

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS



**ANÁLISIS DE UN MURO DE CONTENCIÓN SOMETIDO A LA
ACCIÓN DE CARGAS HORIZONTALES MEDIANTE EL MÉTODO
DE ELEMENTOS FINITOS**

TESIS

PRESENTADA POR:

Marco Antonio Manzaneda Peña

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

PUNO – PERÚ

2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - PUNO
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS

ANÁLISIS DE UN MURO DE CONTENCIÓN SOMETIDO A LA ACCIÓN DE
CARGAS HORIZONTALES MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

TESIS PRESENTADA POR:

Marco Antonio Manzaneda Peña

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



APROBADA POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

PRESIDENTE:


M. FAUSTINO MURILLO MAMANI

PRIMER MIEMBRO:


M. NOEMI GIOVANNA ALARCON CARDENAS

SEGUNDO MIEMBRO:


Lic. DERLY PARIMENDOZA

DIRECTOR / ASESOR:


M. JULIO CÉSAR VILLALPA PACORI

TEMA : ALGEBRA LINEAL

AREA : MATEMÁTICA APLICADA

LINEA DE INVESTIGACION: MATEMÁTICA APLICADA

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 21 DE NOVIEMBRE DEL 2018

DEDICATORIA

Dedico este trabajo primero a Dios, que me dio la vida, la inteligencia, la templanza y la perseverancia para poder llevar a cabo esta investigación que es un momento tan importante de mi formación profesional, y no decaer en el camino. A mis padres, por haberme dado el apoyo moral y económico para poder sobrellevar toda la vida universitaria con todos los beneficios y dificultades que esta etapa tan bella de la vida trae consigo. A mi compañera de vida Alicia que gracias a ella aprendí muchas cosas que no se aprenden en las aulas universitarias pero que son igual de importantes que estas enseñanzas. A mi tía Ely, por darme consejos y su tiempo para poder salir de problemas y no meterme en más de ellos ya que la experiencia en la vida es tan importante, pero aún mas es transferir dichas anécdotas para no pasar inconvenientes que se pueden prevenir.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a Dios por haberme dado fuerza y valor para culminar esta etapa tan importante de mi vida.

A mis padres, por darme la confianza y el sustento moral y económico de esta manera dedicarme únicamente al estudio y no preocuparme por otras situaciones que muchas personas se ven afectadas y se descuidan en esta parte importante del crecimiento humano.

A Alicia, por acompañarme a lo largo de todo este arduo camino y estar conmigo tanto en las buenas como en las malas.

A mis familiares, por ser fuente de inspiración de superación para poder ser un profesional que haga su propia historia y su propio camino en este mundo tan mágico que son los números.

A mis amigos, por apoyarme tanto dentro como fuera de las clases por medio de consejos, bromas, momentos de nostalgia de los cuales sacamos la mejor parte y nos pudimos forjar para poder acabar esta carrera tan bella que demanda tanto esfuerzo y dedicación.

Gracias a todas las personas que ayudaron directa e indirectamente en la realización de este proyecto el cual es de suma importancia en mi vida y tienen un lugar en mi corazón.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	6
ÍNDICE DE TABLAS	7
RESUMEN	8
ABSTRACT	9
CAPITULO I: INTRODUCCIÓN	10
1.1 Planteamiento del problema	10
1.2 Formulación del problema	10
1.3 Hipótesis de la investigación.....	11
1.4 Justificación del estudio	11
1.5 Objetivos de la investigación	11
CAPITULO II: REVISIÓN DE LITERATURA	13
2.1 Marco Teórico	13
2.1.1 Algebra Matricial	13
2.1.2 Conceptos sobre mecánica de materiales	24
2.1.3 Muros de contención.....	31
2.1.4 Método de los elementos finitos (MEF).....	34
CAPITULO III: METODOLOGÍA	58
3.1 Ubicación geográfica del estudio.....	58
3.2 Periodo de duración del estudio	58
3.3 Procedencia del Material utilizado	58
3.4 Población y muestra del estudio.....	58
3.5 Diseño Estadístico.....	58
3.6 Procedimiento.....	58
3.7 Variables.....	59
3.8 Análisis de Resultados	59
CAPITULO IV: RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	60
4.1 Resultados.....	60
4.2 Discusión.....	84
5. CONCLUSIONES.....	85
6. RECOMENDACIONES	86
7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87
ANEXOS	88

ÍNDICE DE FIGURAS

IMAGEN 1: ESFUERZOS NORMALES DE COMPRESION Y TENSION	25
IMAGEN 2: DIAGRAMA ESFUERZO DEFORMACION.....	26
IMAGEN 3: DIAGRAMA DE ESFUERZO-DEFORMACION REDUCIDO.....	27
IMAGEN 4: SOLIDO RIGIDO.....	29
IMAGEN 5: APOYO ARTICULADO MOVIL	30
IMAGEN 6: APOYO ARICULADO FIJO.....	30
IMAGEN 7: APOYO EMPOTRADO	31
IMAGEN 8: MURO DE CONTENCION POR GRAVEDAD	32
IMAGEN 9: MURO DE CONTENCION EN VOLADIZO.....	33
IMAGEN 10: MURO DE CONTENCION CON CONTRAFUERTE.....	33
IMAGEN 11: ESTRIBO DE UN PUENTE.....	34
IMAGEN 12: CUERPO GENERAL SOMETIDO A FUERZAS EXTERNAS	47
IMAGEN 13: ELEMENTO TRIANGULAR DE TRES NODOS DE TURNER.....	49
IMAGEN 14: MURO DE CONTENCION REPRESENTADO EN 3D	60
IMAGEN 15: ELEMENTO REPRESENTADO EN 2D	61
IMAGEN 16: DISCRETIZACION Y NUMERACION DE NODOS.....	61

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: NUMERACION DE NODOS EN SENTIDO ANTIHORARIO.....	62
Tabla 2: COORDENADAS DE LOS NODOS	62

RESUMEN

El presente trabajo de investigación intitulado “ANÁLISIS DE UN MURO DE CONTENCIÓN SOMETIDO A LA ACCIÓN DE CARGAS HORIZONTALES MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS”, tiene por objetivo principal analizar un muro de contención por el método de los Elementos finitos. Para ello primero se dará una breve noción de los conceptos del Algebra Lineal necesarios para entender este método como por ejemplo el concepto de matrices, otros conceptos afines a este tema como es el Análisis Estructural, resistencia de materiales y otros conceptos relacionados a la formulación del método de los Elementos Finitos. Este método puede ser formulado de distintas maneras, esta tesis al igual que muchos otros trabajos de investigación se hará uso de la formulación directa a través de las matrices de rigidez para analizar cuerpos sólidos. Se analizará un muro de contención de tipo voladizo que es el tipo de muro más común por su proceso constructivo y costo, se tomara como un caso de deformación plana debido a la geometría de esta estructura, el cual tiene sus respectivas características como altura de la pantalla, espesor de la pantalla, etc. Así como los materiales que está construido este muro también tienen sus propias características que influirán en el análisis y por ende en los posteriores resultados, este muro estará sometido a cargas horizontales las cuales serán representadas como del tipo puntual, el cual será sometido a un análisis estructural complejo como es el caso del análisis por medio del método de los elementos finitos.

Palabras Clave:

Muro de contención, Análisis Estructural, Método de los Elementos Finitos.

ABSTRACT

The present research work entitled "ANALYSIS OF A WALL OF CONTAINMENT SUBJECTED TO THE ACTION OF HORIZONTAL LOADS THROUGH THE METHOD OF FINITE ELEMENTS", has as main objective Analyze a retaining wall by the method of finite elements. For this first a brief notion of the concepts of the Linear Algebra necessary to understand this method like for example the concept of matrices, other related concepts to this subject as it is the Structural Analysis, resistance of materials and other concepts related to the formulation of the Finite element method. This method can be formulated in different ways, this thesis, as many other research works will make use of the direct formulation through the matrices of rigidity to analyze solid bodies. We will analyze a cantilever-type retaining wall that is the most common type of wall due to its construction process and cost, which will be taken as a case of flat deformation due to the geometry of this structure, which has its respective characteristics as height of the screen, thickness of the screen, etc. Just as the materials that this wall is built also have their own characteristics that will influence the analysis and therefore the subsequent results, this wall will be subject to horizontal loads which will be represented as punctual type, which will be subjected to an analysis complex structural as it is the case of the analysis by means of the finite element method.

Keywords:

Retaining Wall, Structural Analysis, Finite Element Method.

CAPITULO I

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Planteamiento del problema

La investigación intitulada “Análisis de un muro de contención sometido a la acción de cargas horizontales mediante el Método de Elementos Finitos”, tiene el fin de seguir difundiendo el método de los elementos finitos, y poder analizar este método desde su concepción a partir de matrices de rigidez, debido a que es un método numérico para la solución de problemas de ingeniería y otros de alto grado de complejidad. Sin embargo, el Método de los elementos finitos en la mayoría de casos solo se aplicaban para el análisis de esfuerzos, sin embargo, este método tiene y tendrá infinidad de aplicaciones debido a la diversidad de usos que cualquier investigador le pueda dar. En este caso se aplicará al análisis de un muro de contención, el cual es una estructura muy importante que logra contener grandes volúmenes de agua, tierra, etc. Este método es parte del curso de análisis de estructuras en la carrera de ingeniería civil y en el caso de físico matemática, es parte del curso de métodos numéricos, en otras carreras también se puede hallar investigaciones basadas en este método como por ejemplo las carreras profesionales de Ingeniería Mecánica eléctrica, odontología, entre otras especialidades.

Este método es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy complicadas utilizado en diferentes problemas de ingeniería y física por ejemplo la transferencia de calor, el comportamiento de fluidos termodinámicos, entre otros que son de mucho interés, pero tiempo atrás de difícil resolución. El método de elementos finitos está pensado para ser usado en computadoras ya que cada elemento discretizado está sometido a una serie de ecuaciones simples pero que en su conjunto se vuelven tediosas para la resolución manual. Este método se usa para el diseño y mejoras de productos y aplicaciones industriales, así como para la simulación de sistemas físicos y biológicos complejos. El método de los elementos finitos permite realizar un modelo matemático de cálculo del modelo real más fácil y económico de modificar que un prototipo. Sin embargo, no deja de ser un método aproximado debido a las hipótesis a las cuales está sujeto el método. Los prototipos por lo tanto siguen siendo necesarios, pero en menor cantidad.

1.2 Formulación del problema

Como antecedentes para esta investigación se tiene la del Análisis de Vigas Continuas por el Método de los Elementos Finitos efectuada por Alan Bustinza Cutisaca, el cual emplea este método para el análisis de vigas continuas sometidas a diferentes tipos de cargas verticales, tomando las vigas como elementos lineales, en este caso se tomará los muros de contención como un caso de deformación plana ya que la pantalla del muro es relativamente delgada a comparación de su base. Esta tesis abarca cursos como los son: el álgebra lineal, resistencia de materiales, análisis estructural, métodos numéricos, de los cuales se podrá concebir la formulación de este método para la aplicación en el análisis de muros de contención sometido a cargas horizontales, siguiendo con el crecimiento de la aplicación del Método de los elementos finitos en estos últimos años ya que la información ha ido creciendo y las aplicaciones también. Existen software los cuales utilizan este método en su algoritmo, pero ninguno logra explicar y detalla los cálculos

que hace para alcanzar los resultados que halla. De esto nace la formulación del problema expresada en la pregunta de investigación:

¿Será posible analizar un muro de contención sometido a fuerzas horizontales puntuales mediante el método de los elementos finitos?

1.3 Hipótesis de la investigación

La hipótesis general de la presente investigación es:

Es posible analizar un muro de contención sometido a fuerzas horizontales puntuales mediante el método de los elementos finitos.

Y las respectivas hipótesis específicas son:

- Se puede desarrollar el método de los elementos finitos bidimensionales, con elementos triangulares.
- Es factible formular el método de los elementos finitos para elementos bidimensionales.
- Es posible aplicar el método de los elementos finitos bidimensionales en el análisis estructural de un muro de contención.

1.4 Justificación del estudio

La justificación es que el análisis de un muro de contención no es trivial ni sencillo ya que se deben de hallar diferentes parámetros los cuales definirán la resistencia, rigidez del muro ya que estos no se pueden hallar por ecuaciones de la estática porque son sistemas hiperestáticos, donde las características de los materiales pueden cambiar, así como la magnitud de las cargas que está sometido el muro. Este análisis debe de ser así de minucioso ya que los muros de contención son estructuras muy importantes que acopian grandes volúmenes de tierra, agua, etc. En los cuales una falla debido a una mala aproximación de los esfuerzos y deformaciones que va a sufrir el muro ocasionaría muchas pérdidas económicas y en algunos casos pérdida de vidas humanas debido a las diferentes fallas que pueden ocurrir en un muro como por ejemplo una falla por rotación, falla por desplazamiento o las fallas estructurales que se dan al no controlar bien los parámetros del muro de contención como la altura de la pantalla, dimensiones de la cimentación, material de construcción. Como ejemplos de estas fallas tenemos los últimos acontecimientos ocurridos en México y en el interior de Perú, donde los deslizamientos cobraron vidas humanas y cuantiosas pérdidas materiales.

1.5 Objetivos de la investigación

El objetivo principal de la presente investigación es:

Analizar un muro de contención sometido a fuerzas horizontales puntuales mediante el método de los elementos finitos.

Y los respectivos objetivos específicos serán:

- Desarrollar el método de los elementos finitos bidimensionales, con elementos triangulares.
- Formular el método de los elementos finitos para elementos bidimensionales.
- Aplicar el método de los elementos finitos bidimensionales en el análisis estructural de un muro de contención.

CAPITULO II

2. REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 Marco Teórico

2.1.1 Algebra Matricial

2.1.1.1 *Historia del algebra matricial*

El pionero en utilizar el término de matriz fue el británico James Joseph Sylvester, quien definió una matriz como un arreglo rectangular de términos. A su regreso de Italia en 1851, establece contacto con Arthur Cayley quien comparte las ideas matemáticas de Sylvester y publica una nota en donde aparece por primera vez la inversa de una matriz, más tarde en 1858 Cayley publica su memoria sobre teoría de matrices, la cual contiene la primera noción abstracta de matriz y donde se muestra que los arreglos de coeficientes estudiados anteriormente para las formas cuadráticas y las transformaciones lineales son casos especiales de este concepto general.

Asimismo, Cayley, desarrolla el álgebra matricial definiendo operaciones básicas de suma, resta multiplicación entre matrices y multiplicación por escalares, así como la inversa de una matriz invertible en términos de su determinante, y prueba que en el caso de matrices de 2 por 2, una matriz satisface su propia ecuación característica.

En 1870, el matemático francés Camille Jordan publica una forma canónica para sustituciones lineales sobre cuerpos finitos de orden primo. En este contexto aparece por primera vez lo que hoy conocemos como la forma canónica de Jordan.

Arthur Cayley es considerado como el fundador de la teoría de matrices. Aunque históricamente fueron los matemáticos chinos los pioneros en esta materia y el término de matriz es debido a Sylvester. Cayley probó además que la multiplicación de matrices es asociativa e introduce las potencias de una matriz, así como las matrices simétricas y anti simétricas. Por tanto, Cayley merece ser considerado como el fundador del algebra de matrices.

2.1.1.2 *Historia de las ecuaciones*

2.1.1.2.1 Ecuaciones

Los primeros rudimentos de lo que hoy se conoce como ecuaciones se han encontrado en el documento matemático más antiguo que ha llegado a la actualidad: El papiro Rhind, conservado en el British Museum con algunos fragmentos en el Brooklyn Museum, y conocido también como el libro de cálculo, el cual fue escrito por el sacerdote egipcio Ahmes hacia el año 1650 a.C. y exhumado en Tebas en 1855. En este valioso documento se consideran las ecuaciones de primer grado, donde la incógnita aparece representada por Ibis que significa escarbando en el suelo, posiblemente por su primogénita aplicación a la agrimensura.

Los babilonios sabían cómo resolver problemas concretos que involucraban ecuaciones de primer y segundo grado completando cuadrados o por sustitución, así como también ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales como:

$$x + y = a$$

$$x^2 + y^2 = b$$

En el antiguo Egipto y Babilonia fueron capaces de resolver ecuaciones lineales y cuadráticas así como ecuaciones indeterminadas como $x^2 + y^2 = z^2$ con varias incógnitas.

En los tiempos de Gauss, el álgebra habría entrado en su etapa moderna. El foco de atención se trasladó de las ecuaciones polinómicas al estudio de la estructura de sistemas matemáticos abstractos, cuyos axiomas estaban basados en el comportamiento de objetos matemáticos. Dos ejemplos de dichos sistemas son los grupos y las cuaternas, que comparten algunas de las propiedades de los sistemas numéricos, aunque también difieren de ellos de manera sustancial. Los grupos comenzaron como sistemas de permutaciones y combinaciones de las raíces de polinomios, pero evolucionaron para llegar a ser uno de los más importantes conceptos unificadores de las matemáticas en el siglo XIX.

Los matemáticos franceses Galois y Agustin Cauchy, el británico Arthur Cayley y los noruegos Niels Abel y Sophus Lie hicieron importantes contribuciones al estudio. Las cuaternas fueron descubiertas por el matemático y astrónomo irlandés William Rowan Hamilton, quien desarrollo la aritmética de los números complejos para las cuaternas.

Después del descubrimiento de Hamilton, el matemático alemán Hermann Grassmann empezó a investigar los vectores. A pesar de su carácter abstracto, el físico estadounidense J. W. Gibbs encontró en el álgebra vectorial un sistema de gran utilidad para los físicos, del mismo modo que Hamilton había hecho con las cuaternas.

2.1.1.3 Definiciones y propiedades de las matrices

Los arreglos rectangulares numéricos reciben el nombre de matriz. Mas formalmente, dado un conjunto X, se denomina matriz de n filas y m columnas a un conjunto de n x m elementos de X, dispuestos en un arreglo rectangular de n filas y m columnas. Las características de los elementos del conjunto X dependerán en cada caso de la naturaleza del problema que se esté estudiando en este caso el campo serán los números reales que son los valores que pueden tomar cada elemento que es parte del arreglo. También se define una matriz como un arreglo ordenado de números en renglones y en columnas. (Lay 2007) Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Una matriz M representativa como la que se muestra en la ecuación (2.1) consta de n renglones y de m columnas de números entre corchetes. La matriz M es entonces de orden n x m.

Los elementos a_{ij} en el arreglo se identifican por medio de dos subíndices. El primer subíndice designa un renglón y el segundo la columna donde se localiza el elemento.

Así el elemento a_{32} es el elemento localizado en la intersección del tercer renglón y la segunda columna de la matriz. Los elementos con subíndices repetidos, por ejemplo, a_{jj} se localizan en la diagonal principal de la matriz.

Hay una clase especial de matrices que se denomina vector. Un vector es una matriz que solo tiene una fila o una columna.

David C. Lay refiere que Un **vector fila** (o un vector renglón) es una matriz que solo tiene una fila. Un vector fila S con n elementos s_{ij} tiene una dimensión de (1 x n) y la forma general de:

$$S = [s_{11} \quad s_{12} \quad s_{13} \quad \cdots \quad s_{1n}] \quad (2)$$

Un vector columna es una matriz que solo tiene una columna. Un vector columna (C) con m elementos c_{ij} tiene una dimensión de m x 1 y la forma general, para la presente investigación se trabajará las matrices filas entre paréntesis debido que es la nomenclatura o simbolización más simple y de modo que en la mayoría de investigación se trabaja entre símbolos de llaves pero esta nomenclatura se puede confundir con la nomenclatura de conjuntos:

$$(C) = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

2.1.1.4 Tipos especiales de matrices

2.1.1.4.1 Matriz cuadrada

Una matriz cuadrada es una matriz que tiene el mismo número de filas y de columnas. Si la dimensión de una matriz es (m x n), una matriz cuadrada es tal que m = n (Arce, Castillo y Gonzales (2003)); las siguientes son matrices cuadradas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 21 & 14 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 2.5 \\ 4 & 254 & -0.2 \\ 14 & 1 & 44 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & -99 & 1214 \\ 11 & 224 & 2.5 & 11.5 \\ 21 & 11 & 0 & 14 \\ 0 & 17 & 25 & 22 \end{bmatrix}$$

En los anteriores arreglos son de orden 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4, en todos los casos el orden de las matrices m x n, m = n. en forma general la matriz cuadrada debe tener como último elemento a_{ij} tal que i = j:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.1.1.4.2 Matriz simétrica

La matriz S cuyos elementos están denotados por $(s_{ij})_{n \times n}$ es simétrica si su entrada en la fila i y columna j es igual a la entrada en la fila j y la columna i , para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. (Arce et al (2003)) Es decir:

$$s_{ij} = s_{ji} \text{ Para todo } i, j \quad (5)$$

EJEMPLO: Matriz simétrica de 5 x 5

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 24 & 11 & 84 \\ 2 & 5 & 13 & 17 & 26 \\ 24 & 13 & 88 & 47 & 16 \\ 11 & 17 & 47 & 112 & 301 \\ 84 & 26 & 16 & 301 & 18 \end{bmatrix}$$

2.1.1.4.3 Matriz identidad

La matriz J es una matriz identidad dicha matriz es cuadrada, es decir

$J_n = (d_{ij})_{n \times n}$, con $d_{ij} = \begin{cases} 1 \rightarrow si: i=j \\ 0 \rightarrow si: i \neq j \end{cases}$ (Arce et al (2003)), es decir:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

EJEMPLO: La siguiente es una matriz identidad de 6 x 6

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.1.2.4 Matriz transpuesta

Sea A una matriz de orden $m \times n$, tal que $m, n \in \mathbb{N}$, la matriz transpuesta de A se denota A^t y se define como la matriz de $n \times m$ que se obtiene al escribir la filas

de A como columnas, o equivalentemente, poner las columnas de A como filas, simbólicamente:

$$\text{Si } A = (a_{ij})_{n \times m} \text{ entonces } A^t = (a_{ji})_{m \times n}$$

Usando la transposición de matrices, observe que una matriz S , $n \times n$ es simétrica si y solo si $S^t = S$ (Arce et al (2003)).

$$\text{EJEMPLO: Si } L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ entonces } L^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2.1.1.2.5 MATRIZ TRIANGULAR

Una matriz $T = (t_{ij})_{n \times n}$ se llama matriz triangular inferior (o superior) si todos los elementos de arriba (abajo) de la diagonal son cero esto es $t_{ij} = 0$ sí $i < j$ ($j < i$).

Y se llama triangular si es triangular inferior o superior. (Arce et al (2003))

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ v_{12} & v_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\ 0 & y_{22} & \ddots & y_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.1.1.5 ARITMETICA MATRICIAL

En esta sección se definirán las operaciones para poder operar estos arreglos numéricos en forma similar a como se opera con los números reales, pero con ciertos cuidados especiales, porque hay propiedades muy importantes de los números reales que trasladadas a las matrices dejan de ser validas.

2.1.1.3.1 IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices A y B son iguales solo si los elementos correspondientes de las dos matrices son iguales. Por lo tanto, la igualdad de matrices puede existir únicamente entre matrices de igual orden.

Esto es: Sean $A, B \in M(m, n, \square)$, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ entonces $\forall i, j$, $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$

2.1.1.3.2 SUMA Y RESTA DE MATRICES

Sean A y B matrices del mismo orden. La suma de $A+B$ es la matriz que se obtiene al sumar los elementos correspondientes de A y B . Esta matriz $A+B$ será del mismo orden que las matrices A y B . Si A y B no son del mismo tamaño no se pueden sumar, y se dice que la suma no existe.

Si $C = A+B$, entonces $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

La diferencia o resta de matrices se lleva a cabo matrices del mismo orden, sustrayendo elementos correspondientes a cada matriz.

Así, $C = A - B$, entonces $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

EJEMPLO: Sea la matriz $S = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 15 \\ 22 & 11 & 54 \end{bmatrix}$ y la matriz $M = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 11 \\ 21 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Hallar $S + M$, $S - M$:

$$S + M = \begin{bmatrix} 1+10 & 12+2 & 15+11 \\ 22+21 & 11+3 & 54+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 14 & 26 \\ 43 & 14 & 58 \end{bmatrix}$$

$$S - M = \begin{bmatrix} 1-10 & 12-2 & 15-11 \\ 22-21 & 11-3 & 54-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 4 \\ 1 & 8 & 50 \end{bmatrix}$$

2.1.1.3.3 MULTIPLICACION DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

La multiplicación escalar de una matriz es la multiplicación de una matriz por un numero escalar. Se encuentra el producto multiplicando cada elemento de la matriz escalar:

$$\alpha A = (\alpha * a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (8)$$

EJEMPLO: Si k es un escalar y $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Hallar la matriz kA

$$kA = k * \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & 4k \\ 3k & 5k \\ 3k & 4k \end{bmatrix}$$

2.1.1.3.4 MULTIPLICACION DE MATRICES

Suponga que una matriz A que tiene una dimensión $m_a \times n_a$ se tiene que multiplicar por una matriz B que tiene una dimensión $m_b \times n_b$. Se debe de verificar las siguientes condiciones para que exista la multiplicación de matrices:

- El producto AB está definido si y solo si el número de columnas de A equivale al número de filas de B , o si $n_a = m_b$.
- Si se puede realizar la multiplicación el producto resultante de la matriz debe tener una dimensión de $m_a \times n_b$.

Si $AB = C$ un elemento c_{ij} de la matriz que resulta del producto es igual al producto interno de la fila i de la matriz A y la columna j de la matriz B .

EJEMPLO: Encontrar el producto matricial AB , siendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

2.1.1.3.5 INVERSA DE UNA MATRIZ

El álgebra de matrices proporciona herramientas para manipular ecuaciones matriciales y crear diversas fórmulas útiles en formas similares a la ejecución ordinaria del álgebra con números reales. En esta sección se investiga el análogo matricial del recíproco, o inverso multiplicativo, de un número diferente de cero. Recordando que el inverso multiplicativo de un número como 4 es $\frac{1}{4}$ o 4^{-1} . Este inverso satisface la ecuación:

$$4^{-1} \cdot 4 = 1 \text{ y } 4 \cdot 4^{-1} = 1$$

La generalización matricial requiere de ambas ecuaciones y evita la notación con diagonales debido a que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Más aun, una generalización completa solo es posible si las matrices involucradas son cuadradas.

Se dice que una matriz A de $n \times n$ es invertible si existe otra matriz C de $n \times n$ tal que:

$$A \cdot C = I \text{ y } C \cdot A = I$$

Donde $I = I_n$ que es la matriz identidad $n \times n$. En este caso C es un inverso de A . De hecho C está determinado únicamente por A , porque si B fuera otro inverso de A , entonces $B = B \cdot I = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I \cdot C = C$. Este inverso único se denota como A^{-1} , de manera que:

$$A^{-1}A = I \text{ y } AA^{-1} = I$$

TEOREMA 2.1.1.3.1

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, si $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Si $ad - bc = 0$ entonces A no es invertible

DEMOSTRACION

Considerando una matriz de orden 2×2 general:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Sea B la matriz inversa de la matriz A , entonces se va a cumplir que $AB = I$, donde la matriz I es la matriz identidad.

Consideremos los escalares x, y, z, t tal que:

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \text{ y } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces como $AB = I$

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ entonces } \begin{bmatrix} a.x+b.z & a.y+b.t \\ c.x+d.z & c.y+d.t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo cual reduce a resolver dos sistemas

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases} \quad \begin{cases} ay+bt=1 \\ cy+dt=0 \end{cases}$$

Donde la matriz original A es la matriz de los coeficientes de cada sistema.

Tomemos $|A| = a.d - b.c$ como el determinante de una matriz de 2×2 . Como

$a.d - b.c \neq 0$, entonces $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$. En ese caso usando la regla de Cramer el primer

sistema tiene solución única $x = \frac{d}{|A|}$ y $z = -\frac{c}{|A|}$, el segundo con solución única

$y = -\frac{b}{|A|}$, $t = \frac{a}{|A|}$. De acuerdo a esto se tiene que:

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{bmatrix} = \frac{1}{a.d - b.c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, A es invertible

TEOREMA 2.1.1.3.2

Si A es una matriz invertible $n \times n$, entonces para cada B en \mathbb{R}^n , la ecuación $A.X = B$, tiene una solución única $X = A^{-1}.B$

DEMOSTRACION

Tomemos cualquier B en \mathbb{R}^n . Existe una solución porque se sustituye $A^{-1}.B$ por X , entonces se tiene $A.X = A.(A^{-1}.B) = (A.A^{-1}).B = I.B = B$. Así que $A^{-1}.B$ es una solución cualquiera. Para probar que la solución es única, se muestra que si u es otra solución de $A.X = B$, entonces u debe ser de hecho $A^{-1}.B$. En efecto, si $A.u = B$, pueden multiplicarse ambos miembros por A^{-1} y obtener

$$A^{-1}.Au = A^{-1}.B \rightarrow I.u = A^{-1}.B \rightarrow u = A^{-1}.B$$

Por lo tanto $A^{-1}.B$ es una solución única para la ecuación $A.X = B$

TEOREMA 2.1.1.3.3

- ✓ Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.
- ✓ Si A y B son matrices invertibles $n \times n$, entonces también lo es $A.B$, y el inverso de $A.B$ es el producto de los inversos de A y B en el orden inverso. Esto es $(A.B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- ✓ Si A es un matriz invertible también lo es A^T , y el inverso de A^T es la transpuesta de A^{-1} . Esto es $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

DEMOSTRACION

- 1) A^{-1} es no singular si podemos encontrar una matriz B tal que:

$$A^{-1}.B = B.A^{-1} = I$$

Como A es no singular,

$$A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$$

En consecuencia, $B = A$ es una inversa de A^{-1} , y como las inversas son únicas concluimos que:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

En consecuencia, la inversa de la inversa de un matriz A no singular es A

- 2) Se tiene que

$$(A.B).B^{-1}.A^{-1} = A.(B.B^{-1}).A^{-1} = A.I.A^{-1} = A.A^{-1} = I$$

Y

$$(B^{-1}.A^{-1}).(A.B) = B^{-1}.(A^{-1}.A).B = B^{-1}.I.B = B^{-1}.B = I$$

Por lo tanto $A.B$ es no singular, como la inversa de una matriz es única, se concluye que:

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

En consecuencia, la inversa de un producto de dos matrices no singulares es el producto de sus inversas en orden inverso

- 3) Se tiene

$$A.A^{-1} = I \text{ y } A^{-1}.A = I$$

Al calcular las transpuestas, obtenemos:

$$(A.A^{-1})^T = I^T = I \text{ y } (A^{-1}.A)^T = I^T = I$$

Entonces

$$(A^{-1})^T . A^T = I \text{ y } A^T . (A^{-1})^T = I$$

De donde A^T es invertible y la inversa de A^T es $(A^{-1})^T$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

En consecuencia, la inversa de la transpuesta de una matriz no singular, es la transpuesta de su inversa

2.1.1.6 SUBDIVISION DE MATRICES

La manipulación de las ecuaciones matriciales es con frecuencia más sencilla si se subdividen las matrices en más pequeñas, llamadas subdivisiones o subunidades, la subdivisión se indica por líneas horizontales y verticales colocadas entre los renglones las columnas de las matrices. Se muestra en seguida ejemplos de matrices que han sido subdivididas:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right]$$

$$B = \left(\begin{array}{c} b_{11} \\ \hline b_{12} \\ b_{13} \end{array} \right)$$

$$C = [c_{11} \quad c_{21} \mid c_{31}]$$

La subdivisión de una ecuación matricial es:

$$A.X = B \tag{9}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Se nota que las líneas horizontales de subdivisión en la última ecuación se extienden entre los mismos dos renglones de cada matriz en la ecuación. Además, los números de las columnas que definen la línea vertical de subdivisión en la matriz cuadrada son los mismos que los números de los renglones que definen las líneas de subdivisión horizontal para la ecuación completa.

2.1.1.7 FACTORIZACION LU

En general esta factorización puede ser de mucha utilidad para comprender las propiedades de un matriz. Por ejemplo, suponga que se conoce como factorizar una matriz A de orden $m \times n$ de la forma:

$$A = LU \quad (10)$$

Donde L es una matriz triangular inferior de orden $m \times n$ y U es una matriz triangular superior de orden $m \times n$. Entonces el sistema:

$$A.X = B \quad (11)$$

Puede resolverse en dos pasos más fáciles primero se despeja y de la siguiente ecuación:

$$L.Y = B \quad (12)$$

Y por otro lado se despeja X de la siguiente ecuación:

$$U.X = Y \quad (13)$$

Sustituyendo (13) en (12) hecho la solución de estos dos sistemas equivale a resolver el sistema original, porque:

$$L.U.X = L.(U.X) = L.Y = B \quad (14)$$

La ventaja de resolver de forma directa es que la matriz L es un sistema triangular inferior que puede determinarse con facilidad mediante una sustitución directa y la matriz U en la ecuación (13) es triangular superior, que puede resolverse fácilmente con una solución por sustitución hacia atrás.

Una factorización de A como se indica, es decir, como el producto de un matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U , si existe se llama factorización LU .

EJEMPLO: Consideremos el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 &= 16 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Cuya matriz de coeficientes es:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 10 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Y su factorización LU es:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Utilizando la ecuación $L.Y = B$ se tiene:

$$L.Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por sustitución hacia adelante tenemos

$$y_1 = 6$$

$$2y_1 + y_2 = 16 \Rightarrow y_2 = 4$$

$$2y_1 - 2y_2 + y_3 = 2 \Rightarrow y_3 = -2$$

Entonces:

$$Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ahora resolviendo $U.X = Y$

$$U.X = Y \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Y se obtiene.

$$x_3 = -1$$

$$x_2 = \frac{4 - 2x_3}{-1} = -1$$

$$x_1 = \frac{6 - 4x_3 - 3x_2}{2} = 4$$

Por lo tanto, la solución para el sistema dado es:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Conceptos sobre mecánica de materiales

La mecánica de materiales es una rama de la mecánica que estudia las relaciones entre las fuerzas aplicadas a un cuerpo deformable y la intensidad de las fuerzas internas que actúan dentro del cuerpo. Esta disciplina de estudio implica también calcular las deformaciones del cuerpo y proveer un estudio de la estabilidad del mismo cuando está sometido a fuerzas externas. (Hibbeler (2011))

En el diseño de cualquier estructura es necesario usar los principios de la estática para determinar las fuerzas que actúan sobre y dentro de los diversos miembros. El tamaño de los miembros, sus deflexiones y su estabilidad dependen no solo de las cargas internas, sino también del tipo de material de que están hechos. En

consecuencia, una determinación precisa del comportamiento del material será de importancia vital para desarrollar las ecuaciones necesarias usadas en la mecánica de los materiales. (Hibbeler (2011))

2.1.2.1 ESFUERZO

Los esfuerzos internos de un elemento están ubicados dentro del material y se distribuyen en toda el área que la conforma. A la fuerza interna se denomina esfuerzo axial que es la fuerza por unidad de área; la cual se denota mayormente con la letra griega sigma, y es un parámetro que permite comparar la resistencia de dos materiales, ya que establece una base común de referencia (Quispe (2017))

La intensidad de fuerza o fuerza (ΔF) por área unitaria actuando normalmente sobre un diferencial de área (ΔA), se define por:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (15)$$

Cabe recalcar que la fuerza empleada en la ecuación anterior debe ser perpendicular al área analizada y aplicada en el centroide del área si se trabaja con la ecuación $\sigma = \frac{F}{A}$ para así tener un valor de sigma constante que se distribuye uniformemente sobre el área aplicada.

Si el esfuerzo normal jala o estira elemento se llama esfuerzo de tensión, mientras que si las fuerzas comprimen el elemento se denomina esfuerzo de compresión.

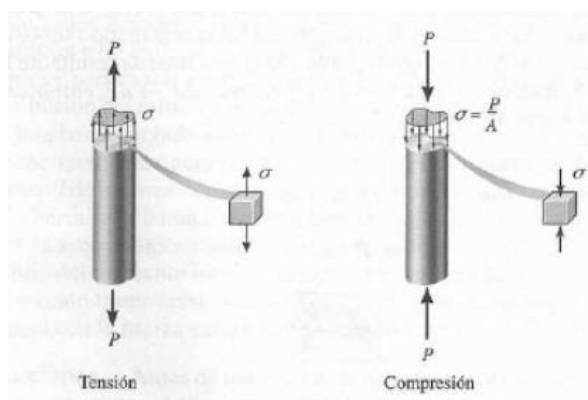


IMAGEN 1: ESFUERZOS NORMALES DE COMPRESION Y TENSION

2.1.2.2 DEFORMACION

Cuando se aplica una fuerza a un cuerpo, esta tiende a cambiar la forma y tamaño del cuerpo. A esos cambios se les llama deformación y esta puede ser visible o prácticamente inadvertida. En sentido general la deformación de un cuerpo no será uniforme a través de su volumen, por lo que el cambio en la geometría de un segmento de línea dentro del cuerpo puede variar a lo largo de su longitud. (Hibbeler (2011))

El alargamiento o contracción de un segmento de línea por unidad de longitud se llama deformación unitaria normal. Por ejemplo sea una barra que tiene una longitud inicial (L_0) la cual está sometida a un esfuerzo de tensión, dicha barra

incrementara su longitud o sufrirá un alargamiento (δ). Entonces la deformación unitaria axial (ε) se define como el cociente entre dicho alargamiento y la longitud inicial de la barra. (Hibbeler (2011))

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} \quad (16)$$

Se debe notar que la deformación unitaria axial es una cantidad adimensional, ya que es una relación entre dos longitudes. También se puede establecer en términos de porcentaje, en la mayoría de casos reales estas deformaciones son muy pequeñas, pero a la vez deben de ser controladas según los reglamentos y normas indicados para las estructuras y materiales.

2.1.2.3 DIAGRAMA DE ESFUERZO DEFORMACION

El diagrama esfuerzo deformación unitaria es una curva que nace al relacionar los valores de diferentes esfuerzos sobre un mismo material con sus respectivas deformaciones unitarias en el espécimen y luego graficar estos resultados, poniendo en el eje de las abscisas las deformaciones, y en el eje de las ordenadas los esfuerzos a los cuales ha sido sometido el espécimen. De esta manera se observa que los diagramas son similares si los especímenes son del mismo material, pudiendo clasificar mediante este diagrama a los materiales en dos grupos los materiales dúctiles y materiales frágiles. Los materiales dúctiles pueden soportar grandes esfuerzos y por ende sufrir grandes deformaciones antes de fallar; mientras que los materiales frágiles, no sufren grandes deformaciones antes de que fallen o lleguen a su punto de rotura. Sin embargo se debe tener en cuenta que nunca dos diagramas de esfuerzo deformación unitaria en un espécimen del mismo material será exactamente igual a otro del mismo material (Quispe (2017)).

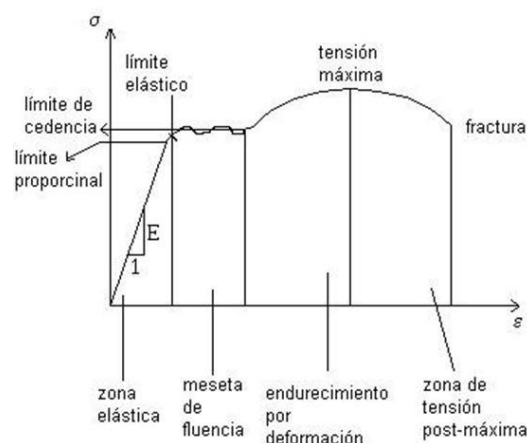


IMAGEN 2: DIAGRAMA ESFUERZO DEFORMACION

ELEMENTOS DEL DIAGRAMA ESFUERZO DEFORMACION

- **Límite de proporcionalidad:** Es el tramo donde la relación entre el esfuerzo y la deformación es lineal

- **Límite de elasticidad:** Mas allá de este límite, el material no recupera su estado o forma inicial al ser retirada la carga, por lo tanto, queda con una deformación permanente.
- **Punto de fluencia:** Aparece en el diagrama un considerable alargamiento o cedencia, sin el correspondiente aumento de carga. Este fenómeno no se observa en los materiales frágiles.
- **Esfuerzo último:** Es la máxima ordenada o valor del esfuerzo del diagrama de esfuerzo deformación unitaria.
- **Punto de ruptura real:** Es el punto en donde el material falla.

Se puede observar que los límites de proporcionalidad, el límite de elasticidad y el punto de fluencia son cercanos, se admite la consideración que para la mayoría de puntos es el mismo punto. Por otro lado, si el material llega al punto de cedencia, este dejara de tener un comportamiento elástico, por lo tanto, el comportamiento lineal entre el esfuerzo y la deformación dejara de existir.

2.1.2.4 LEY DE HOOKE

En todo diagrama esfuerzo deformación, la línea recta al inicio del grafico indica que la deformación es directamente proporcional al esfuerzo en el tramo elástico. Este principio es conocido como la Ley de Hooke. Asimismo, la proporción representada por la pendiente de la recta es constante para cada material y se llama módulo de elasticidad o módulo de Young, en honor a Thomas Young quien publicó en 1807 un trabajo sobre el tema y está representado en la mayoría de casos por E, este valor representa la rigidez de un material.

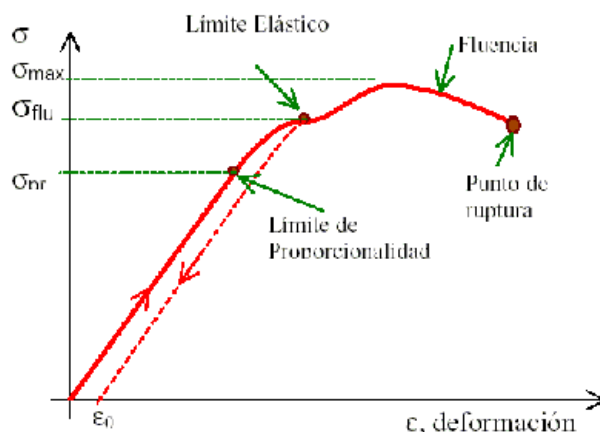


IMAGEN 3: DIAGRAMA DE ESFUERZO-DEFORMACION REDUCIDO

En el anterior grafico se puede deducir que la tangente o pendiente del segmento recto estará dado por el cociente entre el esfuerzo aplicado y la deformación unitaria sufrida por un espécimen de un material específico:

$$tg\theta = E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (17)$$

Teniendo en consideración las definiciones presentadas de esfuerzo y deformación tenemos que:

$$\sigma = \frac{F}{A} \text{ y } \varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

Entonces reemplazando en la ecuación que define al módulo de elasticidad:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\delta}{L}} = \frac{F \cdot L}{A \cdot \delta} \quad (18)$$

Despejando la deformación de (18):

$$\delta = \frac{F \cdot L}{A \cdot E} \quad (19)$$

Despejando la fuerza F o también puede ser representada por P

$$F = P = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \delta \quad (20)$$

La constante AE/L es la constante de proporcionalidad conocida como rigidez de la barra, dicha rigidez es la fuerza o momento necesario para producir un desplazamiento o rotación unitaria en la dirección de la fuerza aplicada, conocida con la letra K

$$K = \frac{A \cdot E}{L} \quad (21)$$

El otro factor δ es la deformación lineal (en dirección axial) de la barra, conocida en los software de aplicación con la letra U.

Reemplazando (21) en (20) para hallar la fuerza F o P se tiene que:

$$P = K \cdot \delta \quad (22)$$

Esta expresión es conocida como Ley de Hooke. La cual representada matricialmente se representa como:

$$[P] = [K] \cdot [\delta] \quad (23)$$

2.1.2.5 SOLIDO RIGIDO

Si un sólido sometido a un conjunto de fueras alcanza el equilibrio sin sufrir deformaciones o modificaciones de su forma original, o dichas modificaciones son despreciables respecto a su movimiento, se denomina solido rígido. Un sólido rígido se caracteriza por una distribución continua de la materia y por la invariabilidad de las distancias relativas entre cualquiera de los puntos que lo constituyen. Las ecuaciones de la estática, de la cinemática y de la dinámica son suficientes para definir el comportamiento de este tipo de sólidos. (Bustanza (2015))

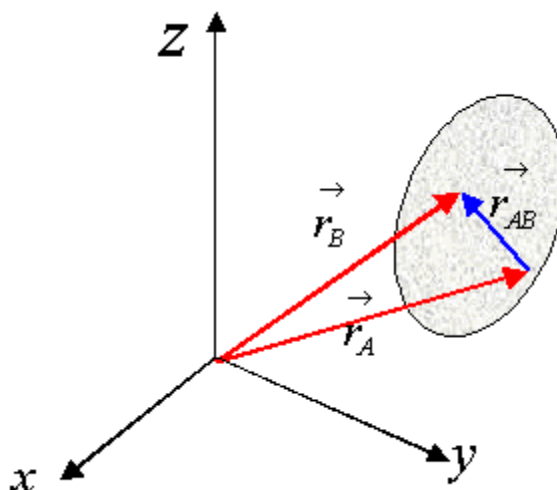


IMAGEN 4: SOLIDO RIGIDO

Los sólidos rígidos parten de una idealización de un sólido de forma genérica el cual está sometido a un sistema de fuerzas. Como consecuencia de estas fuerzas el sólido puede trasladarse o girar mas no deformarse.

2.1.2.6 SOLIDO DEFORMABLE

Si un sólido sometido a un conjunto de fuerzas alcanza el equilibrio produciéndose modificaciones de su forma original, entonces se adopta el modelo de un sólido deformable. (Bustinza (2015))

Dicho modelo considera una distribución continua de la materia, así como la variación, también continua de las distancias entre cualesquiera de los puntos lo constituyen. Para establecer las ecuaciones generales que gobiernan el comportamiento mecánico de los sólidos deformables, es necesario complementar las ecuaciones de la estática, cinemática y dinámica con ecuaciones que relacionen las modificaciones de forma del sólido con las fuerzas que se producen en el interior del mismo debidas a este cambio de forma.

2.1.2.7 CARGAS EN ESTRUCTURAS

Según la norma E 020 las cargas son fuerzas u otras acciones que resulten del peso de los materiales de construcción, ocupantes y su pertenencia, efectos del medio ambiente, movimientos diferenciales y cambios dimensionales restringidos. En el caso de los muros de contención las cargas principales son el empuje de tierra, agua o elemento que la estructura este conteniendo, las cargas de viento también pueden ser tenidas en cuenta pero debido a que las estructuras tienen un grosor en la pantalla considerable, estas pueden ser despreciadas, en esta investigación se centra el estudio sobre las cargas horizontales las cuales serán de naturaleza puntual ejercidas sobre la pantalla del muro ya que ese es el comportamiento que la mayoría de muros de contención tienen siendo las fuerzas ejercidas sobre el talón o cimentación despreciables o no serán parte del análisis de la presente tesis.

2.1.2.8 REACCION O TIPOS DE APOYO

Todas las estructuras deben poseer un apoyo de una manera estable para que se mantenga en equilibrio. Todas las cargas momentos extremos deben ser resistidos

por uno o varios apoyos, estos apoyos pueden ser de diferente naturaleza y ofrecen diferentes reacciones.

2.1.2.8.1 APOYO ARTICULADO MOVIL

Es libre el movimiento de la sección del vínculo en la dirección del eje paralelo a la superficie de donde está ubicado el apoyo así como el giro en el plano XY. La reacción se reduce a una fuerza perpendicular al posible desplazamiento del apoyo. Equivale por tanto a una incógnita, el módulo de reacción. (Bustanza (2015))

Este tipo de apoyo se materializa en la práctica de diversas formas peor la más común es cuando se presenta sobre una rueda o rodillo.

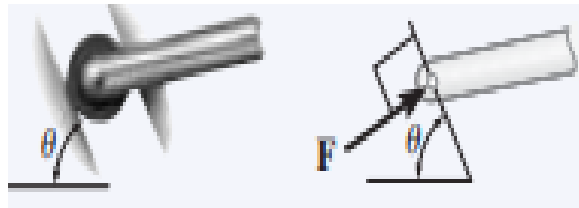


IMAGEN 5: APOYO ARTICULADO MOVIL

2.1.2.8.2 APOYO ARTICULADO FIJO

El desplazamiento está impedido tanto en la dirección del eje X como en la del eje Y, pero el giro en el plano XY no lo está. La reacción en este caso es una fuerza de componentes R_x y R_y . Equivale por lo tanto a dos incógnitas. (Bustanza (2015))

Las reacciones son dos componentes de fuerza, o la magnitud y la dirección de la fuerza resultante en dos dimensiones. (Hibbeler (2010))

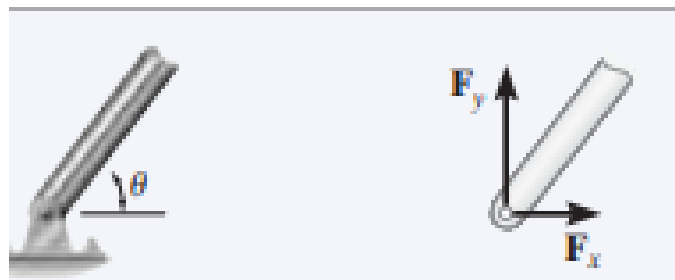


IMAGEN 6: APOYO ARICULADO FIJO

2.1.2.8.3 APOYO EMPOTRADO

Están impedidos los desplazamientos en las direcciones de los ejes X e Y, así como el giro en el plano XY, quedando, por tanto, inmoviliza la sección A del apoyo. La reacción se compone de una fuerza resultante R_A , que se descompone en las reacciones R_{AX} y R_{AY} , y de un momento M_A , perpendicular al plano XY. Entonces u empotramiento equivale a tres incógnitas (Hibbeler (2010)).

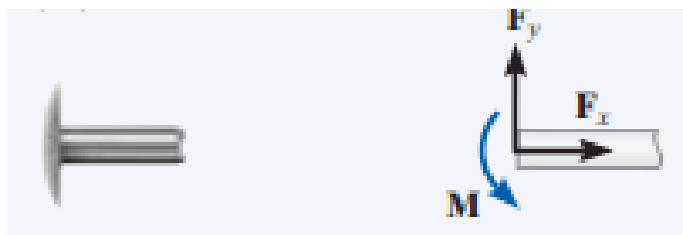


IMAGEN 7: APOYO EMPOTRADO

2.1.2.9 MODULO DE POISSON

Todo elemento solicitado a carga axial experimenta una deformación no solo en el sentido de la fuerza axial sino también según el eje perpendicular, o sea, toda tracción longitudinal con alargamiento implica una contracción transversal.

El coeficiente de Poisson es la relación de la deformación perpendicular a la axial

$$\nu = -\frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_A} \quad (24)$$

2.1.3 Muros de contención

Los muros de contención son estructuras que mayormente son construidos de material noble como es el concreto, también presentan acero en su estructura formando así el concreto armado, pero también pueden ser construidos de otros materiales como acero, tierra apisonada, etc. cuya función principal es la de ser un elemento de contención de un volumen de suelo, encargados de soportar este empuje para que el terreno no se deslice por diferentes razones ya sea por el peso propio del volumen de suelo, la presencia de agua que haga inestable el terreno, una sobrecarga que se encuentre sobre esta masa de suelo como por ejemplo una edificación. En general, dichas cargas vivas y muertas, son representadas en forma de cargas distribuidas y después por conceptos de estática estas dan una resultante que es una fuerza puntual, que es el motivo de esta tesis, estudiar el comportamiento de los elementos estructurales frente a cargas horizontales puntuales aplicadas horizontalmente a la pantalla del muro de contención. (Torres (2008))

2.1.3.1 DEFINICION DE MURO DE CONTENCION

Muro es una estructura permanente, relativamente rígida y continua, que de forma activa o pasiva produce un efecto estabilizador sobre una masa de terreno desequilibrado, natural o artificial que se encuentra ubicada en su parte posterior (Flores (2017))

En consecuencia a este concepto un muro de contención es un elemento que sirve para soportar el empuje de tierra y otros materiales, estos elementos pueden ser construidos de diferentes materiales como concreto armado, concreto ciclópeo, suelo reforzado, entre los más usados; debido a su amplia e importante aplicación se tienen diferentes tipos de muros considerándose en general las siguientes tipologías:

- Según la función que cumplen en el terreno
- Según la forma en como contrarrestan los esfuerzos del terreno

- Según los materiales que son empleados para su fabricación

2.1.3.2 TIPOS DE MUROS DE CONTENCIÓN

2.1.3.2.1 MUROS DE GRAVEDAD

Son aquellos construidos de concreto ciclópeo y su estabilidad está ligada al peso propio de este y al suelo sobre el que se apoya. (DAS 2001:445) Generalmente estos muros son diseñados para alturas moderadas y llevan concreto de baja calidad, así como no dependen de refuerzo, por lo que podría considerarse atractivos por su bajo costo si la altura es baja. CODUTO 2001: 738 A su vez también pueden ser construidos por mampostería o de piedras con mortero debido a su gran masa. Para conservar la economía se recomienda tener la base más angosta posible que asegure la estabilidad de vuelco y al deslizamiento y que no origine presiones mayores a las permisibles. Por lo que estos muros en la actualidad están en desuso ya que no se recomienda construir muros de contención de baja altura, ya que no es económicamente rentable, ya que es mejor contener grandes masas de tierra. (Ballón (2017))



IMAGEN 8: MURO DE CONTENCIÓN POR GRAVEDAD

2.1.3.2.2 MUROS EN VOLADIZO

Estos muros también llamados de Cantiléver o ménsula, son aquellos construidos con concreto armado y están compuestos básicamente por un muro delgado y una loza o zapata de base. Estos muros resisten al empuje de tierra y logran estabilidad debido a su forma en “T”, de tal manera que la tierra ubicada en la parte posterior de la zapata ayuda a contrarrestar el vuelco y aumenta la fricción entre el suelo la estructura lo que genera mayor seguridad frente al deslizamiento. (Torres 2008 5-6)

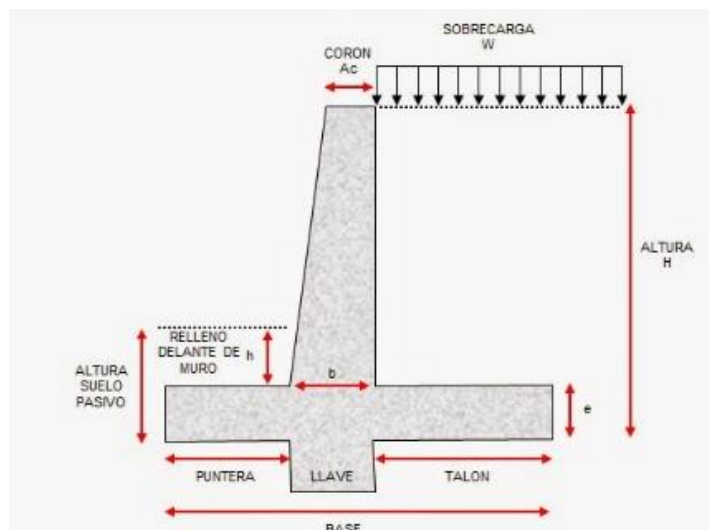


IMAGEN 9: MURO DE CONTENCIÓN EN VOLADIZO

2.1.3.2.3 MUROS CON CONTRAFUERTE

Este tipo de muros son muy parecidos a los muros de voladizo, con la diferencia de tener transversalmente elementos que unen al muro con el cimiento. Estos se presentan a intervalos regulares y tienen como objetivo reducir los momentos flectores las fuerzas de corte (DAS: 2001 446). Como indica Harmsem, los contrafuertes trabajan a tracción (Harmsen 2002 361) lo cual no es eficiente pues se sabe que el concreto trabaja a compresión. Por esta razón muchas veces el colocan el contrafuerte delante del muro, así logrando que estos trabajen a compresión. La desventaja de los contrafuertes se encuentra en que ocupan espacio que podrían ser usados para otro uso

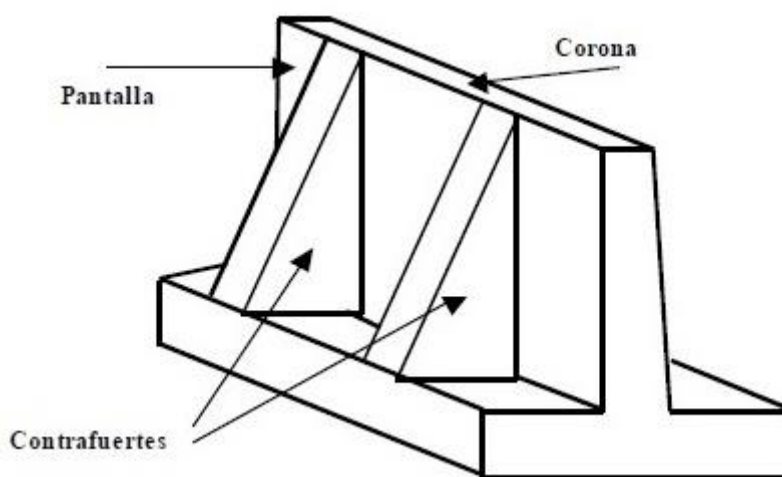


IMAGEN 10: MURO DE CONTENCIÓN CON CONTRAFUERTE

2.1.3.2.4 ESTRIBOS DE PUENTES

Los estribos de un puente son aquellos muros que aparte de resistir el empuje lateral soporta las cargas provenientes del puente (Harmsen 361)

las cuales pueden ser cargas muertas o permanentes, por ejemplo entre otras.

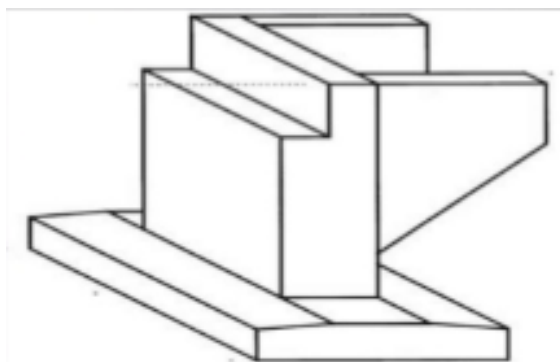


IMAGEN 11: ESTRIBO DE UN PUENTE

2.1.3.3 SOLICITACIONES EN MUROS DE CONTENCION

Las solicitaciones o fuerzas actuantes en los muros de contención se dan en las dos direcciones tanto en el eje X como en el eje Y. la mayoría de cargas se presentan paralelas al eje X, las cuales pueden ser: la interacción que existe entre el pavimento y el muro en el caso que se trate de un estribo de puente, el empuje pasivo del volumen de tierra contenido, el empuje activo producido por el volumen de tierra que contiene el muro, la presión hidrostática que genera si habría un volumen de agua contenido en uno de los lados del muro, y la más importante la fuerza cortante basal producida por un sismo la cual se puede hallar de diferentes formas, la cual se presenta de forma horizontal en la base de la estructura y la cual se distribuye a lo alto de toda la estructura mediante un factor de distribución que está definido en el reglamento Nacional de Edificaciones. Pero sin embargo también existen cargas horizontales como es el caso del peso propio del muro, el peso de el volumen o agua contenido y la sobrecarga en caso haya pavimento sobre un estribo de puente, pero estas fuerzas son menores y debido a que todo muro de contención trabaja a gravedad estas fuerzas se compensan, pero en el caso de las fuerzas horizontales no ocurre esto.

2.1.4 Método de los elementos finitos (MEF)

La ingeniería estudia muchos fenómenos físicos que pueden ser modelados matemáticamente con relativa precisión mediante el uso de ecuaciones diferenciales. Estas por lo general son de difícil solución analítica mediante los métodos clásicos. El método de los elementos finitos (MEF) permite una evaluación aproximada de las ecuaciones diferenciales que modelan cualquier fenómeno físico (Encizo (2014))

Los fundamentos del MEF se dieron a conocer gracias a los avances en el campo de la aeronáutica a mediados de la década de 1940. Algunos científicos e ingenieros que investigaron y publicaron los métodos articulados relacionados al MEF, fueron: Argyris, Courat, Turner, Clough y Zienkiewics. Por otro lado, alguno de los problemas que abarcan el método está relacionados con el análisis de esfuerzos, flujos de materia, transferencia de calor y dinámica aplicada, entre las distintas áreas

La solución de problemas estructurales es la aplicación más común hoy en día, existiendo en el mercado software especializado íntegramente en este campo. Con el uso de estos, el diseñador puede reducir significativamente el tiempo que invierte en el análisis, además de optimizar los resultados finales.

La característica principal del MEF es que descompone el sólido de análisis en partes pequeñas de determinada geometría, denominada elementos finitos, de tal manera que la precisión del método depende directamente del número de elementos. La agrupación de todos los elementos de una región es denominada malla

La aproximación de cada método es usualmente polinomial dependiendo de cómo cambie la variable de estudio. Por ejemplo, para un problema de transferencia de calor, la variable es temperatura. Por lo tanto, esta aproximación es un tipo de interpolación sobre cada elemento, donde se asume que la variable es conocida en determinados puntos de este, denominados nodos, localizados en la periferia de los elementos. (Encizo (2014))

Finalmente, todos los fenómenos físicos son sistemas continuos, es decir, poseen un número infinito de soluciones, en cambio un sistema discreto tiene un número finito de soluciones, por ello el fin de este método es conocer las soluciones de un sistema continuo a partir de la discretización de este sistema en elementos finitos de una geometría especificada.

2.1.4.1 Historia de los elementos finitos

Por novedoso que parezca, el concepto del MEF tiene varios años de presentación desde su enunciado inicial, el cual se inició basándose en el cálculo diferencial e integral propuesta y desarrollada por Newton.

Richard Courant (1943) establece las bases del MEF tal como se conoce hoy en día. Estudio el problema de la torsión mediante el principio de la energía potencial y de la interpolación polinomial sobre subregiones triangulares, las cuales fueron propuestas por Turner

En 1947 Levy desarrollo el método de flexibilidad y fuerza. Posteriormente en 1953, presento la aplicación de un nuevo método en forma matricial “El método de rigidez desplazamiento”. Este método resulta una alternativa al método estático de estructuras de aeronaves. Sin embargo, sus ecuaciones requerían de gran dedicación y eran muy laboriosas para su solución manual, no obstante, se presentaban muy factibles para su resolución en ordenadores digitales, los cuales eran escasos en esa época. Por esta razón, su método de solución numérica tuvo que esperar el advenimiento masivo de las computadoras digitales de alta velocidad para hacerse popular. En aquella época, los problemas estructurales se limitaban a aproximadamente cien grados de libertad.

En aquel año, Turner, de la empresa de aviones Boeing, presenta los elementos triangulares formulados bajo la hipótesis de tensión plana para analizar el fuselaje de un avión. Este trabajo marco el comienzo del uso del MEF.

Luego, Clough (1960), introdujo el nombre de Método de Elementos Finitos al procedimiento estudiado. Nuevos elementos y procedimientos para el análisis de tensiones fueron desarrollados

El siguiente periodo, entre 1962 y 1972, fue llamado como la edad de oro del método o la “generación variacional”. Melosh en 1963, mostro la formulación del MEF como una forma de Rayleigh-Ritz basado en el principio de energía potencial mínima. Surgiendo tres líneas de investigación: Argyris y la FORMULACION DUAL DE LOS METODOS DE ENERGIA, Turner el MÉTODO DE RIGIEZ DIRECTA y finalmente Melosh y la COMPATIBILIDAD ENTRE ELEMENTOS COMO BASES DE ESTIMACIÓN DE ERROR Y CONVERGENCIA. En 1965, aparecen las aplicaciones a otras áreas no estructurales tales como la transferencia de calor.

En 1967, aparece el primer libro de elementos finitos: The finit element Methods in engineering science, de Zienkiewicz y Cheung.

Aparecen los primeros programas computacionales: Ansys, Aska y Nastran que incluyen una amplia variedad de tipos de elementos y análisis. Irons desarrolla la formulación isoparamétrica y técnicas relacionadas. En la década del setenta, se consolida la tecnología. Surgen las formulaciones híbridas y mixtas. Se genera una nueva corriente en temas como la “estimación de error”, “fundamentos matemáticos” y “mallados geométricos”

La década del ochenta se caracteriza por el desarrollo de preprocesadores. Aparecen los textos de Thomas J. R. Hughes: The Finite element Method: Linear static and dynamic finite element analysis (1985) y de K. J. Bathe: Finite Element Procedures in engineering analysis (1982). En esta misma década, con la mejor de hardware disponible en el mercado, la aplicación del MEF vivió un auge sin precedentes. El rápido y evolutivo mundo de la computación impulsaría a diferentes compañías de software a incursionar en el desarrollo de este tipo de aplicaciones a que le MEF había pasado las barreras de sus orígenes para el análisis estructural y se había adecuado para una infinidad de aplicaciones y ramas de estudio que van desde la ingeniería de alimentos, la ingeniería mecánica, la ingeniería aeroespacial hasta llegar a la simulación de sistemas atmosféricos y predicción del estado del tiempo.

Así, desde hace ya más de medio siglo grandes avances se han hecho en la aplicación del MEF para solucionar sistemas complejos para la ingeniería y las ciencias puras. Ingenieros, matemáticos y otros científicos sin lugar a duda continuaran desarrollando nuevas aplicaciones para este método en diferentes disciplinas y áreas; ya que la necesidad de productos más confiables, eficientes y optimizados está creando una tendencia para el desarrollo de nuevos productos. La empresa automotriz es un ejemplo de la aplicación de estos sistemas de simulación para la optimización del desempeño de vehículos, se ha permitido reducir costos al poder hacer una

infinidad de pruebas a la estructura de los automóviles en una menor cantidad de tiempo y sin necesidad de colisionar un solo vehículo, teniendo la certeza que el diseño es confiable y, sobre todo, porque salvaguarda la integridad de los consumidores

2.1.4.2 Introducción al método de elementos finitos

El MEF es un método numérico para la solución de problemas de ingeniería y otros de alto grado de complejidad donde comúnmente se involucran geometrías complejas, presencia de distintos tipos de carga y determinación de propiedades distintas de materiales, por lo que generalmente no es posible obtener una solución analítica directa con expresiones matemáticas.

Se entiende por solución analítica al procedimiento matemático que llega a la solución utilizando expresiones matemáticas para obtener valores para una incógnita; esta situación es válida a lo largo del cuerpo estudiado y, por lo tanto, es válida también en cualquier sección del cuerpo en un número infinito de localizaciones dentro del cuerpo. Estas soluciones analíticas, generalmente, requieren solución de ecuaciones diferenciales a sean parciales u ordinarias, las cuales, debido a que se analizan geometrías complejas, cargas no distribuidas y determinación de propiedades de materiales, no son posibles de resolver o son muy complejas para su solución

Sin embargo, la formulación del MEF que se propone por medio del uso de la discretización permite que el problema sea planteado como una serie de ecuaciones simultáneas relativamente sencillas de resolver en lugar de requerir la resolución de ecuaciones diferenciales mucho más complejas

Con el fin de facilitar el análisis estructural, cada elemento estructural tiene que ser dividido o “discretizado”. Mediante el MEF es posible obtener valores aproximados de las incógnitas en un número finito de ubicaciones imaginarias, dentro del cuerpo de la estructura que en este caso será un muro de contención para poder obtener resultados aproximados al resultado exacto. La exactitud de los resultados depende directamente del número de elementos usados para la discretización del elemento

2.1.4.3 Conceptos generales del método de los elementos finitos

La idea general del MEF es la división de un elemento continuo en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del elemento continuo regirán también en el elemento pequeño (elemento finito). De esta forma, se consiguen pasar de un sistema continuo con infinitos grados de libertad que solo pueden ser analizados por métodos analíticos; y, además, es regido por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales a otro sistema con un número finito de grados de libertad cuyo comportamiento se modela mediante un sistema de ecuaciones lineales y pueden ser resueltos mediante el método matricial de rigidez

En el caso de estructuras tridimensionales tales como presas, los elementos mecánicos se dividen en superficies imaginarias (superficies o áreas de forma geométrica como por ejemplo triángulos, cuadriláteros en la vista de perfil de la estructura que debe de ser continua) de tal forma que la estructura total en estudio se aproxime mediante el conjunto de elementos finitos en que se subdivide.

Los elementos se definen por un número discreto de puntos llamados nodos, estos se conectan entre sí a los elementos de la estructura. Sobre estos nodos se materializan las incógnitas fundamentales del problema. En el caso de elementos estructurales, estas incógnitas son los desplazamientos nodales, ya que a partir de estos podemos calcular el resto de incógnitas como: tensiones, deformaciones, momentos. A esas incógnitas se les denomina grados de libertad de cada nodo del modelo. Los grados de libertad de un nodo son las variables que nos determinan el estado y la posición del nodo.

Existen diferentes formas diferentes maneras de formular las ecuaciones del sistema para el método de los elementos finitos, pero en este caso se utilizara la de aproximación directa donde las ecuaciones del sistema se ensamblan directamente de las ecuaciones que gobiernan el problema; reconociendo que con esta aproximación únicamente se podrá analizar elementos de formas o geometrías simples como es el caso de la sección de un muro de contención, pero si se desearía analizar otras formas o geometrías se deberían usar otras aproximaciones como la aproximación variacional en la cual se requieren usar funciones obtenidas del cálculo variacional, es decir, encontrando valores extremos de un funcional por ejemplo la energía potencial; esta aproximación tiene la ventaja de que se pueden analizar formas y geometrías complejas.

2.1.4.4 Tipos de elementos finitos

Según Quispe Panca (2017) El tipo de elemento finito a utilizarse depende del tipo de problema que se quiera abordar. Los elementos finitos se clasifican de acuerdo a las cargas que actúan en la estructura y su comportamiento.

2.1.4.4.1 Elemento armadura

El elemento armadura es uno de los más simples y usados como miembro estructural. Es una barra recta que está diseñada para soportar fuerzas axiales, y, por consiguiente, se deforma solo a lo largo de su eje axial. La sección transversal de la barra puede ser arbitraria, pero sus dimensiones transversales deberán de ser muy pequeñas comparadas con las dimensiones de su eje axial. Este tipo de elementos es usado para el análisis de armaduras en dos, tres dimensiones, En cada nodo existe solo un grado de libertad

2.1.4.4.2 Elemento viga

El elemento viga es otro elemento simple, ya que también es geoméricamente una barra recta con una sección transversal arbitraria,

pero se deforma solo en la dirección perpendicular de su eje axial. La diferencia entre el elemento viga y el elemento armadura es la cara que puede soportar cada una. El elemento viga soporta cargas transversales que resultan en deformación transversal, mientras que en los elementos armadura no existe deformación transversal.

2.1.4.4.3 Elemento marco

El elemento marco es formulado para modelar una barra recta de una sección arbitraria, el cual puede sufrir deformaciones tanto en su eje axial como en las direcciones perpendiculares a este. Por ello, el elemento marco posee propiedades del elemento armadura y del elemento viga. Es el elemento ideal para modelar muchas de las estructuras que se encuentran en problemas prácticos, ya que a veces es difícil encontrar una estructura que solo sufra deformaciones axiales o transversales. En cada nodo existen seis grados de libertad

2.1.4.4.4 Elemento sólido en dos dimensiones

Este elemento es bidimensional, acepta solo cargas transversales que implican deformaciones en el plano y suele ser representado únicamente por el plano medio de su espesor. Las deformaciones que sufre la placa están en función de x , y e z , son independiente del eje. Las estructuras que se pueden modelar con este elemento son, entre otros, muros de carga de edificios, sujetos a cargas por peso propio, y cargas vivas

2.1.4.4.5 Elemento placa

El elemento placa es utilizado para el análisis de flexiones. Es análogo en dos dimensiones al elemento viga, ya que acepta cargas perpendiculares al plano. La formulación de este elemento es útil, porque al fusionar su comportamiento con el del sólido 2D, se obtiene el comportamiento del elemento cascarón

2.1.4.4.6 Elemento cascarón

El elemento cascarón soporta cargas que actúan en todas direcciones, por lo que acepta flexiones fuera del plano, así como deformaciones en él. Algunos ejemplos prácticos en los que se puede aplicar el elemento cascarón son el modelado de losas y pisos de gran tamaño en edificios, en estructura de especial geometría como son los tanques cilíndricos y esféricos, o en las estructuras de gran tamaño e importancia como el fuselaje de aviones

2.1.4.4.7 Elemento sólido

Es un elemento tridimensional. Un ejemplo de un elemento sólido puede ser un bloque de concreto tal como una zapata de cimentación. En este elemento los vectores de fuerza pueden tener cualquier dirección en el espacio. Un elemento sólido solo puede tener cualquier forma y puede estar formado por cualquier material o combinación de ellos. Tiene seis componentes de esfuerzos: tres normales y tres cortantes. Típicamente, un elemento sólido tiene la forma de tetraedro o hexaedro con superficies curvas o planas

Como el elemento sólido representa el elemento más general, los elementos armadura, viga, marco, placa y cascarón son un caso especial de este elemento. En la realidad, todos los elementos son tridimensionales, esto implica la posibilidad de modelar armadura, vigas, cascarones como elementos sólidos; pero resultaría más complejo crear modelo con ese tipo de elementos. Por esta razón, muchos de los modelos se construyen a partir de objetos en una o dos dimensiones.

2.1.4.5 Estados de esfuerzo y deformaciones

En el estudio de la deformación de un cuerpo elástico, se considera siempre que el cuerpo tiene apoyos con distintos grados de libertad que impide el desplazamiento de las partículas de un cuerpo. Los desplazamientos de un punto cualquiera de un cuerpo se representan por los componentes u, v, w cada uno con sus componentes x, y, z respectivamente

La deformación longitudinal ϵ_x se conoce también como deformación unitaria que es igual a la división de la deformación en la dirección X entre la longitud inicial. La deformación en la dirección X es la siguiente:

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x \tag{25}$$

Asimismo la deformación angular o tangencial ϕ_{xy} es la variación angular que sufre el Angulo recto formado por las caras del elemento; estos ángulos son $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$; por lo tanto la deformación angular en la cara XY se expresa de esta manera:

$$\phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \tag{26}$$

Generalizando para un elemento tridimensional:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ y } \phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \tag{27}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \text{ y } \phi_{yz} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{28}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} \text{ y } \phi_{xz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{29}$$

La necesidad de resolver problemas de elasticidad mucho más complicados nos lleva a obtener procedimientos para dividir un sólido de medio continuo en otro de elementos finitos mucho más fácil de resolver. Para lograr este fin, es necesario reconocer el tipo de comportamiento que va a tener el elemento estructural, así como la forma geométrica que esta tiene. Es así que se distingue varios tipos de estado de esfuerzo y deformación con características propias que se describen a continuación.

2.1.4.6 Estado de esfuerzo y deformación tridimensional

Un cuerpo sólido con dimensiones variadas, que se encuentra sometido a cargas en dirección de los tres ejes coordenados, es el estado más general de esfuerzo y deformación que se observa en la realidad. Este tipo de estado posee esfuerzo y deformación en dirección de los tres ejes coordenados (X, Y, Z), a los cuales se les representara mediante los vectores u, v, w que, a su vez, están constituidos por componentes en los ejes coordenados X, Y, Z respectivamente.

Si se considera un sólido extremadamente pequeño (elemento finito) como un elemento cuyo comportamiento del material elástico es lineal, entonces este debe de cumplir la Ley de Hooke expresada como $\sigma = c * \varepsilon$; donde σ representa la matriz esfuerzo, c representa la matriz formada con las constantes del material (matriz de elasticidad) y ε representa la matriz de deformaciones unitarias.

Cuando el elemento es de material isótropo y linealmente elástico, debe satisfacer la Ley de Hooke; para ello, el estado de deformaciones en función de los componentes del esfuerzo será:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \wp_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \wp_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \wp_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \end{cases} \quad (31)$$

Donde:

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ y ε_z son las deformaciones lineales

\wp_{xy}, \wp_{yz} y \wp_{xz} son las deformaciones angulares

Además $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

En forma matricial las anteriores ecuaciones (30) y (31) quedan de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{xy} \\ \phi_{yz} \\ \phi_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \quad (33)$$

En (32) despejando los esfuerzos axiales de σ :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E-E\nu}{2\nu^2+\nu-1} & -\frac{E\nu}{2\nu^2+\nu-1} & -\frac{E\nu}{2\nu^2+\nu-1} \\ \frac{E\nu}{2\nu^2+\nu-1} & -\frac{E-E\nu}{2\nu^2+\nu-1} & -\frac{E\nu}{2\nu^2+\nu-1} \\ \frac{E\nu}{2\nu^2+\nu-1} & -\frac{E\nu}{2\nu^2+\nu-1} & -\frac{E-E\nu}{2\nu^2+\nu-1} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (34)$$

Extrayendo el factor común:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (35)$$

De igual modo para el esfuerzo de torsión τ :

$$\begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \phi_{xy} \\ \phi_{yz} \\ \phi_{xz} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Reemplazando $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \phi_{xy} \\ \phi_{yz} \\ \phi_{xz} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Ensamblando las matrices de $\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$ y de $\begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1+2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \rho_{xy} \\ \rho_{yz} \\ \rho_{xz} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Donde la matriz de propiedades elásticas del material y depende del estado de esfuerzo y deformaciones C es:

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1+2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

La matriz C está definida en términos de las tres constantes de los materiales elásticos más importantes de la mecánica de sólidos: el módulo de elasticidad (E), la relación de Poisson (ν) y el módulo de cortante (G)

2.1.4.7 Estado de esfuerzo plano

Es cuando el espesor del material o espécimen es mucho más pequeño que las otras dimensiones. Si todas las cargas están aplicadas en el plano, entonces las deformaciones son funciones de X y Y.

El estado de esfuerzo plano, requiere que el cuerpo elástico tenga una dimensión muy pequeña en la dirección z en comparación con las otras dos dimensiones en la dirección X y Y. para este estado las cargas aplicadas son paralelas al plano XY y distribuidas uniformemente en todo su espesor, lo cual implica que solo están presentes en función de X y Y. Esto nos permite asumir que $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ son nulos; por lo tanto, son nulos también $\varepsilon_z, \rho_{yz}, \rho_{zx}$. Además, solo existen los desplazamientos u y v. (Quispe (2017)) En base a esto, las ecuaciones de desplazamiento y deformación son las siguientes:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \rho_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

En el estado de esfuerzo plano, los esfuerzos solo actúan paralelos al plano XY y son nulos en la dirección z, (perpendicular al plano); es decir, se cumple $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. En cambio la deformación ε_z no es nula, por lo se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + 0) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + 0) \\ \varepsilon_z = \frac{0}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{array} \right. \quad (39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ 0 = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ 0 = \frac{\tau_{xz}}{G} \end{array} \right. \quad (40)$$

La forma matricial de las (39) y (40) serán de la forma:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \rho_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (41)$$

Además, si $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, entonces $\frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}$

Despejando el vector de esfuerzos

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-E}{\nu^2-1} & \frac{-E\nu}{\nu^2-1} & 0 \\ \frac{-E\nu}{\nu^2-1} & \frac{-E}{\nu^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(\nu+1)} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \rho_{xy} \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} * \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \rho_{xy} \end{pmatrix} \quad (43)$$

Donde la matriz de propiedades elásticas del material y depende del estado de esfuerzo y deformaciones para la relación esfuerzo-deformación para un material isotrópico (propiedades materiales iguales en todas las direcciones) con estado de esfuerzo plano es la siguiente:

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} * \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (44)$$

2.1.4.8 Estado de deformación plano

La deformación plana se aplica en cuerpos cuya dimensión Z es más larga a comparación de las otras dos dimensiones. Las cargas aplicadas pueden ser perpendiculares al eje Z.

Siendo similar al estado de esfuerzo plano, con la única diferencia de que el espesor en la dirección Z es grande, las relaciones matemáticas desplazamiento deformación son las siguientes

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \rho_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Para materiales isotrópicos con un estado de deformación plana, la ecuación constitutiva se obtendrá considerando que en el estado de deformación son nulas en la dirección z, es decir, $\epsilon_z = \rho_{yz} = \rho_{xz} = 0$. Eliminando en la matriz constitutiva total las filas y columnas correspondientes a dichos valores

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1+2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \rho_{xy} \\ \rho_{yz} \\ \rho_{xz} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \rho_{xy} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Factorizando y realizando los arreglos en (45) se tiene:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \phi_{xy} \end{pmatrix} \quad (46)$$

Donde la matriz de propiedades elásticas del material y depende del estado de esfuerzo y deformaciones C del estado de deformación plana será:

$$[C] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Este tipo de estado se aplica a estructuras como muros de contención, túneles, alcantarillas, tuberías, entre otros.

2.1.4.9 Principio de los trabajos virtuales

La herramienta directa y segura para calcular las deformaciones de los elementos como estructuras es la aplicación del principio del trabajo virtual que fue desarrollado por Johann Bernoulli en 1717. Dicha herramienta establece, para el caso de un cuerpo rígido, lo siguiente: “si un cuerpo rígido está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas externas que actúan sobre dicho cuerpo es cero para cualquier desplazamiento virtual del cuerpo” (Beer et al, 2010, 563)

El término virtual se considera como tal debido a que se aplica a la estructura un sistema ficticio de fuerzas. Y esta, a su vez, provoca pequeños desplazamientos ficticios.

2.1.4.9.1 Ley del trabajo virtual para cuerpos elásticos

El principio dado para los cuerpos rígidos es aplicado ahora para los cuerpos elásticos. Estos cuerpos, elementos estructurales utilizados para las construcciones, se rigen bajo la siguiente ley: “si un cuerpo elástico está en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas y permanece en ese estado cuando se le somete a una pequeña deformación virtual, el trabajo virtual exterior realizado por las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo es igual al trabajo virtual interior de deformación realizados por los esfuerzos externos”

Para entender esa ley, consideremos una estructura plana cualquiera que está en equilibrio y sometido a fuerzas externas y con reacciones en los apoyos correspondientes

Ahora aislando un elemento finito cualquiera de la estructura también estará en equilibrio bajo los esfuerzos internos producidos por las fuerzas externas

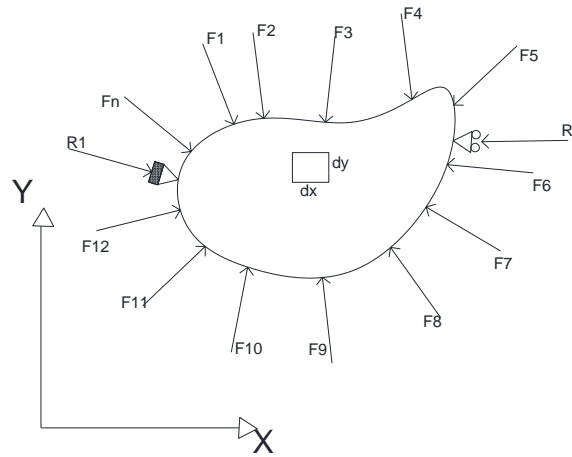


IMAGEN 12: CUERPO GENERAL SOMETIDO A FUERZAS EXTERNAS

Suponiendo que el cuerpo sufre una deformación virtual originada por la acción de las fuerzas externas F_n . Asimismo, las partículas o elementos finitos de área $dx * dy$ también sufrirán deformaciones con los componentes de traslación y giro como una partícula pequeña rígida.

Matemáticamente aplicando la Ley del Trabajo Virtual con la ecuación de equilibrio se tiene que el trabajo por las cargas impuestas es la siguiente:

$$F_1.u_1^g + F_2.u_2^g + F_3.u_3^g + \dots + F_n.u_n^g = \int \sigma.\varepsilon^g .dV \quad (48)$$

Donde:

$F_1.u_1^g + F_2.u_2^g + F_3.u_3^g + \dots + F_n.u_n^g$ es el trabajo realizado por las cargas externas

$\int \sigma.\varepsilon^g .dV$ es el trabajo realizado por las reacciones internas

$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ son las fuerzas externas

$u_1^g, u_2^g, u_3^g, \dots, u_n^g$ son los desplazamientos virtuales producidos por F

σ es el esfuerzo producido en el elemento finito

ε^g es la deformación unitaria virtual producida en el elemento finito

dV es el elemento finito diferencial de volumen del solido

2.1.4.10 Discretización

La idea general del método de los elementos finitos es la división de un continuo en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del continuo o del sólido en general regirán también el del elemento, esto se puede demostrar según el método de aproximación que se le dé al método. En este caso se hace uso de una aproximación directa. De esta forma se consigue pasar de un sistema con infinitos grados de libertad, que es regido por un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de grados de libertad finito cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones lineales.

El método de elementos finitos supone que para solucionar un problema el dominio debe ser discretizado en subdominios llamados elementos. En el caso bidimensional el dominio se subdivide mediante superficies de forma que el volumen total en estudio se aproxime mediante el conjunto de elementos en que se subdivide.

Los elementos se describen por un número discreto de puntos, llamados nodos que conectan entre si los elementos. Sobre estos nodos se materializan las incógnitas fundamentales del problema. En el caso de elementos estructurales estas incógnitas son los desplazamientos nodales, ya que a partir de estos podemos calcular las tensiones, esfuerzos, etc. A estas incógnitas se les denomina grados de libertad de cada nodo del modelo. Por ejemplo, para el caso de vigas los grados de libertad serán: desplazamiento en dirección X, desplazamientos en dirección Y, rotación según el eje Z, temperatura.

2.1.4.11 Elementos triangulares lineales

Un sólido bidimensional puede ser discretizado utilizando los elementos bidimensionales triangulares, los cuales son ampliamente utilizados porque se adaptan fácilmente a geometrías complejas. Una estructura puede ser discretizado en elementos finitos del tipo triangular de tres nodos, ya que son de uso más frecuente debido a la versatilidad y su facilidad de aplicación del Método de Elementos Finitos para elementos triangulares bidimensionales. Su simplicidad hace de esta herramienta ideal para aprender lo que es el análisis del elemento finito (Quispe (2017)).

2.1.4.12 Elemento triangular de tres nodos de Turner

El primer tratamiento de elementos bidimensionales fue presentado por Turner en 1956. El procedimiento consiste en dividir un medio continuo en elementos triangulares de tres nodos, de manera que se logra, para cada uno de ellos, una expresión matemática donde se aplique el principio de la Ley de Hooke $F = K.U$, y posible de ser resuelta mediante métodos matriciales. Este procedimiento permite resolver problemas de elasticidad complicados.

Se considera un elemento triangular que se supondrá que trabaja a tensión plana solamente. Se emplea como sistema de referencia global los ejes X y Y del plano cartesiano.

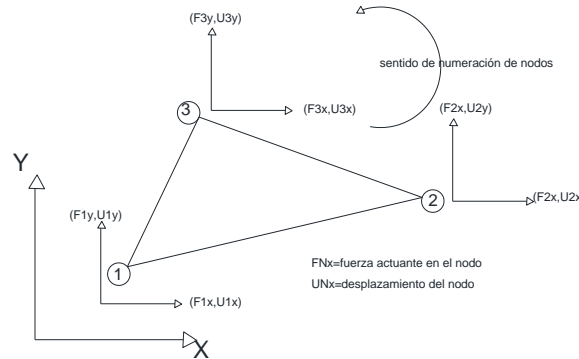


IMAGEN 13: ELEMENTO TRIANGULAR DE TRES NODOS DE TURNER

Quispe Panca (2017) sostiene que en dicho elemento los nodos han sido enumerados en sentido anti horario y en cada uno de ellos se han ubicado sus componentes correspondientes con respecto a fuerza y desplazamiento.

Lógicamente, con este planteamiento y aplicando la LEY DE HOOKE solo se obtendría los desplazamientos en los nodos considerados. Sin embargo, para obtener los desplazamientos en el interior del elemento triangular, se necesita otra expresión que permita calcular los desplazamientos. Debido a esto se partirá de la hipótesis de que “los desplazamientos de los puntos del interior del elemento se aproximan mediante funciones lineales de sus coordenadas”

Así, se tiene que estos desplazamientos presentan en cada nodo dos componentes denominados (u, v) ; y estos, a su vez, están en función de las coordenadas (x, y) en cada nodo. Así, se concluye que los componentes del desplazamiento en un punto genérico están dados por $u(x, y)$ y $v(x, y)$. (Quispe (2017)) Las funciones de interpolación dentro del elemento se consideran lineales:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y \\ v &= v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x + \alpha_6 \cdot y \end{aligned} \quad (49)$$

Las deformaciones unitarias en el interior del elemento triangular se calcularán de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6 \end{aligned}$$

$$\rho_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_5 + \alpha_3$$

Expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \rho_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \quad (50)$$

Donde se puede expresar de la siguiente manera;

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \rho_{xy} \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \quad (53)$$

Reemplazando (51), (52) y (53) en (50):

$$(\varepsilon) = [P].(\alpha) \quad (54)$$

Donde (ε) es el vector de deformaciones unitarias, $[P]$ es la matriz constante y (α) es el vector de coeficientes

Se puede observar que el campo de deformaciones unitarias en el interior del elemento triangular es una constante independiente cuando aplicamos el supuesto que las funciones de interpolación son polinomios de primer grado en X y en Y. Por ello, a este elemento se le denomina “elemento triangular de deformación constante” o también “elemento triangular lineal”, ya que utiliza funciones lineales de desplazamiento en el interior. (Quispe (2017))

Ahora, particularizando las coordenadas x y y para cada nodo del elemento triangular, los desplazamientos deben de estar en relación con los desplazamientos nodales que el elemento va a tener. Así, las coordenadas en el nodo 1 serán (x_1, y_1) , en el nodo 2 (x_2, y_2) y finalmente en el nodo 3 (x_3, y_3) . Entonces las funciones lineales para cada nodo serán:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x_1, y_1) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x_1 + \alpha_3 \cdot y_1 \\ v_1 &= v(x_1, y_1) = \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x_1 + \alpha_6 \cdot y_1 \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u(x_2, y_2) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_3 \cdot y_2 \\ v_2 &= v(x_2, y_2) = \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x_2 + \alpha_6 \cdot y_2 \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} u_3 &= u(x_3, y_3) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x_3 + \alpha_3 \cdot y_3 \\ v_3 &= v(x_3, y_3) = \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x_3 + \alpha_6 \cdot y_3 \end{aligned} \quad (57)$$

En forma matricial (55), (56) y (57) se tiene:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Así, se tiene a continuación:

$$(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (59)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \tag{61}$$

Donde $\{u\}$ es el vector de desplazamientos, $[Q]$ es la matriz de momentos y $\{\alpha\}$ es el vector de coeficientes, quedando la expresión matricial como sigue:

$$(u) = [Q] \cdot (\alpha) \tag{62}$$

Despejando el vector de coeficientes:

$$(\alpha) = [Q]^{-1} \cdot (u) \tag{63}$$

Asimismo, la inversa de la matriz $[Q]$ estará dada por la expresión:

$$[Q]^{-1} = \frac{2}{(x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) + (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)} \begin{bmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 & 0 & x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 & 0 & x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 & 0 & x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 & 0 & x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

Reemplazando para su simplicidad

$$a_1 = x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2$$

$$a_2 = x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3$$

$$a_3 = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$b_2 = y_3 - y_1$$

$$b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

$$c_2 = x_1 - x_3$$

$$c_3 = x_2 - x_1$$

$$2a = a_1 + a_2 + a_3$$

La matriz $[Q]^{-1}$ será:

$$[Q]^{-1} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Reemplazando (63) en (54) se tiene la relación:

$$(\varepsilon) = [P] \cdot [Q]^{-1} \cdot (u) \quad (65)$$

Donde:

$$[P] \cdot [Q]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$[P] \cdot [Q]^{-1} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Reemplazando $[R] = [P] \cdot [Q]^{-1}$ (66)

$$[R] = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Entonces reemplazando el valor de $[R]$ en la ecuación (65) se tiene que:

$$(\varepsilon) = [R] \cdot (u) \quad (66)$$

Donde $[R]$ es la matriz de coeficientes de las coordenadas (x, y) de los nodos

De acuerdo a lo representado en el estudio de esfuerzos y deformaciones se tiene la matriz de propiedades elásticas:

Para el estado de esfuerzo plano :

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} * \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (67)$$

Para el estado de deformación plana

$$[C] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Así la ecuación para el estado de esfuerzo plano viene dada por:

$$(\sigma) = [C].(\varepsilon) \quad (69)$$

Donde:

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}, [C] = \frac{E}{1-\nu^2} * \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, (\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \phi_{xy} \end{pmatrix}$$

Reemplazando la expresión (66) en (69) se tiene:

$$(\sigma) = [C].[R].(u) \quad (70)$$

Donde:

(σ) es el vector de esfuerzos en el elemento

$[C]$ es la matriz de propiedades elásticas del material y depende del estado de esfuerzo y deformaciones

$[R]$ es una matriz de coeficientes de las coordenadas (x, y) de los nodos

(u) es el vector de desplazamientos de los nodos del elemento

2.1.4.13 Matriz de rigidez del elemento triangular

Si se considera que en los nodos del elemento triangular actúan las fuerzas (F_{1x}, F_{1y}) , (F_{2x}, F_{2y}) y (F_{3x}, F_{3y}) . Luego producto de las fuerzas reales actuantes se supondrá unos desplazamientos virtuales que físicamente son posibles y compatibles con la elasticidad del material, pero no necesariamente coinciden con los desplazamientos reales que van a existir en los nodos (Cubo, (2010))

Por lo tanto el vector de desplazamientos virtuales en cada nodo se representa:

$$(u_g) = \begin{pmatrix} u_{1x}^g \\ u_{1y}^g \\ u_{2x}^g \\ u_{2y}^g \\ u_{3x}^g \\ u_{3y}^g \end{pmatrix} \quad (71)$$

Aplicando la ley del trabajo virtual:

$$F_1.u_1^g + F_2.u_2^g + F_3.u_3^g + \dots + F_n.u_n^g = \int \sigma.\varepsilon^g .dV \quad (72)$$

Matricialmente:

$$(F)^T .(u^g) = \int (\sigma)^T .(\varepsilon^g) .dV \quad (74)$$

Además, considerando en la ecuación (66), aplicada a la deformación unitaria virtual y desplazamiento virtual:

$$(\varepsilon^g) = [R].(u^g) \quad (75)$$

Reemplazando (70) y (73) en (74) se tiene que:

$$(F)^T .(u^g) = \int ((u)^T .[R]^T .[C]^T) .([R].(u^g)) .dV \quad (76)$$

$$(F)^T .(u^g) = \int (u)^T .[R]^T .[C]^T .[R].(u^g) .dV \quad (77)$$

Se considera por definición que $\int_{VOLUMEN} dV = VOLUMEN$; entonces:

$$(F)^T .(u^g) = (u)^T .[R]^T .[C]^T .[R].(u^g) .V \quad (78)$$

Simplificando y transponiendo $(F)^T$ y $(u)^T$:

$$(F) = (u) .[R]^T .[C]^T .[R].V \quad (80)$$

$$(F) = [R]^T .[C]^T .[R].V.(u) \quad (81)$$

En la ecuación anterior si se compara con la ecuación básica del análisis matricial $(F) = [K].(u)$, se deduce lo siguiente:

$$[K^e] = [R]^T .[C]^T .[R].V \quad (82)$$

Donde:

$[K^e]$ es la matriz de rigidez del elemento matricial

$[R]$ es la matriz de coeficientes de las coordenadas (x, y) de los nodos

$[C]$ matriz de propiedades elásticas del material y depende del estado de esfuerzo y deformaciones

V es el volumen del elemento triangular

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} * \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ para el estado de esfuerzo plano}$$

$$[C] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \text{ para el estado de deformación}$$

plana

En forma general se tiene que:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores correspondientes a las matrices en la expresión (82) se tiene:

$$[K^e] = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T \cdot \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \cdot V \quad (83)$$

Además el volumen de un triángulo viene dado por $V = e.A$

Y por geometría analítica se sabe que el área de un triángulo, dada sus coordenadas es:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

La forma final que tendrá la matriz de rigidez será como se muestra a continuación. Además, se toma en cuenta siempre que adquiere las mismas características que las matrices de rigidez de los elementos. Entre ella: simetría y diagonal principal siempre con valor positivo

$$[K^e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (84)$$

CAPITULO III

3. METODOLOGÍA

3.1 Ubicación geográfica del estudio

El estudio se realizó a lo largo de todas sus etapas en la ciudad de Puno, en el departamento de Puno, Perú. Debido a que no se requirió desplazarse a otros lugares porque la investigación tenía un fondo más teórico que la necesidad de recolectar muestras o datos de otros lugares.

3.2 Periodo de duración del estudio

El estudio se realizó desde el mes de septiembre del año 2017 y se culminó a finales del mes de octubre del año 2018, debido a que se presentaron percances durante el proceso de realizar tanto el proyecto como el borrador de la tesis que estuvo sujeto a diversos cambios

3.3 Procedencia del Material utilizado

La procedencia del material utilizado para la tesis tanto los textos, documentos, aplicaciones son de carácter público y en algunos casos como textos más que todo son de carácter privado donde se tuvo que pagar para poder obtener estos textos y usar su información para el desarrollo de la investigación

3.4 Población y muestra del estudio

La presente investigación tiene un enfoque cuantitativo, ya que se está trabajando con variables medibles y cuantificables como desplazamientos, esfuerzos, entre otros los cuales se presentan en unidades del sistema internacional de medidas, de tipo explicativo y aplicada ya que se va más allá de la simple descripción de conceptos o fenómenos y tratara de responder las causas de fenómenos físicos a través del MEF. Toda explicación explicativa y aplicada se caracteriza porque los resultados sirven para determinar las características del elemento analizado, además que sirve para profundizar los conocimientos del tema de investigación e incrementarlos para la aplicación en el área.

La presente investigación no cuenta con población ni muestra ya que es una investigación teórica donde se busca establecer un método para el análisis de muros de contención, por lo que tanto la población ni la muestra fueron necesarios y por ello el diseño estadístico tampoco influyo en la investigación.

3.5 Diseño Estadístico

El diseño de la investigación es de tipo descriptivo de comprensión e interpretación por lo que se hacen un estudio de libros, libros electrónicos, revistas, entre otras fuentes y de carácter aplicativo. Con respecto a las fórmulas para hallar la muestra no fueron necesarias para la presente investigación

3.6 Procedimiento

El procedimiento que se siguió para llevar a cabo la presente investigación fue prácticamente la revisión de la bibliografía primero con respecto al método de los elementos finitos y sus aplicaciones, luego libros con respecto a las diferentes formulaciones para el método, para después pasar de lleno a la bibliografía con respecto

a la mecánica de materiales y muros de contención para luego pasar a desarrollar el ejercicio con las plantillas respectivas en el software Excel.

3.7 Variables

La variable independiente es la aplicación del método de los elementos finitos y la variable dependiente es el análisis de un muro de contención sometido a cargas horizontales

3.8 Análisis de Resultados

No se usaron materiales para recolectar datos como encuestas, test, entre otros usados comúnmente para todos los objetivos lo que se uso fue simplemente la lectura de libros físicos y virtuales para la formulación del MEF dándole el enfoque deseado para poder cumplir nuestro objetivo principal que era el análisis de un muro de contención.

CAPITULO IV

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Resultados

Para analizar un muro de contención se procederá a considerar un muro por voladizo debido a las ventajas que este posee fue presentado en la revisión de la literatura, se le someterá a 5 fuerzas puntuales horizontales las cuales tendrán valores de 5 toneladas fuerza, 10 toneladas fuerza, 15 toneladas fuerza, 20 toneladas fuerza, 25 toneladas fuerza y 30 toneladas fuerza distribuidas a lo largo de la pantalla del muro de contención de concreto con módulo de elasticidad de $219498.39 \text{ kg} / \text{cm}^2$ y con un módulo de Poisson de 0.167, para analizar el caso del estado de deformación plana, para dicho análisis se pretende obtener los parámetros de: desplazamientos extremos, mapa de desplazamientos, esfuerzos en cada uno de los elementos finitos que se consideren, el mapa de estos esfuerzos, y las reacciones en los apoyos considerados.

4.1 Discretización y numeración de los nudos y elementos triangulares

Para el modelamiento del muro de contención aplicando el MEF, se debe considerar a este como un elemento en estado de deformación plano cuyo espesor será de 1 metro lineal. Para la discretización se considerará 16 elementos finitos triangulares cuya numeración se muestra a continuación. Se considerarán la numeración de los nodos en sentido anti horario, como se muestra en la tabla de numeración de los nodos:

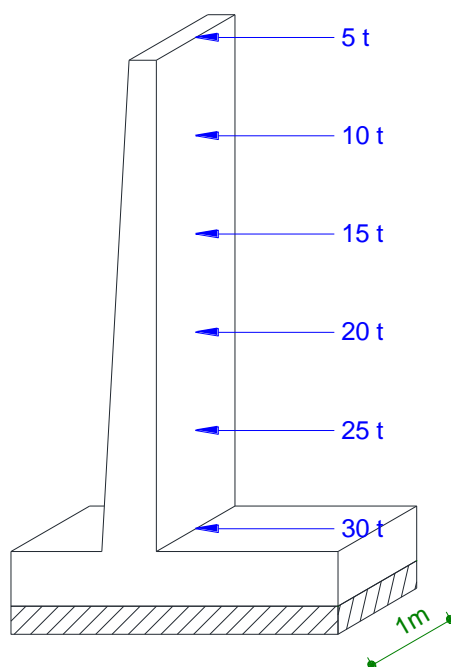


IMAGEN 14: MURO DE CONTENCION REPRESENTADO EN

3D

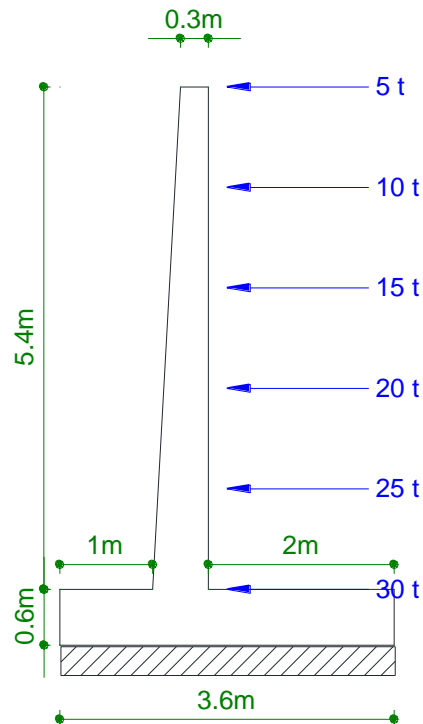


IMAGEN 15: ELEMENTO REPRESENTADO EN 2D

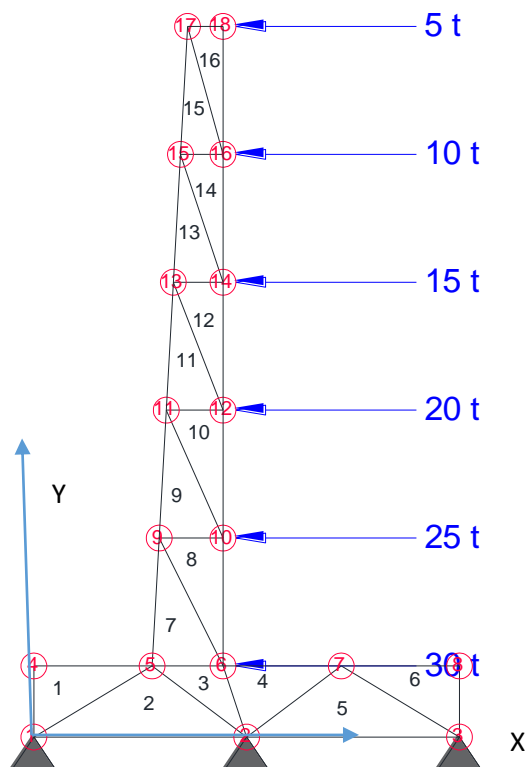


IMAGEN 16: DISCRETIZACION Y NUMERACION DE NODOS

Tabla 1: NUMERACION DE NODOS EN SENTIDO ANTIHORARIO

N° de elemento	Nodo i	Nodo j	Nodo k
1	1	5	4
2	1	2	5
3	5	2	6
4	6	2	7
5	7	2	3
6	7	3	8
7	5	6	9
8	9	6	10
9	9	10	11
10	11	10	12
11	11	12	13
12	13	12	14
13	13	14	15
14	15	14	16
15	15	16	17
16	17	16	18

Tabla 2: COORDENADAS DE LOS NODOS

Nodo	x	Y
1	0	0
2	1.8	0
3	3.6	0
4	0	0.6
5	1	0.6
6	1.6	0.6
7	2.6	0.6
8	3.6	0.6
9	1.06	1.68
10	1.6	1.68
11	1.12	2.76
12	1.6	2.76
13	1.18	3.84
14	1.6	3.84
15	1.24	4.92
16	1.6	4.92
17	1.3	6
18	1.6	6

4.2 Cálculo de la matriz de constante de propiedades de los materiales

Aplicando la matriz de propiedades de los materiales elásticos será:

$$[C] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Para $E = 2194983900.00 \text{ kg / m}^2$ y $\nu = 0.167$ se tiene lo siguiente:

$$[C] = \frac{1828421588.70}{0.777} * \begin{bmatrix} 1 & 0.2005 & 0 \\ 0.2005 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.39976 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 2.353 \times 10^9 & 4.716 \times 10^8 & 0 \\ 4.716 \times 10^8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9.404 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Siendo esta matriz igual para todos los elementos por ser de material uniforme e isótropo

4.3 Cálculo de la matriz r de coeficientes de las coordenadas (x, y) de los nodos

$$[R] = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \qquad 2a = a_1 + a_2 + a_3$$

Aplicando para cada elemento

ELEMENTO 1:

Nodo	X	Y
1	0	0
5	1	0.6
4	0	0.6

Considerando el orden de los nodos:

Nodo 1: $x_1 = 0$ $y_1 = 0$

Nodo 5: $x_2 = 1$ $y_2 = 1.6$

Nodo 4: $x_3 = 0$ $y_3 = 0.6$

Reemplazando:

$$[R]_1 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -1.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.6667 \\ -1.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 1.6667 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0.6 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.300m^3 \text{ (Espesor del elemento=1.00 metro)}$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^1] = \begin{bmatrix} 7.837E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & -4.702E+08 & -7.837E+08 & 4.702E+08 & u1 \\ 0.000E+00 & 1.960E+09 & -2.358E+08 & 0.000E+00 & 2.358E+08 & -1.960E+09 & v1 \\ 0.000E+00 & -2.358E+08 & 7.058E+08 & 0.000E+00 & -7.058E+08 & 2.358E+08 & u5 \\ -4.702E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 2.821E+08 & 4.702E+08 & -2.821E+08 & v5 \\ -7.837E+08 & 2.358E+08 & -7.058E+08 & 4.702E+08 & 1.489E+09 & -7.060E+08 & u4 \\ 4.702E+08 & -1.960E+09 & 2.358E+08 & -2.821E+08 & -7.060E+08 & 2.243E+09 & v4 \end{bmatrix}$$

Realizando el mismo procedimiento para cada elemento:

ELEMENTO 2:

Nodo	X	Y
1	0	0
2	1.8	0
5	1	0.6

$$[R]_2 = \begin{bmatrix} 0.5556 & 0.0000 & 0.5556 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.7407 & 0.0000 & -0.9259 & 0.0000 & 1.6667 \\ -0.7407 & -0.5556 & -0.9259 & 0.5556 & 1.6667 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1.8 & 0 & 1 \\ 1 & 0.6 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.540m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^2] = \begin{bmatrix} 6.707E+08 & 3.138E+08 & -4.377E+07 & 7.7798E+07 & -6.270E+08 & 2.358E+08 \\ 3.138E+08 & 8.538E+08 & 1.564E+08 & 7.146E+08 & -4.702E+08 & -1.568E+09 \\ -4.377E+07 & 1.564E+08 & 8.275E+08 & -3.922E+08 & -7.837E+08 & 2.358E+08 \\ -7.798E+07 & 7.146E+08 & -3.922E+08 & 1.246E+09 & 4.702E+08 & -1.960E+09 \\ -6.270E+08 & -4.702E+08 & -7.837E+08 & 4.702E+08 & 1.411E+09 & 0.000E+00 \\ -2.358E+08 & -1.568E+09 & 2.358E+08 & -1.960E+09 & 0.000E+00 & 3.529E+09 \end{bmatrix}$$

$$[K^2] = \begin{bmatrix} 6.707E+08 & 3.138E+08 & -4.377E+07 & 7.7798E+07 & -6.270E+08 & 2.358E+08 & u1 \\ 3.138E+08 & 8.538E+08 & 1.564E+08 & 7.146E+08 & -4.702E+08 & -1.568E+09 & v1 \\ -4.377E+07 & 1.564E+08 & 8.275E+08 & -3.922E+08 & -7.837E+08 & 2.358E+08 & u2 \\ -7.798E+07 & 7.146E+08 & -3.922E+08 & 1.246E+09 & 4.702E+08 & -1.960E+09 & v2 \\ -6.270E+08 & -4.702E+08 & -7.837E+08 & 4.702E+08 & 1.411E+09 & 0.000E+00 & u5 \\ -2.358E+08 & -1.568E+09 & 2.358E+08 & -1.960E+09 & 0.000E+00 & 3.529E+09 & v5 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 3:

Nodo	X	Y
5	1	0.6
2	1.8	0
6	1.6	0.6

$$[R]_3 = \begin{bmatrix} -1.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.6667 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.5556 & 0.0000 & -1.6667 & 0.0000 & 2.2222 \\ -0.5556 & -1.6667 & -1.6667 & 0.0000 & 2.2222 & 1.6667 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0.6 & 1 \\ 1.8 & 0 & 1 \\ 1.6 & 0.6 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.180m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^3] = \begin{bmatrix} 1.229E+09 & 2.353E+08 & 1.567E+08 & 2.358E+08 & -1.385E+09 & -4.712E+08 \\ 2.353E+08 & 6.009E+08 & 4.702E+08 & 3.921E+08 & -7.056E+08 & -9.930E+08 \\ 1.567E+08 & 4.702E+08 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -6.270E+08 & -4.702E+08 \\ 2.358E+08 & 3.921E+08 & 0.000E+00 & 1.176E+09 & -2.358E+08 & -1.568E+09 \\ -1.385E+09 & -7.056E+08 & -6.270E+08 & -2.358E+08 & 2.012E+09 & 9.414E+08 \\ -4.712E+08 & -9.930E+08 & -4.702E+08 & -1.568E+09 & 9.414E+08 & 2.561E+09 \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \begin{bmatrix} 1.229E+09 & 2.353E+08 & 1.567E+08 & 2.358E+08 & -1.385E+09 & -4.712E+08 & u5 \\ 2.353E+08 & 6.009E+08 & 4.702E+08 & 3.921E+08 & -7.056E+08 & -9.930E+08 & v5 \\ 1.567E+08 & 4.702E+08 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -6.270E+08 & -4.702E+08 & u2 \\ 2.358E+08 & 3.921E+08 & 0.000E+00 & 1.176E+09 & -2.358E+08 & -1.568E+09 & v2 \\ -1.385E+09 & -7.056E+08 & -6.270E+08 & -2.358E+08 & 2.012E+09 & 9.414E+08 & u6 \\ -4.712E+08 & -9.930E+08 & -4.702E+08 & -1.568E+09 & 9.414E+08 & 2.561E+09 & v6 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 4:

Nodo	X	Y
6	1.6	0.6
2	1.8	0
7	2.6	0.6

$$[R]_4 = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.3333 & 0.0000 & -1.6667 & 0.0000 & 0.3333 \\ 1.3333 & -1.0000 & -1.6667 & 0.0000 & 0.3333 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$V_4 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1.6 & 0.6 & 1 \\ 1.8 & 0 & 1 \\ 2.6 & 0.6 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.300m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^4] = \begin{bmatrix} 1.207E+09 & -5.648E+08 & -6.270E+08 & 2.358E+08 & -5.804E+08 & 3.290E+08 \\ -5.648E+08 & 1.537E+09 & 4.702E+08 & -1.568E+09 & 9.461E+07 & 3.154E+07 \\ -6.270E+08 & 4.702E+08 & 7.837E+08 & 0.000E+00 & -1.567E+08 & -4.702E+08 \\ 2.358E+08 & -1.568E+09 & 0.000E+00 & 1.960E+09 & -2.358E+08 & -3.921E+08 \\ -5.804E+08 & 9.641E+07 & -1.567E+08 & -2.358E+08 & 7.371E+08 & 1.412E+08 \\ 3.290E+08 & 3.154E+07 & -4.702E+08 & -3.921E+08 & 1.412E+08 & 3.605E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \begin{bmatrix} 1.207E+09 & -5.648E+08 & -6.270E+08 & 2.358E+08 & -5.804E+08 & 3.290E+08 & u6 \\ -5.648E+08 & 1.537E+09 & 4.702E+08 & -1.568E+09 & 9.461E+07 & 3.154E+07 & v6 \\ -6.270E+08 & 4.702E+08 & 7.837E+08 & 0.000E+00 & -1.567E+08 & -4.702E+08 & u2 \\ 2.358E+08 & -1.568E+09 & 0.000E+00 & 1.960E+09 & -2.358E+08 & -3.921E+08 & v2 \\ -5.804E+08 & 9.641E+07 & -1.567E+08 & -2.358E+08 & 7.371E+08 & 1.412E+08 & u7 \\ 3.290E+08 & 3.154E+07 & -4.702E+08 & -3.921E+08 & 1.412E+08 & 3.605E+08 & v7 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 5:

Nodo	X	Y
9	1.06	1.68
10	1.6	1.68
11	1.12	2.76

$$[R]_5 = \begin{bmatrix} -1.8519 & 0.0000 & 1.8519 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.8230 & 0.0000 & -0.1029 & 0.0000 & 0.9259 \\ -0.8230 & -1.8519 & -0.1029 & 1.8519 & 0.9259 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$V_5 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2.6 & 0.6 & 1 \\ 1.8 & 0 & 1 \\ 3.6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.540m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^5] = \begin{bmatrix} 1.411E+09 & 0.000E+00 & -7.837E+08 & -4.702E+08 & -6.270E+08 & 4.702E+08 \\ 0.000E+00 & 3.529E+09 & -2.358E+08 & -1.960E+09 & 2.358E+08 & -1.568E+09 \\ -7.837E+08 & -2.358E+08 & 8.275E+08 & 3.922E+08 & -4.377E+07 & -1.564E+08 \\ -4.702E+08 & -1.960E+09 & 3.922E+08 & 1.246E+09 & 7.798E+07 & 7.146E+08 \\ -6.270E+08 & 2.358E+08 & -4.377E+07 & 7.798E+07 & 6.707E+08 & -3.138E+08 \\ 4.702E+08 & -1.568E+09 & -1.564E+08 & 7.146E+08 & -3.138E+08 & 3.605E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K^5] = \begin{bmatrix} 1.411E+09 & 0.000E+00 & -7.837E+08 & -4.702E+08 & -6.270E+08 & 4.702E+08 & u7 \\ 0.000E+00 & 3.529E+09 & -2.358E+08 & -1.960E+09 & 2.358E+08 & -1.568E+09 & v7 \\ -7.837E+08 & -2.358E+08 & 8.275E+08 & 3.922E+08 & -4.377E+07 & -1.564E+08 & u2 \\ -4.702E+08 & -1.960E+09 & 3.922E+08 & 1.246E+09 & 7.798E+07 & 7.146E+08 & v2 \\ -6.270E+08 & 2.358E+08 & -4.377E+07 & 7.798E+07 & 6.707E+08 & -3.138E+08 & u3 \\ 4.702E+08 & -1.568E+09 & -1.564E+08 & 7.146E+08 & -3.138E+08 & 3.605E+08 & v3 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 6:

Nodo	X	Y
7	1	0.6
2	1.6	0.6
8	1.06	1.68

$$[R]_6 = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -1.6667 & 0.0000 & 1.6667 \\ 0.0000 & -1.0000 & -1.6667 & 0.0000 & 1.6667 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$V_6 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2.6 & 0.6 & 1 \\ 3.6 & 0 & 1 \\ 3.6 & 0.6 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.300m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^6] = \begin{bmatrix} 7.058E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 2.358E+08 & -7.058E+08 & -2.358E+08 \\ 0.000E+00 & 2.821E+08 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -4.702E+08 & -2.821E+08 \\ 0.000E+00 & 4.702E+08 & 7.837E+08 & 0.000E+00 & -7.837E+08 & -4.702E+08 \\ 2.358E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 1.960E+09 & -2.358E+08 & -1.960E+09 \\ -7.058E+08 & -4.702E+08 & -7.837E+08 & -2.358E+08 & 1.489E+09 & 7.060E+08 \\ -2.358E+08 & -2.821E+08 & -4.702E+08 & -1.960E+09 & 7.060E+08 & 3.605E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K^5] = \begin{bmatrix} 7.058E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 2.358E+08 & -7.058E+08 & -2.358E+08 & u7 \\ 0.000E+00 & 2.821E+08 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -4.702E+08 & -2.821E+08 & v7 \\ 0.000E+00 & 4.702E+08 & 7.837E+08 & 0.000E+00 & -7.837E+08 & -4.702E+08 & u3 \\ 2.358E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 1.960E+09 & -2.358E+08 & -1.960E+09 & v3 \\ -7.058E+08 & -4.702E+08 & -7.837E+08 & -2.358E+08 & 1.489E+09 & 7.060E+08 & u8 \\ -2.358E+08 & -2.821E+08 & -4.702E+08 & -1.960E+09 & 7.060E+08 & 3.605E+08 & v8 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 7:

Nodo	X	Y
5	1	0.6
6	1.6	0.6
9	1.06	1.68

$$[R]_7 = \begin{bmatrix} -1.6667 & 0.0000 & 1.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.8333 & 0.0000 & -0.0926 & 0.0000 & 0.9259 \\ -0.8333 & -1.6667 & -0.0926 & 1.6667 & 0.9259 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$V_7 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0.6 & 1 \\ 1.6 & 0.6 & 1 \\ 1.06 & 1.68 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.324m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^7] = \begin{bmatrix} 2.329E+09 & 6.354E+08 & -2.094E+09 & -3.996E+08 & -2.351E+08 & -2.358E+08 \\ 6.354E+08 & 1.376E+09 & -1.652E+08 & -7.876E+08 & -4.702E+08 & -5.881E+08 \\ -2.094E+08 & -1.652E+08 & 2.120E+09 & -7.060E+07 & -2.612E+07 & 2.358E+08 \\ -3.996E+08 & -7.876E+08 & -7.060E+07 & 8.529E+08 & 4.702E+08 & -6.535E+07 \\ -2.351E+08 & -4.702E+08 & -2.612E+07 & 4.702E+08 & 2.612E+08 & 0.000E+00 \\ -2.358E+08 & -5.881E+08 & 2.358E+08 & -6.535E+07 & 0.0000E+00 & 6.535E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K^7] = \begin{array}{|cccccc|cl} \hline 2.329E+09 & 6.354E+08 & -2.094E+09 & -3.996E+08 & -2.351E+08 & -2.358E+08 & u5 \\ 6.354E+08 & 1.376E+09 & -1.652E+08 & -7.876E+08 & -4.702E+08 & -5.881E+08 & v5 \\ \hline -2.094E+08 & -1.652E+08 & 2.120E+09 & -7.060E+07 & -2.612E+07 & 2.358E+08 & u6 \\ -3.996E+08 & -7.876E+08 & -7.060E+07 & 8.529E+08 & 4.702E+08 & -6.535E+07 & v6 \\ \hline -2.351E+08 & -4.702E+08 & -2.612E+07 & 4.702E+08 & 2.612E+08 & 0.000E+00 & u9 \\ -2.358E+08 & -5.881E+08 & 2.358E+08 & -6.535E+07 & 0.0000E+00 & 6.535E+08 & v9 \\ \hline \end{array}$$

ELEMENTO 7:

Nodo	X	Y
5	1	0.6
6	1.6	0.6
9	1.06	1.68

$$[R]_7 = \begin{bmatrix} -1.6667 & 0.0000 & 1.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.8333 & 0.0000 & -0.0926 & 0.0000 & 0.9259 \\ -0.8333 & -1.6667 & -0.0926 & 1.6667 & 0.9259 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$V_7 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0.6 & 1 \\ 1.6 & 0.6 & 1 \\ 1.06 & 1.68 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.324m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^7] = \begin{bmatrix} 2.329E+09 & 6.354E+08 & -2.094E+09 & -3.996E+08 & -2.351E+08 & -2.358E+08 \\ 6.354E+08 & 1.376E+09 & -1.652E+08 & -7.876E+08 & -4.702E+08 & -5.881E+08 \\ -2.094E+08 & -1.652E+08 & 2.120E+09 & -7.060E+07 & -2.612E+07 & 2.358E+08 \\ -3.996E+08 & -7.876E+08 & -7.060E+07 & 8.529E+08 & 4.702E+08 & -6.535E+07 \\ -2.351E+08 & -4.702E+08 & -2.612E+07 & 4.702E+08 & 2.612E+08 & 0.000E+00 \\ -2.358E+08 & -5.881E+08 & 2.358E+08 & -6.535E+07 & 0.0000E+00 & 6.535E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K^7] = \begin{bmatrix} 2.329E+09 & 6.354E+08 & -2.094E+09 & -3.996E+08 & -2.351E+08 & -2.358E+08 & u5 \\ 6.354E+08 & 1.376E+09 & -1.652E+08 & -7.876E+08 & -4.702E+08 & -5.881E+08 & v5 \\ -2.094E+08 & -1.652E+08 & 2.120E+09 & -7.060E+07 & -2.612E+07 & 2.358E+08 & u6 \\ -3.996E+08 & -7.876E+08 & -7.060E+07 & 8.529E+08 & 4.702E+08 & -6.535E+07 & v6 \\ -2.351E+08 & -4.702E+08 & -2.612E+07 & 4.702E+08 & 2.612E+08 & 0.000E+00 & u9 \\ -2.358E+08 & -5.881E+08 & 2.358E+08 & -6.535E+07 & 0.000E+00 & 6.535E+08 & v9 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 8:

Nodo	X	Y
9	1.06	1.68
6	1.6	0.6
10	1.6	1.68

$$[R]_8 = \begin{bmatrix} -1.8519 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.8519 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9259 & 0.0000 & 0.9259 \\ 0.0000 & -1.8519 & -0.9259 & 0.0000 & 0.9259 & 1.8519 \end{bmatrix}$$

$$V_8 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1.06 & 1.68 & 1 \\ 1.6 & 0.6 & 1 \\ 1.6 & 1.68 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.292m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^8] = \begin{bmatrix} 2.353E+09 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 2.358E+08 & -2.353E+09 & -2.358E+08 \\ 0.000E+00 & 9.404E+08 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -4.702E+08 & -9.404E+08 \\ 0.000E+00 & 4.702E+08 & 2.351E+08 & 0.000E+00 & -2.351E+08 & -4.702E+08 \\ 2.358E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 5.881E+08 & -2.358E+08 & -5.881E+08 \\ -2.353E+09 & -4.702E+08 & -2.351E+08 & -2.358E+08 & 2.588E+09 & 7.060E+08 \\ -2.358E+08 & -9.404E+08 & -4.702E+08 & -5.881E+08 & 7.060E+08 & 1.529E+09 \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \begin{bmatrix} 2.353E+09 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 2.358E+08 & -2.353E+09 & -2.358E+08 & u9 \\ 0.000E+00 & 9.404E+08 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -4.702E+08 & -9.404E+08 & v9 \\ 0.000E+00 & 4.702E+08 & 2.351E+08 & 0.000E+00 & -2.351E+08 & -4.702E+08 & u6 \\ 2.358E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 5.881E+08 & -2.358E+08 & -5.881E+08 & v6 \\ -2.353E+09 & -4.702E+08 & -2.351E+08 & -2.358E+08 & 2.588E+09 & 7.060E+08 & u10 \\ -2.358E+08 & -9.404E+08 & -4.702E+08 & -5.881E+08 & 7.060E+08 & 1.529E+09 & v10 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 9:

Nodo	X	Y
9	1.06	1.68
10	1.6	1.68
11	1.12	2.76

$$[R]_9 = \begin{bmatrix} -1.8519 & 0.0000 & 1.8519 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.8230 & 0.0000 & -0.1029 & 0.0000 & 0.9259 \\ -0.8230 & -1.8519 & -0.1029 & 1.8519 & 0.9259 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$V_9 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1.06 & 1.68 & 1 \\ 1.6 & 1.68 & 1 \\ 1.12 & 2.76 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.292m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^9] = \begin{bmatrix} 2.538E+09 & 6.276E+08 & -2.329E+09 & -3.918E+08 & -2.090E+08 & -2.358E+08 \\ 6.276E+08 & 1.405E+09 & -1.574E+08 & -8.824E+08 & -4.702E+08 & -5.228E+08 \\ -2.329E+09 & -1.574E+08 & 2.355E+09 & -7.845E+07 & -2.612E+07 & 2.358E+08 \\ -3.918E+08 & -8.824E+08 & -7.845E+07 & 9.477E+08 & 4.702E+08 & -6.535E+07 \\ -2.090E+08 & -4.702E+08 & -2.612E+07 & 4.702E+08 & 2.351E+08 & 0.000E+00 \\ -2.358E+08 & -5.228E+08 & 2.358E+08 & -6.535E+07 & 0.000E+00 & 1.529E+09 \end{bmatrix}$$

$$[K^9] = \begin{array}{cccc|cc} 2.538E+09 & 6.276E+08 & -2.329E+09 & -3.918E+08 & -2.090E+08 & -2.358E+08 & u9 \\ 6.276E+08 & 1.405E+09 & -1.574E+08 & -8.824E+08 & -4.702E+08 & -5.228E+08 & v9 \\ -2.329E+09 & -1.574E+08 & 2.355E+09 & -7.845E+07 & -2.612E+07 & 2.358E+08 & u10 \\ -3.918E+08 & -8.824E+08 & -7.845E+07 & 9.477E+08 & 4.702E+08 & -6.535E+07 & v10 \\ -2.090E+08 & -4.702E+08 & -2.612E+07 & 4.702E+08 & 2.351E+08 & 0.000E+00 & u11 \\ -2.358E+08 & -5.228E+08 & 2.358E+08 & -6.535E+07 & 0.000E+00 & 1.529E+09 & v11 \end{array}$$

ELEMENTO 10:

Nodo	X	Y
11	1.12	2.76
10	1.6	1.68
12	1.6	2.76

$$[R]_{10} = \begin{bmatrix} -2.0833 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 2.0833 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9259 & 0.0000 & 0.9259 \\ 0.0000 & -2.0833 & -0.9259 & 0.0000 & 0.9259 & 2.0833 \end{bmatrix}$$

$$V_{10} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1.12 & 2.76 & 1 \\ 1.6 & 1.68 & 1 \\ 1.6 & 2.76 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.259m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^{10}] = \begin{bmatrix} 2.647E+09 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 2.358E+08 & -2.647E+09 & -2.358E+08 \\ 0.000E+00 & 1.058E+09 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -4.702E+08 & -1.058E+09 \\ 0.000E+00 & 4.072E+08 & 2.090E+08 & 0.000E+00 & -2.090E+08 & -4.702E+08 \\ 2.358E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 5.228E+08 & -2.538E+08 & -5.228E+08 \\ -2.647E+09 & -4.702E+08 & -2.090E+08 & -2.358E+08 & 2.856E+09 & 7.060E+08 \\ -2.358E+08 & -1.058E+09 & -4.072E+08 & -5.228E+08 & 7.060E+08 & 1.529E+09 \end{bmatrix}$$

$$[K^{10}] = \begin{bmatrix} 2.647E+09 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 2.358E+08 & -2.647E+09 & -2.358E+08 \\ 0.000E+00 & 1.058E+09 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -4.702E+08 & -1.058E+09 \\ 0.000E+00 & 4.072E+08 & 2.090E+08 & 0.000E+00 & -2.090E+08 & -4.702E+08 \\ 2.358E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 5.228E+08 & -2.538E+08 & -5.228E+08 \\ -2.647E+09 & -4.702E+08 & -2.090E+08 & -2.358E+08 & 2.856E+09 & 7.060E+08 \\ -2.358E+08 & -1.058E+09 & -4.072E+08 & -5.228E+08 & 7.060E+08 & 1.529E+09 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{11} \\ v_{11} \\ u_{10} \\ v_{10} \\ u_{12} \\ v_{12} \end{matrix}$$

ELEMENTO 11:

Nodo	X	Y
11	1.12	2.76
12	1.6	2.76
13	1.18	3.84

$$[R]_{11} = \begin{bmatrix} -2.0833 & 0.0000 & 2.0833 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.8102 & 0.0000 & -0.1157 & 0.0000 & 0.9259 \\ -0.8102 & -2.0833 & -0.1157 & 2.0833 & 0.9259 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$V_{11} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1.12 & 2.76 & 1 \\ 1.6 & 2.76 & 1 \\ 1.18 & 3.84 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.259m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^{11}] = \begin{bmatrix} 2.807E+09 & 6.178E+08 & -2.624E+09 & -3.820E+08 & -1.829E+08 & -2.358E+08 \\ 6.178E+08 & 1.458E+09 & -1.476E+08 & -1.001E+09 & -4.702E+08 & -4.574E+08 \\ -2.624E+09 & -1.476E+08 & 2.650E+09 & -8.825E+07 & -2.612E+07 & 2.358E+08 \\ -3.820E+08 & -1.001E+09 & -8.825E+07 & 1.066E+09 & 4.702E+08 & -6.535E+07 \\ -1.829E+08 & -4.702E+08 & -2.612E+07 & 4.702E+08 & 2.090E+08 & 0.000E+00 \\ -2.358E+08 & -4.574E+08 & 2.358E+08 & -6.535E+07 & 0.000E+00 & 5.228E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K^{11}] = \begin{bmatrix} 2.807E+09 & 6.178E+08 & -2.624E+09 & -3.820E+08 & -1.829E+08 & -2.358E+08 \\ 6.178E+08 & 1.458E+09 & -1.476E+08 & -1.001E+09 & -4.702E+08 & -4.574E+08 \\ -2.624E+09 & -1.476E+08 & 2.650E+09 & -8.825E+07 & -2.612E+07 & 2.358E+08 \\ -3.820E+08 & -1.001E+09 & -8.825E+07 & 1.066E+09 & 4.702E+08 & -6.535E+07 \\ -1.829E+08 & -4.702E+08 & -2.612E+07 & 4.702E+08 & 2.090E+08 & 0.000E+00 \\ -2.358E+08 & -4.574E+08 & 2.358E+08 & -6.535E+07 & 0.000E+00 & 5.228E+08 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{11} \\ v_{11} \\ u_{12} \\ v_{12} \\ u_{13} \\ v_{13} \end{matrix}$$

ELEMENTO 12:

Nodo	X	Y
13	1.18	3.84
12	1.6	2.76
14	1.6	3.84

$$[R]_{12} = \begin{bmatrix} -2.3810 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 2.3810 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9259 & 0.0000 & 0.9259 \\ 0.0000 & -2.3810 & -0.9259 & 0.0000 & 0.9259 & 2.3810 \end{bmatrix}$$

$$V_{12} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1.18 & 3.84 & 1 \\ 1.6 & 2.76 & 1 \\ 1.6 & 3.84 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.227m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^{12}] = \begin{bmatrix} 3.025E+09 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 2.358E+08 & -3.025E+09 & -2.358E+08 \\ 0.000E+00 & 1.209E+09 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -4.702E+08 & -1.209E+09 \\ 0.000E+00 & 4.702E+08 & 1.567E+08 & 0.000E+00 & -1.567E+08 & -4.702E+08 \\ 2.358E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 3.921E+09 & -2.358E+08 & -3.921E+08 \\ -3.025E+09 & -4.702E+08 & -1.567E+08 & -2.358E+08 & 3.686E+09 & 7.060E+08 \\ -2.358E+08 & -1.209E+09 & -4.709E+08 & -3.921E+08 & 7.060E+08 & 1.803E+09 \end{bmatrix}$$

$$[K^{12}] = \begin{array}{cccc|cc} \hline 3.025E+09 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 2.358E+08 & -3.025E+09 & -2.358E+08 & u13 \\ 0.000E+00 & 1.209E+09 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -4.702E+08 & -1.209E+09 & v13 \\ \hline 0.000E+00 & 4.702E+08 & 1.567E+08 & 0.000E+00 & -1.567E+08 & -4.702E+08 & u12 \\ 2.358E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 3.921E+09 & -2.358E+08 & -3.921E+08 & v12 \\ \hline -3.025E+09 & -4.702E+08 & -1.567E+08 & -2.358E+08 & 3.686E+09 & 7.060E+08 & u14 \\ -2.358E+08 & -1.209E+09 & -4.709E+08 & -3.921E+08 & 7.060E+08 & 1.803E+09 & v14 \\ \hline \end{array}$$

ELEMENTO 13:

Nodo	X	Y
13	1.18	3.84
14	1.6	3.84
15	1.24	4.92

$$[R]_{13} = \begin{bmatrix} -2.3810 & 0.0000 & 2.3810 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.7937 & 0.0000 & -0.1323 & 0.0000 & 0.9259 \\ -0.7937 & -2.3810 & -0.1323 & 2.3810 & 0.9259 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$V_{13} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1.18 & 3.84 & 1 \\ 1.6 & 3.84 & 1 \\ 1.24 & 4.92 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.227m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^{13}] = \begin{bmatrix} 3.159E+09 & 6.052E+08 & -3.002E+09 & -3.694E+08 & -1.567E+08 & -2.358E+08 \\ 6.052E+08 & 1.545E+09 & -1.350E+08 & -1.153E+09 & -4.702E+08 & -3.921E+08 \\ -3.002E+09 & -1.350E+08 & 3.028E+09 & -1.009E+08 & -2.612E+07 & 2.358E+08 \\ -3.694E+08 & -1.153E+09 & -1.009E+08 & 1.218E+09 & 4.702E+08 & -6.535E+07 \\ -1.567E+08 & -4.702E+08 & -2.612E+07 & 4.702E+08 & 1.829E+08 & 0.000E+00 \\ -2.358E+08 & -3.921E+08 & 2.358E+08 & -6.535E+07 & 0.000E+00 & 4.574E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K^{13}] = \begin{bmatrix} 3.159E+09 & 6.052E+08 & -3.002E+09 & -3.694E+08 & -1.567E+08 & -2.358E+08 & u13 \\ 6.052E+08 & 1.545E+09 & -1.350E+08 & -1.153E+09 & -4.702E+08 & -3.921E+08 & v13 \\ -3.002E+09 & -1.350E+08 & 3.028E+09 & -1.009E+08 & -2.612E+07 & 2.358E+08 & u14 \\ -3.694E+08 & -1.153E+09 & -1.009E+08 & 1.218E+09 & 4.702E+08 & -6.535E+07 & v14 \\ -1.1567E+08 & -4.702E+08 & -2.612E+07 & 4.702E+08 & 1.829E+08 & 0.000E+00 & u15 \\ -2.358E+08 & -3.921E+08 & 2.358E+08 & -6.535E+07 & 0.000E+00 & 4.574E+08 & v15 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 14:

Nodo	X	Y
15	1.24	4.92
14	1.6	3.84
16	1.6	4.92

$$[R]_{14} = \begin{bmatrix} -2.7778 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 2.7778 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9259 & 0.0000 & 0.9259 \\ 0.0000 & -2.7778 & -0.9259 & 0.0000 & 0.9259 & 2.7778 \end{bmatrix}$$

$$V_{14} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1.24 & 4.92 & 1 \\ 1.6 & 3.84 & 1 \\ 1.6 & 4.92 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.194m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^{14}] = \begin{bmatrix} 3.529E+09 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 2.358E+08 & -3.529E+09 & -2.358E+08 \\ 0.000E+00 & 1.411E+09 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -4.702E+08 & -1.411E+09 \\ 0.000E+00 & 4.702E+08 & 1.567E+08 & 0.000E+00 & -1.567E+08 & -4.702E+08 \\ 2.358E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 3.921E+08 & -2.358E+08 & -3.921E+08 \\ -3.529E+09 & -4.702E+08 & -1.567E+08 & -2.358E+08 & 3.686E+09 & 7.060E+08 \\ -2.358E+08 & -1.411E+09 & -4.702E+08 & -3.921E+08 & 7.060E+08 & 1.803E+09 \end{bmatrix}$$

$$[K^{14}] = \begin{bmatrix} 3.529E+09 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 2.358E+08 & -3.529E+09 & -2.358E+08 & u15 \\ 0.000E+00 & 1.411E+09 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -4.702E+08 & -1.411E+09 & v15 \\ 0.000E+00 & 4.702E+08 & 1.567E+08 & 0.000E+00 & -1.567E+08 & -4.702E+08 & u14 \\ 2.358E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 3.921E+08 & -2.358E+08 & -3.921E+08 & v14 \\ -3.529E+09 & -4.702E+08 & -1.567E+08 & -2.358E+08 & 3.686E+09 & 7.060E+08 & u16 \\ -2.358E+08 & -1.411E+09 & -4.702E+08 & -3.921E+08 & 7.060E+08 & 1.803E+09 & v16 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 15:

Nodo	X	Y
15	1.24	4.92
16	1.6	4.92
17	1.3	6

$$[R]_{15} = \begin{bmatrix} -2.7778 & 0.0000 & 2.7778 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.7716 & 0.0000 & -0.1543 & 0.0000 & 0.9259 \\ -0.7716 & -2.7778 & -0.1543 & 2.7778 & 0.9259 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$V_{15} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1.24 & 4.92 & 1 \\ 1.6 & 4.92 & 1 \\ 1.3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.194m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^{15}] = \begin{bmatrix} 3.638E+09 & 5.884E+08 & -3.507E+09 & -3.525E+08 & -1.306E+08 & -2.358E+08 \\ 5.884E+08 & 1.683E+09 & -1.181E+08 & -1.356E+09 & -4.702E+08 & 3.267E+08 \\ -3.507E+09 & -1.181E+08 & 3.533E+08 & -1.177E+08 & -2.612E+07 & 2.358E+08 \\ -3.525E+08 & -1.356E+09 & -1.177E+08 & 1.422E+09 & 4.702E+08 & -6.535E+07 \\ -1.306E+08 & -4.702E+08 & -2.612E+07 & 4.702E+08 & 1.567E+08 & 0.000E+00 \\ -2.358E+08 & 3.267E+08 & 2.358E+08 & -6.535E+07 & 0.000E+00 & 3.921E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K^{15}] = \begin{bmatrix} 3.638E+09 & 5.884E+08 & -3.507E+09 & -3.525E+08 & -1.306E+08 & -2.358E+08 & u15 \\ 5.884E+08 & 1.683E+09 & -1.181E+08 & -1.356E+09 & -4.702E+08 & 3.267E+08 & v15 \\ -3.507E+09 & -1.181E+08 & 3.533E+08 & -1.177E+08 & -2.612E+07 & 2.358E+08 & u16 \\ -3.525E+08 & -1.356E+09 & -1.177E+08 & 1.422E+09 & 4.702E+08 & -6.535E+07 & v16 \\ -1.306E+08 & -4.702E+08 & -2.612E+07 & 4.702E+08 & 1.567E+08 & 0.000E+00 & u17 \\ -2.358E+08 & 3.267E+08 & 2.358E+08 & -6.535E+07 & 0.000E+00 & 3.921E+08 & v17 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 16:

Nodo	X	Y
17	1.3	6
16	1.6	4.92
18	1.6	6

$$[R]_{16} = \begin{bmatrix} -3.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 3.3333 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9259 & 0.0000 & 0.9259 \\ 0.0000 & -3.3333 & -0.9259 & 0.0000 & 0.9259 & 3.3333 \end{bmatrix}$$

$$V_{16} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1.3 & 6 & 1 \\ 1.6 & 4.92 & 1 \\ 1.6 & 6 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1.00 = 0.162m^3$$

Aplicando $[K^e] = [R]^T \cdot [C]^T \cdot [R] \cdot V$:

$$[K^{16}] = \begin{bmatrix} 4.235E+09 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 2.358E+08 & -4.235E+09 & -2.358E+08 \\ 0.000E+00 & 1.693E+09 & 4.702E+08 & 0.000E+00 & -4.702E+08 & -1.693E+09 \\ 0.000E+00 & 4.702E+08 & 1.306E+08 & 0.000E+00 & -1.306E+08 & -4.702E+08 \\ 2.358E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 3.267E+08 & -2.358E+08 & -3.267E+08 \\ -4.235E+09 & -4.702E+08 & -1.306E+08 & -2.358E+08 & 4.365E+09 & 7.060E+08 \\ -2.358E+08 & -1.693E+09 & -4.702E+08 & -3.267E+08 & 7.060E+08 & 2.020E+09 \end{bmatrix}$$

4.5 Vector de fuerzas externas aplicadas a los nodos

$$(F) = \begin{pmatrix} F_{1x} = R_{1x} \\ F_{1y} = R_{1y} \\ F_{2x} = R_{2x} \\ F_{2y} = R_{2y} \\ F_{3x} = R_{3x} \\ F_{3y} = R_{3y} \\ F_{4x} = 0 \\ F_{4y} = 0 \\ F_{5x} = 0 \\ F_{5y} = 0 \\ F_{6x} = -30000 \\ F_{6y} = 0 \\ F_{7x} = 0 \\ F_{7y} = 0 \\ F_{8x} = 0 \\ F_{8y} = 0 \\ F_{9x} = 0 \\ F_{9y} = 0 \\ F_{10x} = -25000 \\ F_{10y} = 0 \\ F_{11x} = 0 \\ F_{11y} = 0 \\ F_{12x} = -20000 \\ F_{12y} = 0 \\ F_{13x} = 0 \\ F_{13y} = 0 \\ F_{14x} = -15000 \\ F_{14y} = 0 \\ F_{15x} = 0 \\ F_{15y} = 0 \\ F_{16x} = -10000 \\ F_{16y} = 0 \\ F_{17x} = 0 \\ F_{17y} = 0 \\ F_{18x} = -5000 \\ F_{18y} = 0 \end{pmatrix} \text{ kg.}$$

$$(F)_{red} = \begin{pmatrix} F_{4x} = 0 \\ F_{4y} = 0 \\ F_{5x} = 0 \\ F_{5y} = 0 \\ F_{6x} = -30000 \\ F_{6y} = 0 \\ F_{7x} = 0 \\ F_{7y} = 0 \\ F_{8x} = 0 \\ F_{8y} = 0 \\ F_{9x} = 0 \\ F_{9y} = 0 \\ F_{10x} = -25000 \\ F_{10y} = 0 \\ F_{11x} = 0 \\ F_{11y} = 0 \\ F_{12x} = -20000 \\ F_{12y} = 0 \\ F_{13x} = 0 \\ F_{13y} = 0 \\ F_{14x} = -15000 \\ F_{14y} = 0 \\ F_{15x} = 0 \\ F_{15y} = 0 \\ F_{16x} = -10000 \\ F_{16y} = 0 \\ F_{17x} = 0 \\ F_{17y} = 0 \\ F_{18x} = -5000 \\ F_{18y} = 0 \end{pmatrix} \text{ kg.}$$

4.6 Cálculo de desplazamientos de nodos

Reemplazando las matrices respectivas en la ecuación $(U) = [K]_{red}^{-1} \cdot (F)_{red}$ se obtiene la siguiente expresión:

$$(U) = \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \\ u_9 \\ v_9 \\ u_{10} \\ v_{10} \\ u_{11} \\ v_{11} \\ u_{12} \\ v_{12} \\ u_{13} \\ v_{13} \\ u_{14} \\ v_{14} \\ u_{15} \\ v_{15} \\ u_{16} \\ v_{16} \\ u_{17} \\ v_{17} \\ u_{18} \\ v_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00013 \\ -0.00039 \\ -0.00393 \\ -0.00607 \\ -0.00310 \\ 0.00607 \\ -0.00094 \\ 0.00019 \\ -0.00041 \\ 0.00005 \\ -0.07264 \\ -0.02119 \\ -0.07431 \\ 0.02455 \\ -0.19648 \\ -0.02474 \\ -0.19754 \\ 0.03549 \\ -0.35217 \\ -0.02133 \\ -0.35217 \\ 0.04106 \\ -0.52161 \\ -0.01384 \\ -0.52187 \\ 0.04323 \\ -0.69581 \\ -0.00453 \\ -0.69594 \\ 0.04375 \end{pmatrix} \text{ cm.}$$

4.7 Cálculo de esfuerzos en los elementos finitos

Los esfuerzos en cada elemento finito se obtienen aplicando la ecuación de cálculo de la deformación unitaria $(\varepsilon) = [R].(u)$ y la ecuación del cálculo del esfuerzo

$$(\sigma) = [C].(\varepsilon)$$

ELEMENTO 1:

$$(\varepsilon_1) = [R_1].(u_1)$$

$$(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -1.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.6667 \\ -1.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 1.6667 & -1.0000 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0000393 \\ -0.0000607 \\ -0.0000013 \\ -0.0000039 \end{pmatrix}$$

$$(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1x} \\ \varepsilon_{1y} \\ \varepsilon_{1xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.798E-05 \\ -6.530E-06 \\ -5.897E-05 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_1) = [C].(\varepsilon_1)$$

$$(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 2.353 \times 10^9 & 4.716 \times 10^8 & 0 \\ 4.716 \times 10^8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9.404 \times 10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3.798E-05 \\ -6.530E-06 \\ -5.897E-05 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -92432.41 \\ -33275.67 \\ -55459.45 \end{pmatrix} \text{ kg / m}^2 = \begin{pmatrix} -9.243 \\ -3.328 \\ -5.546 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

$$(\sigma_1) = \begin{pmatrix} \sigma_{1x} \\ \sigma_{1y} \\ \sigma_{1xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.243 \\ -3.328 \\ -5.546 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

ELEMENTO 2:

$$(\varepsilon_2) = [R_2].(u_2)$$

$$(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{2x} \\ \varepsilon_{2y} \\ \varepsilon_{2xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000E+00 \\ -1.012E-04 \\ -6.548E-05 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_2) = [C] \cdot (\varepsilon_2)$$

$$(\sigma_2) = \begin{pmatrix} \sigma_{2x} \\ \sigma_{2y} \\ \sigma_{2xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47725.04 \\ -238053.65 \\ -61578.22 \end{pmatrix} \text{ kg / m}^2 = \begin{pmatrix} -4.773 \\ -23.805 \\ -6.158 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

$$(\sigma_2) = \begin{pmatrix} \sigma_{2x} \\ \sigma_{2y} \\ \sigma_{2xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.773 \\ -23.805 \\ -6.158 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

ELEMENTO 3:

$$(\varepsilon_3) = [R_3] \cdot (u_3)$$

$$(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{3x} \\ \varepsilon_{3y} \\ \varepsilon_{3xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.380E-05 \\ 1.686E-04 \\ 1.553E-04 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_3) = \begin{pmatrix} \sigma_{3x} \\ \sigma_{3y} \\ \sigma_{3xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111969.08 \\ 403118.60 \\ 146006.74 \end{pmatrix} \text{ kg / m}^2 = \begin{pmatrix} 11.197 \\ 40.312 \\ 14.601 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

ELEMENTO 4:

$$(\varepsilon_4) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{4x} \\ \varepsilon_{4y} \\ \varepsilon_{4xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.163E-05 \\ 8.154E-05 \\ -1.033E-04 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_4) = \begin{pmatrix} \sigma_{4x} \\ \sigma_{4y} \\ \sigma_{4xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89331.78 \\ 202028.17 \\ -97130.91 \end{pmatrix} \text{ kg / m}^2 = \begin{pmatrix} 8.933 \\ 20.203 \\ -9.713 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

ELEMENTO 5:

$$(\varepsilon_5) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{5x} \\ \varepsilon_{5y} \\ \varepsilon_{5xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000E+00 \\ 3.130E-06 \\ -1.564E-05 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_5) = \begin{pmatrix} \sigma_{5x} \\ \sigma_{5y} \\ \sigma_{5xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1476.18 \\ 7363.20 \\ -14707.95 \end{pmatrix} \text{ kg / m}^2 = \begin{pmatrix} 0.148 \\ 0.736 \\ -1.471 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

ELEMENTO 6:

$$(\varepsilon_6) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{6x} \\ \varepsilon_{6y} \\ \varepsilon_{6xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.272E-06 \\ 9.065E-07 \\ -8.186E-06 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_6) = \begin{pmatrix} \sigma_{6x} \\ \sigma_{6y} \\ \sigma_{6xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12830.96 \\ 4619.14 \\ -7698.57 \end{pmatrix} \text{ kg / m}^2 = \begin{pmatrix} 1.283 \\ 0.462 \\ -0.770 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

ELEMENTO 7:

$$(\varepsilon_7) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{7x} \\ \varepsilon_{7y} \\ \varepsilon_{7xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.380E-05 \\ -1.512E-04 \\ -4.346E-04 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_7) = \begin{pmatrix} \sigma_{7x} \\ \sigma_{7y} \\ \sigma_{7xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -38845 \\ -349150.11 \\ -408758.28 \end{pmatrix} \text{ kg / m}^2 = \begin{pmatrix} -3.885 \\ -34.915 \\ -40.876 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

ELEMENTO 8:

$$(\varepsilon_8) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{8x} \\ \varepsilon_{8y} \\ \varepsilon_{8xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.093E-05 \\ 1.711E-04 \\ 1.876E-04 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_8) = \begin{pmatrix} \sigma_{8x} \\ \sigma_{8y} \\ \sigma_{8xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7947.02 \\ 387944.56 \\ 176398.09 \end{pmatrix} \text{ kg / m}^2 = \begin{pmatrix} 0.795 \\ 38.794 \\ 17.640 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

ELEMENTO 9:

$$(\varepsilon_9) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{9x} \\ \varepsilon_{9y} \\ \varepsilon_{9xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.093E-05 \\ -7.995E-05 \\ -2.981E-04 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_9) = \begin{pmatrix} \sigma_{9x} \\ \sigma_{9y} \\ \sigma_{9xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -110457.70 \\ -202661.03 \\ -280298.80 \end{pmatrix} \text{ kg / m}^2 = \begin{pmatrix} -11.046 \\ -20.266 \\ -28.030 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

ELEMENTO 10:

$$(\varepsilon_{10}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{10x} \\ \varepsilon_{10y} \\ \varepsilon_{10xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.212E-05 \\ 1.014E-04 \\ 1.138E-04 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_{10}) = \begin{pmatrix} \sigma_{10x} \\ \sigma_{10y} \\ \sigma_{10xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4241.50 \\ 227993.65 \\ 107002.82 \end{pmatrix} kg / m^2 = \begin{pmatrix} -0.424 \\ 22.799 \\ 10.700 \end{pmatrix} kg / cm^2$$

ELEMENTO 11:

$$(\varepsilon_{11}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11x} \\ \varepsilon_{11y} \\ \varepsilon_{11xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.212E-05 \\ -3.820E-05 \\ -1.800E-04 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_{11}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11x} \\ \sigma_{11y} \\ \sigma_{11xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70059.25 \\ -100306.89 \\ -169325.10 \end{pmatrix} kg / m^2 = \begin{pmatrix} -7.006 \\ -10.031 \\ -16.933 \end{pmatrix} kg / cm^2$$

ELEMENTO 12:

$$(\varepsilon_{12}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{12x} \\ \varepsilon_{12y} \\ \varepsilon_{12xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.398E-05 \\ 5.153E-05 \\ 5.387E-05 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_{12}) = \begin{pmatrix} \sigma_{12x} \\ \sigma_{12y} \\ \sigma_{12xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8585.08 \\ 114636.45 \\ 50657.25 \end{pmatrix} kg / m^2 = \begin{pmatrix} -0.859 \\ 11.464 \\ 5.066 \end{pmatrix} kg / cm^2$$

ELEMENTO 13:

$$(\varepsilon_{13}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{13x} \\ \varepsilon_{13y} \\ \varepsilon_{13xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.398E-05 \\ -1.316E-05 \\ -8.796E-05 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_{13}) = \begin{pmatrix} \sigma_{13x} \\ \sigma_{13y} \\ \sigma_{13xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39098.28 \\ -37564.11 \\ -82716.72 \end{pmatrix} kg / m^2 = \begin{pmatrix} -3.910 \\ -3.756 \\ -8.272 \end{pmatrix} kg / cm^2$$

ELEMENTO 14:

$$(\varepsilon_{14}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{14x} \\ \varepsilon_{14y} \\ \varepsilon_{14xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.152E-06 \\ 2.006E-05 \\ 1.400E-05 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_{14}) = \begin{pmatrix} \sigma_{14x} \\ \sigma_{14y} \\ \sigma_{14xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7361.95 \\ 43824.80 \\ 13169.51 \end{pmatrix} kg / m^2 = \begin{pmatrix} -0.736 \\ 4.382 \\ 1.317 \end{pmatrix} kg / cm^2$$

ELEMENTO 15:

$$(\varepsilon_{15}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{15x} \\ \varepsilon_{15y} \\ \varepsilon_{15xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.152E-06 \\ -1.812E-06 \\ -2.728E-05 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_{15}) = \begin{pmatrix} \sigma_{15x} \\ \sigma_{15y} \\ \sigma_{15xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17678.81 \\ -7635.95 \\ -25656.68 \end{pmatrix} \text{ kg / m}^2 = \begin{pmatrix} -1.768 \\ -0.764 \\ -2.566 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

ELEMENTO 16:

$$(\varepsilon_{16}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{16x} \\ \varepsilon_{16y} \\ \varepsilon_{16xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.601E-06 \\ 4.817E-06 \\ -2.707E-06 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_{16}) = \begin{pmatrix} \sigma_{16x} \\ \sigma_{16y} \\ \sigma_{16xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8552.23 \\ 9163.14 \\ -2545.32 \end{pmatrix} \text{ kg / m}^2 = \begin{pmatrix} -0.855 \\ 0.916 \\ -0.255 \end{pmatrix} \text{ kg / cm}^2$$

4.8 Cálculo de las reacciones en los apoyos considerados

Aplicando la ecuación $(F) = [K] \cdot (u)$, donde (F) es el vector de fuerzas actuantes en los nodos de la estructura, y $[K]$ es la matriz de rigidez completa obtenida anteriormente, reemplazando en la expresión se tiene que el vector F será:

$$\{F\} = \begin{pmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -30000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -25000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66678.53 \\ 130332.76 \\ 28146.15 \\ -120665.52 \\ 10175.32 \\ -9667.24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -30000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -25000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5000 \end{pmatrix} \text{ kg.}$$

4.2 Discusión

El análisis de un muro de contención sometido a fuerzas horizontales en su pantalla mediante el método de los elementos finitos, utilizando elementos bidimensionales triangulares de tres nodos fue bastante preciso a que se discretizó la estructura en un número adecuado de elementos finitos que permitió conocer los esfuerzos los cuales se anexaron para cada elemento, siendo el máximo esfuerzo el de 11.6 kilogramo por centímetro cuadrado en el elemento número 3 debido a que en este elemento descansa la pantalla del muro de contención y se puede ver que el menor esfuerzo se encuentra en la punta del muro, debido a que esta parte no está sometida a cargas, con respecto a los desplazamientos se puede observar que el mayor desplazamiento se dio en el nodo 18, que es normal en los muros de contención donde la parte superior de la pantalla es la que más se deforma con respecto a los demás puntos, los datos no han sido probados experimentalmente debido a que los pocos software que analizan muros de contención son muy costosos operar con sus licencias, pero se respaldan en un sustento teórico confiable el cual fue la formulación del Método de los elementos finitos.

Como se observa tanto las matrices de rigidez para cada elemento como para la matriz principal tiene en sus filas las coordenadas tanto u y v para cada nodo, ya que estos son las dos direcciones en las cuales el elemento se puede desplazar, en el caso de trabajar con elementos finitos tridimensionales se debería tomar una tercera columna y fila para cada nodo la cual haría alusión a la componente z de un plano tridimensional, con respecto a las líneas y columnas que se van a eliminar serán las correspondientes de los apoyos ya que en estos nodos no existe desplazamiento, dependiendo de cada tipo de apoyo, se tendrá que eliminar las filas y las columnas según el grado de libertad que presente cada apoyo.

5. CONCLUSIONES

- El método de los elementos finitos bidimensionales se pudo desarrollar y formular de manera correcta y adecuada para el análisis de muros de contención sometidas a fuerzas horizontales a partir de una serie de conceptos como son la Ley de Hooke, la resistencia de materiales, el principio de los trabajos virtuales, en base al método de las rigideces, de tal forma se obtuvo un sustento sólido para la formulación de elementos finitos bidimensionales con elementos triangulares.
- Se formuló los elementos finitos para el análisis de un muro de contención tomando a este como un caso de esfuerzo y deformación plana de acuerdo a las características que esta estructura presenta, basándose en los elementos triangulares de tres nodos de Turner para que el análisis sea correcto y encuentre los parámetros que se desea conocer (esfuerzos y deformaciones)
- El método de los elementos finitos se aplicó de manera correcta y acertada en el análisis estructural, basándose en el método matricial de las rigideces y en la Ley de Hooke para darle el enfoque del análisis estructural que se desea y poder hallar así las deformaciones, esfuerzos y reacciones en la estructura analizada.

6. RECOMENDACIONES

- Se recomienda seguir con la investigación del método de los elementos finitos porque tiene muchas aplicaciones, no solo en el análisis de muros de contención sino también en el análisis de diferentes estructuras, también aplicar este método en todas las áreas ya que muchas investigaciones ya están aplicando este método en otras áreas que no son solamente ingeniería civil o física.
- Se recomienda abordar o aproximar el método de los elementos finitos por otros medios que no sea la aproximación directa sino la aproximación variacional, la aproximación de residuales pesados o la aproximación del balance de energía que en general no limitan el análisis para geometrías sencillas como si lo hace la obtención de las ecuaciones por aproximaciones directas.
- Se recomienda profundizar mucho más el método para así de la misma manera que se formuló el método para elementos triangulares, se pueda formular para volúmenes, desarrollando así el método de los volúmenes finitos que ya está entrando en uso frecuente debido a la precisión con respecto a los elementos finitos en dos dimensiones.
- Se recomienda llevar todos los cálculos que se hacen por el método de los elementos finitos a software los cuales serán de gran ayuda en el área que se haya desarrollado la investigación.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bustinza C. Alan, (2015), Análisis de vigas continuas por el método de elementos finitos (tesis de pregrado), Universidad Nacional del Altiplano, Puno, Perú.
- Arce S. Carlos, Castillo E. William y Gonzales V. Jorge, (2003), *Algebra Lineal*, Costa Rica.
- C. Lay. David, (2007), *Algebra Lineal y sus aplicaciones*, Maryland, Estados Unidos, Pearson Educación.
- C. Hibbeler, Russell, (2010), *Ingeniería Mecánica: Estática*, México D.F. México, Pearson Educación, doceava edición
- C. Hibbeler, Russell, (2011), *Mecánica de materiales*, México D.F. México, Pearson Educación, octava edición
- Palma Ochoa, Mario Jesús, (1988), *Análisis estructural de Presas de arco mediante el método de los elementos finitos (tesis de pregrado)*, Universidad Nacional de Ingenierías, Lima, Perú.
- Ballón Benavente, Andrés, Echenique Sosa, José Francisco, (2017), *Análisis de Estabilidad de muros de contención de acuerdo a las zonas sísmicas del Perú* (Tesis de pregrado), Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Lima, Perú.
- Flores Tapia, Ketty Faride, (2017), *Eficiencia del diseño de muro de contención de gran altura con la técnica de tierra armada respecto al muro de contención de concreto armado en la ciudad de Puno* (Tesis de Pregrado), Universidad Nacional del Altiplano, Puno, Perú.
- Mc Cormac, C Jack, James K. Nelson J. (2006), *Análisis de Estructuras Método Clásico y Matricial*, México D.F. México, Editorial Alfaomega, tercera edición.
- Cubo Pérez, José Manuel, (2010), *Aplicación del "análisis por elementos finitos" en la ingeniería naval*, Universidad de Cádiz, Cádiz, España.
- Das, Braja (2001), Principio de la ingeniería de cimentaciones, México D. F. Thomsom
- Harmsem, Teodoro, (2002), Diseño de estructuras de concreto armado, 3ra edición, Lima, PUCP.
- Torres, Rafael (2008) Análisis y Diseño de Muros de Contención de Concreto Armado. (<http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/rafaeltorres/>)
- Encizo, Fernando, (2014), Procedimiento para el análisis dinámico de estructuras usando el método de los elementos finitos (tesis de Pregrado), Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
- Quispe Panca, Alder Jhosue, (2017), Análisis Matricial de estructuras, Introducción al método de los elementos finitos, Lima, Perú, Editorial Macro.
- Universidad Jaume I, Traslación de solido Rígido (Imagen), recuperado de http://www.mecapedia.uji.es/traslacion_del_solido_rigido.htm
- C. Hibbeler, Russell, (2010), *Ingeniería Mecánica: Estática, soportes de cuerpos rígidos sometidos a sistemas de fuerzas bidimensionales* (Imagen), México D.F. México, Pearson Educación, doceava edición
- Torres B. Rafael A., Muros de gravedad (Imagen), recuperado de <https://es.slideshare.net/sebastianponguta/4-muros-de-contencion>

FIGURA A3 ESFUERZOS EN EL EJE X DE LOS ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES (Kg/cm²)

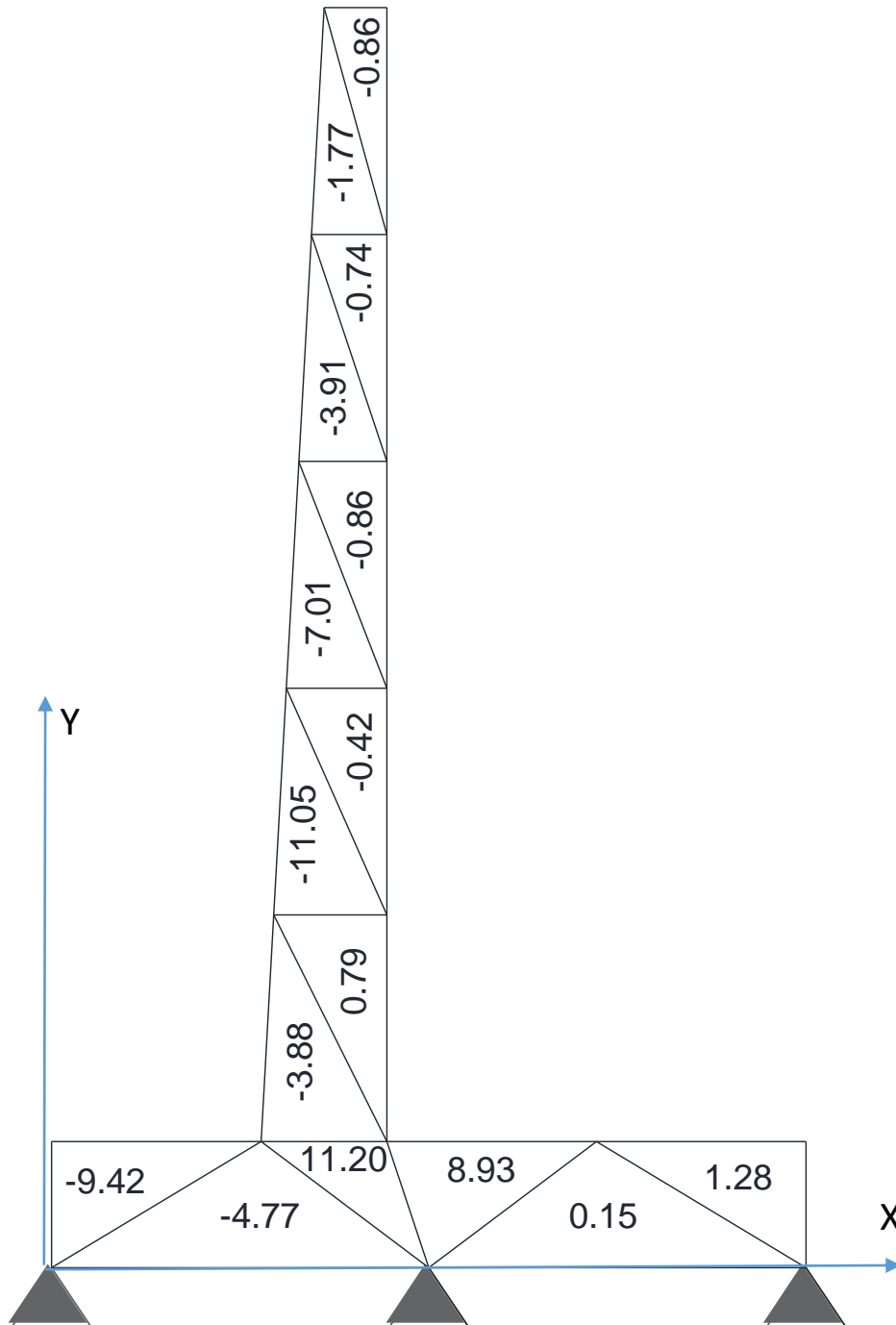


FIGURA A3 REACCIONES EN LOS APOYOS CONSIDERADOS

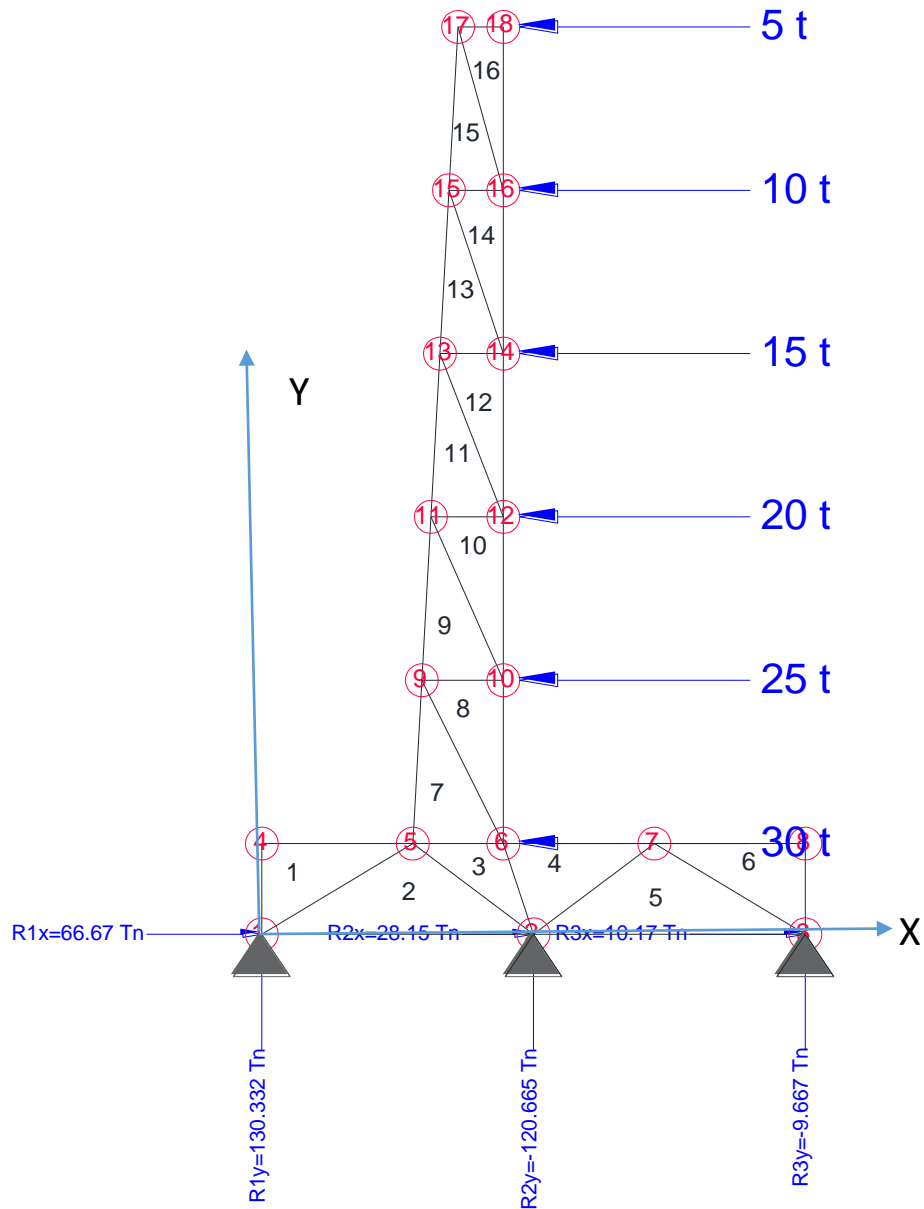


FIGURA A4: DEFORMACIÓN DE LOS NODOS EN EL MURO DE CONTENCIÓN

