Ejemplo tomado de la tesis de Aké (2013): Un profesor propone a sus estudiantes el siguiente problema:

Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?

El estudiante A resolvió el problema de la siguiente manera: Supongamos que hay el mismo número de sillas y de taburetes: 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4. Como el resultado sobrepasa el total de 20 patas, excediéndose en 1 pata, se cambia una silla (de 4 patas) por un taburete (de 3 patas). Finalmente se obtiene 4 taburetes y 2 sillas: 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4, teniendo un total de 20 patas.

El estudiante B hizo la solución del problema de la siguiente manera: Sea T el número de taburetes y S el número de sillas. Como el total de taburetes y sillas deben sumar 6, entonces, T + S = 6. Por otro lado, se debe tener un total de 20 patas entre los taburetes y las sillas, esto es, 3T + 4S = 20. Como de T + S = 6 se obtiene que T = 6 - S; por tanto, 3(6 – S) + 4S = 20, de donde 18 + S = 20, obteniéndose finalmente que S = 2. Si S = 2, entonces T = 4. Se deben tener 4 taburetes y 2 sillas para tener una total de 20 patas.

En este ejemplo se podría aceptar que la solución del estudiante A puede calificar como aritmética, y que la del estudiante B como algebraica. Sin embargo, supongamos ahora que un estudiante C resuelve el problema de la siguiente manera:

Teniendo en cuenta que el número de asientos es 6 y que cada silla aporta 4 patas y cada taburete 3, entonces se puede construir una tabla con todos los casos posibles:

Numero	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Patas de sillas	4	8	12	16	20	24
Patas de taburetes	3	6	9	12	15	18

Luego, tiene que haber 2 sillas y 4 taburetes, ya que entonces hay 6 asientos en total (2 + 4 = 6) y el número total de patas es 20 (8 + 12 = 20).

El problema con su resolución permite reconocer ciertos aspectos que son considerados algebraicos:

1. Determinación de reglas o técnicas generales. Para resolver problemas del mismo tipo es suficiente aplicar la técnica general siguiente: “Se construye una tabla con tantas columnas como número de asientos haya y se determina cuáles son las posibles combinaciones que permitirán determinar el número de asientos que concuerdan con el número de patas”.

2. Simbolización o representación de un objeto mediante un símbolo o una letra. Una persona podría haber sustituido los términos de las filas y columnas por símbolos, de tal manera, que el símbolo utilizado evocara la característica principal de los asientos en el problema (tener 4 o 3 patas, respectivamente).

3. Determinación de propiedades y proposiciones. La tabla muestra el número de patas que "aportan" uno, dos, tres, etc. asientos de cada tipo. Así, se deduce las propiedades:

a) Si el número de patas es un número par, el número de taburetes tiene que ser obviamente un número impar.

b) Si el número de patas es par, el número de taburetes también.

c) El número de patas de un conjunto de sillas es siempre par.

d) El número de patas de un conjunto de sillas es un numero múltiplo de 4; el de taburetes, en un numero múltiplo de 3.

En estas condiciones, la resolución propuesta por el estudiante C excede el campo meramente aritmético, aportando el germen de un trabajo algebraico; y ello a pesar de que en la resolución C sólo usa "números". Para lo cual se hace necesario identificar aspectos que nos permitan establecer una secuenciación de los diferentes niveles de algebrización.

Godino (2002) Los criterios básicos para definir los niveles de algebrización son:

1. *Generalización*. Generación o inferencia de intensivos.
2. *Unitarización.* Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.
3. *Formalización y ostensión*. Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.

4. *Transformación*. Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en generalizaciones.

Describiremos los niveles de algebrización con ejemplos de actividades pertenecientes a las tres facetas o campos del razonamiento algebraico que propone Kaput (2008) esto es, estructuras/operaciones, funciones/patrones y modelización.

2.2.10 Ausencia de razonamiento algebraico (nivel cero)

Si desea capacitar al docente para que desarrolle el razonamiento algebraico en sus estudiantes, es necesario describir las prácticas matemáticas de nivel 0, esto es, aquellas que no incluyen características algebraicas. Aké (2013) propone la siguiente regla para asignar el nivel 0 de algebrización a una práctica matemática:

Intervienen objetos extensivos expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual, simbólico o literal que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas funcionales, el reconocimiento de la relación de un término con el siguiente, no implica la determinación de una regla que generaliza la relación de los casos particulares.

Ejemplo 1 considerado de la tesis de Aké (2013). Calcula el término que falta: 1500 - 925 = _____

Suponiendo que el resultado 575 se puede obtener mediante el algoritmo usual de la sustracción, el número desconocido, será representado por una línea horizontal (___), y es simplemente el resultado de efectuar la operación indicada en el primer miembro de la igualdad; el signo igual expresa el resultado de la operación. Por lo tanto, solo se trataría de una actividad típicamente aritmética. Puesto que el trabajo consiste en calcular el número particular que se debe asignar a la línea horizontal de la derecha.

Ejemplo 2 considerado de la tesis de Aké (2013). Realiza estas sumas y compara los resultados:

a) 24386 + 6035; 6035 + 24386

b) 24386 + 6035 + 715; 6035 + 715 + 24386

Si un alumno se limita a realizar las operaciones pedidas y comprobar que los resultados son iguales dos a dos, la actividad matemática realizada no implica ningún nivel de razonamiento algebraico.

Ejemplo 3 considerado de la tesis de Aké (2013). El Ayuntamiento plantó al comienzo de la primavera 25 cajas de petunias. Cada caja contenía 20 petunias. Tras unos días de sequía murieron 72 petunias. ¿Cuántas quedan aún?

Un estudiante podría razonar de la siguiente manera: "El número total de cajas que plantaron fueron de 25, por 20 petunias en cada caja, que hacen un total 500 petunias. Como después se malograron 72, habrá que quitarlas del total, o sea, quedarían 500 – 72 = 428; 428 petunias"

Se puede llegar a observar que en esta práctica matemática intervienen números particulares, operaciones aritméticas aplicadas a dichos números y la igualdad como resultado de la operación. Aké (2013) determina que es cierto que en la tarea el sujeto debe reconocer la ocasión de aplicar los conceptos de multiplicación y sustracción de números naturales, además del concepto de número natural aplicado como medida del tamaño de colecciones discretas. Sin embargo, a estos procesos de particularización no son propios del razonamiento algebraico.

2.2.11 Nivel incipiente de algebrización (nivel 1)

En el ejemplo 2, un alumno podría haber razonado de la siguiente forma: "puesto que 24386 + 6035 es 30421, entonces para calcular 24386 + 6035 + 715 es suficiente añadir 715 al resultado 30421, dando como suma total 31136. Asimismo, podría haber razonado que los resultados son iguales dos a dos, puesto que el orden en que se suman dos términos es irrelevante. Es por ello que el alumno no debería de haber nombrado a estos razonamientos como "propiedades asociativa y conmutativa"; lo satisfactorio es que establezca una relación genérica entre números y unas propiedades reutilizables de sus operaciones. Y es que es aquí que se establece un 1er paso en la algebrización del razonamiento.

En un nivel insipiente de algebrización, se observa la intervención de objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de una manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados con símbolos o letras, pero sin operar con dichos objetos. En las tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico - literal.

En el caso de prácticas matemáticas que ponen en juego las incógnitas y las relaciones, el uso de formas simbólicas (__, …, [],) para las cantidades desconocidas marca un primer nivel de algebrización si la determinación del valor desconocido no se hace mediante la mera asignación del resultado de operaciones sobre objetos particulares. De igual forma, la aplicación de propiedades relacionales y estructurales del semigrupo N de los naturales, expresadas con lenguaje numérico y natural, es también propia del nivel insipiente de algebrización.

Ejemplo 4 considerado de la tesis de Aké (2013): a) 15 + 11 = 11 + []; b) 10 + [] = 15 +15; c) 3 x [] = 672

La tarea a) se puede resolver sin realizar directamente las operaciones, evocando la propiedad conmutativa de la suma de los números naturales. La b) se puede resolver mediante descomposición y aplicando la propiedad asociativa: 10 + [] = 10 + 5 + 15 = 10 + (5 + 15) = 10 + 20

Luego el número que falta es 20. La c) se puede resolver reconociendo que la división es la operación inversa de la multiplicación. Es por ello que algunos alumnos de edades que abarcan los 12 y 13 años persisten en resolver la expresión mediante ensayo y error, sin reconocer la relación inversa entre la división y multiplicación. La resolución mediante ensayo y error, sería una práctica de nivel 0 de algebrización.

Debido a que en los tres casos las tareas se resuelven tomando en cuenta propiedades algebraicas de las operaciones con números naturales, le asignamos un nivel insipiente de algebrización.

Ejemplo 5 considerado de la tesis de Aké (2013). (balanza algebraica): ¿Cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza (figura 8) para que quede equilibrada?

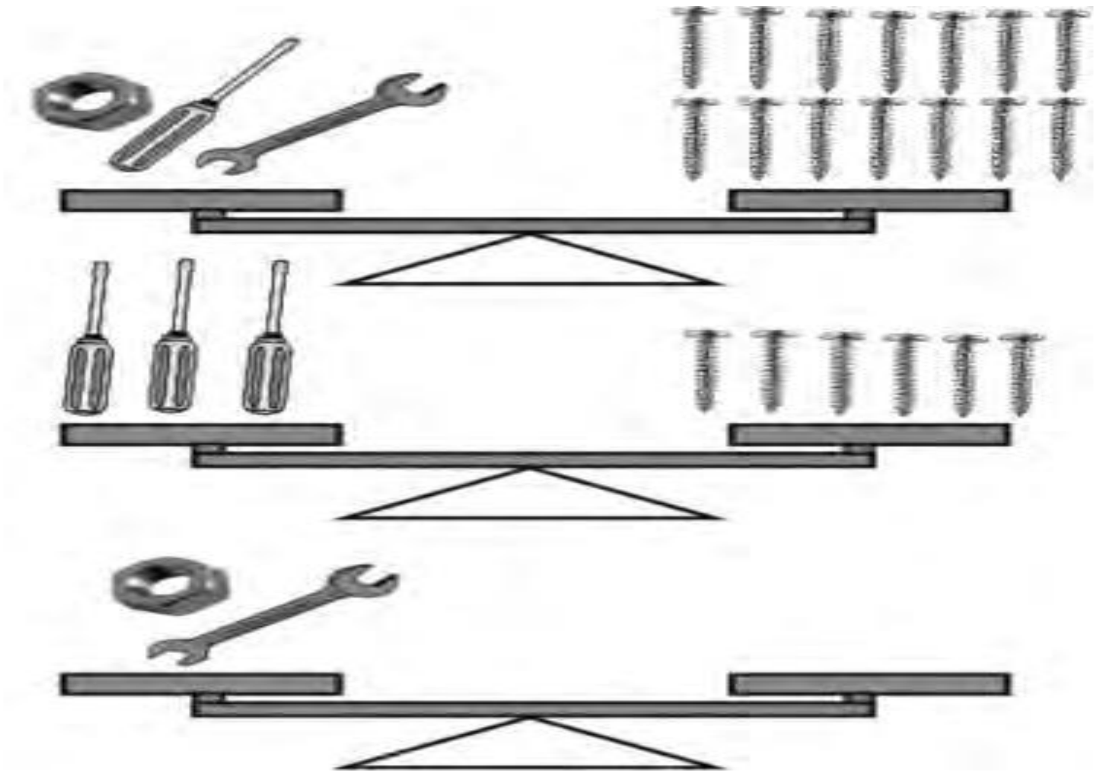


Figura 8: Balanza algebraica.
Fuente: Aké, 2013 (p. 116)

Solución: La 2da balanza indica que 3 destornilladores pesan igual que 6 tornillos; entonces 1 destornillador pesa igual que 2 tornillos. En la 1ra balanza hay 14 tornillos en el plato de la derecha; si quitamos el destornillador habrá que quitar 2 tornillos para que se mantenga el equilibrio.

Luego en la tercera balanza hay que poner 14 – 2 = 12; 12 (tornillos).

Como se ve se están aplicando propiedades estructurales del semianillo (N, +, x), aunque con un lenguaje natural. Se puede asignar el nivel 1 de algebrización a cada una de las etapas en que se descompone la tarea.

Ejemplo 6 considerado de la tesis de Aké (2013). (áreas y perímetros): Indica el lado de un cuadrado y la base y altura de un rectángulo que tengan igual área y distinto perímetro.

Solución 1: Supongamos que el lado del cuadrado es 6; el perímetro será 24 (cuatro veces el lado) y el área 36 (lado por lado). Un rectángulo de área 36 puede estar formado por una base de 12 y una altura de 3 (12 x 3 = 36); en este caso el perímetro será 12 + 12 + 3 + 3 = 30, que es diferente de 24.

En esta resolución interviene los objetos intensivos, fórmulas generales de cálculo del área de un cuadrado (lado x lado), del rectángulo (base x altura), perímetro del cuadrado (4 x lado) y perímetro del rectángulo (2 veces la base más dos veces la altura). Sin embargo, dichas reglas no aparecen enunciadas de manera general y explícita, sino particularizadas con valores numéricos específicos. La actividad matemática que se realiza es de índole aritmético-geométrica sin ningún carácter algebraico (nivel 0).

Solución 2: Supongamos que el lado del cuadrado es 6; el perímetro será 24 y el área 36. Podemos encontrar muchos rectángulos cuya área sea 36, y perímetro diferente de 24. Por ejemplo, si la base fuera 4, la altura sería 9 (36/4=9), el perímetro 26; si la base fuera 2, la altura sería 18 (36/2=18), el perímetro 40. En general, la altura sería 36 dividido por la base.

En esta 2da solución se genera un objeto intensivo: el conjunto de soluciones posibles para la base (b) y altura (h) del rectángulo una vez fijada el área (A) del cuadrado. Se establece una relación general entre la altura y la base del rectángulo (h = A / b), aunque dicha regla se enuncia con lenguaje aritmético y natural.

Esta actividad matemática sin duda supone un nivel 1 (nivel insipiente de algebrización) de razonamiento algebraico.

2.2.12 Nivel intermedio de algebrización (nivel 2)

Aké (2013) Este nivel de algebrización lo define mediante la siguiente regla:

"Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión"

Ejemplo 7 considerado de la tesis de Aké (2013): Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después que se usa cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero.

¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?

Solución 1: Si Juan tuviera 2 monedas podría jugar; al meterlas en la máquina obtendría 4, pagaría 4 y se quedaría con 0, por lo que no podría volver a jugar. Si Juan tuviera 3 moneda, al meterlas en la máquina obtendría 6, al pagar 4 se queda con 2. Vuelve a meterlas, obtiene 4; al pagar 4 se queda sin dinero. Luego Juan tenía al principio 3 monedas.

La actividad matemática desarrollada en esta resolución no pone en juego ningún nivel de algebrización. El sujeto trabaja con valores particulares de las variables de la tarea y opera aritméticamente con ellos. Veamos la siguiente solución:

Solución 2 considerado de la tesis de Aké (2013): Juan comienza con n monedas (cantidad desconocida); al ponerlas en la máquina obtiene $2n$; paga 4 y se queda con $2n - 4$.

Introduce *2n – 4* en la máquina y obtiene el doble, o sea, *2(2n - 4)*. Al pagar 4 se queda sin dinero, o sea:

$2(2n - 4) - 4 = 0;\ 4n - 8 - 4 = 0;\ 4n - 12 = 0;\ n = 3$

La solución 2 es claramente de nivel 2. La cantidad desconocida de monedas (incógnita) se representa simbólicamente mediante una ecuación de la forma Ax + B = C

Ejemplo 8 considerado de la tesis de Aké (2013). (secuencia de figuras con palillos): En la figura 9, ¿Cuántos palillos son necesarios para formar el dibujo situado en la posición 4ª? ¿Y para formar el dibujo que estuviera en la posición 50? ¿Y para la posición 100?

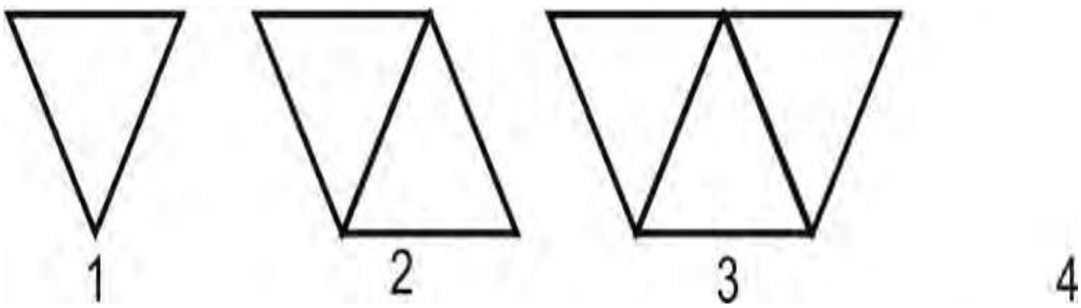


Figura 9: Figuras con palillos.
Fuente: Aké,2013 (p. 117)

Solución: La secuencia de figuras está formada por triángulos; cada triángulo requiere 3 palillos, luego la figura en la posición *n*, requiere *3n* palillos. Pero al poner juntos los triángulos se eliminan palillos; en la figura 2ª se elimina 1, en la 3ª se eliminan 2, en la 4ª se eliminan 3. O sea, la fórmula general será $3n - (n - 1)$. Para la figura 50 se necesitan 101 palillos y para la 100, 201.

Este tipo de solución se trata de generalización de tipo mixto, contextual y simbólico. Puesto que la regla que proporciona el n° de palillos en una posición cualquiera se relaciona con la forma y posición ordinal de la figura. La fórmula dada no es transformada operando con la variable para obtener la forma canónica de expresión, $2n + 1$…

2.2.13 Nivel consolidado de algebrización (nivel 3)

En el ejemplo 6 (balanza algebraica) la exposición en lenguaje natural podría haberse formalizado: puesto que $3d = 6t$ (3 destornilladores = 6 tornillos); dividiendo por 3 ambos miembros, $d = 2t$. Además, en la primera balanza, $p + d + l = 14t$ (pieza, destornillador, llave = 14 tornillos). Entonces, si se quita el destornillador del platillo izquierdo el equilibrio se mantiene si quitamos un peso equivalente, o sea 2 tornillos. Esta explicación de la actividad matemática realizada supone un nivel consolidado de algebrización (nivel 3 de algebrización) debido a que se han planteado de manera simbólica las ecuaciones y se aplica una técnica de sustitución para resolver la ecuación que se pidió.

Aké (2013) Describe a este nivel de la siguiente forma:

Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo Ax ± B = Cx ± D, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Evidentemente, se pueden identificar niveles más avanzados de razonamiento algebraico, como aquellos que implican el reconocimiento, enunciado y justificación de propiedades estructurales de los objetos matemáticos que intervienen en la práctica correspondiente (números, medidas, transformaciones geométricas, ...).

En la tabla 1, sin pretender ser categóricos, resumimos las características esenciales de los cuatro niveles de algebrización identificados, que hemos descrito y ejemplificado anteriormente, y que nos permiten distinguir tres niveles de razonamiento algebraico elemental.

Tabla 1

Rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental

Niveles	Tipos de objetos	Transformaciones	Lenguajes
0	No intervienen objetos intensivos. No se diferencian propiedades. Pueden intervenir datos desconocidos.	Se opera con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos o incluso letras que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.
1	En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos. En tareas funcionales se reconocen los intensivos.	En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones. En tareas funcionales se calcula con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos
2	Intervienen indeterminadas o variables	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal
3	Intervienen indeterminadas o variables	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico – literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto

Fuente: Aké. 2013 (p.189)

Se hace preciso mencionar que es necesario reconocer que las fronteras entre los niveles pueden a veces ser difusas y que dentro de cada nivel es posible hacer distinciones que podrían llevar a proponer nuevos niveles. “Sin embargo, nuestra propuesta puede ser útil para orientar la acción del maestro que trate de impulsar la progresión del pensamiento matemático de los alumnos hacia niveles progresivos de generalización y eficacia representacional y operatoria” Godino (2014)

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Ubicación geográfica del estudio

El área de estudio es la ciudad de Puno, capital del departamento del mismo nombre, el cual se encuentra ubicado al sureste, exactamente en las orillas del lago Titicaca bahía de Puno, de igual forma se encuentra a una latitud de 3,520 m.s.n.m. con una superficie de 6,494.76 km2 y limita con las siguientes provincias o lugares:

Norte: Provincia de San Román.

Sur: Provincia de Chucuito.

Este: Lago Titicaca.

Oeste: Departamento de Moquegua.

3.2 Periodo de duración del estudio

La investigación tuvo un periodo de duración de 7 meses el cual consistió en el siguiente:

1er mes: Elaboración y validación del primer instrumento.

2do mes: Elaboración y validación del segundo instrumento.

3er mes: Elaboración y validación del tercer instrumento.

4to mes: Elaboración y validación del cuarto instrumento.

5to, 6to y 7mo mes: Calificación, tabulación y procesamiento de la información de los instrumentos.

3.3 Procedencia del material utilizado

La investigación se apoyó por los siguientes materiales:

3.3.1 Instrumento N° 1

Este instrumento tiene como título “Prueba de ecuaciones y balanzas”, y consta de 5 ítems cuya fuente de elaboración son los textos del grupo Azarquiel, los cuales nos permitió evaluar el nivel 0, de los niveles de algebrización. (Anexo 1)

Puntuación:

- 0 puntos si la respuesta es incorrecta.
- 2 puntos si es parcialmente correcta.
- 4 puntos si es correcta.

3.3.2 Instrumento N° 2

Este instrumento tiene como título “Prueba de sobre inducción a generalización”, y consta de 2 ítems cuya fuente de elaboración son los textos del grupo Azarquiel, los cuales nos permitió evaluar el nivel 1, de los niveles de algebrización. (Anexo 2)

Puntuación:

- 0 puntos si la respuesta es incorrecta.
- 5 puntos si es parcialmente correcta.
- 10 puntos si es correcta.

3.3.3 Instrumento N° 3

Este instrumento tiene como título “Prueba del sentido algebraico”, y consta de 4 ítems cuya fuente de elaboración son las investigaciones de Godino, los cuales nos permitió evaluar el nivel 2, de los niveles de algebrización. (Anexo 3)

Puntuación:

- 0 puntos si la respuesta es incorrecta.
- 2 puntos si es parcialmente correcta.
- 5 puntos si es correcta.

3.3.4 Instrumento N° 4

Este instrumento tiene como título "Prueba de aplicación de ecuaciones cuadráticas", y consta de 2 ítems cuya fuente de elaboración son los textos de secundaria del MED, los cuales nos permitió evaluar el nivel 3, de los niveles de algebrización. (Anexo 4)

Puntuación:

- 0 puntos si la respuesta es incorrecta.
- 5 puntos si es parcialmente correcta.
- 10 puntos si es correcta.

Se ha considerado categorizar los puntajes totales según a las notas obtenidas para una mejor interpretación de los resultados de la siguiente manera:

Muy Malo	=	0 – 5
Malo	=	6 – 10
Regular	=	11 – 15
Bueno	=	16 – 20

3.4 Población y Muestra de Investigación

La investigación tomo como población y muestra a los siguientes:

3.4.1 Población

La población de estudio estuvo constituida por 138 docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno, los cuales tiene la condición de contratados y nombrados dentro de la carrera pública magisterial, con tiempos de trabajo entre 1 a 40 años.

Tabla 2

Distribución de la población según colegios de la ciudad de Puno.

Colegio	N° de docentes	Frecuencia	%
IES Santa Rosa	15	0.12	12%
IES Mañazo	5	0.04	4%
IES Eduardo Benigno Luque Romero	6	0.05	5%
IES San Francisco – Tiquillaca	5	0.04	4%
IES María Asunción	4	0.03	3%
IES San Miguel – Cari Cari	5	0.04	4%
IES José Olaya Balandra	5	0.04	4%
IES Ricardo Palma -Totorani	3	0.02	2%
IES José Gálvez	6	0.05	5%
IES - Capachica	5	0.04	4%
IES Mariscal A. S. C.- Chua Chua	7	0.06	6%
IES Huacochullo	4	0.03	3%
IES Industrial 45	8	0.07	7%
IES Carlos Dante N. – Jayu Jayu	5	0.04	4%
IES Industrial 32	6	0.05	5%
IES José Carlos Mariátegui	4	0.03	3%
IES Enrique Encinas Franco	15	0.12	12%
IES Glorioso San Carlos	15	0.12	12%
IES Gran Unidad Escolar San Carlos	15	0.12	12%
Totales	138	1	100%

Fuente: Escale

3.4.2 Muestra

La muestra estuvo compuesta por 25 docentes, los cuales fueron tomados de manera intencional.

Tabla 3

Distribución de la muestra según colegios de la ciudad de Puno.

Colegio	N° de docentes	Frecuencia	%
IES Santa Rosa	3	0.12	12%
IES Mañazo	3	0.12	12%
Eduardo Benigno Luque Romero	1	0.04	4%
IES San Francisco – Tiquillaca	2	0.08	8%
IES María Asunción	1	0.04	4%
IES San Miguel – Cari Cari	1	0.04	4%
IES José Olaya Balandra	1	0.04	4%
IES Ricardo Palma -Totorani	1	0.04	4%
IES José Gálvez	1	0.04	4%
IES - Capachica	1	0.04	4%
IES Mariscal A. S. C.- Chua Chua	1	0.04	4%
IES Huacochullo	1	0.04	4%
IES Industrial 45	1	0.04	4%
IES Carlos Dante N. – Jayu Jayu	1	0.04	4%
IES Industrial 32	1	0.04	4%
IES José Carlos Mariátegui	1	0.04	4%
IES Enrique Encinas Franco	1	0.04	4%
Glorioso San Carlos	2	0.08	8%
Gran Unidad Escolar San Carlos	1	0.04	4%
Total	25	1	100%

Fuente: Pruebas aplicadas a los docentes.

3.5 Diseño estadístico

3.5.1 Tipo

La investigación corresponde al enfoque cuantitativo de tipo descriptivo, el cual estuvo orientado a evaluar el conocimiento algebraico de los profesores de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno – 2017. Sampieri (2014)

3.5.2 Diseño

El diseño de investigación es el diagnostico que está estructurado para establecer las características que tiene el fenómeno estudiado y establecer los aspectos problemáticos que se manifiestan en el fenómeno de estudio Sampieri (2014)

El diagrama del diseño es el siguiente:

M - - - - - - - - - - - O

Leyenda: M: representa la muestra de estudio O: representa la información medida

3.6 Procedimiento

Para la recolección de datos se procedió a realizar las siguientes acciones:

Organización de un curso de actualización dirigido a docentes del nivel de educación secundario en el área de matemática

Ejecución del curso donde se aplicó los instrumentos de evaluación a todos los docentes participantes.

Recolección de la información, para luego proceder a calificar cada una de las pruebas, para luego tabular los datos.

Procesamiento de datos con el programa SPSS, elaboración de tablas de frecuencia, gráficos estadísticos y medidas de tendencia central.

3.7 Variables

La investigación consideró como variable, de estudio el conocimiento algebraico, concretamente el dominio del álgebra escolar y como dimensiones de estudio se consideró los niveles de algebrización planteado por Godino.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se dan a conocer los resultados obtenidos durante el proceso de recolección de datos.

4.1 Resultados

La investigación muestra los siguientes resultados:

4.1.1 Evaluación del conocimiento algebraico

Para calcular el nivel de conocimiento algebraico que poseen los profesores de matemática de educación secundaria de la cuidad de Puno, se tomó en cuenta 3 criterios, los cuales son los siguientes:

1.- Contenido.

2.- Procesos algebraicos.

3.- Niveles de algebrización.

Tabla 4

Criterio para la evaluación de contenidos.

Instrumento		Contenido								Nota Final
N°	ÍTEMS	PL	PL Total		PNL	PNL Total		NP		
			f	%		f	%			
1	Ítem 1	84	436	87%	16	64	13%	17.44		**15.31**
	Ítem 2	86			14					
	Ítem 3	90			10					
	Ítem 4	85			15					
	Ítem 5	91			9					
2	Ítem 1	231.5	452	90%	18.5	48	10%	18.08		
	Ítem 2	220.5			29.5					
3	Ítem 1	119	337	67%	6	163	33%	13.48		
	Ítem 2	94			31					
	Ítem 3	40			85					
	Ítem 4	84			41					
4	Ítem 1	148	306	61%	102	194	39%	12.24		

Fuente: Anexo 1, 2, 3 y 4.

En la tabla 4, respecto al criterio de contenido se obtuvo una nota de 15.31 el cual se calculó tomando en cuenta la nota promedio por cada instrumento: (Instrumento 1, con una nota promedio de 17.44); (Instrumento 2, con una nota promedio de 18.08); (Instrumento 3 con una nota promedio de 13,48); (Instrumento 4, con una nota promedio de 12.24), notas que fueron calculadas en función a los puntajes logrados y no logrados: (Instrumento 1: Puntaje Logrado = 436, con un 87% , Puntaje No Logrado = 64, con un 13%); (Instrumento 2: Puntaje Logrado = 452, con un 90% , Puntaje No Logrado = 48, con un 10%); (Instrumento 3: Puntaje Logrado = 337, con un 67% , Puntaje No Logrado = 163, con un 33%); (Instrumento 4: Puntaje Logrado = 306, con un 61% , Puntaje No Logrado = 194, con un 39%).

Para el cálculo del criterio 2 (procesos algebraicos) y 3 (Niveles de algebrización), se optó por analizar cada instrumento y de acuerdo al nivel de pregunta que con lleva cada ítem de los instrumentos se procedió a determinar el proceso algebraico y el nivel de algebrización al cual pertenece cada instrumento.

Como se puede observar en los Anexos 1, 2, 3 y 4.

Los ítems del instrumento 1 conlleva preguntas que busco que el docente logre el proceso algebraico de Particularización, lo cual se logró en un 87%, calificando así a este instrumento en el nivel 0 de algebrización planteado por Godino (2012, p. 289).

Los ítems de instrumento 2 conlleva preguntas que busco que el docente logre el proceso algebraico de Generalización, el cual se logró en un 90%, calificando así a este instrumento en el nivel 1 de algebrización planteado por Godino (2012, p. 289).

Los ítems del instrumento 3 conlleva preguntas que busco que el docente logre el proceso algebraico de simbolización, el cual se logró en un 67%, calificando así a este instrumento en el nivel 2 de algebrización planteados por Godino (2012, p. 289).

Los ítems del instrumento 4 conlleva preguntas que busco que el docente logre el proceso algebraico de simbolización avanzada, el cual fue logrado en un 61%, calificando así a este instrumento en el nivel 3 de algebrización planteado por Godino (2012, p. 289).

4.1.2 Evaluación del conocimiento según los niveles de algebrización

En el siguiente apartado se muestra el análisis de resultados según a cada instrumento de la siguiente manera:

Resultados del instrumento N° 1

En el siguiente apartado se presenta el análisis de resultados del instrumento 1, por medio de un gráfico de barras.

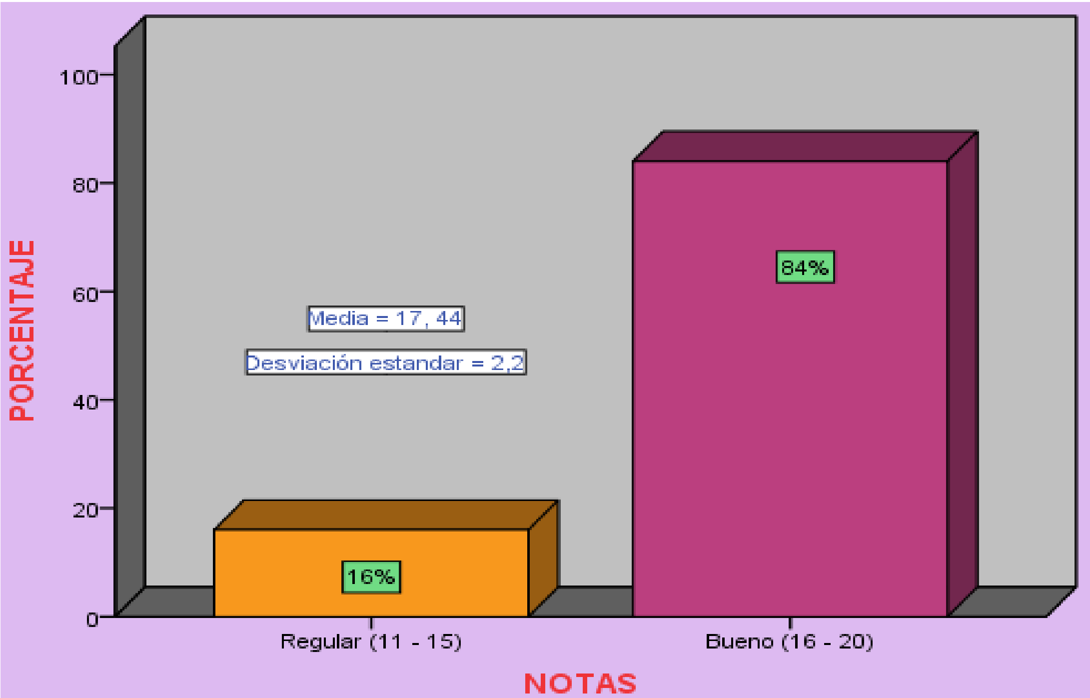


Figura 10 : Distribución general de frecuencias y media del nivel 0
Fuente: Anexo 1

En la figura 10: se puede observar el grafico de frecuencias porcentuales de manera generalizada del instrumento 1, el cual nos permite evaluar en nivel 0 de algebrización (Ausencia de razonamiento algebraico) planteado por Godino, se observa de igual forma que el 16% de los docentes obtuvieron una nota Regular que oscila entre 11 – 15, mientras que el 84% de los docentes obtuvieron una nota Buena que oscila entre 16 – 20.

De igual forma se puede llegar a observar que la media es de 17, 44 lo cual es óptimo, pero no satisfactorio, porque el nivel 0 de algebrización (Ausencia de razonamiento algebraico) involucra un nivel básico de razonamiento, lo satisfactorio seria que se obtenga una media de 20.

Se observa también que se tiene una desviación estándar de 2, 2 puesto que el comportamiento de los datos no es normal, esto debido al tipo de evaluación que se tomó.

Resultados del instrumento N° 2

En el siguiente apartado se presenta el análisis de resultados del instrumento 2, por medio de un gráfico de barras.

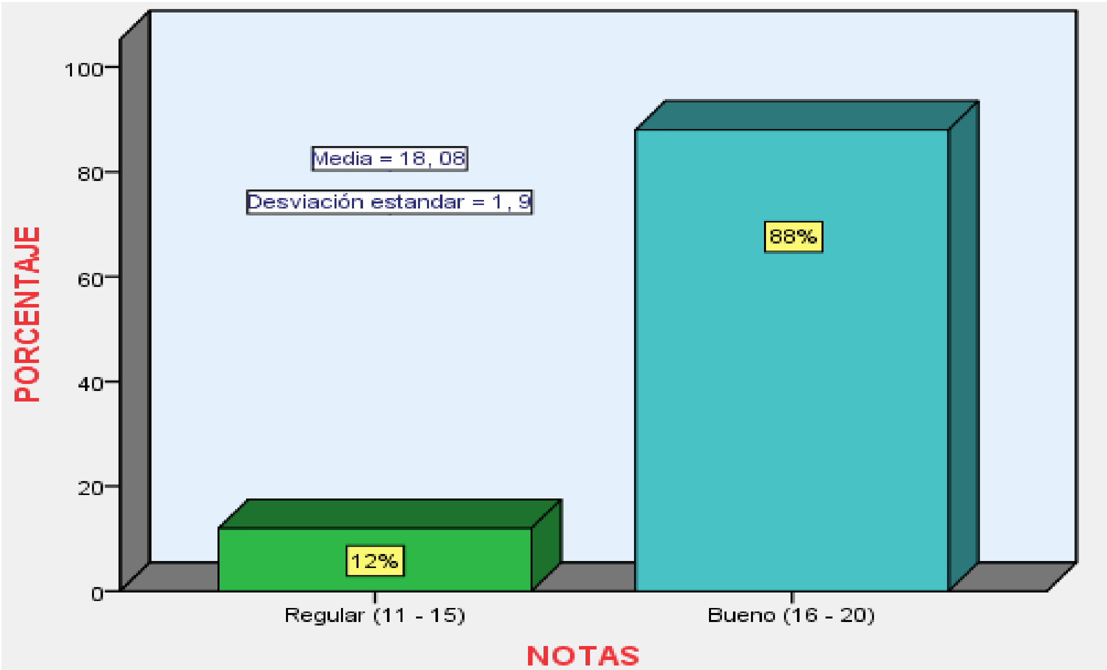


*Figura 11:*Distribución general de frecuencias y media del nivel 1
Fuente: Anexo 2

En la figura 11: se puede observar el grafico de frecuencias de manera generalizada del instrumento 2, en cual nos permite evaluar en nivel 1 de algebrización (Nivel incipiente de algebrización) planteado por Godino. se observa de igual forma que el 12% de los docentes obtuvieron una nota Regular que oscila entre 11 – 15, mientras que el 88% de los docentes obtuvieron una nota Buena que oscila entre 16 – 20.

De igual forma se puede llegar a observar que la media es de 18, 08 lo cual es óptimo, pero no satisfactorio, porque el nivel 1 de algebrización (Nivel incipiente de algebrización) involucra un nivel básico - intermedio de razonamiento, lo satisfactorio seria que se obtenga una media de 20.

Se observa también que se tiene una desviación estándar de 1, 9 puesto que el comportamiento de los datos no es normal, esto debido al tipo de evaluación que se tomó.

Resultados del instrumento N° 3

En el siguiente aparatado se presenta el análisis de resultados del instrumento 3, por medio de un gráfico de barras.

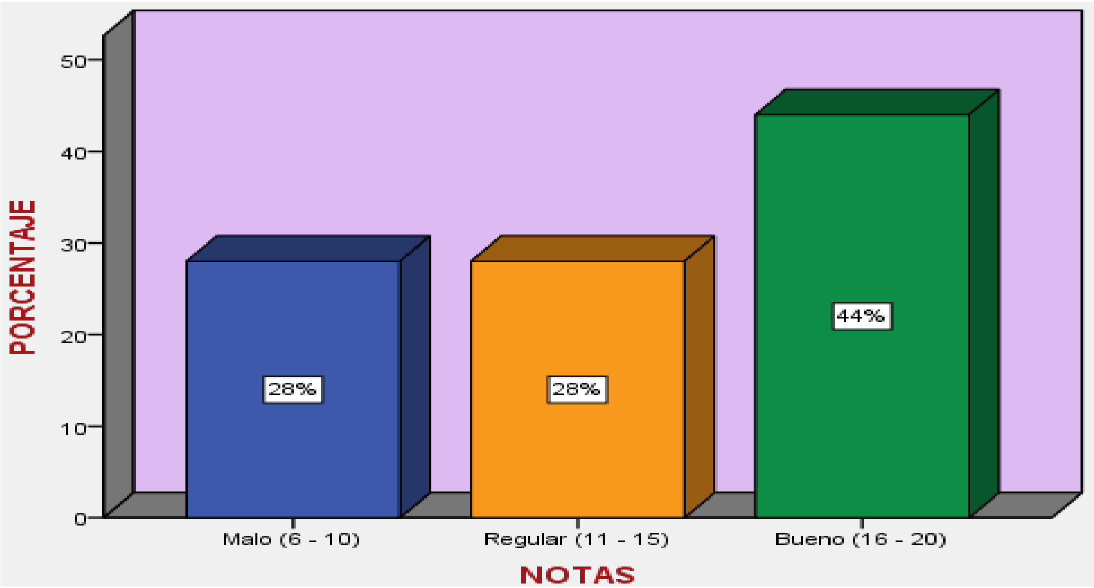


Figura 12: Distribución general de frecuencias y media del nivel 2
Fuente: Anexo 3

En la figura 12: se puede observar el grafico de frecuencias de manera generalizada del instrumento 3, en cual nos permite evaluar en nivel 2 de algebrización (Nivel intermedio de algebrización) planteado por Godino. se observa también que el 28% de los docentes obtienen una nota Mala que oscila entre 6 – 10, de igual forma el 28% de los docentes obtienen una nota Regular que oscila entre 11 – 15, mientras que el 44% de los docentes obtiene una nota Buena que oscila entre 16 – 20.

De igual forma se puede llegar a observar que la media es de 13, 48 lo cual no es óptimo, porque el nivel 2 de algebrización (Nivel intermedio de algebrización) involucra un nivel intermedio de razonamiento, lo satisfactorio seria que se obtenga una media de 20.

Se observa también que se tiene una desviación estándar de 1, 9 puesto que el comportamiento de los datos no es normal, esto debido al tipo de evaluación que se tomó.

Resultados del instrumento N° 4

En el siguiente aparatado se presenta el análisis de resultados del instrumento 4, por medio de un gráfico de barras.

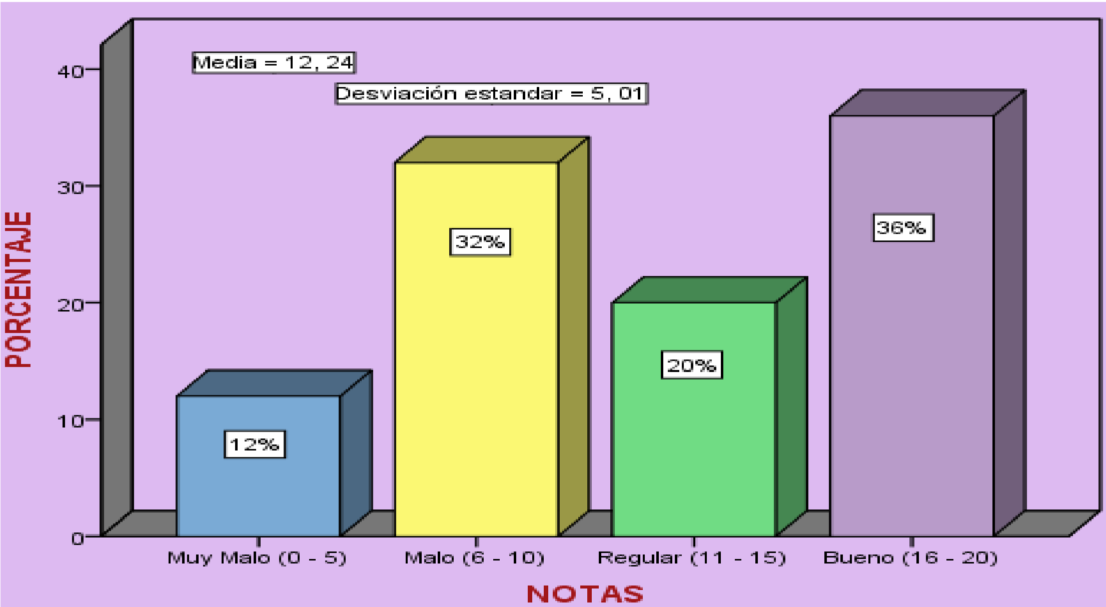


*Figura 13:*Distribución general de frecuencias y media del nivel 3
Fuente: Anexo 4

En la figura 13: se puede observar el grafico de frecuencias de manera generalizada del instrumento 3, el cual nos permitió evaluar en nivel 3 de algebrización (Nivel consolidado de algebrización) planteado por Godino. se observa de igual forma que el 12% de los docentes obtienen una nota Muy Malo que oscila entre (0 – 5), el 32% con una nota Mala que oscila entre (6 - 10), el 20% con una nota Regular que oscila entre (11 – 15) y el 36% con una nota Buena que oscila entre (16 – 20).

De igual forma se puede llegar a observar que la media es de 12, 24 lo cual no es óptimo, porque el nivel 3 de algebrización (Nivel consolidado de algebrización) involucra un nivel avanzado de razonamiento, lo satisfactorio seria que se obtenga una media de 20.

Se observa también que se tiene una desviación estándar de 5,01 puesto que el comportamiento de los datos no es normal, esto debido al tipo de evaluación que se tomó.

4.1.3 Categorización de los niveles de razonamiento algebraico

En el siguiente apartado se muestra el grafico de cajas, el cual nos permitió realizar la categorización según los niveles de algebrización a los docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno- 2017.

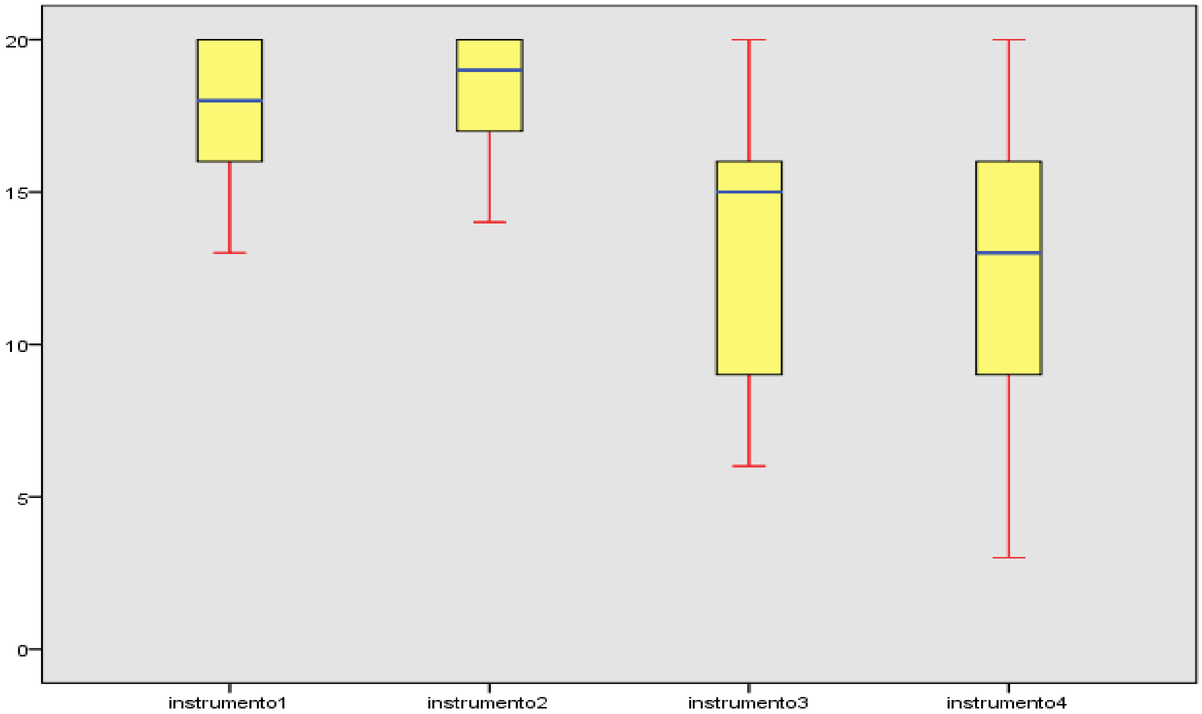


Figura 14: Grafico de cajas para la categorización de los niveles de razonamiento algebraico
Fuente: Anexo 1, 2, 3 y 4

En la figura 14 se observa el grafico de cajas de los instrumentos aplicados a los docentes el cual nos permite categorizar a los docentes en los niveles de algebrización planteados por Godino. De igual forma se puede observar que los promedios logrados por los instrumentos 1 (17.44) y 2(18.08) muestran que los docentes logran un nivel 0 y 1 de razonamiento algebraico satisfactorio, mientras que los promedios logrados por los instrumentos 3(13.48) y 4(12.24) muestran que los docentes logran un nivel 2 y 3 de razonamiento algebraico bajo. Esto nos conlleva a determinar que los docentes del área de matemática del nivel secundaria de la ciudad de Puno, Se encuentran categorizados en un nivel 1.5 de algebrización.

4.2 Discusión de resultados

En cuanto a la discusión de los resultados se toma en cuenta los objetivos propuestos.

Se propuso como Objetivo General: Evaluar el conocimiento algebraico de los docentes del área de matemática del nivel de educación secundaria de la ciudad de Puno – 2017.

Para ello se optó por realizar la tabla 4, el cual nos permite observar el nivel de conocimiento algebraico que tienen los docentes del área de matemática de la cuidad de Puno, tomando en cuenta el criterio de contenidos, obteniendo una nota promedio de 15.31 en cual nos permite determinar que los docentes de la cuidad de Puno, en cuanto a los contenidos se encuentran en un nivel regular, lo cual es óptimo, pero lo satisfactorio seria que se logre un promedio de 20. De igual forma en cuanto a los instrumentos se observa que se hacen uso de los siguientes procesos algebraicos: Particularización, el cual permitió determinar que el instrumento 1 pertenece al nivel 0 de algebrización, Generalización, el cual permitió determinar que el instrumento 2 pertenece al nivel 1 de algebrización, Simbolización, el cual permitió determinar que el instrumento 3 pertenece al nivel 2 de algebrización, simbolización avanzada, el cual permitió determinar que el instrumento 4 pertenece al nivel 3 de algebrización.

Se propuso también los siguientes Objetivos Específicos.

Evaluar los conocimientos algebraicos según los niveles de algebrización a los docentes del área de matemática del nivel de educación secundaria de la ciudad de Puno – 2017.

Según los niveles de algebrización los docentes del área de matemática de nivel secundaria de la ciudad de Puno.

En el nivel 0 de algebrización (Ausencia de razonamiento algebraico) plateado por Godino. El cual fue evaluado por el instrumento 1, se observa que el 16% de los docentes obtuvieron una nota Regular que oscila entre 11 – 15, mientras que el 84% de los docentes obtuvieron una nota Buena que oscila entre 16 – 20, con una nota promedio de 17.44, logrando así de manera óptima este nivel.

En el nivel 1 de algebrización (Nivel incipiente de algebrización) plateado por Godino. El cual fue evaluado por el instrumento 2, se observa que el 12% de los docentes obtuvieron una nota Regular que oscila entre 11 – 15, mientras que el 88% de los docentes obtuvieron una nota Buena que oscila entre 16 – 20., con una nota promedio de 18.08, no logrando de manera óptima este nivel.

En el nivel 2 de algebrización (Nivel intermedio de algebrización) plateado por Godino. El cual fue evaluado por el instrumento 3, se observa también que el 28% de los docentes obtienen una nota Mala que oscila entre 6 – 10, de igual forma el 28% de los docentes obtienen una nota Regular que oscila entre 11 – 15, mientras que el 44% de los docentes obtiene una nota Buena que oscila entre 16 – 20, con una nota promedio de 13.48, no logrando de manera óptima este nivel.

En el nivel 3 de algebrización (Nivel consolidado de algebrización) plateado por Godino. El cual fue evaluado por el instrumento 4, se observa que el 12% de los docentes obtienen una nota Muy Malo que oscila entre (0 – 5), el 32% con una nota Mala que oscila entre (6 - 10), el 20% con una nota Regular que oscila entre (11 – 15) y el 36% con una nota Buena que oscila entre (16 – 20), con una nota promedio de 17.44, no logrando de manera óptima este nivel.

Categorizar según a los niveles de algebrización a los docentes del área de matemática del nivel de educación secundaria de la ciudad de Puno- 2017.

Debido a los resultados obtenidos (Se observar que los promedios logrados por los instrumentos 1 (17.44) y 2(18.08) muestran que los docentes logran un nivel 0 y 1 de razonamiento algebraico satisfactorio, mientras que los promedios logrados por los instrumentos 3(13.48) y 4(12.24) muestran que los docentes logran un nivel 2 y 3 de razonamiento algebraico bajo), al evaluar los conocimientos matemáticos sobre razonamiento algebraico según los niveles de algebrización. Determinamos que los docentes del área de matemática del nivel de educación secundaria de la ciudad de Puno, Se encuentran categorizados en un nivel 1.5 de algebrización.

CONCLUSIONES

PRIMERA: Se concluye que los docentes del área de matemática de educación secundaria de la ciudad de Puno - 2017, se encuentran en un nivel regular de conocimiento algebraico con una nota promedio de 15.31 sobre contenidos, lo cual es óptimo, pero lo satisfactorio seria que se logre un promedio de 20. De igual forma en cuanto a los instrumentos se observa que se hacen uso de los siguientes procesos algebraicos: Particularización, el cual permitió determinar que el instrumento 1 pertenece al nivel 0 de algebrización. Generalización, el cual permitió determinar que el instrumento 2 pertenece al nivel 1 de algebrización. Simbolización, el cual permitió determinar que el instrumento 3 pertenece al nivel 2 de algebrización. Simbolización avanzada, el cual permitió determinar que el instrumento 4 pertenece al nivel 3 de algebrización.

SEGUNDA: De los 25 docentes, en el nivel 0 de algebrización, el 16% de los docentes obtuvieron una nota Regular, mientras que el 84% de los docentes obtuvieron una nota Buena, con un promedio de 17.44, logrando así de manera óptima este nivel. En el nivel 1 de algebrización, el 12% de los docentes obtuvieron una nota Regular, mientras que el 88% de los docentes obtuvieron una nota Buena, con una nota promedio de 18.08, logrando así de manera óptima este nivel. En el nivel 2 de algebrización, el 28% de los docentes obtienen una nota Mala, de igual forma el 28% de los docentes obtienen una nota Regular, mientras que el 44% de los docentes obtiene una nota Buena, con una nota promedio de 13.48, no logrando de manera óptima este nivel. En el nivel 3 de algebrización, el 12% de los docentes obtienen una nota Muy, el 32% con una nota Mala, el 20% con una nota Regular y el 36% con una nota Buena, con una nota promedio de 17.44, no logrando de manera óptima este nivel.

TERCERA: Debido a los resultados obtenidos al evaluar los conocimientos algebraicos según los niveles de algebrización. Concluimos que los docentes del área de matemática del nivel de educación secundaria de la cuidad de Puno – 2017, se categorizan en un nivel 1, 5 de razonamiento algebraico.

RECOMENDACIONES

PRIMERA: La planificación e implementación de la enseñanza del razonamiento algebraico en los distintos niveles de educación requiere que los maestros tengan un sistema de conocimientos didáctico – matemáticos, para lo cual es necesario diseñar acciones formativas específicas que aborden los distintos componentes de dichos conocimientos.

SEGUNDA: Las cuestiones relacionadas con los conocimientos sobre errores, dificultades, conflictos de aprendizaje (faceta cognitiva del conocimiento especializado del contenido) y aspectos afectivos deberán ser tenidas en cuenta en nuevas investigaciones. De manera más específica es necesario profundizar en dos direcciones:

1.- Tomar una mayor cantidad de muestra y si es posible tratar de abarcar toda la población establecida, para lograr un resultado más generalizado, que permita tomar medidas de solución más óptimas.

2.- Tomar en cuenta la mayor cantidad de contenido matemático, en la elaboración de los instrumentos de evaluación.

TERCERA: Seguir con investigaciones de esta índole porque permite determinar el nivel de conocimientos algebraico que tiene el docente y así poder buscar alternativas de solución, con el fin de lograr que nuestros estudiantes sean competentes porque sus docentes lo son.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Aké, L. (2013). Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formacion. Universidad de Granada.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 267-299.

Carpenter, T. P., Frankle, M. L., & Levi , L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carrahen, D. W., & Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algeraic reasoning . *Second Handbook of Research on Mathematic Teaching and Learning*.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generation. . *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, 40.

Castro, E. (1994). *Niveles de comprension en problemas verbales de comparacion multiplicativa.* Universidad de Granada - España.

Chaiklin , S., & Lesgold, S. (1984). *Prealgebra students´knowledge of algebraic tasks with arithmetic expressions.* . New Orleands, LA.: Paper presented at the annual meeting of the Arican Research Association.

Cooper , T. J., & Warren, E. (2008). Generalisig mathematical structure in Year 3 - 4: A case study of equivalence of expression. In Figueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano, T. y Sepulveda, A. *Proccedings of the 32th Conference International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), (pp.369-376).*

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G. Schubring, y F. Seeger. *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*, 39-62.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theorical and empirical approach.* New York: Springer.

Font, V. (2001). Processos mantals versus competéncia. *Biaix*, 19.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22.

Godino, J. D. (2003). Teoria de las funciones semioticas, Un enfoque ontológico - semiotico de la cognición e instrucción matematica. *Departamento de dicatica de la matematica.* Obtenido de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D. (2009). Categorias de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas . *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13 - 31.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigacion en Didáctica de la Matemática.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherche en Didactique des Mathématiques.*

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las ciencias. 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Revista internacional de matemática*.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why in the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 247-265.

Godino, J. D., Neto , T., Wilhelmi , M., Aké, L., Eschegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las practicas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemióticas t antropológica. *Advance de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142.

Godino, J. D., Wilhelmi, M., & Neto, T. (2015). Evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemeental de futuros maestros. *Revista de Educación*.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra. The effect of brackets. In M. J. Hoines y A. B. Fuglestad. *Procesdinfs of the 28° Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, 49-56.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton , M. L. (2008). Handbook of design research in methods in education. *Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. . *Proceedings of the 13° Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* , 163-171.

Mason, J. (1996). Qualitative researching. . *london: sage publications*.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15.

Mohamed, M. (2012). *Evlauación del conocimiento de los futuros profesores de educación primeria sobre probabilidad.* España.

Molina, M. (2007). Desarrollo del Pensamiento Racional y Comprensión del Signo Igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria. *Tesis Doctoral no publicada*.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2009). Elementary students´understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 341-368.

Morris, A. (1999). Developing concepts of mathematical structure: pre-arithmetic reasoning verus extended arithmetic reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics . 44-72.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* . Universidad de la Laguna, Tenefire, España.

Pasera, D. (2017). Conocimiento didáctico matemático que deben manifestar profesores de secundaria en relación a tareas sobre ecuaciones. Lima.

Radford , L. (2000). Signs and meanings in student´s emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studentes´types of generalization . *Mathematical Thinking and Learning* , 37-70.

Raford, L. (2011). Grade 2 Students´Non-Symbolic Algebraic Thinking. En, J. Cai, E. Knuth. *Early algebraization. Advances in mathematics education*, 303-320.

Reston, V. (2000). National Council of Teachers of Matematics. *Principles and standards for school mathematics*.

Sampieri, R. (2014). *Metodologia de la investigación.* Mexico: Editorial Mexicana.

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers´ awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 249-278.

Usiskin, Z. (1989). *Conception of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford.* Reston, VA: NCTM: The Ideas of Algebra K-12.

Warren, E. (2001). Algebraic understanfing and the importance of operation sense. In M. Heuvel-Penhuizen. *Procedfings of the 25° International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, 399-406.

ANEXOS

ANEXO 1

Prueba de ecuaciones y balanzas

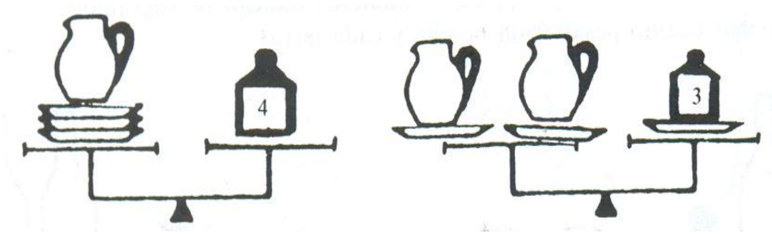
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

Curso Taller "Didáctica del álgebra temprana"

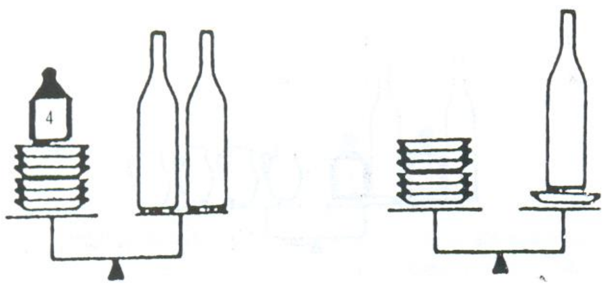
Apellidos y Nombres: ______________________________________Fecha: ______________

ECUACIONES Y BALANZAS

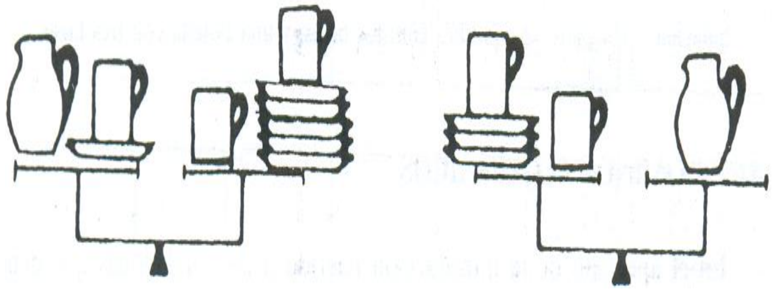
Primero: Estas balanzas están en equilibrio. En cada una de ellas hay platos y jarras. También hay pesos cuyos números indican hectogramos. ¿Sabrías adivinar cuánto pesan cada plato y cada jarra?



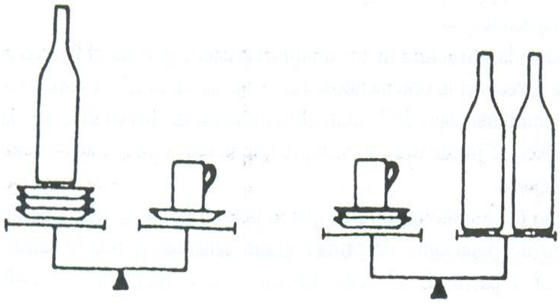
Segundo: Estas balanzas están en equilibrio. En cada una de ellas hay platos y botellas. También hay pesos cuyos números indican hectogramos. ¿Sabrías adivinar cuánto pesan cada plato y cada botella?



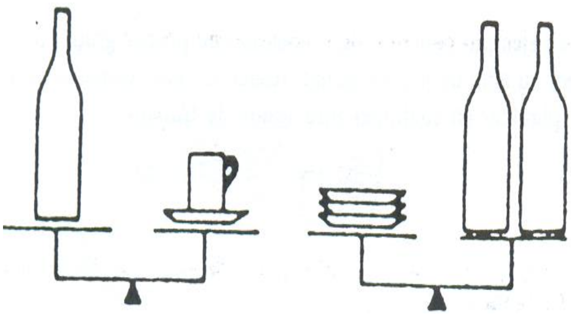
Tercero: Observa estas balanzas. ¿Cuántos platos hacen falta para equilibrar una jarra? ¿Cuántos para equilibrar una taza?



Cuarto: Observa estas balanzas. ¿Cuántos platos hacen falta para equilibrar una botella? ¿Cuántos para equilibrar una taza?



Quinto: Observa estas balanzas. ¿Cuántas tazas se necesitan para equilibrar una botella? ¿Cuántos para equilibrar un plato?

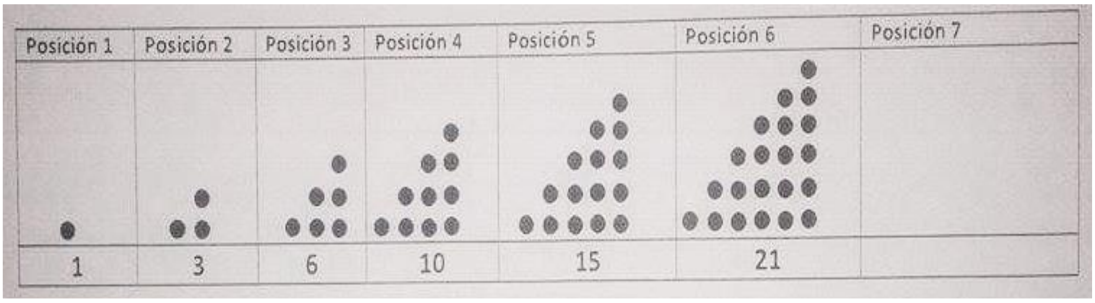


ANEXO 2

<table>
<tr><td colspan="4">PRUEBA SOBRE INDUCCIÓN Y GENERALIZACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2">NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA</td><td>GRADO</td><td>SECCIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">DOCENTE EVALUADO</td><td>NOMBRES</td><td colspan="2">APELLIDOS</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

PROBLEMA 1. LOS NUMEROS TRIANGULARES.

Dada la sucesión de números triangulares, calcular el número de bolas de la posición 7.



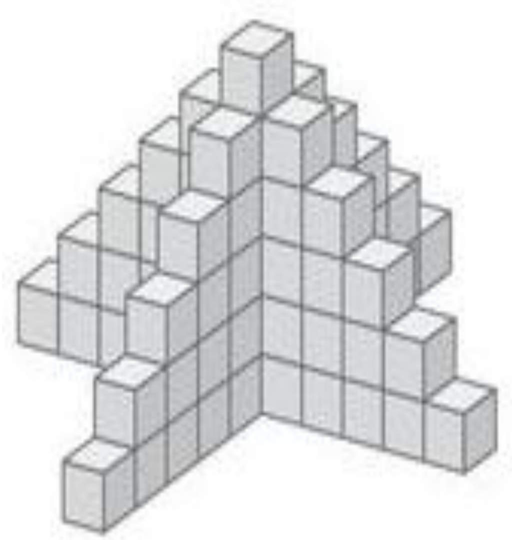
¿Calcula el número de bolas de la posición 17?

¿Calcular el número de bolas de la posición 79?

¿Calcular el número de bolas de la posición n-ésima?

PROBLEMA 2: La torre

a) ¿Cuántos cubos son necesarios para construir esa torre?



b) ¿Cuántos cubos son necesarios para construir otra torre como está, pero de 12 cubos de altura?

c) ¿Cuántos cubos son necesarios para construir otra torre como está, pero de 31 cubos de altura?

d) ¿Cómo calcularías el número de cubos necesarios para una torre de altura *n*?

ANEXO 3

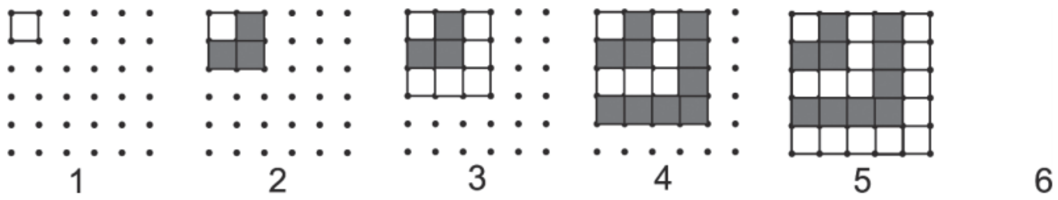
PRUEBA DE SENTIDO ALGEBRAICO				
NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA			**GRADO**	**SECCIÓN**
DOCENTE EVALUADO	**NOMBRES**	**APELLIDOS**	**DNI**	

Señor docente mediante esta prueba se pretende valorar los conocimientos matemáticos que usted ostenta sobre el sentido algebraico necesario para la enseñanza del álgebra. Se recomienda que todos los cálculos y procesos de resolución se desarrollen en los espacios designados para ese fin, la evaluación consta de 4 cuestiones que usted debe resolver en 30 minutos. Los animo a resolver las situaciones, con la certeza que tendrá éxito, adelante.

1. Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?

2. Pedro tiene una cierta cantidad de dinero. María tiene cuatro veces más dinero que Pedro. Si Pedro ganara 18 soles más, entonces tendría la misma cantidad de dinero que María. ¿Puedes calcular cuánto dinero tiene en total Pedro? ¿Cuánto dinero tiene María?

3. ¿Cuántos cuadrados de diferentes tamaños tendrá el dibujo de la sexta posición? ¿Cuántos en la posición 17? ¿Y el dibujo situado en la posición *n*–ésima?



4. Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 soles al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

Agradecemos su cooperación para conocer y valorar sus conocimientos matemáticos.

ANEXO 4

<table>
<tr><td colspan="3">PRUEBA DE APLICACIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS</td></tr>
<tr><td colspan="3">NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA</td><td>GRADO</td><td>SECCIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">DOCENTE EVALUADO</td><td>NOMBRES</td><td colspan="3">APELLIDOS</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Señor docente mediante esta actividad se pretende valorar su capacidad para resolver una ecuación cuadrática y **hacer las explicaciones necesarias para que un estudiante de 5to grado los entienda**. Se recomienda que todos los cálculos y procesos de resolución se desarrollen en los espacios designados para ese fin. Los animo a resolver las situaciones, con la certeza que tendrá éxito. ¡Adelante!

1. Se tiene el encargo de elaborar el molde de una asadera sin tapa a partir de una lámina rectangular de hojalata. Para ello, se deberá cortar cuadrados de 4 cm en cada esquina y doblar los lados hacia arriba. Si el ancho de la asadera debe medir 3 cm menos que su largo, y su capacidad debe ser de 280 cm^3, ¿cuáles serán las dimensiones de la lámina de hojalata?

2. Una fábrica hace cajas de herramientas, sin tapa, a partir de una plancha de metal rectangular de 120 cm de largo y 100 cm de ancho. Al formar el prisma, el largo de la base resulta ser el doble que la altura, mientras que el ancho de la base mide 10 cm más que la altura. ¿Cuáles son las dimensiones de una caja de herramientas?

ANEXO 5

Tabla 5

Datos primarios del instrumento 1

N°	Apellidos y Nombres	ítem 1	ítem 2	ítem 3	Ítem 4	ítem 5	Total
1	Docente 1	4	4	4	4	4	20
2	Docente 2	4	4	4	4	4	20
3	Docente 3	4	4	4	4	4	20
4	Docente 4	4	4	4	4	4	20
5	Docente 5	4	4	4	2	4	18
6	Docente 6	4	4	4	4	4	20
7	Docente 7	4	2	4	2	4	16
8	Docente 8	2	4	4	4	4	18
9	Docente 9	4	4	4	4	4	20
10	Docente 10	2	4	4	4	2	16
11	Docente 11	4	4	4	3	3	18
12	Docente 12	4	2	2	3	2	13
13	Docente 13	2	4	3	4	4	17
14	Docente 14	4	4	4	4	4	20
15	Docente 15	2	4	4	4	4	18
16	Docente 16	4	2	4	2	4	16
17	Docente 17	2	2	4	4	4	16
18	Docente 18	4	4	2	2	2	14
19	Docente 19	2	4	2	3	3	14
20	Docente 20	4	4	1	4	4	17
21	Docente 21	2	2	4	4	4	16
22	Docente 22	4	4	4	0	3	15
23	Docente 23	2	2	4	4	4	16
24	Docente 24	4	2	4	4	4	18
25	Docente 25	4	4	4	4	4	20
	Totales	84	86	90	85	91	

Fuente: Pruebas aplicadas a los docentes

ANEXO 6

Tabla 6

Datos primarios del instrumento 2

N°	Apellidos y Nombres	ítem 1	ítem 2	Total
1	Docente 1	10	10	20
2	Docente 2	9	8	17
3	Docente 3	10	9	19
4	Docente 4	10	10	20
5	Docente 5	10	10	20
6	Docente 6	10	8	18
7	Docente 7	8.5	5.5	14
8	Docente 8	7.5	8.5	16
9	Docente 9	7.5	10.5	18
10	Docente 10	10	10	20
11	Docente 11	5	10	15
12	Docente 12	7.5	10.5	18
13	Docente 13	10	9	19
14	Docente 14	7.5	8.5	16
15	Docente 15	10	9	19
16	Docente 16	10	6	16
17	Docente 17	10	10	20
18	Docente 18	9	10	19
19	Docente 19	10	4	14
20	Docente 20	10	10	20
21	Docente 21	10	8	18
22	Docente 22	10	9	19
23	Docente 23	10	10	20
24	Docente 24	10	8	18
25	Docente 25	10	9	19
	Totales	231.5	220.5	

Fuente: Pruebas aplicadas a los docentes

ANEXO 7

Tabla *7*

Datos primarios del instrumento 3

N°	Apellidos y Nombres	ítem 1	ítem 2	ítem 3	ítem 4	Total
1	Docente 1	5	5	5	3	18
2	Docente 2	5	5	5	5	20
3	Docente 3	5	5	2	5	17
4	Docente 4	5	5	1	5	16
5	Docente 5	5	5	1	0	11
6	Docente 6	5	5	1	5	16
7	Docente 7	5	5	1	5	16
8	Docente 8	5	5	5	2	17
9	Docente 9	5	5	1	5	16
10	Docente 10	5	5	1	5	16
11	Docente 11	5	5	1	5	16
12	Docente 12	5	3	1	0	9
13	Docente 13	5	2	1	5	13
14	Docente 14	5	2	1	0	8
15	Docente 15	2	1	1	5	9
16	Docente 16	5	0	1	0	6
17	Docente 17	5	3	2	5	15
18	Docente 18	5	5	0	3	13
19	Docente 19	5	0	2	2	9
20	Docente 20	5	3	1	0	9
21	Docente 21	5	5	2	2	14
22	Docente 22	5	3	0	5	13
23	Docente 23	5	5	3	5	18
24	Docente 24	5	5	1	5	16
25	Docente 25	2	2	0	2	6
	Totales	119	94	40	84	

Fuente: Pruebas aplicadas a los docentes.

ANEXO 8

Tabla 8

Datos primarios del instrumento 4

N°	Apellidos y Nombres	ítem 1	ítem 2	Total
1	Docente 1	10	10	20
2	Docente 2	10	7	17
3	Docente 3	6	4	10
4	Docente 4	6	4	10
5	Docente 5	6	8	14
6	Docente 6	6	6	12
7	Docente 7	4	10	14
8	Docente 8	10	10	20
9	Docente 9	4	10	14
10	Docente 10	4	4	8
11	Docente 11	6	10	16
12	Docente 12	4	2	6
13	Docente 13	6	10	16
14	Docente 14	6	10	16
15	Docente 15	6	10	16
16	Docente 16	6	7	13
17	Docente 17	10	0	10
18	Docente 18	3	0	3
19	Docente 19	4	5	9
20	Docente 20	6	10	16
21	Docente 21	10	10	20
22	Docente 22	5	2	7
23	Docente 23	4	6	10
24	Docente 24	2	3	5
25	Docente 25	4	0	4
	Totales	148	158	

Fuente: Pruebas aplicadas a los docentes.