UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

OPERADOR AUTOADJUNTO ASOCIADO A UNA FORMA SESQUILINEAL

TESIS

PRESENTADO POR:

CARLOS RONAL MAMANI MAMANI

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO - PERU

2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

OPERADOR AUTOAJUNTO ASOCIADO A UNA FORMA SESQUILINEAL

TESIS PRESENTADA POR:

CARLOS RONAL MAMANI MAMANI

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN PILAR - FICA -

APROBADO POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

PRESIDENTE : ....

Lic. FABIOLA LOAYZA TORRE BLANCA

PRIMER MIEMBRO : ....

Lic. RUPERTO ZAPANA YERBA

SEGUNDO MIEMBRO : ....

Lic. RAQUEL VERONICA ARI SUAÑA

DIRECTOR DE TESIS : ....

Mg. JULIO CESAR VILLALTA PACORI

TEMA: Teoria de operador autoadjunto

AREA: Matemática Pura

LINEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática pura

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 21 NOVIEMBRE DEL 2018

DEDICATORIA

Este trabajo es dedicado a mis padres Clara y Bernardo.

AGRADECIMIENTO

Agradezco primero a dios por guiarme siempre en todo momento. También quiero agradecer a mis padres Clara Mamani Cornejo y Bernardo Mamani Quispe por su apoyo incondicional.

Quiero agradecer a toda mi familia en especial a mi hermano Alan, a mis compañeros de estudios y amigos de manera especial a Santiago y Alex por el apoyo moral y humano en todo momento de mi formación profesional.

Agradezco por la orientación y asesoramiento de esta tesis al profesor Mg. Julio Cesar Villalta Pacori y también quiero agradecer por sus comentarios y sugerencias a los miembros de jurado: Lic. Fabiola Loayza Torreblanca, Lic. Ruperto Zapana Yerba y Lic. Raquel Veronica Ari Suaña. Finalmente, a todos docentes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas que contribuyeron en mi formación profesional.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN **7**

ABSTRACT **8**

I. INTRODUCCIÓN **9**

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 9

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA 9

1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN 10

1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO 10

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN 10

1.5.1. Objetivo General 10

1.5.2. Objetivos Específicos 10

II. REVISIÓN DE LITERATURA **12**

2.1. MARCO TEÓRICO 12

2.1.1. Antecedentes del trabajo de investigación 12

2.2. MARCO CONCEPTUAL 13

2.2.1. Notaciones y espacios de Banach 13

2.2.2. Operadores lineales 16

2.2.3. Espacio de Hilbert 23

2.2.4. Espacios de Sobolev $\mathcal{H}^m(\Omega)$ 30

III. METODOLOGÍA **35**

3.1. UBICACIÓN GEOGRÁFICA DEL ESTUDIO 35

3.2. PERIODO DE DURACIÓN DEL ESTUDIO 35

3.3. PROCEDENCIA DEL MATERIAL UTILIZADO 35

3.3.1. MATERIALES 35

3.4. PROCEDIMIENTO 35

3.5. VARIABLES 36

3.5.1. Variable independiente 36
3.5.2. Variable dependiente 36

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN **37**

4.1. RESULTADOS 37
4.1.1. Operador autoadjunto 37
4.1.2. Formas sesquilineales 45
4.1.3. Operadores via formas sesquilineales 46
4.1.4. Ejemplos de aplicaciones 61
4.2. DISCUSIÓN 64

CONCLUSIONES **66**

RECOMENDACIONES **67**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS **68**

RESUMEN

La teoría de operadores autodjuntos y la de formas sesquilineales tienen muchas aplicaciones en el área de Matemática y Física. El objetivo de este trabajo de investigación es estudiar la relación existente entre operadores autoadjuntos y formas sesquilineales; para cumplir con este propósito se estudian la teoría de operadores autoadjuntos, la de formas sesquilineales, sus principales propiedades y ejemplos de aplicación; con todos estos conceptos y propiedades en mente se demuestra el resultado principal de este trabajo del cual se concluye **que existe una relación biunívoca entre operadores autoadjuntos y formas sesquilineales**, es decir, cada operador autoadjunto esta asociado a una única formas sesquilineal e inversamente; esto significa que se puede estudiar las propiedades de un operador autoadjunto a partir de la riqueza de las propiedades de su forma sesquilineal asociada. Por ejemplo, a partir de esta relación se puede demostrar que un cierto operador es autoadjunto y estudiar su espectro considerando formas sesquilineales. En este trabajo se consideran operadores acotados y no acotados; la cuestión principal es el caso no acotado debido a que es un asunto poco estudiado. En este trabajo también se presentan aplicaciones algunas aplicaciones del resultado principal.

Palabras claves: Aplicaciones, Forma Sesquilineal, Operador Autoadjunto.

ABSTRACT

The theory of self-adjuntos operators and the sesquilineales forms have many applications in the area of Mathematics and Physics. The objective of this research work is to study the relationship between self-adjoint operators and sesquilineal forms; to fulfill this purpose, we study the theory of self-adjoint operators, that of sesquilineal forms, their main properties and application examples; with all these concepts and properties in mind, the main result of this work is demonstrated, which concludes **that there is a biunivocal relationship between self-adjoint operators and sesquilineal forms**, that is, each self-adjoint operator is associated with a unique sesquilineal form and inversely; this means that the properties of a self-adjoint operator can be studied from the richness of the properties of its associated sesquilineal form. For example, from this relationship it can be shown that a certain operator is self-adjoint and study its spectrum considering sesquilineal forms. In this work, limited and unlimited operators are considered; the main issue is the unbounded case because it is a little studied issue. In this work, some applications of the main result are also presented.

Keywords: Aplications, Sesquilinear Form, Self-adjoint Operator.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La teoría espectral de operadores lineales sobre espacios de Hilbert es la herramienta mas importante en la formulación matemática de la mecánica cuántica; de hecho, los operadores lineales y la mecánica cuántica han tenido una relación de dependencia mutua. Sin embargo, los libros clásicos sobre mecánica cuántica dan apenas un bosquejo a la teoría de operadores, de vez en cuando tratan los operadores lineales como matrices en espacios de dimensión finita y así el estudio de operadores no acotados no son tratados detalladamente. Pero, en la literatura existen muchos estudios sobre teoría de operadores autoajuntos (acotado y no acotados) por ejemplo [5, 15, 16] para mencionar algunos.

La teoría de operadores autoadjutos también puede ser usada para mostrar la existencia de soluciones de una ecuación diferencial parcial (EDP), véase [11].

Por otro lado, para el estudio de operadores autoadjuntos se consideran formas sesquilineales y la relación existente entre ellos.

Durante los últimos años la relación existente entre formas sesquilineales hermitianas y operadores autoadjuntos es frecuentemente usada para estudiar las propiedades espectrales de los operadores autoadjuntos por medio de formas sesquilineales, es decir, podemos estudiar el espectro de un operador autoadjunto usando su forma sesquilineal asociada, así el tratamiento del problema se vuelve mas simple. Se puede mencionar [1, 2, 6, 8, 9, 17] para citar algunos de estos estudios.

Dada la importancia de la teoría de operadores autoadjuntos y formas sesquilineales, es necesario un aporte bibliográfico sobre este asunto.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En la presente investigación se pretende dar respuesta a la siguiente interrogante:

¿ Que condiciones debe satisfacer una forma sesquilineal b dada, de forma que exista un único operador autoadjunto T_b asociado a b?. Véase Capitulo 3 para la definición de operador asociado a una forma sesquilineal.

1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Las formas sesquilineales cerradas y acotadas inferiormente están biunívocamente relacionadas con los operadores autoadjuntos acotadas inferiormente.

1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

La presente investigación servirá como base para futuros estudios sobre teoría espectral de operadores autoadjuntos, tales como: la convergencia de una sucesión de operadores autoadjuntos en el sentido de resolventes, comportamiento asintótico de autovalores, así como estudiar y comprender el espectro del operador Laplaciano de Dirichlet o Neumann. Este trabajo de investigación también ayudará a entender mejor estudios recientes sobre los tópicos mencionados en el parágrafo anterior como por ejemplo [1, 2, 6, 8, 9, 17] para mencionar algunos.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1. Objetivo General

- Estudiar la relación existente entre formas sesquilineares hermitianas acotados y no acotado y operadores autoadjuntos acotados y no acotados respectivamente.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Estudiar la teoría de operadores autoadjuntos.
- Estudiar formas sesquilineales y sus propiedades.
- Presentar aplicaciones de la relaciones existente entre formas sesquilineales y operadores autoadjuntos.

Este trabajo es dividido en cuatro capítulos: En el Capítulo 1 se encuentra la presente introducción, En el Capítulo 2 se detallan el marco teórico y el marco conceptual en donde se presentan las notaciones, definiciones y resultados que serán usados a lo largo del trabajo. En el Capítulo 3 se relata los materiales y métodos utilizados.

El Capítulo 4 es divido en dos secciones: la Sección 4.1 es divido a su vez en 4 subsecciones; en la Subsección 4.1.1 se define el operador autoadjunto, se estudia sus principales propiedades y se presentan algunos ejemplos de operadores autoadjuntos, la Subsección 4.1.2 es dedicado a la definición de formas sesquilineales, en la Subsección 4.1.3 se demuestra el resultado principal del trabajo y se define el operador autoadjunto asociado a una forma sesquilinear, se estudia también algunas consecuencias de nuestro resultado principal. y finalmente la Subsección 4.1.4 es dedicado a la presentación de algunas aplicaciones de nuestro teorema principal. En la Sección 4.2 se presentan una discusión del resultado principal de este trabajo de investigación.

Después del Capítulo 4 presentan las conclusiones y recomendaciones del trabajo de investigación respectivamente; al final de este trabajo de investigación se encuentran las referencias usadas y sugeridas al lector.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

En este capitulo se presentan los antecedentes de este trabajo de investigación, algunos resultados y propiedades básicas de los espacios vectoriales de dimension infinita (sobre el cuerpo de los número reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$), espacios normados, operador lineal, espacios de Hilbert. El caso en que el espacio tiene dimension finita es tratado muy detalladamente en la Sección 21 de [12].

En este Capitulo se presentan también las notaciones y definiciones que serán usados a lo largo de todo este trabajo de investigación.

Por otro lado, se define los espacios de Sobolev y estos espacios serán usados para presentar ejemplos y aplicaciones.

Se recomienda al lector [3, 4] para profundizar los diversos conceptos y resultados que son presentados en este capitulo.

2.1. MARCO TEÓRICO

2.1.1. Antecedentes del trabajo de investigación

- César R. de Oliveira [5] estudia la relación entre formas sesquilineales y operadores autoadjuntos en el Capítulo 5. En este trabajo el autor denomina este tema como Teorema de representación de operadores autoadjuntos por medio de formas sesquilineales. Además también estudia las extensiones de Friedrichs.

- Tosio Kato en el Capítulo 6 de [16] trata el asunto de una forma mas general (considera formas sesquilineales sectoriales), pero estos resultados requieren muchos conceptos previos para su completa comprensión.

- En [14] Michael Reed y Barry Simon basado en el trabajo de Kato [16] estudia el caso particular para operadores autoadjuntos en la Sección VIII.6 del Capítulo VIII.

A pesar, de que en las referencias mencionadas anteriormente se puede encontrar respuesta a nuestro problema de investigación, es importante señalar que todos estos trabajos tienen cierta dificultad para entender si no se tiene conocimiento sobre los tópicos previamente desarrollados tales como: operador lineal, adjunto de un operador lineal en un espacio de Hilbert, operador autoadjunto, propiedades de operadores autoadjuntos (acotado y no acotados), formas sesquilineales y entre otros conceptos y resultados que son desarrollados en este trabajo; por otro lado, todos estos trabajos se encuentran en idioma ingles.

2.2. MARCO CONCEPTUAL

2.2.1. Notaciones y espacios de Banach

El conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \cdots\}$ será denotado por $\mathbb{N}$, un elemento genérico en $\mathbb{C}$ es expresado de la forma $z = a + bi$, en donde, $i^2 = -1$ y $a, b, \in \mathbb{R}$.

Para un numero complejo z la parte real será denota por $\operatorname{Re} z$, la parte imaginaria por $\operatorname{Im} z$ y $\bar{z} = (a - bi)$ denotará el complejo conjugado de $z = a + bi$. Note que, si $\bar{z} = z$, entonces $a - bi = a + bi$, luego, $b = 0$. Así que, $z \in \mathbb{R}$. En este trabajo vamos considerar X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ es el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$). Por lo tanto, si $\xi, \eta \in X$ y $\lambda \in F$, entonces está bien definido $\lambda\xi + \eta \in X$ En general los espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ es el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$) son denotados por $X, Y, Z, \cdots$, sus elementos por $\xi, \eta, \psi, \phi, \cdots$ y los escalares, es decir, los elementos de $\mathbb{F}$, por $\alpha, \beta, \lambda, \cdots$, o $a, b, c, \cdots$. Recuerde que un subconjunto A de un espacio vectorial X es *linealmente independiente* si cualquier combinación lineal finita de elementos de $\xi_j \in A$ es el vector nulo, es decir, si $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\xi_j = 0$ entonces $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \cdots, n$. El espacio vectorial generado por un subconjunto A de un espacio vectorial X es un el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de sus elementos y es denotado por $Lim(A)$. Recuerde, que una *base* de un espacio vectorial X es un conjunto linealmente independiente que genera X, es decir, $Lim(A) = X$. Si existe una base finita de X con n elementos, se dice que la dimensión algebraica de X es finita y es denotada por $\dim X = n$ (todas las bases poseen n elementos); en caso contrario, se dice que la dimensión de X es infinita.

Una *norma* en un espacio vectorial X (real o complejo) es una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\|\xi\| \geq 0$ para todo $\xi \in X$ y $\|\xi\| = 0$ si, y solamente si, $\xi = 0$.

2. $\|\lambda\xi\| = |\lambda|\|\xi\|$, para todo $\xi \in X$ y cualquier $\lambda \in \mathbb{F}$ (dilatación).

3. $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$, para todo $\xi, \eta \in X$ (desigualdad triangular).

Si en la definición de norma la condición $\|\xi\| = 0 \Rightarrow \xi = 0$ es retirada, se dice que $\|\cdot\|$ es una *seminorma*. Es fácil verificar que cada norma define o induce una métrica d en X dado por $d(\xi, \eta) := \|\xi - \eta\|$. El par $(X, \|\cdot\|)$ es llamado de espacio métrico normado, en este trabajo de investigación $\mathcal{N}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \cdots$, siempre denotan espacios normados (se denota $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ cuando se quiere especificar la norma) y se denota $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ la norma en $\mathcal{N}$ cuando se desea especificar el espacio en donde está definido. Si en un espacio normado

$\mathcal{N}$ se considera la topología inducida por una norma se dice que $\mathcal{N}$ es un *espacio vectorial topológico*. Si no se específica la topología en un espacio normado $\mathcal{N}$, queda implícito que la topología en $\mathcal{N}$ es la inducida por la norma. Un subconjunto A de un espacio normado

$\mathcal{N}$ es *total* si $Lim(A)$ es denso en $\mathcal{N}$. Es necesario introducir algunas notaciones, Si $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y $r > 0$, entonces $B(\xi, r) := B_{\mathcal{N}}(\xi, r) := \{\eta \in \mathcal{N} : \|\xi - \eta\| < r\}$, $\overline{B}(\xi, r) := \overline{B}_{\mathcal{N}}(\xi, r) := \{\eta \in \mathcal{N} : \|\xi - \eta\| \leq r\}$ y $S(\xi, r) := S_{\mathcal{N}}(\xi, r) = \{\eta \in \mathcal{N} : \|\xi - \eta\| = r\}$ indican la bola abierta, la bola cerrada y la esfera de radio r centradas en $\xi \in \mathcal{N}$, respectivamente.

Ejemplo 2.2.1. Sean Ω un subconjunto compacto de un espacio topológico de Hausdorff y $C(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones continuas $\psi : \Omega \to \mathbb{F}$. Un ejercicio común en libros de topología y análisis funcional es demostrar que

$$\|\psi\|_\infty := \sup_{t \in \Omega} |\psi(t)|.$$

es una norma en $C(\Omega)$ y el espacio normado $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ es completo con la métrica inducida por la norma (véase por ejemplo [4, 13]). Esta norma es también llamada de norma de la convergencia uniforme. Cuando no se explicita la norma en $C(\Omega)$ queda sobreentendido que se trata de $\|\cdot\|_\infty$.

Recuerde que una sucesión $\{\xi_n\}_{n\in N}$ en un espacio normado $\mathcal{N}$ se dice que es de *Cauchy* si $\|\xi_n - \xi_m\| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$.

Un espacio métrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy, converge en un elemento de ese espacio.

Un espacio normado que es completo con la métrica inducida por la norma es llamado *espacio de Banach*. En este trabajo de investigación $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \cdot$, siempre denotan espacios de Banach.

Ejemplo 2.2.2. $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

A continuación presentamos otros ejemplos bien conocidos; los cuales serán frecuentemente usados a lo largo de este trabajo.

Ejemplo 2.2.3. Denote por $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ los elementos de $\mathbb{F}^n$. Entonces $\mathbb{F}^n$ es un espacio de Banach con cada una de las siguientes normas: $\|\xi\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{1/p}$, para $1 \leq p < \infty$, y $\|\xi\|_\infty := \text{máx}_{1\leq j\leq n}|\xi_j|$.

Ejemplo 2.2.4. Para $\psi \in C[a, b]$ (conjunto de la funciones continuas $\psi : [a, b] \to \mathbb{F}$), Defina $\|\psi\|_1 := \int_a^b |\psi(t)|dt$. Entonces $\|\cdot\|_1$ es una norma en $C[a, b]$, sin embargo $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ no es completo (véase, [10] para detalles de esta afirmación).

Ejemplo 2.2.5. Denote por $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ un punto genérico de $\mathbb{F}^\mathbb{N}$, es decir, una sucesión en $\mathbb{F}$. Para $1 \leq p < \infty$ sea $l^p(\mathbb{N}) := \{\xi \in \mathbb{F}^\mathbb{N} : \|\xi\| := \left(\sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^p\right)^{1/p} < \infty\}$ y $l^\infty(\mathbb{N}) := \{\xi \in \mathbb{F}^\mathbb{N} : \|\xi\| := \sup_{1\leq j<\infty} |\xi_j| < \infty\}$. Es un ejercicio común verificar que los espacios $l^p(\mathbb{N})$, para $1 \leq p < \infty$, son espacios de Banach (véase,[10]) . (los casos $p = 1, 2, \infty$ son mas fácil de verificar).

Ejemplo 2.2.6. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida (positiva), en donde $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra en Ω, entonces es un resultado bien conocido en teoría de integración que, para $1 \leq p < \infty$, el conjunto $L^p_\mu(\Omega)$ de la (clases de equivalencias, que identifican dos funciones que coinciden μ-q.t.p, de) funciones medibles $\psi : \Omega \to \mathbb{F}$ con

$$\|\psi\|_p := \left(\int_\Omega |\psi(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e $\|\psi\|_\infty := \sup \text{ess}_{t \in \Omega} |\psi(t)| := \text{ínf}\, \{a \leq 0 : \mu(\{t : |\psi(t)| > a\}) = 0\} < \infty$, son espacios de Banach. En el caso particular, $p = 1, 2, \infty$ la verificación es mas simple que los otros. Véase [7] para detalles de las demostraciones de estos resultados. Si la medida μ es la medida de Lebesgue en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ la notación será simplemente $L^2(\Omega)$; en el caso de Ω ser un intervalo $[a, b]$ de la recta real y la medida es de Lebesgue, entonces también será usada la notación $L^p[a, b]$.

En el ejemplo anterior, dos funciones f y g coinciden μ-c.t.p. (casi toda parte) si $\mu\left(\{t \in \Omega : f(t) \neq g(t)\}\right) = 0$

2.2.2. Operadores lineales

Un *operador lineal* entre los espacios vectoriales X y Y sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ es una aplicación $T : \text{dom}\, T \subset X \to Y$ en donde su dominio $\text{dom}\, T$ es un subespacio vectorial y

$$T(\lambda\xi + \eta) = \lambda T(\xi) + T(\eta)$$

Para todo $\xi, \eta \in \text{dom}\, T$ y todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$.

Note que $T(0) = 0$ para todo operador lineal T, muchas veces $T(\xi)$ también será denotado por $T\xi$. Ejemplos simples de operadores lineares son: el operador identidad $\mathbf{1} : X \to X$, con $\mathbf{1}\xi := \xi$, y el operador nulo $T\xi := 0$, para todo ξ. Además de estos ejemplos, muchos otros ejemplos son presentados en el desarrollo de este trabajo.

Ejemplo 2.2.7. Sea $\phi \in L^\infty_\mu(\Omega)$, con μ una medida σ-finita. Entonces el operador multiplicación por ϕ, definido por $M_\phi : L^p_\mu(\Omega) \to L^p_\mu(\Omega)$,

$$(\mathcal{M}_\phi \psi)(t) := \phi(t)\psi(t), \quad \psi \in L^p_\mu(\Omega),$$

es un operador lineal para cualquier $1 \leq p < \infty$. Note que para $\psi \in L^p_\mu(\Omega)$,

$$\int_\Omega |(\mathcal{M}_\phi \psi)(t)|^p d\mu(t) = \int_\Omega |\phi(t)\psi(t)|^p d\mu(t) \leq \|\phi\|^p_\infty \int_\Omega |\psi|^p d\mu(t) < \infty. \qquad \text{(II.1)}$$

Por lo tanto, $(\mathcal{M}_\phi \psi) \in L^p_\mu(\Omega)$ para todo $\psi \in L^p_\mu(\Omega)$

Ejemplo 2.2.8. Sean X e Y espacios compactos y $u : Y \to X$ continua. Entonces $T : C(X) \to C(Y)$, $(T_u\psi)(y) = \psi(u(y))$, es un operador lineal.

En muchos casos es imprescindible considerar dominios densos; así que a lo largo de este trabajo de investigación la notación $A \sqsubseteq B$ indica que A es un subconjunto denso de B, con respecto a un topología apropiada.

Dados dos operadores T, S la notación $T \subset S$ significa que S es una extensión de T, es decir, $\operatorname{dom} T \subset \operatorname{dom} S$ y $T\xi = S\xi$ para todo $\xi \in \operatorname{dom} T$.

Teniendo en cuenta la definición de operador lineal la siguiente observación es fácil verificar.

Observación 2.2.1. Sea $T : \operatorname{dom} T \subset X \to Y$ un operador lineal. Se verifican las siguientes afirmaciones:

1. La imagen de T, $\operatorname{img} T := T(\operatorname{dom} T) = \{\eta \in Y : \eta = T\xi, \text{ para algun } \xi \in X\}$ y el núcleo (o kernel) de T, $N(T) := \{\xi \in \operatorname{dom} T : T\xi = 0\}$, son subepacios vectoriales.

2. Si $\dim \operatorname{dom} T = n < \infty$, entonces $\dim(\operatorname{img} T) \leq n$.

3. El operador inverso de T, $T^{-1} : \operatorname{img} T \to \operatorname{dom} T$, existe si, y solo si, $T\xi = 0$ entonces $\xi = 0$: y si existe también es un operador linear.

4. Si T, S son operadores lineales invertibles, entonces $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$ (considerando que las operaciones composición están bien definidas).

Un *operador antilineal o semilineal* entre los espacios vectoriales X y Y sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ es una aplicación $T : \operatorname{dom} T \subset X \to Y$ con dominio $\operatorname{dom} T$ un subespacio vectorial de X y

$$T(\lambda\xi + \eta) = \overline{\lambda}T(\xi) + T(\eta)$$

Para todo $\xi, \eta \in \operatorname{dom} T$ y todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$.

A lo largo de la presente investigación, si en las definiciones de operador lineal y antilinal no se especifica el dominio $\operatorname{dom} T$ se sobreentiende que el dominio es todo el espacio X, es decir, $\operatorname{dom} T = X$.

Una teoría interesante es obtenida cuando se fusiona los operadores lineales con la topología natural generada por las normas. El siguiente resultado es un ejemplo de ello, pues muestra que si un operador lineal es continuo en algún punto de su dominio, entonces es uniformemente continua en todo su dominio.

Teorema 2.2.1. *Sea $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ un operador lineal entre espacios normados. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\sup_{\|\xi\|\leq 1} \|T\xi\| < \infty$*, es decir, la imagen de la bola unitaria es acotada.*

(ii) *Existe $C > 0$ de modo que $\|T\xi\| \leq C\|\xi\|$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$.*

(iii) *T es uniformemente continuo.*

(iv) *T es continuo.*

(v) *T es continuo en cero $(0 \in \mathcal{N}_1)$.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Considere $C = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|T\xi\|$. Si $0 \neq \xi \in \mathcal{N}_1$, entonces $\|T(\xi/\|\xi\|)\| \leq C$, es decir, $\|T\xi\| \leq C\|\xi\|$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Si $\xi, \eta \in \mathcal{N}_1$, entonces $\|T\xi - T\eta\| = \|T(\xi - \eta)\| \leq C\|\xi - \eta\|$. Por tanto T es Lipschitz y por consiguiente uniformemente continua.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Desde que T es uniformemente continuo, en particular T es continuo.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Como T es continuo por definición de continuidad, T es continuo en cero.

$(v) \Rightarrow (i)$ Como T es continuo en cero existe $\delta > 0$ tal que si $\|\xi - 0\| = \|\xi\| < \delta$ entonces $\|T\xi - T0\| = \|T\xi\| < 1$, Así que, si $\|\xi\| \leq 1$, se sigue que $\|(\delta/2)\xi\| \leq \delta/2 < \delta$, luego $\|T(\delta/2\xi)\| < 1$, por lo tanto, $\|T\xi\| < 2/\delta$ para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$ con $\|\xi\| \leq 1$ y consiguiente $\sup_{\|\xi\|\leq 1} \|T\xi\| \leq 2/\delta < \infty$. $\square$

Un operador continuo es llamado *operador acotado*, el conjunto de todos los operadores acotados de $\mathcal{N}_1$ en $\mathcal{N}_2$ será denotado por $\mathrm{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. Será también usada la notación $\mathrm{B(N)}$ si $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$.

Observación 2.2.2. Es importante notar que el término operador lineal acotado es muy diferente con relación a un aplicación acotada en general, es decir, $f : \mathrm{dom}\ f \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ es una *aplicación acotada* si existe un número $K \geq 0$ tal que $\|f\xi\|_{\mathcal{N}_2} \leq K$ para todo $\xi \in \mathrm{dom}\ f$; en este último sentido un operador lineal $T : \mathrm{dom}\ T \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ (no nula) nunca es una aplicación acotada.

Ejemplo 2.2.9. El operador T_u del Ejemplo 2.2.8 es continuo, debido a que para todo $\psi \in C(X)$ se tiene

$$\|T_u\psi\|_\infty = \sup_{y\in Y} |\psi(u(t))| \leq \sup_{x\in X} |\psi(x)| = \|\psi\|_\infty,$$

y T_u es acotado por el Teorema 2.2.1.

A continuación presentamos ejemplos de operadores no acotados.

Ejemplo 2.2.10. Sea $T : \mathrm{dom}\, T := \{(\xi_n) \in l^p(\mathbb{N}) : \sum_{n=1}^{\infty} |n^2 \xi_n|^p < \infty\} \to l^p(\mathbb{N})$, con $1 \leq p < \infty$, $T(\xi_n) = (n^2 \xi_n)$; este operador es lineal, sin embargo no es acotado. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $e_n = (\delta_{n,j})_{j=1}^{\infty}$, con $\delta_{k,i} = 0$ si $i \neq k$ y $\delta_{k,k} = 0$ el " δ de Kronecker", luego para cada $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in \mathrm{dom}\, T$, $\|e_n\|_p = 1$ y $\|Te_n\|_p = n^2$. Por lo tanto, T no es acotado.

Ejemplo 2.2.11. Sea $\mathrm{dom}\, D$ el espacio vectorial de los polinomios en $C[0,1]$ y $D : \mathrm{dom}\, D \subset C[0,1] \to C[0,1]$ el operador derivada $(Dp)(t) := p'(t)$, $p \in \mathrm{dom}\, D$ es un operador lineal no acotado, pues si se considera $p_n(t) = t^n$, para todo $n \geq 1$, se ve que $(Dp_n)(t) = nt^{n-1}$, $\|p_n\|_\infty = 1$, en cuando $\|Dp_n\|_\infty = n$.

Note que $\mathrm{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ es un espacio vectorial con la operación puntual, es decir, para $T, S \in \mathrm{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ la suma de T y S es definida por

$$(T + S)\xi := T\xi + S\xi, \quad \xi \in \mathcal{N}_1,$$

y el producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es dado por

$$(\lambda T)\xi := \lambda T\xi, \quad \xi \in \mathcal{N}_1.$$

Por otro lado,

$$\|T\| := \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{N}_1 \\ \|\xi\| \leq 1}} \|T\xi\|$$

es una norma en $\mathrm{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. En efecto, si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, entonces $\|T\| = 0$ si, y solo si, $T\xi = 0$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$, es decir $T = 0$. La propiedad $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$ es inmediata; si $S \in \mathrm{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, entonces

$$\|T + S\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|T\xi + S\xi\| \leq \sup_{\|\xi\| \leq 1} (\|T\xi\| + \|S\xi\|) \leq \|T\| + \|S\|.$$

Si no se proporciona explícitamente una topología en $\mathrm{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, se supone que se trata de la topología inducida por la norma.

Note que si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, entonces el Teorema 2.2.1 implica que

$$\|T\| = \inf_{\xi \in \mathcal{N}} \{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\} = \sup_{\|\xi\|=1} \|T\xi\| = \sup_{\xi \neq 0} \frac{\|T\xi\|}{\|\xi\|},$$

y si T y S son operadores lineales acotados, la composición TS (también llamada producto de operadores) está definida, es acotado y $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$. Por lo tanto, si T^n denota el enésimo iterado de T, entonces T^n está bien definida y $\|T^n\| \leq \|T\|^n$.

Ejemplo 2.2.12. El operador nulo es el único operador cuya norma es cero y para el operador identidad se tiene $\|\mathbf{1}\| = 1$ (suponiendo que $\mathcal{N} \neq \{0\}$).

Ejemplo 2.2.13. El operador $\mathcal{M}_\phi$, con $\phi \in L^\infty_\mu(\Omega)$ (véase el Ejemplo 2.2.8) es acotado en $L^p_\mu(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ y $\|\mathcal{M}_\phi\| = \|\phi\|_\infty = \sup \text{ ess}|\phi|$).

La demostración del Ejemplo 2.2.13 se puede encontrar en el Capitulo 4 de [4].

Teorema 2.2.2. *Si $\mathcal{N}$ es un espacio normado y $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach, entonces $\mathrm{B}(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ es Banach.*

El resultado anterior es bien conocido en el análisis funcional. Para detalles de la demostración del Teorema 2.2.2 véase Teorema 4.5 de [4].

Si $\mathcal{N}$ es un espacio normado, el espacio de Banach $\mathrm{B}(\mathcal{N}, \mathbb{F})$ ($\mathbb{F}$ es completo) es denotado por $\mathcal{N}^*$ y llamado *espacio dual* de $\mathcal{N}$. Cada elemento de $\mathcal{N}^*$ es llamado funcional lineal continuo en $\mathcal{N}$.

Ejemplo 2.2.14. La integral sobre $C[a, b]$ es un elemento del dual de $C[a, b]$, ya que $\psi \mapsto \int_a^b \psi(t)dt$ es lineal y continuo. En efecto, si $\psi \in C[a, b]$ entonces ψ es una función acotada, luego $|\int_a^b \psi(t)dt| \leq \|\psi\|_\infty \int_a^b dt = \|\psi\|_\infty |b - a|$. Por lo tanto, se demuestra la afirmación.

Ejemplo 2.2.15 (Funcional no acotado)**.** Considere el funcional lineal

$$f : C[-1,1] \subset L^1[-1,1] \to \mathbb{F}, \quad f(\psi) = \psi(0).$$

Elija una función $\psi \in C[-1,1]$ con $\psi(-1) = \psi(1) = 0$ y $\psi(0) \neq 0$. Para cada $n \leq 2$, defina

$$\psi_n(t) := \begin{cases} \psi(nt), & \text{si } |t| \leq 1/n, \\ 0, & \text{si } 1/n \leq |t| \leq 1. \end{cases}$$

Note que $\|\psi_n\|_1 = \int_{-1}^{1} |\psi_n(t)|dt = \|\psi\|_1/n$, el cual converge a zero cuando $n \to \infty$, sin embargo, $f(\psi_n) = \psi(0) \neq 0$ para todo n, luego f no es continuo.

Recordemos que el producto cartesiano $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ de dos espacios normados tiene una estructura natural de espacio vectorial dado por $\alpha(\xi, \eta) = (\alpha\xi, \alpha\eta)$, $\alpha \in \mathbb{F}$ y $(\xi_1, \eta_1) + (\xi_2, \eta_2) = (\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2)$; además, este producto cartesiano se convierte en un espacio normado con la norma $\|(\xi, \eta)\| = \left(\|\xi\|^2_{\mathcal{N}_1} + \|\eta\|^2_{\mathcal{N}_2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Es fácil verificar que el producto cartesiano $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, con la norma $\|(\xi, \eta)\|$ definida anteriormente es un espacio de Banach.

El *gráfico* de un operador lineal $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ es el subespacio $\mathcal{G}(T) := \{(\xi, T\xi) : \xi \in \operatorname{dom} T\}$ de $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$. La *norma de la gráfica* de T en $\operatorname{dom} T$ es dado por $\|\xi\|_T := (\|\xi\|^2 + \|T\xi\|^2)^{1/2}$.

Para terminar esta sección se presenta la definición de operador cerrado que será usado en el desarrollo de este trabajo de investigación.

Un operador lineal $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ es *cerrado* si para toda secuencia $(\xi_n) \subset \operatorname{dom} T$, $\xi_n \to \xi \in \mathcal{N}_1$, con $(T\xi_n) \subset \mathcal{N}_2$ también convergente, $T\xi_n \to \eta$, entonces $\xi \in domT$ y $\eta = T\xi$, En otras palabras, T es cerrado si, y solo si, $\mathcal{G}(T)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$.

Observación 2.2.3. Preste atención a la diferencia entre un operador continuo y uno cerrado: Un operador lineal T es continuo si para cada $\xi_n \to \xi$ en $\operatorname{dom} T$, entonces necesariamente $T\xi_n \to T\xi$, mientras que para un operador cerrado se pide que si ambos $(\xi_n) \subset \operatorname{dom} T$ y $(T\xi_n)$ sean convergentes, entonces necesariamente $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n \in \operatorname{dom} T$ y $T\xi_n \to T\xi$.

2.2.3. Espacio de Hilbert

Los espacios de Hilbert son una clase de ejemplos muy importantes de espacios de Banach; Además de la norma, aparece la noción de producto interno, una generalización del producto escalar de $\mathbb{R}^n$. En esta sección se presentan algunas definiciones y propiedades de los espacios de Hilbert que serán usados en este trabajo. Estos resultados están basados en [3, 4, 5], véase estas referencias para más detalles.

Primeramente definimos la noción de producto interno sobre un espacio vectorial.

Un *producto interno* sobre un espacio vectorial X es un funcional $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{F}$, de forma que para cualquier $\xi, \eta, \zeta \in X$ y $\lambda \in F$, las siguiente condiciones son satisfechas:

1. $\langle \lambda\xi + \eta, \zeta\rangle = \bar{\lambda}\langle \xi, \zeta\rangle + \langle \eta, \zeta\rangle$,
2. $\langle \xi, \eta\rangle = \overline{\langle \eta, \xi\rangle}$
3. $\langle \xi, \xi\rangle \geq 0$ y $\langle \xi, \xi\rangle = 0$ si, y solamente si, $\xi = 0$.

Para ξ fijo, la aplicación $\eta \mapsto \langle \xi, \eta\rangle$ es un funcional lineal. Para η fijo, la aplicación $\eta \mapsto \langle \xi, \eta\rangle$ es un funcional antineal.

Si $\langle \xi, \eta\rangle = 0$ se dice que ξ es *ortogonal* a η y se denota $\xi \perp \eta$. Si $E \subset X$ y $F \subset X$, la notación $E \perp F$ significa que $\xi \perp \eta$ para cada $\xi \in E$ y cada $\eta \in F$. $E^{\perp}$ denota el conjunto de todos los $\eta \in X$ que son ortogonales a todo $\xi \in E$, es decir, $E^{\perp} = \{\eta \in X : \langle \eta, \xi\rangle = 0, \forall \xi \in E\}$.

El par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *espacio vectorial con producto interno* y en la literatura es llamado *espacio con producto interno* o *espacio pre-Hilbert*. Estos espacio son denotados apenas por X cuando queda claro cual es su producto interno.

A continuación se presentan ejemplos de producto interno y/o espacio con producto interno.

Ejemplo 2.2.16. En $C[a,b]$ la aplicación $\langle\psi,\phi\rangle = \int_a^b \overline{\psi(t)}\phi(t)dt$ es un producto interno.

Ejemplo 2.2.17. $\langle\xi,\eta\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\xi_j}\eta_j$ es un producto interno en $\mathbb{C}^n$. De forma similar en $\mathbb{R}^n$ (en este caso se dispensa la conjugación compleja).

Ejemplo 2.2.18. $\langle\xi,\eta\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\xi_j}\eta_j$ es un producto interno en $l^2(\mathbb{N})$. Esta serie está bien definida. En efecto, es absolutamente convergente debido a que $|\overline{\xi_j}\eta_j| \leq 1/2(|\xi_j|^2 + |\eta_j|^2)$ y luego

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\overline{\xi_j}\eta| \leq \frac{1}{2}\left(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2\right) < \infty.$$

Ejemplo 2.2.19. $\langle\psi,\phi\rangle := \int_\Omega \overline{\psi(t)}\phi(t)d\mu(t)$ es un producto interno en $L^2_\mu(\Omega)$. Está integral está bien definida por la desigualdad de H$\ddot{o}$lder. Sin embargo, también se puede observar que

$$|\overline{\psi(t)}\psi(t)| \leq \frac{1}{2}\left(|\psi(t)|^2 + |\phi(t)|^2\right),$$

luego se sigue que $\overline{\psi}\phi \in L^1_\mu(\Omega)$.

En un espacio con producto interno $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, la función

$$\|\xi\| \mapsto \sqrt{\langle\xi,\xi\rangle}, \quad \xi \in X,$$

es una norma, llamada de *norma inducida por el producto interno*.Véase Corolario 17.9 de [4] para detalles de esta afirmación.

Salvo que se enuncie explícitamente lo contrario, a lo largo de este trabajo, en un espacio con producto interno la norma es la inducida por el producto interno.

Observación 2.2.4. En un espacio con producto interno se verifica la identidad de polarización

$$\begin{aligned}\langle \xi, \eta \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|\xi + \eta\|^2 - \|\xi - \eta\|^2\right), \\ \langle \xi, \eta \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|\xi + \eta\|^2 - \|\xi - \eta\|^2 + i\|\xi + i\eta\|^2 - i\|\xi - i\eta\|^2\right),\end{aligned}$$

la primera se cumple en un espacio producto interno real y la segunda en un espacio producto interno complejo. Esta identidad es muy interesante porque muestra como el producto interno puede ser recuperado a partir de la norma.

Observación 2.2.5. En un espacio con producto interno $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se verifica la *ley del paralelogramo*

$$\|\xi + \eta\|^2 + \|\xi - \eta\|^2 = 2\|\xi\|^2 + 2\|\eta\|^2, \quad \forall \xi, \eta \in X.$$

La verificación de las dos observaciones anteriores es una consecuencia directa de la definición de producto interno.

A continuación recordemos un resultado clásico en espacio con producto interno.

Teorema 2.2.3. *Si $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces para $\xi, \eta \in X$:*

1. *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz) $|\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\|\|\eta\|$; la igualdad se cumple si, y solo si, $\{\xi, \eta\}$ es linealmente dependiente.*

2. *(Desigualdad triangular) $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$; la igualdad se cumple si, y solo si $\xi = 0$ o $\eta = t\xi$ para algún $t \geq 0$.*

3. *$\xi \perp \eta$ si, y solo si,*
$$\|\xi\| \leq \|\xi + t\eta\|, \quad \forall t \in \mathbb{F}.$$

Desde que el Teorema 2.2.3 es un resultado bien conocido; en la presente investigación no se presenta la demostración. Detalles de esta demostración se puede encontrar en [4, 5].

Un *espacio de Hilbert* es un espacio con producto interno que es completo con la norma inducida por el producto interno. En este trabajo $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \cdots$, siempre denotan espacios de Hilbert y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno en un determinado espacio de Hilbert. La notación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ denota el producto interno en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (cuando se quiera especificar el espacio donde el producto interno esta definido).

Ejemplo 2.2.20. Lo espacios $l^2(\mathbb{N})$, $L^2_\mu(\Omega)$, $\mathbb{F}^n$ con la norma $\|\cdot\|_2$ (incluyendo el propio conjunto $\mathbb{F}$) son espacios de Hilbert (a lo largo de este trabajo, en $\mathbb{F}^n$ siempre consideramos esta norma). $C[a, b]$ con el producto interno del Ejemplo 2.2.16 no es un espacio de Hilbert, pues no es completo.

En particular, el producto cartesiano $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ de espacios de Hilbert es un espacio de Hilbert, cuyo producto interno es dado por

$$\langle (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \rangle := \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} .$$

Un espacio vectorial X es *suma directa* de dos subespacios X_1 y X_2, el cual es denotado por

$$X = X_1 \oplus X_2,$$

si todo $\xi \in X$ posee una única representación

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \xi_1 \in X_1, \xi_2 \in X_2.$$

A continuación se presenta un resultado que será útil para demostrar el Teorema de Representación de Riesz.

Teorema 2.2.4. *Si E es un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert H,* *entonces*

$$\mathcal{H} = E \oplus E^{\perp}.$$

$E^{\perp}$ es llamado *complemento ortogonal* del subespacio E en $\mathcal{H}$.

Demostración. Sea $\xi \in \mathcal{H}$, $\delta = \text{ínf}_{\zeta \in E} \|\xi - \zeta\|$ y $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ de forma que $\|\eta_n - \xi\| \to \delta$. Por la ley del paralelogramo se tiene

$$2\|\eta_n - \xi||^2 + 2\|\eta_n - \xi\|^2 = \|\eta_n - \eta_k\|^2 + \|\eta_n + \eta_k - 2\xi\|^2,$$

y desde que E es un subespacio $(\eta_n - \eta_k)/2 \in E$, se sigue que

$$\begin{aligned} \|\eta_n - \eta_k\| &\leq 2\|\eta_n - \xi\|^2 + 2\|\eta_k - \xi\|^2 - 4\|(\eta_n + \eta_k)/2 - \xi\|^2 \\ &\leq 2\|\eta_n - \xi\|^2 + 2\|\eta_k - \xi\|^2 - 4\delta^2, \end{aligned}$$

esto muestra que $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia de Cauchy en E. y por lo tanto converge a algún $\eta \in E$, desde que E es completo (pues es cerrado en $\mathcal{H}$). Por la continuidad de la norma se tiene $\|\xi - \eta\| = \delta$.

Como $(t\zeta - \eta) \in E$ para todo $\zeta \in E$ e $t \in \mathbb{F}$, se obtiene

$$\|(\xi - \eta) + t\zeta\| = \|\xi + (t\zeta - \eta)\| \geq \delta = \|\xi - \eta\|,$$

y por lo tanto $(\xi - \eta) \perp \zeta$ para todo $\zeta \in E$ por el Teorema 2.2.3 parte c), de aquí $(\xi - \eta) \in E^{\perp}$. Por consiguiente, se llega a la descomposición

$$\xi = \eta + (\xi - \eta). \quad \eta \in E, (\xi - \eta) \in E^{\perp}.$$

Solo falta demostrar la unicidad de esta descomposición. Suponga que $\xi = \eta' + \zeta'$, con $\eta' \in E$ y $\zeta' \in E^{\perp}$, entonces

$$\eta' + \zeta' = \eta + (\xi - \eta) \Rightarrow \zeta' - (\xi - \eta) = \eta - \eta' \in E \cap E^{\perp},$$

de forma que ambos son nulos, de aquí $\eta' = \eta$ y $\zeta = (\xi - \eta)$. $\square$

Teorema 2.2.5. (Representación de Riesz). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert e $\mathcal{H}^*$ su dual. La aplicación $\gamma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$, $\gamma(\xi) = f_\xi$, para cada $\xi \in \mathcal{H}$, dada por*

$$\gamma(\xi)(\eta) = f_\xi(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle, \quad \forall \eta \in \mathcal{H}$$

y γ es una isometría antilineal y sobreyectiva.

Demostración. Si $\xi = 0$, es claro que $f_\xi = 0$. Si $\xi \in \mathcal{H}$, entonces f_ξ es un funcional lineal y $|f_\xi(\eta)| = |\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\|\|\eta\|$, de forma que $f_\xi \in \mathcal{H}^*$ con $\|f_\xi\| \leq \|\xi\|$. Desde que $\|\xi\|^2 = f_\xi(\xi) \leq \|f_\xi\|\|\xi\|$ se sigue que $\|f_\xi\| \geq \|\xi\|$. Por lo tanto $\|f_\xi\| = \|\xi\|$, y la aplicación γ es una isometría, es fácil verificar que γ es antilineal (lineal no caso real). Falta apenas demostrar que γ es sobreyectiva, es decir, que todo elemento $f \in \mathcal{H}^*$ es de la forma f_ξ para algún $\xi \in \mathcal{H}$.

Si $f = 0$, entonces $f = f_\xi$ para $\xi = 0$. Se $f \neq 0$, como el núcleo $N(f)$ es un espacio vectorial cerrado (puesto que f es continua) propio de $\mathcal{H}$, Por el Teorema 2.2.4 podemos escribir

$$\mathcal{H} = N(f) \oplus N(f)^\perp,$$

y existe $\zeta \in N(f)^\perp$ con $\|\zeta\| = 1$. Ahora, observe que el vector $f(\eta)\zeta - f(\zeta)\eta) \in N(f)$, para todo $\eta \in \mathcal{H}$, luego se sigue que

$$\langle \zeta, f(\eta)\zeta - f(\zeta)\eta \rangle = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{H},$$

es decir, $f(\eta) = \left\langle \overline{f(\zeta)}\zeta, \eta \right\rangle$. Por lo tanto $f = f_{\overline{f(\zeta)}\zeta} = \gamma(\overline{f(\zeta)}\zeta)$. $\square$

Observación 2.2.6. El Teorema de Representación de Riesz identifica cada elemento $f \in \mathcal{H}^*$ con un único elemento $\xi \in \mathcal{H}$, de forma que $f(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle$ para todo $\eta \in \mathcal{H}$ y $\|f\| = \|\xi\|$.

El siguiente resultado sobre la caracterización de conjuntos densos en espacios de Hilbert es usado frecuentemente a lo largo del trabajo.

Teorema 2.2.6. *Un conjunto E es denso en espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ si, y solo si, para cada $\eta \in \mathcal{H}$ talque $\langle \eta, \xi \rangle = 0$ para todo $\xi \in E$, entonces $\eta = 0$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponga que E es denso en $\mathcal{H}$ y sea $\eta \in$ de forma que $\langle \eta, \xi \rangle = 0$ para todo $\xi \in E$, desde que E es denso existe una secuencia $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $\xi_n \to \eta$ cuando $n \to \infty$, luego

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle \eta, \xi_n \rangle = \langle \eta, \eta \rangle = \|\eta\|^2,$$

por lo tanto $\eta = 0$.

($\Leftarrow$) Por contradicción supongamos que E no es denso en $\mathcal{H}$ entonces $\bar{E}$ es un subconjunto cerrado propio de $\mathcal{H}$, entonces por el Teorema 2.2.4 podemos escribir

$$\mathcal{H} = \bar{E} \oplus \bar{E}^{\perp}.$$

Así que existe $\eta \in \bar{E}^{\perp}$ con $\eta \neq 0$, en particular $\langle \eta, \xi \rangle = 0$ para todo $\xi \in E$ y $\eta \neq 0$ esto contradice la hipótesis. Por lo tanto E es denso. □

Una familia $\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ en $\mathcal{H}$ es *ortonormal* si $\|\xi_\alpha\| = 1$, para todo $\alpha \in J$ y $\xi_\alpha \perp \xi_\beta$ si $\alpha \neq \beta \in J$. Una *base ortonormal* $\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de $\mathcal{H}$ es un familia ortonormal total, es decir $\overline{Lim(\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in J})} = \mathcal{H}$. Una de las ventajas de la presencia de un producto interno en un espacio de Hilbert es la existencia de una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Los siguientes hechos ilustran tales ventajas bastante bien. Para cada $\xi \in \mathcal{H}$, la desigualdad de Bessel

$$\|\xi\|^2 \geq \sum_{\alpha\in J} |\langle \xi_\alpha, \xi \rangle|^2$$

es satisfecha; en particular, $\langle \xi_\alpha, \xi \rangle \neq 0$ solo para un número contable de índices $\alpha \in J$. Además las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

2. Si $\xi \in \mathcal{H}$, entonces la serie de Fourier de ξ, con respecto a $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$, converge en $\mathcal{H}$ para ξ, es decir,

$$\xi = \sum_{\alpha \in J} \langle \xi_\alpha, \xi \rangle \, \xi_\alpha, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

3. [Identidad de Parseval] Para todo $\xi \in \mathcal{H}$,

$$\|\xi\|^2 = \sum_{\alpha \in J} | \langle \xi_\alpha, \xi \rangle |^2.$$

Además, si $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es un base ortonormal y $\eta = \sum_{\alpha \in J} \langle \xi_\alpha, \eta \rangle \, \xi_\alpha$, entonces

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{\alpha \in J} \langle \xi, \xi_\alpha \rangle \langle \xi_\alpha, \eta \rangle \, .$$

El siguiente resultado garantiza que todo espacio con producto interno tiene un completamiento, véase [4] para mas información.

Teorema 2.2.7. *Si $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con productointerno, entonces X es unitariamente equivalente a un subespacio denso en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$; tal $\mathcal{H}$ es llamado de completamiento de X. Además, cualquier dos completamientos de X son unitariamente equivalentes entre si.*

2.2.4. Espacios de Sobolev $\mathcal{H}^m(\Omega)$

En esta sección se presentan la definición de espacios de Sobolev y sus principales propiedades. Los espacios de Sobolev junto con la riqueza de sus propiedades son muy importantes, para presentar ejemplos de operadores autoadjuntos y formas sesquilineales como se puede apreciar en el Capítulo 4.

Empezamos esta sección con algunas notaciones, Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $C_0^\infty(\Omega)$ denota el conjunto de todas las funciones $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciables con soporte compacto, recuerde que el *soporte* de una función continua $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ es la clausura del conjunto $\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}$ y se denota por $S(\phi)$.

$C^k(\Omega)$ denota el conjunto de la funciones $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$, k veces diferenciables y todas las derivadas parciales son continuas. A lo largo de este trabajo de investigación Ω siempre indica un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Sea $\mathbb{Z}_+$ el conjunto de los números enteros positivos o iguales a cero. Entonces, $\mathbb{Z}_+^n$ es el conjunto de n-tuplas $(k_1, \cdots, k_n)$ tal que $k_i \in \mathbb{Z}_+$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Tales n-tuplas son llamados de *n-multiíndices* o *multiíndices*. Para cada $k = (k_1, \cdots, k_n)$, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$. Para $k, m \in \mathbb{Z}_+^n$ definimos también $k \leq m$ si $m_j \leq k_j$ para todo $j = 1, \cdots, n$, $k! = k_1!k_2!, \cdots k_2!$ y si $k \leq m$,

$$\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} m_n \\ k_n \end{pmatrix} = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ es una variable en $\mathbb{R}^n$, para una función $\psi \in C^{|m|}(\Omega)$ en donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y m denota un multiíndice. Se usa la notación

$$\psi^{(k)}(x) = \frac{\partial^{k_1} \cdots \partial^{k_n} \psi}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}(x), \quad \forall k \leq m,$$

Para indicar las derivadas parciales de ψ. Además, la norma de $x \in \mathbb{R}^n$ será denotado por $|x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$, $x^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$ y $x^m = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$.

Por otro lado, es usada

$$\partial_j^{k_j} \psi(x) = \frac{\partial^{k_j} \psi}{\partial x_j^{k_j}}.$$

para denotar la k_j-ésima derivada parcial de ψ respecto a la variable x_j.

Si $\Omega \subset R^n$ y $\phi, \psi \in C^{|m|}(\Omega)$ y $m \in \mathbb{Z}_+^n$, entonces la formula de Leibniz es satisfecha

$$(\phi\psi)^{(m)} = \sum_{k \leq m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \phi^{(k)} \psi^{(m-k)}.$$

$L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ denota el conjunto de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ medibles y localmente integrables, es decir, $\int_K |f(x)| dx < \infty$ para todo $K \subset \Omega$ compacto.

Observación 2.2.7. Si $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

entonces $u = 0$ $c.t.p.$ en Ω.

La demostración de la observación anterior se puede encontrar en libros de teoría de distribuciones y el lector interesado puede consultar [5] para una demostración alternativa.

Se dice que una función $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tiene *derivada parcial débil* de orden $|k|$ existe una función $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\phi^{(k)}(x)dx = (-1)^{|k|}\int_\Omega v(x)\phi(x)dx. \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

v es llamada de *derivada parcial débil* de orden $|k|$ de u y es denotada por $u^{(k)}$.

En particular, $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tiene k_j-ésima *derivada parcial débil* respecto a la variable x_j, si existe una función $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ de forma que

$$\int_\Omega u(x)\partial_j^{k_j}\phi(x)dx = (-1)^{k_j}\int_\Omega v(x)\phi(x)dx. \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

v es llamada de k_j-ésima *derivada parcial débil* de u respecto a x_j y se denota por $\partial_j^{k_j}u$.

La Observación 2.2.7 garantiza que la derivada débil está bien definida, en el sentido de que la derivada débil es única $c.t.p.$

Para m un entero positivo y un subconjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^m(\Omega)$ es el espacio de Hilbert de $\psi \in L^2(\Omega)$ de forma que todas las derivadas parciales débiles $\psi^{(k)}$ existen, $\psi^{(k)} \in L^2(\Omega)$ para todo $|k| \leq m$ y con norma

$$|||\psi|||_m := \left(\sum_{|k|\leq m} \left\|\psi^{(k)}\right\|_2^2\right)^{1/2}. \tag{II.2}$$

Observación 2.2.8. Note que si $n = 1$, $\Omega = I = (a, b)$ y $m = 1$ se tiene que el espacio de Sobolev

$$\mathcal{H}^1(a,b) = \left\{ \psi \in L^p(I) : \exists v \in L^2(I) \,\text{tal que} \int_I \psi\phi' dx = -\int_I v\phi dx,\ \forall \phi \in C_0^\infty(I) \right\},$$

para $\psi \in \mathcal{H}^1(I)$ decimos que v es la derivada débil de ψ y denotamos $\psi' = v$. El espacio $\mathcal{H}^1(I)$ esta equipado con la norma

$$|||\psi|||_1 := \left(\|\psi\|_2^2 + \|\psi'\|_2^2\right)^{1/2}.$$

De manera análoga a la Observación 2.2.8 se define $\mathcal{H}^m(I)$ cuyos elementos tienen derivadas débiles hasta orden m.

Observación 2.2.9. Se puede mostrar que si $\psi \in C^m(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ y si $\psi^{(k)} \in L^2(\Omega)$ para todo $|k| \leq m$ (aquí $\psi^{(k)}$ denota la derivada parcial usual de ψ), entonces $\psi \in \mathcal{H}^m(\Omega)$. Además, Por la formula de integración por partes la derivada parcial usual coincide con la derivada parcial débil, así la notación es consistente. En particular, si Ω un acotado, entonces $C^m(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{H}^m(\Omega)$.

Para detalles de la demostración de la observación anterior consulte [3].

Ejemplo 2.2.21. Sea $I = (-1, 1)$. Se puede mostrar que

1. La función $\psi(x) = |x|$ pertenece a $\mathcal{H}^1(I)$ y $\psi' = g$ donde

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

2. La función g definida anteriormente no pertenece a $\mathcal{H}^1$.

De acuerdo con la Observación 2.2.9 y el Ejemplo 2.2.21 se puede afirmar que la derivada débil es una generalización del concepto de la derivada usual.

El espacio de Hilbert $\mathcal{H}_0^m(\Omega)$ denota el completamiento de $C_0^\infty(\Omega)$ con la norma de $\mathcal{H}^m(\Omega)$ ($|||\cdot|||_m$). Note que, desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n)$ entonces $\mathcal{H}_0^m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n)$.

Para la verificación de los resultados anteriormente mencionados en esta sección, se recomienda consultar [5, 3, 11].

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1. UBICACIÓN GEOGRÁFICA DEL ESTUDIO

Domicilio del investigador y ambientes de la Universidad Nacional de Altiplano.

3.2. PERIODO DE DURACIÓN DEL ESTUDIO

La presente investigación tuvo una duración de cuatro meses.

3.3. PROCEDENCIA DEL MATERIAL UTILIZADO

Adquirido con recurso propios del investigador.

3.3.1. MATERIALES

- Notebook (PC),
- Impresora,
- Útiles de escritorio (lápiz, lapiceros y borrador),
- Plumones para pizarra,
- Libros,
- Artículos científicos.

3.4. PROCEDIMIENTO

La investigación es básica y está basada en la revisión bibliográfica de los libros de Cesar R. de Oliveria en [5] y Tosio Kato en [16], el trabajo fue ampliar y profundizar los resultados presentados en estos libros respecto a nuestro tema de investigación.

El método que se utilizará en la presente investigación es lectura, exploración, análisis, síntesis, justificación, interpretación y comprensión.

El diseño de investigación que se usará es de tipo descriptivo que consiste en la exploración.

3.5. VARIABLES

3.5.1. Variable independiente

Formas sesquilineales hermitianas, cerradas y acotadas iferiormente.

3.5.2. Variable dependiente

Relación existente entre formas sesquilineales y operador autoadjuntos

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Este capítulo es dedicado al estudio de operadores autoadjuntos, formas sesquilineales y la relación existente entre estas; se presenta el resultado principal de este trabajo de investigación, se define operador autoadjunto asociado a una forma sesquilineal; también se estudian las implicaciones inmediatas y aplicaciones del resultado principal de este trabajo de investigación.

A lo largo de este capítulo se considera operadores lineales acotados y no acotados en espacios de Hilbert y siempre que se mencione "operador" se refiere a un operador lineal definido en el Capítulo 3.

Los conceptos y resultados presentados en esta sección son basados en el estudio y análisis de [5].

4.1. RESULTADOS

4.1.1. Operador autoadjunto

Esta sección es dedicada al estudio de operadores autoadjuntos, con este propósito se introduce el concepto de adjunto de un operador, se define el operador autoadjunto y se presentan algunas propiedades y ejemplos de operadores autoadjuntos.

Un operador lineal $T : \mathrm{dom}\, T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es simétrico si

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, T\eta\rangle\,, \quad \forall \xi, \eta \in \mathrm{dom}\, T.$$

T es llamado *hermitiano* si T es simétrico y $\mathrm{dom}\, T$ es denso en $\mathcal{H}$.

Se dice que un operador $T : \mathrm{dom}\, T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es *acotado inferiormente* si existe $\beta \in \mathbb{R}$, tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq \beta\|\xi\|^2$ para todo $\xi \in \mathrm{dom}\, T$ y se denota $T \geq \beta$.

Sea $T : \mathrm{dom}\, T \sqsubseteq \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, y defina $\mathrm{dom}\, T^*$ como el espacio vectorial de todos los elementos $\eta \in \mathcal{H}_2$ de forma que el funcional lineal

$$\xi \mapsto \langle \eta, T\xi \rangle_{\mathcal{H}_2}, \quad \xi \in \mathrm{dom}\, T,$$

puede ser representado por $\zeta \in \mathcal{H}_1$, esto es,

$$\langle \eta, T\xi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall \xi \in \mathrm{dom}\, T.$$

El operador *adjunto* de T es el operador $T^* : \mathrm{dom}\, T^* \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$, con dominio $\mathrm{dom}\, T^*$ definido anteriormente y para $\eta \in \mathrm{dom}\, T^*$, $T^*\eta := \zeta$. Por lo tanto,

$$\langle \eta, T\xi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle T^*\eta, \xi \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall \xi \in \mathrm{dom}\, T, \forall \eta \in \mathrm{dom}\, T^*.$$

Observación 4.1.1. El dominio $\mathrm{dom}\, T^*$ se puede escribir como el conjunto $\mathrm{dom}\, T^* := \{\eta \in \mathcal{H}_2 : \exists \zeta \in \mathcal{H}_1, \text{ tal que } \langle \eta, T\xi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{H}_1}, \forall \xi \in \mathrm{dom}\, T\}$. Note si $\mathrm{dom}\, T$ es denso en $\mathcal{H}$ entonces $\mathrm{dom}\, T^*$ es un espacio vectorial y T^* es un operador lineal bien definido. En efecto, Si $\eta, \eta' \in \mathrm{dom}\, T^*$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces existe ζ y ζ' tal que

$$\langle \eta, T\xi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \text{y} \quad \langle \eta', T\xi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \zeta', \xi \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall \xi \in \mathrm{dom}\, T.$$

Multiplicando por "α" a la primera ecuación y sumando el resultado con la segunda se obtiene

$$\langle \alpha\eta + \eta', T\xi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \alpha\zeta + \zeta', \xi \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall \xi \in \mathrm{dom}\, T,$$

luego $\alpha\eta + \eta' \in \mathrm{dom}\, T^*$ y $T^*(\alpha\eta + \eta') = \alpha\zeta + \zeta' = \alpha T^*\eta + T^*\eta'$. Por lo tanto $\mathrm{dom}\, T^*$ es un subespacio y T^* es lineal.

Resta demostrar que T^* está bien definido, para ello sea ζ' otro elemento de $\mathcal{H}$ tal que $\langle \eta, T\xi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \zeta', \xi \rangle_{\mathcal{H}_1}$, para todo $\xi \in \mathrm{dom}\, T$, entonces $\langle \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \zeta', \xi \rangle_{\mathcal{H}_1}$ para todo $\xi \in \mathrm{dom}\, T$, de aquí $\langle \zeta - \zeta', \xi \rangle_{\mathcal{H}_1} = 0$ para todo $\xi \in \mathrm{dom}\, T$, desde que $\mathrm{dom}\, T$ es denso en $\mathcal{H}_1$ por el Teorema 2.2.6 sigue que $\zeta = \zeta'$ y así T^* está bien definida.

Si T y S son operadores lineales y $z \in \mathbb{C}$, entonces directamente de la definición de adjunto de un operador se tiene $(T + zS)^* = T^* + \bar{z}S^*$.

De la definición de adjunto de un operador podemos observar que $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es hermitiano si, y solo si, $T \subset T^*$.

Proposición 4.1.1. *Si* $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$*, entonces* $T^* \in \mathrm{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$*,* $T^{**} = T$ *y* $\|T^*\| = \|T\|$*. Por lo tanto*

$$\langle \eta, T\xi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle T^*\eta, \xi \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_1, \forall \eta \in \mathcal{H}_2. \tag{IV.1}$$

Demostración. Afirmación: Si T acotado, entonces $\operatorname{dom} T^* = \mathcal{H}_2$ y $T^* \in \mathrm{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. En efecto, para $\eta \in \mathcal{H}_2$ defina $f : \mathcal{H}_1 \to \mathbb{C}$, por $f_\eta(\xi) := \langle \eta, T\xi \rangle_{\mathcal{H}_2}$, entonces

$$|f_\eta(\xi)| \leq |\langle \eta, T\xi \rangle_{\mathcal{H}_2}| \leq \|\eta\|_{\mathcal{H}_2} \|T\xi\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|T\| \|\eta\|_{\mathcal{H}_2} \|\xi\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall \xi \in \mathcal{H},$$

de aquí $\|f_\eta\| \leq \|T\| \|\eta\|_{\mathcal{H}_2}$ y $f_\eta \in \mathcal{H}_1^*$. Por el Teorema de representación de Riesz existe $\zeta \in \mathcal{H}_1$ de forma que

$$f_\eta(\xi) = \langle \eta, T\xi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_1 \tag{IV.2}$$

y $\|f_\eta\| = \|\zeta\|_{\mathcal{H}_1}$. Por lo tanto $\eta \in \operatorname{dom} T^*$ así que $\operatorname{dom} T^* = \mathcal{H}_2$ y $T^*\eta = \zeta$ luego

$$\|T^*\eta\|_{\mathcal{H}_1} = \|\zeta\|_{\mathcal{H}_1} = \|f_\eta\| \leq \|T\| \|\eta\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall \eta \in \operatorname{dom} T^*,$$

de aquí sigue que, $\|T^*\| \leq \|T\|$ y $T^* \in \mathrm{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Con esto se termina la demostración de la afirmación y por (IV.2) se verifica por (IV.1).

A aplicando la afirmación a T^* temos que $T^{**} := (T^*)^*$ también es limitado y por

(IV.1), para todo $\eta, \xi \in \mathcal{H}_1$ tememos

$$\begin{aligned}
\langle T^{**}\eta, \xi\rangle_{\mathcal{H}_2} &= \langle \eta, T^{*}\xi\rangle_{\mathcal{H}_1} \\
&= \overline{\langle T^{*}\xi, \eta\rangle_{\mathcal{H}_1}} \\
&= \overline{\langle \xi, T\eta\rangle_{\mathcal{H}_2}} \\
&= \langle T\eta, \xi\rangle_{\mathcal{H}_2} .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T^{**}\eta = T\eta$ para todo η y así $T^{**} = T$. Ahora $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^{*}\|$, por consiguiente $\|T^{*}\| = \|T\|$. $\square$

Operador autoadjunto

Un operador lineal $T : \mathrm{dom}\, T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es *autoadjunto* si $T^{*} = T$, es decir, si $\mathrm{dom}\, T^{*} = \mathrm{dom}\, T$ y $T^{*}\xi = T\xi$ para todo $\xi \in \mathrm{dom}\, T$.

Un operador lineal acotado $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ es *unitario* si es inyectiva, $\mathrm{img}\, U = \mathcal{H}_2$ y $U^{*} = U^{-1}$.

Observación 4.1.2. De las definiciones de operadores autoadjunto y unitario se puede observar lo siguiente:

1. Si T es autoadjunto (simétrico), entonces $\langle T\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $\xi \in \mathrm{dom}\, T$. En efecto, si T es simétrico, entonces

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, T\eta\rangle , \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

luego para $\xi = \eta$, $\langle T\xi, \xi\rangle = \langle \xi, T\xi\rangle = \overline{\langle T\xi, \xi\rangle}$. Por tanto $\langle T\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

2. Note que $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ es unitario si, y solo si $\langle U\xi, U\eta\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \xi, U^{*}U\eta\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \xi, \eta\rangle_{\mathcal{H}_1}$, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}_1$ y $\mathrm{img} = \mathcal{H}_2$; en particular operadores unitarios son isometrías (y así $\|U\| = 1$) y U^{-1} es también unitario. Los operadores unitarios son los isomorfismos en espacios de Hilbert.

Si existe un operador unitario $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, entonces los espacios $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son dichos *unitariamente equivalentes*, En el caso, de dos operadores $T_j : \operatorname{dom} T_j \subset \mathcal{H}_j \to H_j$, $j = 1, 2$ son *unitariamente equivalentes* si $\operatorname{dom} T_2 := U\operatorname{dom} T_1$ y $T_2 = UT_1U^*$.

Observación 4.1.3. Si T_1 y T_2 son operadores unitariamente equivalentes y si T_1 es autoadjunto, entonces T_2 es autoadajunto.

Proposición 4.1.2. *Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto, entonces*

$$\|T\| = \sup_{\|\xi\|=1} \langle T\xi, \xi\rangle .$$

Demostración. Sea $k = \sup_{\|\xi\|} \langle T\xi, \xi\rangle$. Así, $|\langle T\xi, \xi\rangle| \leq \|T\xi\|\|\xi\| \leq \|T\|\|\xi\|^2$ y luego $k \leq \|T\|$. Desde que $\langle T\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$, T es simétrico y usando la ley del paralelogramo, se tiene

$$\begin{aligned}
4|\mathrm{Re}\ \langle T\xi, \eta\rangle| &= 2|\langle T\xi, \eta\rangle + \overline{\langle T\xi, \eta\rangle}| \\
&= |2\langle T\xi, \eta\rangle + 2\langle T\eta, \xi\rangle| \\
&= |\langle T\xi, \xi\rangle + \langle T\xi, \eta\rangle + \langle T\eta, \xi\rangle + \langle T\eta, \eta\rangle \\
&\quad -[\langle T\xi, \xi\rangle - \langle T\xi, \eta\rangle - \langle T\eta, \xi\rangle + \langle T\eta, \eta\rangle]| \\
&= |\langle T(\xi+\eta), \xi+\eta\rangle - \langle T(\xi-\eta), \xi-\eta\rangle| \\
&= \left|\left\langle T\frac{\xi+\eta}{\|\xi+\eta\|}, \frac{\xi+\eta}{\|\xi+\eta\|}\right\rangle \|\xi+\eta\|^2 - \left\langle T\frac{\xi-\eta}{\|\xi-\eta\|}, \frac{\xi-\eta}{\|\xi-\eta\|}\right\rangle \|\xi-\eta\|^2\right| \\
&\leq k\left(\|\xi+\eta\|^2 + \|\xi-\eta\|^2\right) \\
&= 2k\left(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$, se obtiene que $|\mathrm{Re}\ \langle T\xi, \eta\rangle| \leq k$. Si se elige $\eta = T\xi/\|T\xi\|$ se sigue que $\|T\xi\| \leq k$ para todo $\|\xi\| = 1$. Por consiguiente, $\|T\| \leq k$ y así $\|T\| = k$. □

Observación 4.1.4. 1. Si $S \subset T$, entonces $T^* \subset S^*$. En efecto, si $\eta \in \operatorname{dom} T^*$, luego $\langle \eta, T\xi\rangle = \langle T^*\eta, \xi\rangle, \forall \xi \in \operatorname{dom} T$. En particular, desde que $S \subset T$, se tiene $\langle \eta, S\xi\rangle = \langle T^*\eta, \xi, \rangle, \forall \xi \in \operatorname{dom} S$. Por lo tanto, $\eta \in \operatorname{dom} S^*$ y $S^*\xi = T^*\xi$.

2. Todo operador autoadjunto no tiene extensiones hermitianas propias. En efecto, Sea T un operador autoadjunto y S una extension hermitana es decir $T \subset S$, entonces $S \subset S^*$ y $S^* \subset T^* = T$, así que $S \subset T$. Por lo tanto, $S = T$.

Lema 4.1.1. *$\mathcal{G}(T^*) = (J\mathcal{G}(T))^\perp$ in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, con $J(\xi, \eta) = (-\eta, \xi)$ un operador unitario.*

Demostración. Por las siguientes relaciones equivalentes

$$
\begin{aligned}
(\eta, \phi) \in \mathcal{G}(T^*) \quad &\Leftrightarrow \quad \langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \phi \rangle\,, \quad \forall \xi \in \operatorname{dom} T \\
&\Leftrightarrow \quad \langle -T\xi, \eta \rangle + \langle \xi, \phi \rangle = 0, \quad \forall \xi \in \operatorname{dom} T, \\
&\Leftrightarrow \quad \langle (-T\xi, \xi), (\eta, \phi) \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0, \quad \forall \xi \in \operatorname{dom} T \\
&\Leftrightarrow \quad \langle J(\xi, T\xi), (\eta, \phi) \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0, \quad \forall \xi \in \operatorname{dom} T \\
&\Leftrightarrow \quad (\eta, \phi) \in (J\mathcal{G}(T))^\perp
\end{aligned}
$$

sigue la afirmación. □

Note que, el Lema 4.1.1 muestra que el adjunto de un operador es un operador cerrado.

Observación 4.1.5. Para un operador densamente definido $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se tiene $N(T^*) = (\text{img }(T))^\perp$. En efecto, si $\eta \in N(T^*)$ entonces $T^*\eta = 0$, así que $\langle \eta, T\xi \rangle = \langle T^*\eta, \xi \rangle = 0$ para todo $\xi \in \operatorname{dom} T$. Por lo tanto $\eta \in (\text{img }(T))^\perp$. Por otro lado, si $\eta \in (\text{img }(T))^\perp$, luego $\langle \eta, T\xi \rangle = 0$ para todo $\xi \in \operatorname{dom} T$, desde que se puede escribir que $\langle \eta, T\xi \rangle = \langle 0, \xi \rangle$ para todo $\xi \in \operatorname{dom} T$ entonces por la definición de operador adjunto $\eta \in \operatorname{dom} T^*$ y $T^*\eta = 0$. Así $\eta \in N(T^*)$, con esto se termina la demostración de la observación.

Lema 4.1.2. *Sea T densamente definido en $\mathcal{H}$. Si $\text{img}\, T$ es denso en $\mathcal{H}$ y T es inyectivo, entonces T^* es inyectivo y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. En particular, si T es autoadjunto y existe T^{-1}, entonces T^{-1} es también autoadjunto (Remarcamos que $\overline{\text{img}\, T} = \mathcal{H}$, desde que $\mathcal{H} = N(T) \oplus \overline{\text{img}\, T}$, si T^{-1} existe y $N(T) = \{0\}$).*

Demostración. De la observación anterior se tiene $N(T^*) = (\text{img}\, T)^\perp$ y como $\text{img}\, T$ es denso entonces $N(T^*) = \{0\}$ y así T^* es inyectivo. Desde que $\mathcal{G}(T^*) = (J\mathcal{G}(T))^\perp$ y

$\mathcal{G}(T^{-1}) = W\mathcal{G}(\mathcal{T})$, con $W(\xi,\eta) = (\eta,\xi)$, el cual es unitario y $W^{-1} = W$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{G}((T^{-1})^*) &= (J\mathcal{G}(-1))^{\perp} = (JW\mathcal{G}(T))^{\perp}\\ &= W(J\mathcal{G}(T))^{\perp} = W\mathcal{G}(T^*) = \mathcal{G}((T^*)^{-1}),\end{aligned}$$

así que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. $\square$

Ejemplos de operadores autoadjuntos

En esta sección se presentan algunos ejemplos clásico de operadores autoadjuntos, debido a que demostrar que un cierto operador es autoadjunto, es una tarea complicada, en muchos casos se requiere conocimiento de herramientas mas avanzadas de la teoría de operadores; tales como por ejemplo Transformada de Cayley y Fourier. Por este motivo aquí presentamos algunos ejemplos de operadores autoadjuntos sin demostración. Sin embargo, en cada una de ellas se comenta una idea de la demostración y/o se indica alguna referencia donde se pueda encontrar más información y detalles de la demostración.

Ejemplo 4.1.1. Si $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un operador lineal y simétrico, es decir,

$$\langle T\xi,\eta\rangle = \langle \xi, T\eta\rangle, \quad \forall \xi,\eta \in \mathcal{H}.$$

Entonces, de la definición de adjunto de un operador se sigue inmediatamente que T es autoadjunto. Además, por el Teorema de Gráfico Cerrado (véase, [5]) se tiene que $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$.

Ejemplo 4.1.2. Del ejemplo anterior se sigue que el operador multiplicación $\mathcal{M}_\phi$ definido en el Ejemplo 2.2.13 es auto adjunto si y solo si ϕ es un función real.

En el siguiente ejemplo se define el operador multiplicación de una forma mas general.

Ejemplo 4.1.3. Sea $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ una función medible, se define el operador multiplicación por φ como el operador lineal

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} \mathcal{M}_\varphi &:= \{\psi \in L^2_\mu(\Omega) : (\varphi\psi) \in L^2_\mu(\Omega)\}, \\ (\mathcal{M}_\varphi \psi)(x) &:= \varphi(x)\psi(x). \quad \psi \in \operatorname{dom} \mathcal{M}_\varphi. \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.3.24 de [5] se sigue que $\operatorname{dom} \mathcal{M}_\varphi$ es denso en $L^2_\mu(\Omega)$ y $\mathcal{M}^*_\varphi = \mathcal{M}_{\overline{\varphi}}$, luego $\mathcal{M}_\varphi$ es autoadjunto si φ es una función real.

Ejemplo 4.1.4. [Operador momento en $\mathbb{R}$] Sea $\operatorname{dom} P = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}) \sqsubseteq \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$,

$$(P\psi)(x) := -i\psi'(x), \quad \psi \in \operatorname{dom} P.$$

Por la Sección 3.3 de [5] P es autoadjunto.

Ejemplo 4.1.5. [Operador de energía de un partícula libre en $\mathbb{R}$] Sea $\operatorname{dom} H = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}) \sqsubseteq L^2(\mathbb{R})$,

$$(H\psi)(x) = -\psi''(x), \quad \psi \in \operatorname{dom} H.$$

Usando la transformada de Fourier se demuestra que H es unitariamente equivalente a un operador mutiplicación por una función real (véase, Sección 3.4 de [5]). Por lo tanto H es autoadjunto.

El operador energía se puede generalizar para dimensiones mayores como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1.6. Sea $\operatorname{dom} T = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n), \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ Se define el operador lineal, también llamado *operador Laplaciano*,

$$(T\psi)(x) := -(\Delta\psi)(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}, \quad \psi \in \operatorname{dom} T,$$

T es autoadjunto (véase, [5] para mas información).

4.1.2. Formas sesquilineales

En esta sección se define y estudia las propiedades de formas sesquilineales, también se presentan ejemplos de formas.

Sea $\mathrm{dom}\, b$ un subespacio denso de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Una *forma sesquilineal* en $\mathcal{H}$ es una aplicación

$$b: \ \mathrm{dom}\, b \times \mathrm{dom}\, b \to \mathbb{C}$$

que es lineal en la segunda variable y antilineal en la primera. En algunas situaciones denotamos $\mathrm{dom}\, b \times \mathrm{dom}\, b$ simplemente por $\mathrm{dom}\, b$. Decimos que b es *hermitiana* si $b(\phi, \psi) = \overline{b(\psi, \phi)}$, $\forall \phi, \psi \in \mathrm{dom}\, b$. La aplicación $\psi \mapsto b(\psi) := b(\psi, \psi)$ es llamada de *forma cuadrática* asociada a b.

Para cada $\phi, \psi \in \mathrm{dom}\, b$, se verifica

$$4\, b(\phi, \psi) = b(\phi + \psi) - b(\phi - \psi) - ib(\phi + i\psi) + ib(\phi - i\psi), \tag{IV.3}$$

llamada *identidad de polarización* para formas sesquilineales; esta identidad permite recuperar la forma sesquilineal a partir de su forma cuadrática asociada. Usando la identidad de polarización se puede demostrar que b es hermitiana si, y solamente si, su forma cuadrática asociada es real.

Una forma sesquilineal b es *Acotada* si su norma

$$\|b\| := \sup_{\substack{0 \neq \phi \in \mathrm{dom}\, b \\ 0 \neq \psi \in \mathrm{dom}\, b}} \frac{|b(\phi, \psi)|}{\|\phi\| \|\psi\|}$$

es finita, es decir, $\|b\| < \infty$.

Un ejemplo simple de forma sesquilineal acotada es el producto interno en un espacio de Hilbert, cuya norma es igual a 1.

4.1.3. Operadores via formas sesquilineales

Este sección es dedicada a la demostración del resultado principal de este trabajo de investigación, el cual relaciona las formas sesquilineales hermitianas cerradas y limitadas inferiormente con operadores autoadjuntos. En esta sección definimos también el concepto de operador asociado a una forma sesquilinal. Al final de la sección se presentan algunos ejemplos de aplicación.

Primeramente, empezamos con el siguiente resultado que es la estructura de formas sesquilineales acotadas.

Proposición 4.1.3. *Si $b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal acotada, entonces existe un único operador acotado $T_b : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que*

$$b(\phi, \psi) = (\phi, T_b\psi), \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}.$$

Además, $\|T_b\| = \|b\|$ y si b es hermitiana, entonces T_b es autoadjunto.

Demostración. Para cada $\phi \in \mathcal{H}$ el funcional $f_\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $f_\phi(\psi) := b(\phi, \psi)$ es lineal y desde que

$$|f_\phi(\psi)| \leq |b(\phi, \psi)| \leq \|b\|\|\phi\|\|\psi\|,$$

luego $\|f_\phi\| \leq \|b\|\|\phi\|$ y $f_\phi \in \mathcal{H}^*$ (el dual de $\mathcal{H}$).

Por el Teorema de Representación de Riesz existe un único $\eta \in \mathcal{H}$ con $f_\phi(\psi) = \langle \eta, \psi \rangle$, para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Defina $T_b : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $T_b\phi := \eta$, para lo cual $b(\phi, \psi) = \langle \eta, \psi \rangle$, para todo $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ y T_b es lineal. Note que $T_b = 0$ si, y solo si, b es nulo (por definición).

Así, si $b \neq 0$,

$$\begin{aligned}\|T_b\| &= \sup_{\substack{\phi\neq 0\\ T_b\phi\neq 0}} \frac{\|T_b\phi\|}{\|\phi\|} = \sup_{\substack{\phi\neq 0\\ T_b\phi\neq 0}} \frac{|\langle T_b\phi, T_b\phi\rangle|}{\|\phi\|\|T_b\phi\|} \leq \|b\| \\ &= \sup_{\substack{\phi\neq 0\\ \psi\neq 0}} \frac{|\langle T_b\phi, \psi\rangle|}{\|\phi\|\|\psi\|} \leq \sup_{\substack{\phi\neq 0\\ \psi\neq 0}} \frac{\|T_b\phi\|\|\psi\|}{\|\phi\|\|\psi\|} = \|T_b\|,\end{aligned}$$

esto muestra que $T_b \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ y $\|T\| = \|b\|$. La unicidad del operador sigue de la relación $\langle T_b\phi, \psi \rangle = \langle S\phi, \psi \rangle$, para cualquier ϕ, ψ, consecuentemente los operadores S y T_b

coinciden.

Ahora si tal b es hermitiana entonces $\langle T_b\xi, \eta\rangle = b(\xi, \eta) = \overline{b(\eta, \xi)} = \overline{\langle T_b\eta, \xi\rangle} = \langle \xi, T_b\eta\rangle$, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ y por lo tanto T_b es autoadjunto. $\square$

De acuerdo con la Proposición 4.1.3, existe un correspondencia biunívoca entre formas sesquilineales acotadas (hermitianas) en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ y operadores lineales acotados (y autoadjuntos) en $\mathcal{H}$. Observe que si la forma sesquilineal b es dada por el producto interno en $\mathcal{H}$, entonces de la Proposición 4.1.3 sigue que T_b es el operador identidad, es decir, $T_b = \mathbf{1}$.

El operador T_b es llamado *operador asociado* a la forma sesquilineal b.

El objetivo principal de este trabajo de investigación es demostrar un resultado similar a la Proposición 4.1.3 para formas sesquilineales hermitianas no acotadas; así conseguir un operador autoadjunto no acotado asociado a una forma sesquilineal. Antes de comenzar con esta cuestión es necesario presentar algunas definiciones.

Sea b una forma sesquilineal hermitiana. Se dice que

(1) b es *positiva* si su forma cuadrática asociada es positiva, es decir, $b(\xi) \geq 0$, $\forall \xi \in \operatorname{dom} b$.

(2) b es *acotada inferiormente* se existe $\beta \in \mathbb{R}$ de forma que $b(\xi) \geq \beta\|\xi\|^2$, $\forall \xi \in \operatorname{dom} b$. En este caso, se denota $b \geq \beta$ y β es llamado *cota inferior* de b. Observe que $b - \beta$ define una forma sesquilineal positiva dada por $(b-\beta)(\xi, \eta) := b(\xi, \eta) - \beta(\xi, \eta)$.

Observación 4.1.6. Si b es una forma sesquilineal positiva, entonces se verifican la desigualdades de Cauchy-Schwarz y triangular

$$|b(\xi, \eta)| \leq b(\xi)^{\frac{1}{2}} b(\eta)^{\frac{1}{2}}, \quad b(\xi+\eta)^{\frac{1}{2}} \leq b(\xi)^{\frac{1}{2}} + b(\eta)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \xi, \eta \in \operatorname{dom} b, \tag{IV.4}$$

respectivamente.

La demostración de la observación anterior es similar a las demostraciones de las desigualdades de Cauchy-Schwarz y triangular para un producto interno.

Si b es una forma sesquilineal hermitiana y $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{dom} b$.

(3) Se dice que $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *secuencia de Cauchy con respecto* a b (o en $(\operatorname{dom} b, b)$) si $b(\psi_n - \psi_m) \to 0$, cuando $m, n \to \infty$.

(4) $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* ψ *con respecto a* b (o en $(\operatorname{dom} b, b)$) si $\psi \in \operatorname{dom} b$ y $b(\psi_n - \psi) \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Una forma sesquilineal b es *cerrada* si para cada secuencia de Cauchy $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\operatorname{dom} b, b)$, con $\psi_n \to \psi$ en $\mathcal{H}$, se tiene $\psi \in \operatorname{dom} b$ y $b(\psi_n - \psi) \to 0$. b es *cerrable* si tiene una extensión cerrada en $\mathcal{H}$.

Sea β una cota inferior de la forma sesquilineal b ($b \geq \beta$). Se define en $\operatorname{dom} b$ el siguiente producto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle_+ := b(\phi, \psi) + (1 - \beta) \langle \phi, \psi \rangle ,$$

y se tiene $\langle \psi, \psi \rangle_+ = b(\psi, \psi) - \beta\|\psi\|^2 + \|\psi\|^2 \geq \|\psi\|^2$. Así $\|\psi\|_+ := \sqrt{(\psi, \psi)_+}$ es una norma tal que $\|\psi\|_+ \geq \|\psi\|$.

Lema 4.1.3. *Sea b una forma sesquilineal hermitiana y acotada inferiormente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $(\operatorname{dom} b, \|\cdot\|_+)$ *es un espacio de Hilbert.*

(ii) b *es cerrada.*

Demostración. (i)$\Rightarrow$ (ii) Supongamos que $(\operatorname{dom} b, \|\cdot\|_+)$ es un espacio de Hilbert. Sea $\{\xi_n\} \subset \operatorname{dom} b$, $\xi_n \to \xi$ en $\mathcal{H}$ y $b(\xi_n - \xi_m) \to 0$. En estas condiciones,

$$\|\xi_n - \xi_m\|_+^2 = b(\xi_n - \xi_m) + (1 - \beta)\|\xi_n - \xi_m\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Por lo tanto, $\{\xi_n\}$ es una secuencia de Cauchy en $(\mathrm{dom}\, b, \|\cdot\|_+)$. Luego, $\xi \in \mathrm{dom}\, b$ y $\|\xi_n - \xi\|_+^2 \to 0$. Consecuentemente, $b(\xi_n - \xi) \to 0$.

(ii)⇒(i) Supongamos que b es una forma cerrada. Sea $\{\xi_n\}$ una secuencia de Cauchy en $(\mathrm{dom}\, b, \|\cdot\|_+)$. Por lo tanto, ξ_n es una secuencia de Cauchy en $\mathcal{H}$ y en $(\mathrm{dom}\, b, b)$. Sea $\xi := \lim_{n\to\infty} \xi_n$ en $\mathcal{H}$. Como b es cerrada, se sigue que $\xi \in \mathrm{dom}\, b$ y $b(\xi_n - \xi) \to 0$. Luego, $\|\xi_n - \xi\|_+^2 \to 0$. □

Ejemplo 4.1.7. Para un operador densamente definido $T : \mathrm{dom}\, T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se puede introducir dos formas sesquilineales hermitianas b y $\tilde{b}$, con $\mathrm{dom}\, b = \mathrm{dom}\, \tilde{b} = \mathrm{dom}\, T$,

$$b(\xi, \eta) = \langle T\xi, T\eta\rangle \,, \quad \text{y}$$

$$\tilde{b}(\xi, \eta) = \langle T\xi, T\eta\rangle + \langle \xi, \eta\rangle \,.$$

Desde que $\tilde{b}(\xi, \xi) = \|\xi\|^2 = \|\xi\|^2 + \|T\xi\|^2$, es decir, es el cuadrado de la norma de la gráfica de T, $\tilde{b}$ es cerrada si, y solo si, T es cerrado. También se tiene que $b \geq 1$.

Note que $\tilde{b}(\xi, \eta) = b(\xi, \eta) + \langle \xi, \eta\rangle$; esto fue una motivación para la introducción del producto interno $\langle \xi, \eta\rangle_+$.

Ejemplo 4.1.8. Sea $T : \mathrm{dom}\, T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador hermitiano. Defina la forma sesquilineal b^T dado por

$$b^T(\xi, \eta) := (\xi, T\eta), \quad \mathrm{dom}\, b^T := \mathrm{dom}\, T.$$

b^T es hermitiana y b^T é acotada inferiormente si, y solamente si, T es acotado inferiormente. Como b^T es fácilmente extensible para cualquier $\xi \in \mathcal{H}$ y $\eta \in \mathrm{dom}\, T$, b^T tiene una ventaja potencial sobre las formas presentadas en el Ejemplo 4.1.7 cuando se busca extensiones del operator T.

Si $T : \mathrm{dom}\, T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un operador hermitiano, la forma b^T introducido en el Ejemplo 4.1.8 es llamado *forma sesquilineal generada* por T.

Ejemplo 4.1.9. Sean $\mathcal{H} = L^2(0,1)$ y $\operatorname{dom} b := \{\psi \in \mathcal{H}^1[0,1], \psi(0) = \psi(1)\}$, considere la forma cuadrática

$$b(\psi) = \int_0^1 |\psi'(x)|^2 \mathrm{d}x, \quad \psi \in \operatorname{dom} b.$$

b es positiva y b es cerrada. En efecto, es claro que $b \geq 0$ y desde que $C_0^\infty(0,1) \subset \operatorname{dom} b$ y $C_0^\infty(0,1)$ es denso en $L^2(0,1)$. Por lo tanto, b es densamente definida (hermitiana). Por otro lado, sea $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{dom} b$, de forma que $b(\psi_m - \psi_n) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$ y $\psi_n \to \psi$ en $\mathcal{H}$, entonces

$$|||\psi_n - \psi_m|||^2 = \int_0^1 |\psi_n'(x) - \psi_n'(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 |\psi_n(x) - \psi_m(x)|^2 \mathrm{d}x \to 0$$

cuando $n, m \to \infty$, es decir, que $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de Cauchy en $\mathcal{H}^1[0,1]$, desde que $\mathcal{H}^1[0,1]$ es completo existe un $v \in \mathcal{H}^1[0,1]$ tal que $\psi_n \to v$, luego por unicidad de limite en $L^2[0,1]$, $v = \psi$ y $\psi_n' \to v'$ en $L^2[0,1]$. Para cada $s \in [0,1]$ aplicando desigualdad de Holder se tiene

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^s \left(\psi_n'(x) - v'(x)\right) \mathrm{d}x \right| &\leq \int_0^s |\psi_n'(x) - v'(x)| \mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 |\psi_n'(x) - v'(x)| \mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_0^1 |\psi_n'(x) - v'(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \to 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^s \psi_n'(x) \mathrm{d}x = \int_0^s v'(x) \mathrm{d}x. \tag{IV.5}$$

Ahora, desde que $\psi_n \to \psi$ en $L^2[0,1]$, $\psi_n(s) \to \psi(s)$ para todo $s \in \omega \subset [0,1]$ con $|\omega^C| = 0$ ($|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue), si $s \in \omega$ y asumiendo que $0 \in \omega$ por el Teorema Fundamental del cálculo

$$\psi_n(s) = \psi_n(0) + \int_0^s \psi_n'(x) \mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

aplicando limite se tiene

$$\psi(s) = \psi(0) + \int_0^s v'(x)\mathrm{d}x, \quad \forall s \in \omega.$$

Por lo tanto, $\psi' = v'$ $c.t.p.$ y $\psi \in \mathcal{H}^1[0,1]$

Desde que $\psi_n \in \operatorname{dom} b$ por el Teorema Fundamental del cálculo y aplicando limite

$$0 = \lim_{n\to\infty}(\psi_n(1) - \psi_n(0)) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \psi_n'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 v'(x)\mathrm{d}x,$$

como $v = \psi \in \mathcal{H}^1[0,1]$, también por el Teorema Fundamental de cálculo se tiene

$$0 = \psi(1) - \psi(0),$$

Por lo tanto, $\psi \in \operatorname{dom} b$ y b es cerrada.

En el siguiente ejemplo se presenta una forma sesquilinear que no es cerrada.

Ejemplo 4.1.10. Sea $\operatorname{dom} b_\delta = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ y considere b_δ con la acción

$$b_\delta(\psi,\phi) := \overline{\psi(0)}\phi(0), \quad \psi,\phi \in \operatorname{dom} b_\delta.$$

Esta forma es hermitiana y positiva, pero no es cerrada. En efecto, la secuencia $\psi_n(x) = e^{-nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$ está contenido en $\operatorname{dom} b_\delta$, $b_\delta(\psi_n - \phi_m) = |\psi_n(0) - \psi_m(0)|^2 = |1-1|^2 = 0$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ (así ψ_n es un secuencia de Cauchy con respecto a b_δ) y converge a cero en $\mathcal{H}$. Sin embargo, $b_\delta(\psi_n) \to 1$ y $b_\delta(0,0) = 0$. Por lo tanto, una forma hermitiana (acotada inferiormente) no necesariamente es cerrada.

Operadores asociados a formas cuadráticas

Como una motivación para esta sección se observa lo siguiente. Dado un operador densamente definido T, la forma sesquilineal $\tilde{b}$ con $\operatorname{dom}\tilde{b} = \operatorname{dom} T$, $\tilde{b}(\xi,\eta) := \langle T\xi, T\eta\rangle + \langle \xi,\eta\rangle$, satisface $\tilde{b}(\xi,\xi) \geq \|\xi\|^2$, $\forall \xi \in \operatorname{dom}\tilde{b}$, y $\tilde{b}$ es cerrado si, y solo si, T es cerrado. Ahora si $\eta \in \text{dom}\,(T^*T)$, entonces

$$\tilde{b}(\xi,\eta) = \langle \xi, (T^*T + \mathbf{1})\eta\rangle \,, \quad \forall \xi \in \text{dom}\,\tilde{b}$$

y sobre la base del Ejemplo 4.1.8 y La proposición 4.1.3, se puede intentar vincular el operador $T^*T + 1$ a $\tilde{b}$. Con esta motivación en mente, se tiene el principal teorema de este trabao de investigación, el cual asegura que las formas sesquilineales cerradas y acotadas inferiormente están relacionados con los operadores autoadjuntos acotados inferiormente.

Sea b una forma sesquilineal hermitiana. El operador T_b asociado a b es definido por

$$\begin{aligned} \text{dom}\,T_b &:= \{\xi \in \text{dom}\,b : \exists \zeta \in \mathcal{H}, \text{ tal que}\, b(\eta,\xi) = \langle \eta, \zeta\rangle \,, \forall \eta \in \text{dom}\,b\}, \\ T_b\xi &:= \zeta, \quad \xi \in \text{dom}\,T_b. \end{aligned}$$

En estas condiciones, $b(\eta,\xi) = (\eta, T_b\xi), \forall \eta \in \text{dom}\,b, \forall \xi \in \text{dom}\,T_b$. Observe que T_b esta bien definido desde que $\text{dom}\,b \sqsubseteq \mathcal{H}$. Además de eso, como b es hermitiana, entonces para $\xi, \eta \in \text{dom}\,T_b$,

$$\langle \eta, T_b\xi\rangle = b(\eta,\xi) = \overline{b(\xi,\eta)} = \overline{\langle \xi, T\eta\rangle} = \langle T_b\eta, \xi\rangle \,.$$

Por lo tanto T_b es simétrico. Además, en el caso de una forma sesquilineal b acotada, el operador T_b definido arriba coincide con el operador obtenido en la Proposición 4.1.3.

El siguiente resultado es también conocido como una representación de formas sesquilineales.

Teorema 4.1.1. *Sea* $\text{dom}\,b \sqsubseteq \mathcal{H}$ *e* b *una forma sesquilineal hermitiana, cerrada y acotada inferiormente por* $\beta \in \mathbb{R}$ *(es decir,* $b \geq \beta$*). Entonces, el operador* T_b *es el único operador autoadjunto con* $\text{dom}\,T_b \subset \text{dom}\,b$ *y de forma que*

$$b(\eta,\xi) = \langle \eta, T_b\xi\rangle \,, \quad \forall \eta \in \text{dom}\,b, \, \forall \xi \in \text{dom}\,T_b. \tag{IV.6}$$

Además, $T_b \geq \beta$ *y* $\text{dom}\, T_b$ *es denso en* $\text{dom}\, b$ *con la norma* $\| \cdot \|_+$.

Demostración. Defina $\mathcal{H}_b := (\text{dom}\, b, \| \cdot \|_+)$ el cual es un espacio de Hilbert por Lema 4.1.3. Como ya se observó, T_b es simétrico y

$$\langle \xi, T_b \xi \rangle = b(\xi, \xi) \geq \beta \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \text{dom}\, T_b \subset \text{dom}\, b,$$

es decir, $T_b \geq \beta$.

Antes de continuar con la demostración, destacamos que, para cada $\eta \in \mathcal{H}_b$, tenemos la desigualdad $\|\eta\|_+^2 = (b(\eta) - \beta\|\eta\|^2) + \|\eta\|^2 \geq \|\eta\|^2$.

Para cada $\phi \in \mathcal{H}$, defina el funcional lineal $f_\phi : \mathcal{H}_b \to \mathbb{C}$ dada por $f_\phi(\eta) := \langle \phi, \eta \rangle$. Observe que

$$|f_\phi(\eta)| = |\, \langle \phi, \eta \rangle \,| \leq \|\phi\| \, \|\eta\| \leq \|\phi\| \|\eta\|_+, \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_b.$$

Esto muestra que f_ϕ es acotada. Por el Teorema de Representación de Riesz, existe $\phi_b \in \mathcal{H}_b$ de forma que

$$f_\phi(\eta) = \langle \phi, \eta \rangle = \langle \phi_b, \eta \rangle_+ , \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_b,$$

y $\|f_\phi\| = \|\phi_b\|_+$.

Defina la aplicación lineal $M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_b$ por $M\phi := \phi_b$. Inicialmente, observe que

$$\|M\phi\|_+ = \|\phi_b\|_+ = \|f_\phi\| \leq \|\phi\|, \quad \forall \phi \in \mathcal{H},$$

el cual demuestra que M es acotado.

Si $M\phi = 0$, entonces $\langle \phi, \eta \rangle = 0$, $\forall \eta \in \mathcal{H}_b$. Como $\text{dom}\, b$ es denso en $\mathcal{H}$, se sigue que $\phi = 0$. Por lo tanto, M es invertible y para $M^{-1} : \text{dom}\, M^{-1} = \text{img}\, M \to \mathcal{H}$ se puede escribir $M^{-1}\phi_b = \phi$ (observe que $\text{img}\, M^{-1} = \mathcal{H}$).

Ahora, verificamos que el subespacio $\text{img}\, M$ es denso en $\mathcal{H}$. De fato, como $\text{img}\, M \subset$

$\text{dom } b$ y $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_+$, es suficiente demostrar que $\text{img } M$ es denso en $\mathcal{H}_b$. Para esto tomamos $\eta \in \mathcal{H}_b$ de forma que $\langle M\xi, \eta\rangle_+ = 0$, $\forall \xi \in \mathcal{H}$. de aquí se tiene que,

$$0 = \langle M\xi, \eta\rangle_+ = \langle \xi_b, \eta\rangle_+ = \langle \xi, \eta\rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{H},$$

el cual implica que $\eta = 0$. Esto demuestra la densidad.

Por otro lado, M^{-1} esta directamente relacionado con T_b. De fato, se $\xi_b \in \text{dom } M^{-1}$,

$$\left\langle \eta, M^{-1}\xi_b \right\rangle = \langle \eta, \xi\rangle = \langle \eta, \xi_b\rangle_+ = b(\eta, \xi_b) + (1-\beta)\langle \eta, \xi_b\rangle, \quad \forall \eta \in \text{dom } b,$$

es decir,

$$b(\eta, \xi_b) = \left\langle \eta, M^{-1}\xi_b \right\rangle - (1-\beta)\langle \eta, \xi_b\rangle = \langle \eta, Q\xi_b\rangle, \quad \forall \eta \in \text{dom } b,$$

donde $Q := M^{-1} - (1-\beta)\mathbf{1}$, $\text{dom } Q = \text{dom } M^{-1}$. Así que, $\xi_b \in \text{dom } T_b$ y $T_b\xi_b = Q\xi_b$. Se concluye que $Q \subset T_b$. Esa relación también muestra que T_b es densamente definido ($\text{dom } Q = \text{img } M \sqsubseteq \mathcal{H}$). Por lo tanto, T_b es hermitiano y consecuentemente, Q también lo es.

Notando que $M^{-1} = Q + (1-\beta)\mathbf{1}$, se observa que M^{-1} es hermitiano. Ahora, para $\eta, \phi \in \mathcal{H}$,

$$\langle M\phi, \eta\rangle = \left\langle \phi_b, M^{-1}\eta_b \right\rangle = \left\langle M^{-1}\phi_b, \eta_b \right\rangle = \langle \phi, M\eta\rangle,$$

esto muestra que M también es hermitiano; desde que M es acotada, efectivamente M es autoadjunto. Por Lema 4.1.2 M^{-1} es autoadjunto y por lo tanto Q es autoadjunto. Finalmente, como Q no posee extensiones hermitianas propias, se sigue que $Q = T_b$ y T_b es autoadjunto.

Para la unicidad, supongamos que S sea otro operador autoadjunto con $\text{dom } S \subset \text{dom } b$ y

$$b(\eta, \xi) = \langle \eta, S\xi\rangle \quad \forall \eta \in \text{dom } b, \forall \xi \in \text{dom } S.$$

Por la definición de T_b , $\xi \in \operatorname{dom} T_b$ y $T_b\xi = S\xi$. Así que, $S \subset T_b$. Como T y S son autoadjuntos se sigue que $S = T_b$. □

El operador T_b del teorema anterior es llamado *operador autoadjunto asociado* a b.

Note que el Teorema 4.1.1 generaliza el resultado obtenida en la Proposición 4.1.3 para formas sesquilineales acotadas.

A continuación se estudia el caso en que una forma sesquilineal no es cerrada. Si $b \geq \beta$, el completamiento abstracto del espacio con producto interno $(\operatorname{dom} b, \langle\cdot,\cdot\rangle_+)$ es denotado por $(\mathcal{H}_+, b_+)$.

Considere un forma sesquilineal acotada inferiormente $b \geq \beta$. b_+ definida anteriormente es *compatible* con $\mathcal{H}$ si $\mathcal{H}_+$ puede ser identificado con un subespacio vectorial de $\mathcal{H}$ y la inclusión (lineal) $j : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}$ es continuo.

Lema 4.1.4. *Si b_+ es compatible con $\mathcal{H}$, entonces la inclusión $j : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}$ puede ser tomado como la inclusión $j(\xi) = \xi, \forall\xi \in \mathcal{H}_+$, con $\|j\| \leq 1$.*

Demostración. La inclusión natural $\hat{j} : (\operatorname{dom} b, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to \mathcal{H}$, $\hat{j}(\xi) = \xi$ es lineal y satisface

$$\|\xi\|^2 = \|\hat{j}(\xi)\|^2 \leq \langle\xi,\xi\rangle_+ = b_+(\xi,\xi), \tag{IV.7}$$

y entonces es continuo con $\|\hat{j}\| \leq 1$. Desde que b_+ es compatible con $\mathcal{H}$, $\hat{j}$ tiene una única extensión lineal $j : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}$, con $\|j\| \leq 1$.

Si $\xi \in \mathcal{H}_+$, existe una secuencia $(\xi_k) \subset \operatorname{dom} b$ con $\xi_k \to \xi$ en $\mathcal{H}_+$; la desigualdad (IV.7) implica que $\xi_k \to \xi$ en $\mathcal{H}$. Así,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{k\to\infty} j(\xi_k - \xi) &= \lim_{k\to\infty} j(\xi_k) - j(\xi) \\ &= \lim_{k\to\infty} \xi_k - j(\xi) = \xi - j(\xi). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $j(\xi) = \xi$ y j es claramente inyectivo. □

Ejemplo 4.1.11. Sea $T : \mathrm{dom}\, T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal hermitiano y acotado inferiormente con cota inferior $\beta \in \mathbb{R}$, es decir, $T \geq \beta$. Considere la forma b^T generado por T, el producto interno

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta \rangle_+ &= b^T(\xi, \eta) + (1-\beta)\langle \xi, \eta \rangle \\ &= \langle \xi, (T-\beta\mathbf{1})\eta \rangle + \langle \xi, \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in \mathrm{dom}\, T, \end{aligned}$$

denote por $(\mathcal{H}_+^T, b_+^T)$ el completamiento de espacio con producto interno $(\mathrm{dom}\, T, \langle \cdot, \cdot \rangle_+)$. El objetivo ahora es demostrar que b_+^T es compatible con $\mathcal{H}$; consecuentemente b^T es cerrable, es decir, b^T tiene una extensión cerrada.

La inclusión natural $\hat{j} : (\mathrm{dom}\, T, \langle \cdot, \cdot \rangle_+) \to \mathcal{H}$, $\hat{j}(\xi) = \xi$, satisface

$$\|\hat{j}(\xi)\|^2 = \|\xi\|^2 \leq \|\xi\|^2 + \langle \xi, (T-\beta\mathbf{1})\xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle_+ ,$$

y entonces $\hat{j}$ es continuo con $\|\hat{j}\| \leq 1$. Así $\hat{j}$ tiene una única extensión lineal $j : \mathcal{H}_+^T \to \mathcal{H}$ y con $\|j\| \leq 1$. Si $j(\xi) = 0$, luego existe una sucesión $(\xi_k) \subset (\mathrm{dom}\, T, \langle \cdot, \cdot \rangle_+)$ con $\xi_k \to \xi$ en $\mathcal{H}_+^T$ y $\xi_k = j(\xi_k) \to 0$ en $\mathcal{H}$. En consecuencia, para cualquier $\eta \in \mathrm{dom}\, T$,

$$\begin{aligned} b_+^T(\eta, \xi) &= \lim_{k\to\infty} b_+^T(\eta, j(\xi_k)) = \lim_{k\to\infty} b_+^T(\eta, \xi_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle \eta, \xi_k \rangle_+ = \lim_{k\to\infty} (\langle \eta, (T-\beta\mathbf{1})\xi_k \rangle + \langle \eta, \xi_k \rangle) \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle [T + (1-\beta)\mathbf{1}]\eta, \xi_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

Desde que $\mathrm{dom}\, T \sqsubseteq \mathcal{H}_+^T$, sigue que $\xi = 0$. Por lo tanto, además $\|j\| \leq 1$, se encontró que j es inyectivo y así es posible considerar $\mathcal{H}_+^T$ como un subespacio vectorial de $\mathcal{H}$, es decir, b_+^T es compatible con $\mathcal{H}$. Finalmente, por el Lema 4.1.4, $j(\xi) = \xi$ para todo $\xi \in \mathcal{H}_+^T$.

Teorema 4.1.2. *Sea b una forma sesquilineal hermitiana con $b \geq \beta$ para algún $\beta \in \mathbb{R}$, denote por $(\mathcal{H}_+, b_+)$ el completamiento de $(\mathrm{dom}\, b, \langle \cdot, \cdot \rangle_+)$ y T_{b_+} el operador autoadjunto asociado con b_+.*

Si b_+ es compatible con $\mathcal{H}$, entonces existe un único operador autoadjunto $\tilde{T}_b$:

dom $\tilde{T} \sqsubseteq \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}$, *con*

$$b(\eta, \xi) = \left\langle \eta, \tilde{T}_b \xi \right\rangle, \quad \forall \eta \in \mathrm{dom}\, b, \forall \xi \in dom \tilde{T}_b \cap \mathrm{dom}\, b.$$

Además, $\tilde{T}_b \geq \beta$*,* dom $\tilde{T}_b =$ dom T_{b_+}*,* $\tilde{T}_b = T_{b_+} - (1-\beta)\mathbf{1}$*,* dom $\tilde{T}_b$ *es denso en* $\mathcal{H}_+$ *y* $\mathcal{H}_+$ *es llamado dominio de la forma de* $\tilde{T}_b$*.*

Demostración. Recuerde que

$$\langle \eta, \xi \rangle_+ = b(\eta, \xi) + (1-\beta)\langle \eta, \xi \rangle, \quad \forall \eta, \xi \in \mathrm{dom}\, b.$$

Así que $\langle \eta, \eta \rangle_+ \geq \|\eta\|^2$, $\forall \eta \in \mathrm{dom}\, b$, y desde que b_+ es compatible con $\mathcal{H}$ se sigue por Lema 4.1.4,

$$b_+(\eta, \eta) \geq \|\eta\|^2, \quad \forall \eta \in \mathrm{dom}\, b_+ = \mathcal{H}_+,$$

esto es $b_+ \geq 1$. Desde que b_+ es cerrada, por Teorema 4.1.1, existe un único operator autoadjuto T_{b_+} con dominio denso en $\mathcal{H}_+$ y

$$b_+(\eta, \xi) = \langle \eta, T_{b_+} \xi \rangle, \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_+, \xi \in \mathrm{dom}\, T_{b_+}.$$

también se sigue que $T_{b_+} \geq 1$.

Ahora defina $\tilde{T}_b := T_{b_+} - (1-\beta)\mathbf{1}$, dom $\tilde{T}_b =$ dom T_{b_+}, que también es autoadjunto y $\tilde{T}_b \geq \beta$. En el caso en que $\eta \in \mathrm{dom}\, b$ y $\xi \in \mathrm{dom}\, b \cap \mathrm{dom}\, T_{b_+}$, se tiene

$$\langle \eta, T_{b_+} \xi \rangle = b_+(\eta, \xi) = \langle \eta, \xi \rangle_+ = b(\eta, \xi) + (1-\beta)\langle \eta, \xi \rangle,$$

y así

$$b(\eta, \xi) = \langle \eta, (T_{b_+} - (1-\beta)\mathbf{1})\xi \rangle = \left\langle \eta, \tilde{T}_b \xi \right\rangle,$$

por tanto $b(\eta, \xi) = \left\langle \eta, \tilde{T}_b \xi \right\rangle$, para todo $\eta \in \mathrm{dom}\, b$, para todo $\xi \in \mathrm{dom}\, \tilde{T}_b \cap \mathrm{dom}\, b$. □

A continuación la unicidad, Suponga que $\tilde{S} : \mathrm{dom}\, \tilde{S} \subset \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}$ es un operador autoadjunto con

$$b(\eta,\xi)=\left\langle \eta,\tilde{S}\xi\right\rangle, \quad \forall\eta\in\text{dom }b,\forall\xi\in\text{dom }\tilde{S}\cap\text{dom }b.$$

Defina $S:=\tilde{S}+(1-\beta)\mathbf{1}$, note que si $\tilde{S}\neq\tilde{T}_b$ se y solamente si $S\neq T_{b_+}$. La condición anterior sobre $\tilde{S}$ se puede escribir como

$$b_+(\eta,\xi)=\left\langle \eta,\tilde{S}\xi\right\rangle+(1-\beta)\left\langle \eta,\xi\right\rangle=\left\langle \eta,S\xi\right\rangle,$$

para todo $\eta\in\text{dom }b$, para todo $\xi\in\text{dom }S\cap\text{dom }b$. Desde que $(\mathcal{H}_+,b_+)$ es completo y S es cerrado, junto con la continuidad del producto interno, se tiene

$$b_+(\eta,\xi)=\left\langle \eta,S\xi\right\rangle, \quad \forall\eta\in\mathcal{H}_+,\forall\xi\in\text{dom }S,$$

sin embargo, por construcción, esto significa que $\xi\in\text{dom }T_{b_+}$, y $T_{b_+}\xi=S\xi$, es decir, $S\subset T_{b_+}$ desde que ambos son autoadjuntos $S=T_{b_+}$, así $\tilde{S}=\tilde{T}_b$ y tal operator es único. Desde que $\text{dom }\tilde{T}_b=\text{dom }T_{b_+}$, el Teorema 4.1.1 implica inmediatamente que $\text{dom }\tilde{T}_b$ es denso en $\mathcal{H}_+$.

Extensión de Friedrichs

Dado T hermitiano, considere la forma generada por T, es decir, $b^T(\eta,\xi)=\langle\eta,T\xi\rangle$, $\eta\in\xi\in\text{dom }T$, si $T\geq\beta$, se tiene $b^T(\xi,\xi)\geq\beta\|\xi\|^2$, y es posible aplicar el Teorema 4.1.2 con el fin de obtener la llamada extensión de Friedrichs de T.

Teorema 4.1.3. **[Extensión de Friedrichs]** *Sea T un operador hermitiano acotado inferiormente con $T\geq\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$, b^T la forma generado por T, es decir*

$$b^T(\eta,\xi)=\left\langle \eta,T\xi\right\rangle, \quad \eta,\xi\in\text{dom }b^T=\text{dom }T,$$

y denote $(\mathcal{H}_+^T,b_+^T)$ como en el Ejemplo 4.1.11. Entonces el operador T tiene una única extensión autoajunta $T_F:\text{dom }T_F\to\mathcal{H}$ con $\text{dom }T_F\sqsubseteq\mathcal{H}_+^T$. Además, $T_F\geq\beta$ y $\mathcal{H}_+^T$ es dominio de la forma de T_F.

Demostración. Recuerde que $\langle \eta, \xi \rangle_+ = b^T(\eta, \xi) + (1-\beta)\langle \eta, \xi \rangle$, $\eta, \xi \in \operatorname{dom} T$ y su completamiento es $(\mathcal{H}_+^T, b_+^T)$. De acuerdo con el Ejemplo 4.1.11 b_+^T es compatible con $\mathcal{H}$ y $b_+^T(\xi, \xi) \geq \|\xi\|^2$, para todo $\xi \in \mathcal{H}_+^T$. Por Teorema 4.1.2 existe un único operador autoadjunto

$$T_F = \tilde{T}_{b^T} := T_{b_+^T} - (1-\beta)\mathbf{1}, \quad \operatorname{dom} T_F = \operatorname{dom} T_{b_+^T} \sqsubseteq \mathcal{H}_+^T,$$

así que

$$b^T(\eta, \xi) = \langle \eta, T_F \xi \rangle, \quad \forall \eta \in \operatorname{dom} T, \xi \in \operatorname{dom} T \cap \operatorname{dom} T_F.$$

Desde que $T_{b_+^T} \geq \mathbf{1}$ de aquí se tiene $T_F \geq \beta$. A continuación se muestra que $T \subset T_F$, note inicialmente que para $\eta, \xi \in \operatorname{dom} T$,

$$b_+^T(\eta, \xi) = \langle \eta, \xi \rangle_+ = \langle \eta, [T + (1-\beta)\mathbf{1}]\xi \rangle.$$

Por la continuidad de producto interno, densidad de $\operatorname{dom} T$ en $\mathcal{H}_+^T$ y la continuidad de la inclusión $j : \mathcal{H}_+^T \to \mathcal{H}$, se sigue que, para cada $\xi \in \operatorname{dom} T$,

$$b_+^T(\eta, \xi) = \langle \eta, [T + (1-\beta)\mathbf{1}]\xi \rangle$$

se cumple para todo $\eta \in \mathcal{H}_+^T$. Por lo tanto, por la definición de $\operatorname{dom} T_{b_+^T}$, $\xi \in \operatorname{dom} T_{b_+^T}$ y $T_{b_+^T}\xi = T\xi + (1-\beta)\mathbf{1}\xi$, muestra que

$$T\xi = T_{b_+^T}\xi - (1-\beta)\xi = T_F\xi, \quad \xi \in \operatorname{dom} T.$$

Por lo tanto, $T \subset T_F$.

Para la unicidad de T_F, si S es un operador autoadjunto de forma que $T \subset S$ y $\operatorname{dom} S \subset \mathcal{H}_+^T$, la demostración anterior para $T \subset T_F$ implica que $S \subset T_F$, desde que ambos operadores son autoadjuntos, $S = T_F$. $\square$

Observación 4.1.7. De acuerdo con el Teorema anterior se puede concluir, que dado un operador $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ autoadjunto limitado inferiormente por β existe una única forma sesquilinear $b_T : \mathrm{dom}\ b_T \times \mathrm{dom}\ b_T \to \mathbb{C}$ cerrada y acotada inferiormente por β, de forma que

$$b_T(\eta, \xi) = \langle \eta, T\xi \rangle\,, \quad \forall \eta \in \mathrm{dom}\ b, \forall \xi \in \mathrm{dom}\ T.$$

Además, $\mathrm{dom}\ T$ es denso en $(\mathrm{dom}\ b_T, \|\cdot\|_+)$, recuerde que

$$\|\cdot\|_+ = \sqrt{b_T(\cdot,\cdot) + (1-\beta)\|\cdot\|^2}.$$

En efecto, la existencia sigue directamente del teorema anterior. Para la unicidad suponga que existe otra forma sesquilinear $\tilde{b}$ cerrada y acotada inferiormente por β, de forma que

$$\tilde{b}(\zeta, \xi) = \langle \zeta, T\xi \rangle\,, \quad \forall \zeta \in \mathrm{dom}\ \tilde{b}, \forall \xi \in \mathrm{dom}\ T.$$

De aquí, se puede observar que

$$b_T(\xi, \xi) = \tilde{b}(\xi, \xi), \quad \forall \xi \in \mathrm{dom}\ T. \tag{IV.8}$$

Para $\zeta \in \mathrm{dom}\ \tilde{b}$ denote

$$\|\zeta\|_{\tilde{+}} := \sqrt{\tilde{b}(\zeta,\zeta) + (1-\beta)\|\zeta\|^2},$$

así, $\mathrm{dom}\ T$ es denso en $(\mathrm{dom}\ \tilde{b}, \|\cdot\|_{\tilde{+}})$. Note que para todo $\eta \in \mathrm{dom}\ b_T$, $\|\eta\| \leq \|\eta\|_+$ y para todo $\zeta \in \mathrm{dom}\ \tilde{b}$, $\|\zeta\| \leq \|\zeta\|_{\tilde{+}}$.

Si $\eta \in \mathrm{dom}\ b_T$, desde que $\mathrm{dom}\ T$ es denso en $(\mathrm{dom}\ b_T, \|\cdot\|_+)$ existe una sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $\|\xi_n - \eta\|_+ \to 0$ cuando $n \to \infty$, como $\xi_n, \eta \in \mathrm{dom}\ b_T$ entonces $\xi_n \to \eta$ en $\mathcal{H}$ cuando $n \to \infty$ y $b_T(\xi_n - \xi_m) \to \infty$ cuando $n, m \to \infty$, luego desde que $\xi_n - \xi_m \in \mathrm{dom}\ T$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ por (IV.8) se tiene

$$\tilde{b}(\xi_n - \xi_m) = b_T(\xi_n - \xi_m) \to 0, \quad \text{cuando } n, m \to \infty$$

y $\xi_n \to \eta$ en $\mathcal{H}$, como $\tilde{b}$ es cerrada $\eta \in \operatorname{dom} \tilde{b}$ y $\tilde{b}(\xi_n - \eta) \to 0$ cuando $n \to \infty$. De aquí se puede observar también que $\xi_n \to \eta$ en $(\operatorname{dom} b_T, \|\cdot\|_+)$ y $(\operatorname{dom} \tilde{b}, \|\cdot\|_{\tilde{+}})$ y

$$\|\xi_n\|_+ = \|\xi_n\|_{\tilde{+}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

aplicando limite a ambos lados se tiene

$$\|\eta\|_+ = \|\eta\|_{\tilde{+}},$$

luego $b_T(\eta) = \tilde{b}(\eta)$. Así mostramos que $\operatorname{dom} b_T \subset \operatorname{dom} \tilde{b}$ y para $\eta \in \operatorname{dom} b_T$, $b_T(\eta) = \tilde{b}(\eta)$, desde que la otra inclusión es análoga, concluimos que b_T es único.

En la observación anterior es importante notar que el dominio $\operatorname{dom} b$ es un subespacio denso de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ donde el operador T esta densamente definido; se puede hacer esto debido a que por el Teorema 4.1.3 $\mathcal{H}_+^T$ se puede identificar como subepacio de $\mathcal{H}$.

4.1.4. Ejemplos de aplicaciones

En esta sección se presentan algunas aplicaciones del Teorema 4.1.1. Recuerde que por medio de la identidad de polarización, dado una forma cuadrática se puede recuperar la forma sesquilineal, así que para presentar ejemplos es suficiente considerar formas cuadráticas.

Ejemplo 4.1.12. Sea $\operatorname{dom} b := \mathcal{H}_0^1[0,1]$, considere la forma cuadrática

$$b(\psi) = \int_0^1 |\psi'(x)|^2 \mathrm{d}x, \quad \psi \in \operatorname{dom} b.$$

es claro que b es positiva. Se afirma que b es cerrada. En efecto $\operatorname{dom} b$ coincide con el producto interno de $\mathcal{H}^1(0,1)$, entonces b es cerrada. Ahora, considere $\operatorname{dom} T := \{\psi \in \mathcal{H}^2(0,1) : \psi(0) = \psi(1) = 0\}$. y $(T\psi)(x) = -\psi''(x)$. Por identidad de polarización tenemos

$$b(\psi, \phi) = \int_0^1 \overline{\psi'(x)}\phi'(x)\mathrm{d}x, \forall\psi, \psi \in \operatorname{dom} b,$$

usando integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} b(\psi,\phi) &= \psi(x)\phi'(x)|_0^1 - \int_0^1 \overline{\psi(x)}\phi''(x)\mathrm{d}x \\ &= \langle \psi, T\phi \rangle\,, \quad \forall\psi \in \mathrm{dom}\; b, \forall\phi \in \mathrm{dom}\; T. \end{aligned}$$

Desde que T es autoadjunto (véase [5]), T es el operador autoadjunto asociado a b

En el siguiente ejemplo vamos usar el Teorema 4.1.1 para demostrar que un operador es autoadjunto.

Ejemplo 4.1.13. Considere $\mathrm{dom}\; T := \{\psi \in \mathcal{H}^2(0,1) : \psi(0) = \psi(1), \psi'(1) = \psi'(0)\} \subset \mathcal{H} := L^2[0,1]$. y $(T\psi)(x) = -\psi''(x)$. Se puede mostrar que T es autoadjunto, para este fin considere $\mathrm{dom}\; b := \{\psi \in \mathcal{H}^1[0,1], \psi(0) = \psi(1)\}$ y la forma cuadrática en $\mathcal{H}$

$$b(\psi) = \int_0^1 |\psi'(x)|^2 \mathrm{d}x, \quad \psi \in \mathrm{dom}\; b.$$

El Ejemplo 4.1.9 demuestra que b es positiva, hermitiana y cerrada, Denote por T_b el operador autoadjunto asociado a b.

Se afirma que $T = T_b$. En efecto, por la Identidad de Polarización se tiene

$$b(\psi,\phi) = \int_0^1 \overline{\psi'(x)}\phi'(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\psi,\phi \in \mathrm{dom}\; b, \tag{IV.9}$$

Si $\phi \in \mathrm{dom}\; T$, por integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} b(\psi,\phi) &= \psi(x)\phi'(x)|_0^1 - \int_0^1 \overline{\psi(x)}\phi''(x)\mathrm{d}x \\ &= \langle \psi, T\phi \rangle\,, \quad \forall\psi \in \mathrm{dom}\; b. \end{aligned}$$

Por definición de $\mathrm{dom}\; T_b$, $\phi \in \mathrm{dom}\; T_b$ y $T_b\phi = T\phi$ por lo tanto, $T \subset T_b$.

Por otro lado, si $\phi \in \mathrm{dom}\; T_b$ entonces existe $T_b\phi = \varphi \in \mathcal{H}$ de forma que

$$b(\psi,\phi) = \langle \psi, \varphi \rangle\,, \quad \forall\psi \in \mathrm{dom}\; b,$$

por (IV.9) se tiene que

$$\int_0^1 \overline{\psi'(x)}\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \overline{\psi(x)}\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in \mathrm{dom}\, b,$$

desde que $C_0^\infty(0,1) \subset \mathrm{dom}\, b$ aplicando una integración por partes, se obtiene

$$-\int_0^1 \psi''(x)\phi(x) = \int_0^1 \psi(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \quad \forall \psi \in C_0^\infty(0,1),$$

por definición de segunda derivada débil $\phi'' = -\varphi$ luego $T_b\phi = \varphi = -\phi''$. Ahora desde que $\phi \in \mathcal{H}^1[0,1]$ y $\varphi \in \mathcal{H}$ entonces $\phi \in \mathcal{H}^2[0,1]$.

Recuerde que

$$\int_0^1 \overline{\psi'(x)}\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \overline{\psi(x)}\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in \mathrm{dom}\, b,$$

usando integración por partes, se obtiene

$$\overline{\psi(x)}\phi'(x)\mid_0^1 - \int_0^1 \overline{\psi(x)}\phi''(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \overline{\psi(x)}\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \psi \in \mathrm{dom}\, b,$$

luego $\overline{\psi(1)}\phi'(1) - \overline{\psi(0)}\phi'(0) = 0$ y como $\psi \in \mathrm{dom}\, b$ se sigue $\overline{\psi(0)}(\phi'(1) - \phi'(0)) = 0$ desde que $\psi(0)$ es arbitrario $\phi(1) = \phi(0)$. Entonces $\phi \in \mathrm{dom}\, T$, $T\phi = -\phi'' = \varphi = T_b\phi$ y $T_b \subset T$. Así se concluye que $T_b = T$ y como T_b es autoadjunto por lo tanto T es autoadjunto.

Ejemplo 4.1.14. Sea $\mathrm{dom}\, b = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) \sqsubseteq \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Defina a forma sesquilineal b por

$$b(\phi,\psi) := \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\phi, \nabla\psi \rangle \, dx, \quad \phi, \psi \in \mathrm{dom}\, b.$$

∇ denota la gradiente de una función las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^n$. Desde que $b(\phi) = \|\nabla\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, se puede observar que b es hermitiana y positiva. Sea $\{\phi_n\} \subset \mathrm{dom}\, b$ una secuencia de Cauchy con respecto a b y $\phi_n \to \phi$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert (cuya norma inducida por el correspondiente producto interno es $\|\phi\|^2_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} =$

$\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$), se sigue que $\phi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ y $\phi_n \to \phi$ en $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, b es cerrada y $\mathrm{dom}\, b$ es un subespacio con producto interno $\langle \phi, \psi \rangle_+ = b(\phi, \psi) + \langle \phi, \psi \rangle$ el cual coincide con el producto interno de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$). En estas condiciones, el Teorema 4.1.1 garante que existe un único operador autoadjunto T_b, asociado a b, de forma que a relación (IV.6) es satisfecha. Por otro lado, sabemos que o operador $T\psi = -\Delta\psi$, $\mathrm{dom}\, T = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n)$, es autoadjunto. Además, $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n) \sqsubseteq \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ y una integración por partes muestra que

$$b(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\phi, \nabla\psi)\, dx = (\phi, -\Delta\psi)_{L^2\mathbb{R}^n}, \quad \forall \phi \in \mathrm{dom}\, b,\ \forall \psi \in \mathrm{dom}\, T.$$

La unicidad del Teorema 4.1.1 implica que $T_b = T$.

Ejemplo 4.1.15. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjuto abierto, considere las formas cuadráticas actuando en $L^2(\Omega)$.

$$q^j(\psi) := \int_\Omega |\nabla\psi|^2 dx, \quad j \in \{D, N\}, \tag{IV.10}$$

con dominios $\mathrm{dom}\, q^D = \mathcal{H}^1_0(\Omega)$ y $\mathrm{dom}\, q^N = \mathcal{H}^1(\Omega)$, respectivamente. en (IV.10), ∇ denota el gradiente de ψ en las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^n$. Desde los espacios de Sobolev $\mathcal{H}^1_0(\Omega)$ y $\mathcal{H}^1(\Omega)$ son completos, en forma análoga al Ejemplo 4.1.14 se puede demostrar que q^j es una forma cuadrática cerrada y positiva para $\jmath \in \{D, N\}$. El Teorema 4.1.1 garantiza que existe un único operador autoadjunto $-\Delta^j_\Omega$ asociado a q^j para $j \in \{D, N\}$.

Los operadores Δ^D_Ω y Δ^N_Ω son llamados de Laplaciano de Dirichlet y Laplaciano de Neumann en Ω respectivamente. La ventaja de definir estos operadores por medio de formas es que se puede estudiar estos operadores a partir de la definición de las formas cuadráticas, se cita [2, 6, 9, 17] para mencionar algunos de los trabajos, donde se hace uso de esta ventaja.

4.2. DISCUSIÓN

La Observación 4.1.7 es una contribución al tema de investigación planteada, si juntamos esta observación con el Teorema 4.1.1 se concluye que los operadores autoadjuntos acotados inferiormente están biunívocamente relacionados con las formas sesquilineales hermitianas, cerradas y acotadas inferiormente. Así podemos decir también que un operador autoadjunto $T : \text{dom}\, T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ acotado inferiormente posee una única *forma sesquilineal asociada* b_T (acotada interiormente), tal que $\text{dom}\, T \subset \text{dom}\, b_T$ y

$$b_T(\eta, T\xi) = \langle \eta, T\xi \rangle \,, \quad \forall \xi \in \text{dom}\, b_T, \forall \eta \in \text{dom}\, b_T.$$

Además, $\text{dom}\, T$ es denso en $(\text{dom}\, b_T, \|\cdot\|_+)$.

Observación 4.2.1. Existen muchas razones para considerar formas sesquilineales como fuente de operadores. Usualmente las condiciones sobre el dominio de la forma son menos restrictas que las condiciones del dominio de un operador. Esto se puede apreciar en los Ejemplos 4.1.12, 4.1.13, 4.1.14 y 4.1.15; en estos ejemplos se observa que el las funciones que están en el dominio del operador tiene derivadas débiles de orden 2, mientras que las funciones que están el dominio de la forma sesquilineal asociada tienen apenas derivada débil de orden 1. Por otro lado, en el Ejemplo 4.1.13 las condiciones de frontera para las funciones que están el dominio del operador son tanto sobre la función así como en su derivada, en cuando las condiciones de frontera para las funciones que están en el dominio de la forma sesquilineal asociada es apenas sobre la función.

CONCLUSIONES

Al terminar esta investigación, se llegó a las siguientes conclusiones

Primera Conclusión: Existe una relación biunívoca entre operadores autoadjuntos limitados inferiormente y formas sesquilineales hermitianas, cerradas limitadas infereiormente.

Segunda Conclusión: Los operadores se pueden estudiar por medio de formas sesquilineales; por ejemplo el Teorema de Friedrichs garantiza de la existencia de un única extensión de autoadjunta de un operador hermitiano limitado inferiormente.

Tercera Conclusión: Existen muchas ventajas en el estudio de operadores cuando se estudian por medio de formas; véase por ejemplo Observación 4.2.1.

Cuarta Conclusión: Se puede aplicar la relación existente entre formas sesquilineales y operadores autodjuntos para demostrar que ciertos operadores son autoadjuntos.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda considerar la relación existente entre formas y operadores para estudiar la convergencia de operadores autoajuntos en el sentido de resolventes.
- Se recomienda considerar el operador Laplaciano de Dirichlet o Neumann definido por medio de formas para estudiar su espectro
- Se recomienda considerar el operador Laplaciano de Dirichlet o Neumann restricto en tubos de $\mathbb{R}^3$ por medio de formas para estudiar y comprender su espectro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Bedoya, R., de Oliveira C. R. y Verri, A. A.: Complex Γ-convergence and magnetic Dirichlet Laplacian in bounded thin tubes, J. Spectr. Theory **4**, 621–642, (2014).

[2] Bouchitté, G., Mascarenhas, M. L. e Trabucho, L.: On the curvature and torsion effects in one dimensional waveguides, ESAIM, Control Optim. Calc. Var. **13**, 793–808 (2007).

[3] Brezis, H.: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential equations, Springer Verlag, (2011)

[4] de Oliveira, C. R.: Introdução à Análise Funcional , Proj. Euclides, IMPA, (2010).

[5] de Oliveira, C. R.: Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics, Birkhäuser, (2009).

[6] de Oliveira, C. R.: Quantum singular operator limits of thin Dirichlet tubes via Γ -convergence, Reports on Mathematical Physics, **67**, 1-32 (2011).

[7] Folland, G. B.: Real Analysis: modern techniques and their applications, Jhon Wiley, 2nd ed. New York, (1999).

[8] KrejčiřÃk, D. y Lu, Z.: Location of the essential spectrum in curved quantum layers. arXiv:1211.2541 [math.DG].

[9] KrejčiřÃk, D.: Twisting versus bending in quantum waveguides. Proc. Sympos. Pure Math. **77**, 617-636, Amer. Math. Soc., Proidence, RI (2008).

[10] Kreyszig, E.: Introductory functional analysis with applications. New York, Jhon Wiley & Sons, (1978).

[11] Lawrence, C. E.: Partial Differential Equations. AMS, Providence, (1998).

[12] Lima, E. L.: Álgebra lineal. Col. Mat. Univ., IMPA, (2006).

[13] Lima, E. L.: Espaços Métricos. Projeto Euclides, (1996).

[14] Reed, M. e Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics I: Funtional Analysis. Academic Press, New York, (1972).

[15] Reed, M. e Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics, IV. Analysis of Operators, Academic Press, New York, (1978).

[16] Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin, (1995).

[17] Yoshitomi, K. Band gap of the spectrum in periodically curved quantum waveguides, J. Differ. Equations **142**, 123–166, (1998).