UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO – PUNO

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

EL TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA DE WILLEM APLICADO AL PROBLEMA NO LINEAL DE DIRECHLET

TESIS

PRESENTADO POR:

BACH. JUAN CARLOS ORTIZ CHATA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PUNO – PERÚ

2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - PUNO
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

El TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA DE WILLEM APLICADO AL PROBLEMA NO LINEAL DE DIRECHLET

TESIS PRESENTADO POR:

Bach. Juan Carlos Ortiz Chata

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

APROBADO POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

PRESIDENTE: (Lic.) Verónica Alicia Ibañez Ulloa.

PRIMER MIEMBRO: (Lic.) Blanca Jaqueline Quispe Aucca.

SEGUNDO MIEMBRO: (Lic.) Isaac Ortega Limachi.

DIRECTOR / ASESOR: (Mg.) Julio Cesar Villalta Pacori.

Tema : Análisis Funcional

Área : Matemática Pura

Línea de Investigación: Matemática Pura

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 29 DE DICIEMBRE DEL 2017

A los profesores Marcos y Giovany.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al esfuerzo de mi madre por ayudarme y su buena voluntad de mostrarme el camino del Señor Jesús.

Agradesco a mis profesores de la graduación: la profesora Alicia Ibañez, el profesor Ariel Velazco, el profesor Felipe Clímaco, la profesora Adelaida, el profesor Julio Villalta, el profesor Wilfredo Calcin, el profesor Martín Concha, la profesora Blanca Quispe, el profesor Roberto Tícona, el profesor Murillo, la profesora Fabiola, por brindarme su ayuda y consejos para superarme como profesional y ser humano.

Agradezco a mi bella flor que es mi esposa por su ayuda en los momentos que necesitaba, y por brindarme su fuerza y ánimo de superación.

Agradezco a mi orientador Marcos Tadeau y coorientador Giovany Malcher de la maestría por enseñarme las nociones y conceptos para hacer este trabajo. Además les agradezco su buen trato y su voluntad de ayudarme.

Agradezco a las autoridades de Universidad Nacional del Altiplano, en especial a la Sra. Inez y Sra. Hilda por su buen trato.

Finalmente agradezco a mis compañeros y amigos Gustavo, Miguel Angel, William, Reynaldo y Luis Francisco, por brindarme su amistad y sus deseos de seguir adelante.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

En este trabajo vamos presentar el Teorema del Paso de la Montaña de Willem y aplicar al Problema No Lineal de Direchlet dado por

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), x\epsilon\Omega, \\ u = 0, \qquad x\epsilon\partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio limitado con frontera suave $\partial\Omega$, f satisface ciertas condiciones. Nuestro objetivo será asociar un funcional al problema (P) y aplicar el Teorema del Paso de la Montaña a este funcional para obtener puntos críticos , los cuales a su vez serán soluciones para nuestro problema (P). La metodología usada en este trabajo es el método deductivo, basado en la indagación bibliográfica y documental. El resultado que se obtuvo fue demostrar formalmente el Teorema del Paso de la Montaña de Willem y enseguida aplicar al Problema No Lineal de Dirichlet. (P).

Palabras claves: Distribuciones, Sobolev, Inmersión, Min-max, Direchlet.

ABSTRACT

In this work, we will present The Theorem of Mountain Pass of Willem after let´s apply to Problem Non-Linear of Direchlet

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x\epsilon\Omega, \\ u = 0, & x\epsilon\partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded dominio with smooth frontera $\partial\Omega$, f satisfaz some conditions. Our objetive will be to association of a funcional for the problem (P) and then applicator the Mountain Pass Theorem to this functional for obtain critical points, which will be solutions for the problem (P). The methodology used in this work is the deductive method, based in the bibliographical and documental study. The result that we obtain was formally proof the Mountain Pass Theorem and it follows to applicant to Direchlet Nonlinear Problem (P).

Key Words: Distribution, Sobolev, Embedded, Min-max, Direchlet.

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN

La mayoría de las ecuaciones diferenciales parciales surgen de modelos físicos, y otra clase importante surge de problemas en Geometría diferencial. Una de las áreas de estudio actual son las ecuaciones diferenciales parciales de tipo elípticas debido a sus aplicaciones en la física, química, biología y ciencias afines. Este tipo de ecuaciones diferenciales parciales han sido desarrolladas en gran manera últimamente, donde se han usado teoría de las distribuciones y los Espacios de Sobolev. Además de técnicas modernas que han sido escritas en artículos científicos referente a ecuaciones parciales elípticas. Una de las herramientas fundamentales en la solución de tales ecuaciones elípticas es el Teorema del Paso de la Montaña, el cual fue demostrado en el año de 1973 por los matemáticos Ambrosetti y Rabinowitz. También en el año 1983 el matemático Michel Willem mejoró las hipótesis del Teorema del Paso de la Montaña de Ambrosetti y Rabinowitz, dando lugar al Teorema del Paso de Montaña de Willem.

El problema que trataré es la ecuación diferencial parcial elíptica denominada el Problema No Lineal de Dirichlet dado por:

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x\epsilon\Omega, \\ u = 0, & x\epsilon\partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N > 2)$ dominio limitado con frontera suave $\partial\Omega$ y $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función satisfaciendo ciertas condiciones de crecimiento, esto es, será comparada con un polinomio, lo cual permitirá obtener una de las hipótesis del Teorema del Paso de la Montaña de Willem. El problema (P) es un tipo de ecuación diferencial parcial elíptica, que fue tratado inicialmente por Rabinowitz (1988), donde usa el Teorema del Paso de la Montaña de Ambrosetti y Rabinowitz. Luego Donizeti (1989) trata de aclarar más los detalles del trabajo de Rabinowitz (1988), además da observaciones importantes.

En este trabajo voy a presentar el Teorema del Paso de Montaña de Willem, el cual mejora las hipótesis del Teorema del Paso de la Montaña de Ambrosetti y Rabinowitz, luego aplicaré este teorema al Problema (P). Así para abordar esta ecuación, se comenzará con el estudio de la teoría de distribuciones y los espacios de Sobolev. Luego se caracterizará las soluciones débiles del Problema (P) como puntos críticos de un funcional de clase C^1 y luego estableceré el resultado del Teorema del Paso de la Montaña de Willem. Finalmente se usará este resultado para mostrar la existencia de una solución no trivial del Problema (P)en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

CAPÍTULO II

2. REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 ESPACIOS DE BANACH

Definición 1. Un espacio normado es un par $(E, \|\cdot\|)$ formado por espacio vetorial E y una aplicación $\|\cdot\|: \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ llamada norma, que satisface las siguientes propiedades:

a) $\|\mathrm{x}\| \geq 0, \forall x \epsilon E$.

b) $\|\mathrm{x}\| = 0 \leftrightarrow x = 0$.

c) $\|\lambda \mathrm{x}\| = |\lambda| \|\mathrm{x}\|, \forall x \epsilon E y \lambda \epsilon \mathbb{R}$.

d) $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| \leq \|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|, \forall x, y \epsilon E$.

Por simplicidad denotaremos un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ por E.

Definición 2. Sea E un espacio normado y (x_n) una sucesión en$E$. (x_n) es convergente a $x \epsilon X$ si para todo $\varepsilon > 0$existe $n_0 \epsilon \mathbb{N}$ tal que$n \geq n_0$ implica que

$$\|x_n - \mathrm{x}\| < \varepsilon.$$

Definición 3. Sea E un espacio normado y (x_n) una sucesión en$E$. (x_n) es una Sucesión de Cauchy en E si para todo $\varepsilon > 0$existe $n_0 \epsilon \mathbb{N}$ tal que$m, n \geq n_0$ implica que

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Definición 4. Un espacio normado E es llamado un espacio de Banach si cualquier sucesión de Cauchy (x_n) en$E$ es convergente a un elemento $x \epsilon E$.

2.2 TRANSFORMACIONES LINEALES ACOTADAS

Definición 5. Sean E, F espacios vectoriales reales. Decimos que una aplicación $T: E \rightarrow F$ es una transformación lineal si

$$T(x+y) = T(x) + T(y), \forall x, y \epsilon E,$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x), \forall \alpha \epsilon \mathbb{R}.$$

Definición 6. Sea E, F espacios vectoriales normados, $T: E \rightarrow F$una transformación lineal. Decimos que Tes acotada si existe $C > 0$tal que

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \forall x \epsilon E.$$

Proposición 7. El conjunto de transformaciones lineales acotadas forma un espacio vectorial.

2.3 NORMA DE UNA TRANFORMACIÓN LINEAL ACOTADA.

El hecho de que las transformaciones lineales sean acotadas permite definir una norma, la cual es dada por la siguiente definición:

Definición 8. Sea EyF espacios vectoriales normados, $T: E \rightarrow F$ una transformación lineal acotada. La norma de T, denotada por $\|T\|$ es definida por:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Observación 9. Está norma también puede ser definido por:

$$\|T\| = inf\{C > 0; \|Tx\| \leq C\|x\|, \forall x \epsilon E\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Teorema 10. Sean E y F espacios vectoriales normados. Sea $T: E \to F$ una transformación lineal, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $T: E \to F$una transformación lineal acotada.
- T es continua en un punto.
- T es continua en E.
- Tes acotado en conjuntos acotados.

Observación 11. Por el teorema anterior una transformación lineal acotada $T: E \to F$ es llamada también de transformación lineal continua, además si $F = \mathbb{R}$,i.e. $T: E \to \mathbb{R}$, T es llamado de funcional lineal continuo y el espacio de estos funcionales lineales continuos lo denotamos por E', es decir,

$$E' = \{T: E \to \mathbb{R}; T \text{es un funcional lineal y continuo}\}.$$

2.4 DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONALES EN ESPACIOS DE BANACH

Definición 12. Sea E un espacio de Banach y un funcional $I: E \to \mathbb{R}$, decimos que I posee **Derivada de Fréchet** en el punto $u \epsilon E$ cuando existe un funcional lineal continuo $T \epsilon E'$ tal que

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tv}{\|v\|} = 0.$$

La derivada de Fréchet en el punto $u \epsilon E$ cuando existe es única y lo denotamos por $I'(u)$.

2.5 ESPACIOS REFLEXIVOS

Sea X un conjunto y $(Y_i)_{i\epsilon I}$ una colección de espacios topológicos. Considere la familia de funciones

$$\varphi_i : X \to Y_i, \qquad \forall i \epsilon I.$$

Definición 13. **(Topología asociada a $\boldsymbol{\varphi_i}$)** Se llama topología asociada a φ_i a la familia

$$\mathcal{T}_i = \{\varphi_i^{-1}(\omega_i); \omega_i \subset Y_i abierto\}.$$

Comentario 14. La Definición 13 nos permite afirmar que $\varphi_i : X \to Y_i$ es continua en $\mathcal{T}_i$, mas no siempre es cierto que $\varphi_j : X \to Y_j$es continua con $\mathcal{T}_i$ para $i \neq j$. Vamos a construir una menor topología $\mathcal{T}$ en la cual todas las funciones $\varphi_i : X \to Y_i$ sean continuas. Comencemos considerando la familia $(U_\lambda)_{\lambda\epsilon\Lambda}$formado por todos los elementos de $\bigcup_{i\epsilon I} \mathcal{T}_i$. Luego denotemos por Φ la familia formada por intersecciones finitas de $(U_\lambda)_{\lambda\epsilon\Lambda}$, es decir, los elementos de Φ son de la forma

$$\bigcap_{\lambda\epsilon\Gamma} U_\lambda, \Gamma \subset \Lambda \text{finito}.$$

A seguir considere una nueva familia $\mathcal{F}$ formada por uniones arbitrarias de elementos de Φ,es decir sus elementos son de la forma

$$\bigcup_{arb.} \bigcap_{\lambda\epsilon\Gamma} U_\lambda, \Gamma \subset \Lambda finito.$$

Antes de afirmar que los elementos de esta última familia $\mathcal{F}$ forma la menor topología en la cual la familia de funciones

$$\varphi_i : X \to Y_i, \qquad \forall i \epsilon I,$$

son continuas, necesitamos afirmar si la intersección finita de elementos de $\mathcal{F}$ continua estando en $\mathcal{F}$. Para eso damos a siguiente definición.

Definición 15. **(Familia estable)** Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es estable si cualquier intersección finita y unión arbitraria de elementos (conjuntos) de $\mathcal{F}$ continua estando en $\mathcal{F}$.

Lema 16. La familia $\mathcal{F}$ es estable bajo la intersección finita de elementos de$\mathcal{F}$.

Observación 17. Con el Lema 16 tenemos que los elementos de $\mathcal{F}$ forman una topología, mas aun la menor topología en la cual la familia de funciones $(\varphi_i)_{i\epsilon I}$son continuas.

Definición 18. Sea X un conjunto. La topología $\mathcal{T}$ cuyos abiertos son elementos de la familia $\mathcal{F}$, es decir, sus elementos son de la forma $\bigcup_{arb.} \bigcap_{\text{finita}} \varphi_i^{-1}(\omega_i)$ es llamada topología débil asociada a la familia $(\varphi_i)_{i\epsilon I}$.

Proposición 19. Sea (x_n) una sucesión en X. Entonces $x_n \to x$ en $\mathcal{T}$ si, y solamente si

$$\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x), \qquad \forall i \epsilon I.$$

Sea E un espacio de Banach y $f \epsilon E'$ un funcional lineal continuo. Consideraremos la familia de funciones

$$\varphi_f : E \to \mathbb{R}, \quad \forall f \epsilon E'$$

definidas por $\varphi_f(x) = f(x)$.

Definición 20. La topología débil $\sigma(E, E')$ en E es la topología en E asociada a la colección $(\varphi_f)_{f \epsilon E'} (X = E, Y_i = \mathbb{R}, I = E)$.

Observación 21. Como E es un espacio de Banach, E posee una norma la cual induce una topología en E donde la familia $(\varphi_f)_{f \epsilon E'}$ también es continua. Por tanto la topología débil $\sigma(E, E')$ esta contenida en la topología inducida por la norma de E.

Notación 22. Si una secuencia (x_n) en E converge para x con la topología débil$\sigma(E, E')$, escribimos:

$$x_n \rightharpoonup x$$

Definición 23. Sea E un espacio vectorial normado. La norma en el espacio E' es denotada por $\|\cdot\|_{E'}$ y definida por:

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \epsilon E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)|.$$

El espacio vectorial E' es llamado de espacio dual de E, consequentemente el espacio E'' es llamado de espacio bidual de E cuya norma es dada por:

$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{\substack{f \epsilon E' \\ \|f\| \leq 1}} |\xi(f)|.$$

Sea la función $J: E \to E''$ definida por $J(x)(f) = J_x(f) = f(x)$ para todo $x \epsilon E y f \epsilon E'$, es una isometría lineal, es decir, J es una transformación lineal que satisface lo siguiente

$$\|J(x)\| = \|x\|, \forall x \epsilon E.$$

La isometría lineal J es llamada de Inyección Canónica.

Definición 24. El espacio vectorial normado E es llamado reflexivo, si J es sobreyección, es decir, $J(E) = E''$.

Ejemplos 25.

(a) Los espacios vectoriales de dimensión finita son espacios reflexivos.

(b) Los espacios L^pcon $1 < p < \infty$ son reflexivos. Sin embargo los espacios L^1, L^∞ no son reflexivos.

Teorema (Kakutani) 26. Sea E un espacio de Banach, E es reflexivo si y solamente si

$$B_E = \{x \epsilon E; \|x\| \leq 1\}$$

es compacto con la topología débil $\sigma(E, E')$.

Demostración. (Haim, 2010, p.67)

Teorema 27. Asumiendo que E es un espacio reflexivo y (x_n) una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge en la topología débil $\sigma(E, E')$.

2.6 ESPACIOS L^p

Sea $1 \leq p < \infty$, Ωun conjunto.

Definición 28. El espacio $L^p(\Omega)$es definido por

$$L^p(\Omega) = \left\{f: \Omega \to \mathbb{R}; f es mensurable y \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\right\},$$

y su norma es definido por

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_\Omega |f|^p d\mu\right]^{1/p}.$$

Antes de enunciar algunos resultados en los espacios $L^p(\Omega)$, vamos a dar el significado de que **una función** $f: \Omega \to \mathbb{R}$ **satisface una propiedad** Q **casi siempre (c.s.) en** Ω si existe un conjunto de medida nula A, es decir, $|A| = 0$ tal que

$$f(x) \text{ satisface la propiedad } Q \ \forall x \in \Omega \setminus A .$$

Ejemplo. Sea $f: \Omega \to \mathbb{R}$ que satisface la propiedad Q: $f \neq 0$ c.s. en Ω. Lo que significa que existe un conjunto de medida nula A tal que

$$f(x) \neq 0 \forall x \in \Omega \setminus A$$

Teorema 29. (Teorema da Convergencia Monótona) Sea (f_n) una secuencias de funciones en $L^1(\Omega)$ que satisface

(a) $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \cdots c.s. en \, \Omega$,

(b) $\sup_n \int f_n < \infty$.

Entonces

$$f_n(x) \to f(x) \ c.s. en \, \Omega,$$

Además $f \epsilon L^1$ y $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Teorema 30. (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue) Sea (f_n)una secuencias de funciones en $L^1(\Omega)$ que satisface

(a) $f_n(x) \to f(x)\ c.s.en\ \Omega$,

(b) $\exists g \epsilon L^1$ tal que $\forall n \epsilon \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq g(x)\ c.s.en\ \Omega.$$

Entonces

$$f \epsilon L^1\ \ y\ \|f_n - f\|_1 \to 0.$$

Teorema 31. (Teorema de Vainberg) Sea $1 \leq p \leq \infty$y (f_n) una secuencia en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\|f_n - f\|_p \to 0.$$

Entonces existe una subsecuencia $\left(f_{n_k}\right)$ y una función $h \epsilon L^p$ tal que

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x) c.s.en \Omega$,

(b) $\left|f_{n_k}(x)\right| \leq h(x) c.s.en \Omega$.

Demostración. Para el caso $p = \infty$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty c.s.en \Omega.$$

Luego cuando $n \to \infty$, tenemos

$$f_n(x) \to f(x) c.s.en \Omega.$$

Además existe una constante $C > 0$tal que

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \leq C + \|f\|_\infty c.s.en \Omega.$$

Observe que

$$h(x) = C + \|f\|_\infty \epsilon L^\infty.$$

En el caso $1 \leq p < \infty$ usemos el hecho de

$$\|f_n - f\|_p \to 0.$$

Implica que (f_n)es una sucesión de Cauchy. Luego consideremos lo siguiente

$$\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2}, \quad m, n \geq n_1.$$

Y para $n_2 \geq n_1$

$$\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^2}, \ \ m, n \geq n_2.$$

$n_3 \geq n_2$,

$$\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^3}, \ \ m, n \geq n_3.$$

Consecuentemente tenemos

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \ \ k \geq 1.$$

Luego podemos definir

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right|.$$

$$\|g_m\|_p = \left\|\sum_{k=1}^{m} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{m} \left\|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Así por el Teorema de la Convergencia Monótona (Teorema 30), existe $g \epsilon L^P$ tal que

$$g_m(x) \to g(x) c.s. en \Omega.$$

Ahora considerando $l \geq k \geq 2$, tenemos

$$\left|f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)\right| \leq \left|f_{n_l}(x) - f_{n_{l-1}}(x)\right| + \cdots + \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{l-1} \left|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right| - \sum_{i=1}^{k-1} \left|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right|$$

$$\leq g(x) - g_{k-1}(x) c.s. en \Omega.$$

Desde que $g_{k-1}(x) \to g(x) c.s. en \Omega$. Tenemos que $\left(f_{n_k}(x)\right) c.s. en \Omega$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$,lo que implica que

$$f_{n_k}(x) \to f(x) c.s. en \Omega.$$

Así

$$\left|f_{n_l}(x) - f(x)\right| \leq g(x) c.s. en \Omega.$$

Por tanto $f \epsilon L^p$ y

$$\left|f_{n_k}(x)\right| \leq \left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| + |f(x)| \leq g(x) + |f(x)| c.s. en \Omega.$$

Donde $g(x) + |f(x)| \epsilon L^p$.

Notación 32. Sea $1 \leq p \leq \infty$, denotamos p' el exponente conjugado, es decir,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Teorema 33. (Desigualdad de Hölder) Sea $f\epsilon L^{p}(\Omega)$ y $g\epsilon L^{p'}(\Omega)$ con $1\leq p\leq\infty$. Entonces $fg\epsilon L^{1}(\Omega)$y

$$\int_{\Omega}|fg|\leq\|f\|_{p}\|g\|_{p'}.$$

Ademas, si $f\in L^{p}(\Omega)\cap L^{q}(\Omega)com1\leq p\leq q\leq\infty$, entonces $f\in L^{r}(\Omega)$para todo$p\leq r\leq q$ y se establece la siguiente desigualdad de interpolación,

$$\| f \|_{r}\leq\| f \|_{p}^{\alpha}\| f \|_{q}^{1-\alpha}, \qquad \text{donde } \frac{1}{r}=\frac{\alpha}{p}+\frac{1-\alpha}{q}, 0\leq\alpha\leq 1$$

2.7 EL TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA DE WILLEM

En este capítulo enunciaremos el Lema de la Deformación, el cual nos permitirá demostrar el Teorema del Paso de la Montaña de Willem. Luego en el Capítulo IV aplicaremos este Teorema al Problema No Lineal de Direchlet.

Definición 34. Sea E un Espacio de Banach, $I\epsilon C^{1}(E,\mathbb{R})$ y

$$\tilde{E}=\{u\epsilon E; I'(u)\neq 0\},$$

es el conjunto de los puntos regulares de I. Decimos que la función

$$\varphi:\tilde{E}\rightarrow E$$

es un Campo Pseudo-Gradiente para I cuando φ es localmente lipschitziana y vale

$$(a)\|\varphi(u)\|_{E}\leq\|I'(u)\|_{E'}$$

$$(b)I'(u)\varphi(u)\geq\|I'(u)\|_{E'}^{2}.$$

Lema 35. Si $I\epsilon C^{1}(E,\mathbb{R})$ entonces existe un Campo Pseudo-Gradiente para I en $\tilde{E}$.

Demostración (Rabinowitz, 1988, p.81).

Lema 36. (Lema de Deformación) Sea E un espacio de Banach, $I\epsilon C^1(E,\mathbb{R})$ y $c\epsilon\mathbb{R}, \epsilon > 0$. Si

$$\|I'(u)\| \geq 4\varepsilon, \forall u\epsilon I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]).$$

Entonces existe una función $\eta\epsilon C(E,E)$ tal que

(i) $\eta(u) = u, \forall u \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]),$

(ii) $\eta(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}.$

Donde $I^d =: \{u\epsilon E; I(u) \leq d\}.$

Demostración. Definamos la función $\psi: E \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(u) = \frac{dist(u, E\backslash A)}{dist(u, E\backslash A) + dist(u, B)},$$

donde

$$A = I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] y B = I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon].$$

Para mostrar que ψ está bien definida, vamos a mostrar que

$$dist(u, E\backslash A) + dist(u, B) > 0.$$

Suponga que

$$dist(u, E\backslash A) + dist(u, B) = 0.$$

La ultima igualdad implica que

$$dist(u, B) = 0,$$

y como B es cerrado, entonces

$$u\epsilon B.$$

Consecuentemente

$$c - \varepsilon \leq I(u) \leq c + \varepsilon \ldots\ldots\ldots (1)$$

Por otro lado, $dist(u, E\backslash A)$ implica que $u \in \overline{E \backslash A}$ Así, existe una sucesión $(u_n) \subset E\backslash A$tal que $u_n \to u$en Ee

$$I(u_n) < c - 2\varepsilon ó I(u_n) > c + 2\varepsilon.$$

Haciendo $n \to \infty$en las desigualdades anteriores, tenemos

$$I(u) \leq c - 2\varepsilon ó I(u) \geq c + 2\varepsilon,$$

Lo cual contradice a (1).

Ahora como la función distancia es lipschitziana, tenemos que la función ψ es continua y localmente lispchtiziana.

Observemos también que $\psi = 1 en B$ y $\psi = 0 en E\backslash A$.

Sea $\varphi: \tilde{E} \rightarrow E$un Campo Pseudo-Gradiente para I y definimos

$$W(u) = -\psi(u)\frac{\varphi(u)}{\|\varphi(u)\|}, u\epsilon A,$$

$$= 0, u\epsilon E\backslash A.$$

Notemos que W es localmente lipschtiziana y $\|W(u)\| \leq 1$para todo $u\epsilon E$. Luego para cada $u\epsilon E$, el problema de Cauchy

$$\frac{d}{dt}\sigma(t,u) = W\big(\sigma(t,u)\big),$$

$$\sigma(o,u) = u.$$

Posee solución única $\sigma(\cdot,u)$ definida en $\mathbb{R}$ con $\sigma\epsilon C(\mathbb{R}\times E, E)$. Considere la función ηdefinida en E por $\eta(u) \coloneqq \sigma(1,u)$.Desde que $W = 0$para todo $u\epsilon E\backslash A$,entonces $\sigma(t,u)$ es constante para cada $u\epsilon E\backslash A$. Desde que $\sigma(0,u) = u$, tenemos que η satisface (i).Ahora observe que

$$\frac{d}{dt}I\big(\sigma(t,u)\big) = I'\big(\sigma(t,u)\big)\frac{d}{dt}\sigma(t,u) = I'\big(\sigma(t,u)\big)W\big(\sigma(t,u)\big) = 0, \dots\dots (2)$$

para todo $\sigma(t,u)\epsilon E\backslash A$.Por otro lado para todo $\sigma(t,u)\epsilon A$ tenemos

$$\frac{d}{dt}I\big(\sigma(t,u)\big) = -I'\big(\sigma(t,u)\big)\varphi\big(\sigma(t,u)\big)\frac{\psi\big(\sigma(t,u)\big)}{\big\|\varphi\big(\sigma(t,u)\big)\big\|}$$

Desde que φ es un Campo Pseudo-Gradiente por b), tenemos

$$\frac{d}{dt}I\big(\sigma(t,u)\big) \leq -\psi\big(\sigma(t,u)\big)\frac{\big\|I'\big(\sigma(t,u)\big)\big\|^2}{\big\|\varphi\big(\sigma(t,u)\big)\big\|} \leq 0 \dots\dots (3)$$

De (2) y (3), tenemos que $I\big(\sigma(t,u)\big)$es no decreciente en t. Considerando $u\epsilon I^{c+\varepsilon}$, si existiera un $\bar{t}\epsilon[0,1]$ tal que $I\left(\sigma\left(\bar{t},u\right)\right) < c-\varepsilon$, entonces

$$I\big(\sigma(1,u)\big) \leq I\left(\sigma\left(\bar{t},u\right)\right) < c-\varepsilon.$$

Luego (ii) es válido. Por otro lado, si $u\epsilon I^{c+\varepsilon} y c-\varepsilon \leq I\big(\sigma(t,u)\big)$, para todo $t\epsilon[0,1]$, tenemos

$$c-\varepsilon \leq I\big(\sigma(t,u)\big) \leq I\big(\sigma(0,u)\big) \leq I(u) \leq c+\varepsilon, \forall t\epsilon[0,1].$$

De esas desigualdades, inferimos que $\sigma(t,u)\epsilon B$ y $\psi\big(\sigma(t,u)\big) = 1$, para todo $t\epsilon[0,1]$.

Así de (3), tenemos que

$$I(\eta(u)) = I(\sigma(1,u))$$

$$= I(u) + \int_0^1 \frac{d}{dt} I(\sigma(t,u))dt$$

$$\leq I(u) - \int_0^1 \psi(\sigma(t,u)) \frac{\|I'(\sigma(t,u))\|^2}{\|\varphi(\sigma(t,u))\|} dt$$

$$= I(u) - \int_0^1 \frac{\|I'(\sigma(t,u))\|^2}{\|\varphi(\sigma(t,u))\|} dt.$$

Luego del ítem a) de la definición de Campo Pseudo-Gradiente, tenemos

$$I(\eta(u)) \leq c + \varepsilon - \frac{1}{2}\int_0^1 \|I'(\sigma(t,u))\| dt.$$

Ahora como $\sigma(t,u)\epsilon B = I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ y por hipótesis del Lema, tenemos

$$\|I'(\sigma(t,u))\| \geq 4\varepsilon.$$

Por tanto

$$I(\eta(u)) \leq c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon.$$

Así (ii) también es satisfecha.

Teorema 37. (Teorema del Paso de la Montaña de Willem).

Sea E un espacio de Banach y $I\epsilon C^1(E,\mathbb{R})$ con $I(0) = 0$.Si existen $\alpha, \rho > 0$tales que

$(H1) I(u) \geq \alpha > 0, \forall u\epsilon E;\ \|u\| = \rho$

y existe $e\epsilon E$ tal que $\|e\| > \rho$con

$$(H2) I(e) < 0.$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$,existe $u_\varepsilon \epsilon E$ tal que

(a) $c{-}2\varepsilon \leq I(u_\varepsilon) \leq c + 2\varepsilon$,

(b) $\|I'(u_\varepsilon)\| < 4\varepsilon$,

donde

$$c = \inf_{\gamma\epsilon\Gamma} \max_{t\epsilon[0,1]} I(\gamma(t)),$$

$$\Gamma = \{\gamma\epsilon C([0,1],E); \gamma(0) = 0 y \gamma(1) = e\}.$$

Demostración. Primeramente mostraremos que c está bien definido. En efecto, desde que $\gamma(0) = 0\epsilon B_\rho(0), \gamma(1) = e\epsilon X\backslash \bar{B}_\rho(0) y \gamma([0,1])$es conexo, tenemos que $\gamma([0,1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset$.

Luego, de la hipótesis $(H1)$,tenemos

$$\max_{t\epsilon[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha \Longrightarrow c \geq \alpha > 0.$$

Suponga ahora, por contradicción que para algún , $\varepsilon_0 > 0$ las condiciones (a) y (b) no ocurran, o sea, para todo $u\epsilon E$

(a) $I(u) < c - 2\varepsilon_0$ ó $I(u) > c + 2\varepsilon_0$ ó

(b) $\|I'(u)\| \geq 4\varepsilon_0$.

En el primer caso (a), tenemos que no puede ocurrir pues existe $\gamma\epsilon\Gamma$tal que

$$c - 2\varepsilon_0 < c \leq \max_{t\epsilon[0,1]} I(\gamma(t)) < c + 2\varepsilon_0.$$

Luego podemos asumir que existe $u\epsilon E$tal que

$$c - 2\varepsilon_0 \leq I(u) \leq c + 2\varepsilon_0 y \|I'(u)\| \geq 4\varepsilon_0$$

Desde que $c > 0$ y disminuido si es necesario ε_0>0, obtenemos

$$I(e) < I(0) = 0 < c - 2\varepsilon_0.$$

Así del Lema de Deformación (Lema 36), existe $\eta\epsilon C(E;E)$ tal que por la condición de este lema, tenemos

$$\eta(0) = 0 y \eta(e) = e,$$

pues $0, e \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$. De la definición de c existe $\bar{\gamma}\epsilon\Gamma$ tal que

$$\max_{t\epsilon[0,1]} I\left(\bar{\gamma}(t)\right) < c + \varepsilon_0.$$

Consideremos $\hat{\gamma}: [0,1] \to E$ definido por

$$\hat{\gamma}(t) = \eta\left(\bar{\gamma}(t)\right).$$

Luego observe que

$$\hat{\gamma}(0) = \eta\left(\bar{\gamma}(0)\right) = 0 y \hat{\gamma}(1) = \eta\left(\bar{\gamma}(1)\right) = e.$$

Consecuentemente $\hat{\gamma}\epsilon\Gamma$.Nuevamente por el Lema de la Deformación (Lema 36) y por la condición (ii), tenemos

$$\hat{\gamma}(t) = \eta\left(\bar{\gamma}(t)\right) \epsilon I^{c-\varepsilon_0}.$$

Así

$$c \leq \max_{t\epsilon[0,1]} I\left(\bar{\gamma}(t)\right) \leq c - \varepsilon_0 < c..$$

Lo que es una contradicción, por tanto el Teorema está probado.

2.8 DISTRIBUCIONES

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $\phi: \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase C^∞.

Definición 38. Se llama soporte de ϕ, denotado por $supp(\phi)$, a la clausura del conjunto en el cual ϕ no se anula, es decir,

$$supp(\phi) = \overline{\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}}.$$

Si este conjunto es compacto, entonces decimos que ϕ tiene soporte compacto.

Observación 39. El espacio de las funciones $\phi: \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^∞, con soporte compacto es un espacio vectorial denotado por $D(\Omega)$,cuyos elementos son llamados de funciones de prueba.

Definición 40. Una secuencia de funciones $\{\phi_m\}$ en $D(\Omega)$ converge para 0, si existe un compacto fijo $K \subset \Omega$ tal que $supp(\phi_m) \subset K$,para todo m, con ϕ_m y todas sus derivadas convergiendo uniformemente para0em K, es decir,

$$\phi_m \to 0 \Leftrightarrow \exists K \subset \Omega;\, supp(\phi_m) \subset K, \forall m y \phi_m^{(n)} \to 0 uniformenteemK.$$

Definición 41. Sea $T: D(\Omega) \to R$un funcional lineal. T es una distribución en Ω si para cada secuencia $\{\phi_m\}$ tal que $\phi_m \to 0$ en $D(\Omega)$,tenemos

$$T(\phi_m) \to 0.$$

Observación 42. La distribución $T: D(\Omega) \to \mathbb{R}$es un funcional lineal continuo y además el conjunto de distribuciones forma un espacio vectorial que denotamos por $D'(\Omega)$ y si

$\Omega = \mathbb{R}^N, D'(\mathbb{R}^N) = D'$.

Definición 43. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$un conjunto abierto y una función $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Se dice que f es localmente integrable si para todo compacto $K \subset \Omega$ se tiene:

$$\int_{\mathrm{K}} |f| < \infty.$$

Ejemplo 44. Sea $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. El funcional lineal T_f: $D(\Omega) \to \mathbb{R}$definido por:

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f\phi$$

es una distribución.

Observación 45. Si $f\epsilon L^p(\Omega)$, $p \geq 1$entonces f es localmente integrable, consecuentemente $T_f: D(\Omega) \to \mathbb{R}$es una distribución.

Ejemplo 46. (Distribución de Dirac). El funcional lineal $\delta: D(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por:

$$\delta(\phi) = \phi(0)$$

es una distribución.

2.9 DERIVADA DE UNA DISTRIBUCIÓN

Definición 47. Sea $x = (x_1, \dots, x_N)\epsilon\mathbb{R}^N$.Un multi-índice α es la n-upla de números enteros no negativos

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N).$$

Asociamos al multi-índice α los siguientes símbolos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N,$$

$$\alpha! = \alpha_1. \dots. \alpha_N,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}. \dots. x_N^{\alpha_N}.$$

Se α y β son multi-índices, denotamos $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$, para todo $i = 1, \dots, N$. Denotamos también

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Definición 48. (Derivada de una distribución) Sea $T\epsilon D'(\Omega)$y α multi-índice. Definimos la derivada de orden α de T por

$$(D^\alpha)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} DT(D^\alpha \phi), \qquad \forall \phi\epsilon D(\Omega).$$

Ejemplo 49. La función Heaviside Hen $\mathbb{R}$, definda por

$$H(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0, \end{cases}$$

es localmente integrable, luego existe la función distribución T_H. Sea $\phi\epsilon D$ entonces

$$\frac{dT_H}{dx}(\phi) = -T_H\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} = \phi(0) = \delta(\phi).$$

O sea $\frac{dT_H}{dx} = \delta$.

Definición 50. El gradiente de la distribución T, denotado por ∇T,es definido por

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial x_N}\right).$$

El laplaciano de T es definido como

$$\Delta T = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 T}{\partial {x_i}^2}.$$

Observación 51. En el caso de que la distribución sea generada por una función $u \epsilon L^p(\Omega)$,con $p \geq 1$, denotamos el gradiente de esta distribución por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right),$$

y su laplaciano por, $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}.$

2.10 ESPACIOS DE SOBOLEV

Definición 52. Sea $m > 0$ un entero y $0 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, es definido por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \epsilon L^p(\Omega); D^\alpha u \epsilon L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

con norma

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

y seminorma

$$|u|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Observaciones 53.

(i) Si $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$, o sea

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$$

y para $u \epsilon H^m(\Omega)$, denotamos su norma por $\|u\|_{m,\Omega}$.

(ii) La norma $\|u\|_{m,p,\Omega}$en el espacio $H^m(\Omega)$ es inducida por el producto interno

$$< u, v >= \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha u\, D^\alpha v, \qquad \forall u, v \epsilon H^m(\Omega).$$

(iii) En el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ la función

$$u\epsilon W^{1,p}(\Omega) \mapsto \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) \epsilon \left(L^p(\Omega)\right)^{N+1}$$

es una isometría.

Teorema 54. Si $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$es un espacio de Banach. Además, si $1 < p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo.

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$. Usando a observación 19 (iii), tenemos que $\{u_n\}$ y $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\}$, $1 \leq i \leq N$ son secuencias de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Luego como $L^p(\Omega)$es un espacio completo, tenemos

$$u_n \to u \; y \; \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to v_i \; en \; L^p(\Omega).$$

Afirmación. $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

En efecto, sea $\phi\epsilon D(\Omega)$ycomo $u_n \epsilon W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\frac{\partial T_{u_n}}{\partial x_i}(\phi) = T_{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}}(\phi) \Leftrightarrow -\int_\Omega u_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\phi \dots\dots (1)$$

Ahora, desde que $u_n \to u y \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to v_i en L^p(\Omega)$, y por el Teorema de Vainberg (Teorema 31), a menos de subsecuencia, tenemos

$$u_n(x) \to u(x) \; c.s. en\Omega$$

y existe $g\epsilon L^p(\Omega)$tal que

$$|u_n(x)| \leq g(x) \; c.s. en\Omega.$$

Luego

$$u_n(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \to u(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \; c.s. en\Omega$$

y

$$\left|u_n(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_i}\right| \leq Kg(x)\; c.s.en\;\; \Omega,$$

donde $K = \max_{x\epsilon\Omega}\left|\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_i}\right|$.

Por tanto por el Teorema de la Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 30), obtenemos

$$\int_\Omega u_n\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \to \int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \ldots\ldots\ldots(2)$$

De manera análoga, tenemos

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\phi \to \int_\Omega v_i\phi \ldots\ldots\ldots(3)$$

Así usando la expresión (2) e (3) en la expresión (1), tenemos

$$\int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \int_\Omega v_i\phi$$

O sea $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Consecuentemente usando la Observación 53 (iii), tenemos

$$\|u_n - u\|_{m,1,\Omega} = \|u_n - u\|_{L^p} + \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p} \to 0$$

Es decir, $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Considerando $W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p,\Omega}} \subset W^{m,p}(\Omega)$. Obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 55. Sea $1 \leq p < \infty$. Para cualquier entero $m \geq 0$, tenemos

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N).$$

Teorema 56. (Friedrichs) Sea $1 \leq p, u\epsilon W^{1,p}(\Omega)$.Entonces existe una secuencia $\{u_n\}$ en $D(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u en L^p(\Omega)\; y \left.\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|_{\Omega'} \to \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\Omega'}\; en\;\; L^p(\Omega'),$$

para todo $0 \leq i \leq N y \Omega' \subset\subset \Omega$,es decir, $\overline{\Omega'}$ es compacto en Ω.

Teorema 57. (Desigualdade de Poincaré) Sea Ω un conjunto abierto y acotado en R^N.Entonces existe $C = C(p, \Omega) > 0$talque

$$|u|_{0,p,\Omega} \leq C|u|_{1,p,\Omega}, \ \forall u \epsilon W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particular $u \rightarrow |u|_{1,p,\Omega}$ es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ que es equivalente a $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$.

2.11 INMERSIONES CONTINUAS Y COMPACTAS DE LOS ESPACIOS DE SOBOLEV

Las inmersiones continuas y compactas de Sobolev establecen ciertas desigualdades útiles. Así enunciaremos estas propiedades a seguir:

Definición 58. Sean E_1 y E_2 espacios vectoriales normados con normas $\|\cdot\|_1 y \|\cdot\|_2$ respectivamente tales que $E_1 \subset E_2$. Se dice $(\mathrm{E}_1, \|\cdot\|_1)$ está inmerso continuamente en $(\mathrm{E}_2, \|\cdot\|_2)$ o $E_1 \rightarrow E_2$ está inmerso continuamente si existe una constante $C > 0$tal que

$$\|u\|_2 \leq C\|u\|_1, \qquad \forall u \epsilon E_1.$$

Teorema 59. (Desigualdad de Sobolev) Si $1 \leq p < N$ entonces existe una constante $C = C(p, N) > 0 talque$

$$|u|_{0,p^*,\mathbb{R}^N} \leq C|u|_{1,p,\mathbb{R}^N}, \qquad \forall u \epsilon W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

En particular, la inmersión

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

es continua, con $p^* = \frac{pN}{N-p}$.

Corolario 60. Si $1 \leq p < N$,la siguiente inmersión es continua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \qquad \forall q \epsilon [p, p^*].$$

Demostración. Sea $p \leq q \leq p^*$. Entonces podemos escoger $\alpha \in [0,1]$ tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}.$$

Observe que $|u|^{\alpha q} \in L^{\frac{p}{\alpha q}}(\mathbb{R}^N)y|u|^{(1-\alpha)q} \in L^{\frac{p^*}{(1-\alpha)q}}(\mathbb{R}^N$.De ahí por la segunda desigualdad de Holder dada en el Teorema 33, tenemos que $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$

$$\| u \|_q \leq \| u \|_p^\alpha \| u \|_{p^*}^{1-\alpha} \leq \| u \|_p + \| u \|_{p^*}.$$

Ahora por la Desigualdad de Sobolev (Teorema 59),

$$\| u \|_q \leq \| u \|_p + C|u|_{1,p,\mathbb{R}^N} \leq max\{1, C\} \| u \|_{1,p,\mathbb{R}^N},$$

de ahí, la inmersión $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to L^q \ (\mathbb{R}^N)$ es continua.

Corolario 61. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $u \epsilon W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces $u \epsilon L^q(\Omega)$ para todo $q \epsilon [p, p^*]$y existe $C = C(p, N) > 0$tal que

$$|u|_{0,p^*,\Omega} \leq C|u|_{1,p,\Omega},$$

$$|u|_{0,q,\Omega} \leq C\|u\|_{1,p,\Omega},$$

Para todo $u \epsilon W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Definimos $\tilde{u}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{u}(x) = u(x), \text{si } x \in \Omega \text{ y } \tilde{u}(x) = 0, \text{si } x \in \Omega^c.$$

Note que $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para $i = 1, \ldots, N$. De ahí $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y por la Desigualdad de Sobolev, tenemos que

$$\| \tilde{u} \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C|\tilde{u}|_{1,p,\mathbb{R}^N},$$

lo que implica en

$$\| u \|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C|u|_{1,p,\Omega}.$$

Desde que $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ y el Corolário de la Desigualdad de Sobolev(Teorema 59), tenemos que $\tilde{u} \in L^q(\mathbb{R}^N)$para$p \leq q \leq p^*$ y existe un $K > 0$ tal que

$$\| \tilde{u} \|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq K \| \tilde{u} \|_{1,p,\mathbb{R}^N},$$

lo que implica en

$$\| u \|_{L^q(\Omega)} \leq K \| u \|_{1,p,\Omega}$$

Observación 62. El Corolario 61 implica que $W_0^{1,p}(\Omega) \to u \epsilon L^q(\Omega)$ para $q \epsilon [p, p^*]$es una inmersión continua, llamada también de inmersión continua de Sobolev.

Definición 63. Sean $E_1 y E_2$ espacios vectoriales normados con normas $\|\cdot\|_1 y \|\cdot\|_2$ respectivamente tales que $E_1 \subset E_2$. Se dice $(\mathrm{E}_1, \|\cdot\|_1)$ está inmerso compactamente en $(\mathrm{E}_2, \|\cdot\|_2)$ si para toda secuencia limitada en $(\mathrm{E}_1, \|\cdot\|_1)$ existe una subsecuencia convergente en $(\mathrm{E}_2, \|\cdot\|_2)$.

Teorema 64. (Rellich-Kondrachov). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y limitado de clase C^1. Entonces las siguientes inmersiones son compactas:

(i) Si $p < N, W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega) 1 \leq q < p^*$,

(ii) Si $p = N, W^{1,N}(\Omega) \to L^q(\Omega) 1 \leq< p^*$,

(iii) Si $p > N, W^{1,p}(\Omega) \to C\left(\bar{\Omega}\right) 1 \leq q < p^*$.

Observación 65. Las inmersiones compactas del Teorema anterior son llamadas también de inmersiones compactas de Sobolev.

CAPÍTULO III

3. MATERIALES Y MÉTODOS

Los métodos que se usaron deductivo, analítico, como la monografía de METODOS MINIMAX EN LA TEORIA DE LOS PUNTOS CRÍTICOS CON APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES del autor Paul H. Rabinowitz [R], puesto que el proyecto consiste en la exploración, interpretación y análisis.

CAPÍTULO IV

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo daremos a conocer el Problema No Lineal de Direchlet , el cual resolveremos con ayuda del Teorema del Paso de la Montaña de Willem y la Revisión Literaria del Capítulo II. También usaremos las ideas de una revista de matemática titulada El Teorema del Paso de la Montaña y una Aplicación (Donizete, 1989).

4.1 EL PROBLEMA NO LINEAL DE DIRECHLET.

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), x\epsilon\Omega, \\ u = 0, x\epsilon\partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$ es un dominio abierto y acotado con frontera regular $\partial\Omega$.

La función f satisface lo siguiente:

(f1) $f(x,s)\epsilon C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$

(f2) $\exists a_1, a_2 > 0$tales que

$$|f(x,s)| \leq a_1 + a_2|s|^p,$$

donde $0 \leq p < \frac{N+2}{N-2}$.

4.2 EL FUNCIONAL ASOCIADO CON EL PROBLEMA (P)

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right) dx\ .,$$

donde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$.

El espacio de Sobolev donde el funcional I está definido es $E = W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,\Omega}}$, recordando que su norma es dado por

$$\left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\right)^{1/2},$$

por la Desigualdad de Poíncare (ver Teorema 57), está norma es equivalente a

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$$

Como vamos aplicar el Teorema del Paso de la Montaña de Willem (Teorema 37), tenemos que mostrar que $I\epsilon C^1(E,\mathbb{R})$y que los puntos críticos de I son soluciones débiles de (P). Antes de concluir esto, vamos a mostrar el siguiente resultado.

Proposición 66. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y $g: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que satisface lo siguiente:

(g1) $g\epsilon C\left(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ y

(g2) $\exists r, t \geq 1 e a_1, a_2 \geq 0$ tales que

$$|g(x,s)| \leq a_1 + a_2|s|^t$$

Entonces la función $\varphi(x) \mapsto g\big(x, \varphi(x)\big)\epsilon C\big(L^r(\Omega), L^t(\Omega)\big)$.

Prueba. Si $u\epsilon L^r(\Omega)$,

$$\int_\Omega \big|g\big(x,u(x)\big)\big|^t dx \leq \int_\Omega \left(a_1 + a_2|u(x)|^{r/t}\right)^t dx$$

$$\leq 2^t \int_\Omega ({a_1}^t + {a_2}^t|u(x)|^r)dx$$

$$\leq a_3 \int_\Omega (1 + |u(x)|^r)dx.$$

Donde mostramos que $g: L^r(\Omega) \to L^t(\Omega)$ está bien definida.

Ahora para mostrar la continuidad de esta función, observe que, g es continua en $\varphi\epsilon L^r(\Omega)$ si, y solamente si $h\big(x, z(x)\big) = g\big(x, z(x) + \varphi(x)\big) - g\big(x, z(x)\big)$ es continua en $z = 0$.

Así mostremos que h es continua en $z = 0$, para esto vea que $h(x, 0) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$ estableceremos que exista un $\delta > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} < \delta \Rightarrow \|h(\cdot, u)\|_{L^t(\Omega)} < \varepsilon.$$

Por (g1) e $h(x, 0) = 0$, dado $\hat{\varepsilon} > 0$ existe un $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$|h(x,s)| < \hat{\varepsilon}, si x\epsilon\bar{\Omega}, |s| \leq \hat{\delta}.$$

Sea $u\epsilon L^r(\Omega)$ con $\|u\|_{L^r(\Omega)} < \delta$($\delta$libre por el momento), y definimos

$$\Omega_1 = \left\{x\epsilon\bar{\Omega}; |u(x)| \leq \beta\right\}(= \Omega_1(u)).$$

Por tanto,

$$\int_{\Omega_1} \left|h\left(x,u(x)\right)\right|^t dx \leq \hat{\varepsilon}^t |\Omega_1| \leq \hat{\varepsilon}^t |\Omega|.$$

Escogemos $\hat{\varepsilon}>0$ tal que $\hat{\varepsilon}^t \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^t$. Esto determina $\hat{\varepsilon}$. Sea $\Omega_2 = \bar{\Omega} - \Omega_1$ y como antes tenemos

$$\int_{\Omega_2} \left|h\left(x,u(x)\right)\right|^t dx \leq a_3 \int_{\Omega_2} (1 + |u|^r) dx$$

$$\leq a_3(|\Omega_2| + \delta^r).$$

Ahora como

$$\delta^r \geq \int_{\Omega_2} |u|^r dx \geq \beta^r |\Omega_2| \Longrightarrow (\delta\beta^{-1})^r \geq |\Omega_2|$$

Luego $\int_{\Omega_2} \left|h\left(x,u(x)\right)\right|^t dx \leq a_3((\delta\beta^{-1})^r + \delta^r) = a_3(\beta^{-1}+1)\delta^r$.Escogemos $\delta > 0$ tal que $a_3(\beta^{-1}+1)\delta^r < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^t$. Por tanto

$$\int_{\Omega} \left|h\left(x,u(x)\right)\right|^t dx = \int_{\Omega_1} \left|h\left(x,u(x)\right)\right|^t dx + \int_{\Omega_2} \left|h\left(x,u(x)\right)\right|^t dx$$

$$< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^t + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^t = 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^t \leq \varepsilon.$$

Así dado $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$; $\|u\|_{L^r(\Omega)} < \delta \Rightarrow \|h(\cdot,u)\|_{L^t(\Omega)} < \varepsilon$.

Consecuentemente $g: L^r(\Omega) \to L^t(\Omega)$ es continua.

Proposición 67. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitado con frontera $\partial\Omega$ y $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, satisfaciendo:

(f1) $f(x,s) \epsilon C\left(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$, y

(f2) $\exists a_1, a_2 > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq a_1 + a_2|s|^t,$$

donde $0 \leq t < \frac{N+2}{N-2}$ y $N \geq 3$.

Si $F(x,s) = \int_0^s f(x,m)dm$ entonces el funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right) dx$$

es de clase $C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$y tiene como derivada

$$I'(u)\varphi = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi - f(x,u)\varphi) dx, \forall \varphi \epsilon W_0^{1,2}(\Omega).$$

Además el funcional

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$$

es débilmente continuo.

Prueba. Para mostrar que el funcional está bien definido $I: W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ note que el primer sumando es $\frac{1}{2}\|u\|^2 < \infty$.Mostremos que el segundo sumando está bien definido. En efecto

$$\int_\Omega |F(x,s)|dx \leq \int_\Omega \left(a_1|u| + a_2\frac{|u|^{t+1}}{t+1}\right)dx$$

$$\leq a_1 C\|u\| + \frac{a_2 C}{t+1}\|u\|^{t+1} < \infty.$$

Donde usamos que $W_0^{1,2}(\Omega) \to L^p(\Omega)$está inmerso continuamente para

$1 \leq p \leq \frac{2N}{N-2}$(Corolario 61).

Ahora mostremos que $I'(u): W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ está bien definida. Como $u, \varphi \epsilon W_0^{1,2}(\Omega)$y la Desigualdad de Hölder (Teorema 33), tenemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\leq \|u\|\|\varphi\| < \infty$$

Por otro lado, considerando $p = \frac{2N}{N-2}$ y por (f2), tenemos

$$|f(x,s)|^{p/t} \leq (a_1 + a_2|s|^t)^{p/t} \leq 2^{p/t}\left({a_1}^{p/t} + {a_2}^{p/t}|s|^p\right).$$

Y

$$\int_\Omega |f(x,u(x))|^{p/t} dx \leq \int_\Omega 2^{p/t}\left({a_1}^{p/t} + {a_2}^{p/t}|u(x)|^p\right)dx < \infty.$$

Así $f(\cdot,u(\cdot))\epsilon L^{\frac{p}{t}}(\Omega)$.Luego como $\frac{p}{t} = \frac{2N}{(N-2)t} > \left(\frac{N-2}{N+2}\right)\frac{2N}{N-2} = \frac{2N}{N+2}$, obtenemos

$$f(\cdot,u(\cdot))\epsilon L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega).$$

Ahora desde que $\frac{N+2}{2N} + \frac{N-2}{2N} = 1$, y por Desigualdad de Hölder (Teorema 33), tenemos

$$\int_\Omega |f(x,u)\varphi|dx \leq \left(\int_\Omega |f(x,u)|^{\frac{2N}{N+2}} dx\right)^{\frac{N+2}{2N}} \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^{\frac{2N}{N-2}} dx\right)^{\frac{N-2}{2N}} < \infty.$$

Por tanto $I'(u)\varphi$, está bien definido. Mostremos ahora que $I \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$, para esto note que el primer sumando contiene la norma de u,la cual es de clase $C^\infty(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$. Luego basta mostrar que el segundo sumando

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u(x))dx$$

es de clase $C^1\left(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R}\right)$.

Primero hallemos la diferencial de Frechet de J. Sea $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ y $u, \varphi \epsilon E$.Estableceremos, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, u) > 0$tal que

$\left|J(u+\varphi)-J(u)-\int_{\Omega}f(x,u)\varphi dx\right|\leq\varepsilon\|\varphi\|$, se $\|\varphi\|\leq\delta$.

Considerando

$$\Psi=\left|F\left(x,u(x)+\varphi(x)\right)-F\left(x,u(x)\right)-f(x,u(x))\varphi(x)\right|,$$

tenemos

$$\left|J(u+\varphi)-J(u)-\int_{\Omega}f(x,u)\varphi dx\right|\leq\int_{\Omega}\Psi\mathrm{dx}.$$

Definimos

$$\Omega_1=\left\{x\epsilon\bar{\Omega};\,|u(x)|\geq\beta\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{x\epsilon\bar{\Omega};\,|\varphi(x)|\geq\gamma\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{x\epsilon\bar{\Omega};\,|u(x)|\leq\beta y|\varphi(x)|\leq\gamma\right\}.$$

Con $\beta y\gamma$ sin condición alguna por el momento. Luego

$$\int_{\Omega}\Psi\mathrm{dx}\leq\int_{\Omega_1}\Psi\mathrm{dx}+\int_{\Omega_2}\Psi\mathrm{dx}+\int_{\Omega_3}\Psi\mathrm{dx}.$$

Por otro lado por el Teorema del valor medio, existe $\theta\epsilon(0,1)$ tal que

$$F(x,s+r)-F(x,s)=f(x,s+\theta r)r.$$

Por tanto de la última igualdad y de la Desigualdad de Hölder (Teorema 33), obtenemos

$$\int_{\Omega_1}|F(x,u(x)+\varphi(x))-F(x,u(x))|\mathrm{dx}\leq\int_{\Omega_1}|f(x,u(x)+\theta\varphi(x))||\varphi(x)|dx$$

$$\leq\int_{\Omega_1}[a_1+a_2|u(x)+\theta\varphi(x)|^t]|\varphi(x)|dx$$

$$\leq\int_{\Omega_1}[a_1+2^ta_2(|u(x)|^t+|\varphi(x)|^t)]|\varphi(x)|dx$$

$$\leq\int_{\Omega_1}(a_1|\varphi(x)|+2^ta_2|u(x)|^t|\varphi(x)|+|\varphi(x)|^t|\varphi(x)|)dx$$

$$\leq a_1|\Omega_1|^{\frac{N+2}{2N}}\|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}+a_3|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}\left[\|u\|^t_{L^{t+1}}+\|\varphi\|^t_{L^{\frac{t+1}{t}}}\right]\|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}},$$

donde

$$\frac{1}{\sigma}+\frac{t+1}{t}+\frac{N-2}{2N}=1.$$

Observe que $t<(N+2)(N-2)^{-1}$ implica

$$t+1<\frac{2N}{N-2}\Longrightarrow\frac{1}{t+1}>\frac{N-2}{2N}\Longrightarrow 1=\frac{t}{t+1}+\frac{1}{t+1}>\frac{N-2}{2N}+\frac{t}{t+1},$$

lo cual garantiza la existencia $\sigma>0$ en la igualdad de los exponentes conjugados de anteriores.

Por las inmersiones continuas de Sobolev (Corolário 61), existe $C>0$ tal que

$$\int_{\Omega_1}|F(x,u(x)+\varphi(x))-F(x,u(x))|dx\leq a_4\parallel\varphi\parallel\left(|\Omega_1|^{\frac{N+2}{2N}}+|\Omega|^{\frac{1}{\sigma}}[\parallel u\parallel^t+\parallel\varphi\parallel^t]\right)\ldots(1)$$

Donde $a_4=max\{a_1C,a_3C^{t+1}\}$.

Similarmente

$$\int_{\Omega_1}|f(x,u(x))\varphi(x)|dx\leq$$

$$\leq a_5\parallel\varphi\parallel\left(|\Omega_1|^{\frac{N+2}{2N}}+|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}\parallel u\parallel\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

Por la inmersión continua de Sobolev (Corolário 61), tenemos

$$\|u\|\geq a_6\|u\|_{L^2(\Omega)}\geq a_6\|u\|_{L^2(\Omega_1)}\geq a_6\beta|\Omega_1|^{1/2}.$$

Luego

$$|\Omega_1|^{1/\sigma}\leq\left(\frac{\|u\|}{a_6\beta}\right)^{2/\sigma}=M_1y|\Omega_1|^{N+2/2N}\leq\left(\frac{\|u\|}{a_6\beta}\right)^{N+2/N}=M_{2.}$$

Donde $M_1,M_2\to 0$cuando $\beta\to\infty$. Así combinando (1) y (2), obtenemos

$$\int_{\{\Omega_1\}}\Psi\leq(a_4+a_5)\parallel\varphi\parallel(M_2+M_1[\parallel u\parallel^t+\parallel\varphi\parallel^t])$$

A seguir podemos asumir $\delta\leq 1$ y escoger β suficientemente grande tal que

$$a_7\|\varphi\|(M_2+M_1[\|u\|^t+\|\varphi\|^t])<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Luego

$$\int_{\Omega_1}\Psi\mathrm{dx}<\frac{\varepsilon}{3}\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Haciendo análogamente en Ω_2, obtenemos

$$\int_{\Omega_2} \Psi \mathrm{dx} \leq a_8(1 + [\|u\|^t + \|\varphi\|^t])\|\varphi\|_{L^{t+1}}.$$

$$\leq a_8(1 + [\|u\|^t +]) \left(\int_{\Omega_2} |\varphi|^{t+1} \left(\frac{|\varphi|}{\gamma}\right)^{m-(s+1)} dx\right)^{1/(t+1)}$$

Donde $m = \frac{2N}{N-2} > t + 1$. Por tanto

$$\int_{\Omega_2} \Psi \mathrm{dx} \leq a_8 \gamma^{\frac{t+1-m}{t+1}} (1 + [\|u\|^t + \|\varphi\|^t])\|\varphi\|_{L^m(\Omega)}^{m/(t+1)}$$
$$\leq a_9 \gamma^{\frac{t+1-m}{t+1}} (1 + [\|u\|^t + \|\varphi\|^t])\|\varphi\|^{m/(t+1)} \ldots\ldots\ldots.(4)$$

Ahora desde que $F \epsilon C^1 \left(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$, dado cualquier $\hat{\varepsilon}, \hat{\beta} > 0$ existe $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\hat{\varepsilon}, \hat{\beta})$ tal que

$$|F(x, s + h) - F(x, s) - f(x, s)h| < \hat{\varepsilon}|h| \ldots\ldots\ldots\ldots.(5)$$

Siempre que $x \epsilon \bar{\Omega}, |s| < \hat{\beta}$ y $|h| < \hat{\gamma}$. En particular $\hat{\beta} = \beta$, $\gamma \leq \hat{\gamma}$ y por las inmersiones continuas de Sobolev (Corolário 61) , y (5), implican

$$\int_{\Omega_3} \Psi \mathrm{dx} \leq \int_{\Omega_3} \left|F(x, u(x) + \varphi(x)) - F\big(x, u(x)\big) - f\big(x, u(x)\big)\varphi(x)\right| dx \leq \int_{\Omega_3} \hat{\varepsilon}|\varphi(x)| dx$$
$$\leq a_{10} \hat{\varepsilon}\|\varphi\| \ldots\ldots(6)$$

Escogemos $\hat{\varepsilon} > 0$, tal que $3a_{10}\hat{\varepsilon} < \varepsilon$. Lo que determina $\hat{\gamma} > 0$. Escogemos $\gamma = \hat{\gamma}$.Combinando $(3), (4)$y (6), obtenemos

$$\int_{\Omega} \Psi \mathrm{dx} \leq \frac{\varepsilon}{3}\|\varphi\| + a_9 \gamma^{\frac{t+1-m}{t+1}} (1 + [\|u\|^t + \|\varphi\|^t])\|\varphi\|^{m/(t+1)} + \frac{\varepsilon}{3}\|\varphi\|$$
$$\leq \frac{2\varepsilon}{3}\|\varphi\| + a_9 \gamma^{1-\frac{m}{t+1}} (2 + \|u\|^t)\|\varphi\|^{m/(t+1)}$$

Desde que $\|\varphi\|^t \leq \delta^t \leq 1$. Finalmente escogemos

$$a_9 \gamma^{1-\frac{m}{t+1}} (2 + \|u\|^t)\|\varphi\|^{m/(t+1)} \leq a_9 \gamma^{1-\frac{m}{t+1}} (2 + \|u\|^t)\delta^{\frac{m}{t+1}-1} \leq \frac{\varepsilon}{3}\|\varphi\| \leq \frac{\varepsilon}{3}\delta.$$

O sea

$$a_9 \gamma^{1-\frac{m}{t+1}} (2 + \|u\|^t)\delta^{\frac{m}{t+1}-1} \leq \frac{\varepsilon}{3}\delta.$$

Así

$\left|J(u + \varphi) - J(u) - \int_{\Omega} f(x, u)\varphi dx\right| \leq \varepsilon\|\varphi\|, s\ iempreque\ \|\varphi\| \leq \delta.$

Ahora vamos a probar que $J'(u)$ es continuo. En efecto, sea $u_n \to u$ en Eentonces por las inmersiones continuas de Sobolev (Corolário 61), tenemos

$$u_n \to u \text{ en } L^{t+1}(\Omega)$$

Donde $1 \leq t+1 < \frac{2N}{N-2}$.

Por otro lado de la definición de norma de un funcional, tenemos

$$\|J'(u_n) - J'(u)\| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |(J'(u_n) - J'(u))\varphi| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left|\int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))\varphi \mathrm{dx}\right|.$$

Por la Desigualdad de Hölder (Teorema 33) y por las inmersiones continuas de Sobolev (Corolário 61), tenemos

$$\left|\int_\Omega (p(x,\right| \leq \left(\int_\Omega |(\mathrm{p(x,un)} - \mathrm{p(x,u)})|\mathrm{t+1t}\right)^{\frac{t}{t+1}} \left(\int_\Omega |\varphi\right)^{\frac{1}{t+1}}$$

$$\leq \| p(\cdot,u_n) - p(\cdot,u) \|_{\frac{t+1}{t}} \| \varphi \|_{t+1} \leq a_{10} \| f(\cdot,u_n) - f(\cdot,u) \|_{\frac{t+1}{t}} \| \varphi \|$$

Por tanto

$$\|J'(u_n) - J'(u)\| \leq a_{10} \|f(\cdot,u_n) - f(\cdot,u)\|_{L^{\frac{t+1}{t}}} \dots \dots \dots (7)$$

Por (f2) para cualquier $\alpha \geq 1$,tenemos

$$|f(x,s)| \leq a_1 + a_2 |s|^{\frac{\alpha t}{\alpha}}$$

Luego por la Proposición 65, tenemos que $f \epsilon C\left(L^{\alpha t}(\Omega), L^{\alpha}(\Omega)\right)$.Escogiendo $\alpha = \frac{t+1}{t}$, el lado derecho de (7) tiende a 0 cuando $n \to +\infty$, luego J'es continuo.

Finalmente para probar que J es débilmente continua consideremos $u_n \rightharpoonup u$ en E,por las Inmersiones Compactas de Sobolev (Teorema 64), a menos de la subsecuencia

$$u_n \to u \; en \; L^{t+1}(\Omega),$$

donde $1 \leq t+1 < \frac{2N}{N-2}$.

Por otro lado integrando (f2), tenemos

$$|F(x,s)| \leq \bar{a}|s| + \bar{b}|s|^{t+1}.$$

Donde $\bar{a} = a_1 \; y \; \bar{b} = \frac{a_2}{t+1}$.

Vamos a mostrar que existen $a, b > 0$ tales que

$$\bar{a}|s| + \bar{b}|s|^{t+1} \leq a + b|s|^{t+1}.$$

En efecto, esta afirmación anterior es equivalente a mostrar que

$$\left[\left(b-\bar{b}\right)|s|^{t}-\bar{a}\right]|s|+a\geq 0.$$

Consideremos los siguientes casos:

1. Si $|s|\geq M>0$ entonces

$$\left[\left(b-\bar{b}\right)|s|^{t}-\bar{a}\right]|s|+a\geq 0, si\ \ b\geq\frac{\bar{a}}{M^{t}}+\bar{b}.$$

2. Si $|s|<M$, tenemos

$$\left[\left(b-\bar{b}\right)|s|^{t}-\bar{a}\right]|s|+a\geq\ 0, si\ a\geq\bar{a}M.$$

Luego si $b\geq\frac{\bar{a}}{M^{t}}+\bar{b}ya\geq\bar{a}M$ entonces

$$\left[\left(b-\bar{b}\right)|s|^{t}-\bar{a}\right]|s|+a\geq 0,\forall s\epsilon R.$$

Por tanto existen $a,b>0$,tales que

$$|F(x,s)|\leq a+b|s|^{t+1},\forall s\epsilon R.$$

Luego por la Proposición 65, tenemos que $F\epsilon C(L^{t+1}(\Omega),L^{1}(\Omega))$, consecuentemente si $u_{n}\to uemL^{t+1}(\Omega)$, entonces

$$F(\cdot,u_{n})\to F(\cdot,u)enL^{1}(\Omega).$$

Así

$$|J(u_{n})-J(u)|\leq\int_{\Omega}|F(x,u_{n}(x))-F(x,u(x))|dx\to 0$$

Luego Jes débilmente continua, esto termina la demostración.

Asumiremos también que la función $f$satisface las siguientes condiciones:

(f3) $\lim\limits_{|s|\to 0}\frac{f(x,s)}{|s|}=0.$

(f4)$\exists\mu>2yr\geq 0$ tal que para $|s|\geq r,\ 0<\mu F(x,s)\leq sf(x,s),$

donde $F(x,s)=\int_{0}^{s}f(x,t)dt.$

Observaciones 68.

i. La hipótesis (f3).implica que el Problema (P) posee la solución trivial $u = 0$.

ii. La hipótesis (f4) muestra que existen constantes $a_3, a_4 > 0$ tales que

$$F(x,s) \geq a_3|s|^{\mu} - a_4.$$

Para todo $x \epsilon \bar{\Omega}$ y $s \epsilon \mathbb{R}$. Así desde que $\mu > 2$, $F(x,s)$ tiene crecimiento supercuadrático y por (f4) $f(x,s)$ posee un crecimiento superlineal cuando $|s| \to \infty$.

Teorema 69. Si $f{:}\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface $(f1) - (f4)$,entonces el Problema (P) posee una solución no trivial.

Prueba. Sea $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ y I definida como en la Proposición 30. Vamos a resolver el problema (P) encontrando los punto críticos de funcional, dichos puntos críticos llamaremos de solución débil de (P),los cuales serán obtenidos con la ayuda del Teorema del Paso de la Montaña de Willem (Teorema 37).

Ahora vamos mostrar que el funcional I satisface las hipótesis del Teorema del Paso de la Montaña (Teorema 37). En efecto, por la Proposición 67, tenemos $I \epsilon C^1(E, \mathbb{R})$.Observe que $I(0) = 0$, así solo falta mostrar que I satisface las condiciones $(I_1) y (I_2)$ de dicho Teorema. En efecto, primero vamos a verificar (I_2), note que por (f4) y la Observación 68 (ii), tenemos

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x,u)dx \geq a_3 \int_{\Omega} |u|^{\mu} dx - a_4|\Omega| \dots \dots (8)$$

para todo $u \epsilon E$, donde $|\Omega|$ denota la medida de Lebesgue de Ω. Escogiendo un $u \epsilon E - \{0\}$, (8) implica que

$$I(su) = \frac{s^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x,u)dx \leq \frac{s^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - a_3 s^{\mu} \int_{\Omega} |u|^{\mu} dx + a_4.$$

De ahí, $I(su) \to -\infty$, cuando $s \to +\infty$. Luego, existe un $e = t_0 u \epsilon E$ (para t_0 suficientemente grande) tal que

$$I(e) \leq 0.$$

Para mostrar que Isatisface (I_1),note que por (f3) dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$tal que $0 < |s| \leq \delta \Rightarrow |f(x,s)| \leq \varepsilon|s|$.Luego integrando es última desigualdad, obtenemos

$$|F(x,s)| \leq \epsilon \frac{|s|^2}{2}, \qquad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Por (f2), existe una constante $A = A(\delta) > 0$ tal que $|s| \geq \delta$ implica

$$|F(x,s)| \leq A|s|^{t+1}, \ \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Combinando esas dos últimas desigualdades para todo $s\epsilon\mathbb{R}$ y $x\epsilon\bar{\Omega}$., obtenemos

$$|F(x,s)| \leq \varepsilon \frac{|s|^2}{2} + A|s|^{t+1}.$$

Consecuentemente usando las Inmersiones Continuas de Sobolev (Corolário 61), obtenemos

$$|J(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2 dx + A\int_\Omega |u|^{t+1} dx \leq \frac{\varepsilon}{2} C^2\|u\|^2 + AC^{t+1}\|u\|^{t+1} \leq a_5\left(\frac{\varepsilon}{2} + A\|u\|^{t-1}\right)\|u\|^2.$$

Ahora escogiendo $\|u\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2A}\right)^{\frac{1}{t-1}}$, obtenemos

$$|J(u)| \leq a_5\varepsilon\|u\|^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(9)$$

Por tanto usando (9),obtenemos

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - a_5\varepsilon\|u\|^2, si\|u\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2A}\right)^{\frac{1}{t-1}}.$$

Sea $\|u\| = \rho > 0$tal que

$$\rho \leq \left(\frac{\varepsilon}{2A}\right)^{\frac{1}{t-1}} \; y \; \frac{1}{2}\rho^2 - a_5\varepsilon\rho^2 > 0.$$

Finalmente considerando $\varepsilon < \frac{1}{2a_5}$, obtenemos

$$I(u) \geq \alpha = \frac{1}{2}\rho^2 - a_5\varepsilon\rho^2 > 0.$$

Así (I_1) es establecido, y aplicando el Teorema del Paso de la Montanha de Willem (Teorema 37), existe una secuencia $(u_n) \subset E$ tal que

$$I(u_n) \to c \; y \; I'(u_n) \to 0, \ldots\ldots\ldots(10)$$

donde

$$c = \inf_{\gamma\epsilon\Gamma}\max_{t\epsilon[0,1]} I(\gamma(t)),$$

$$\Gamma = \{\gamma\epsilon C([0,1],E); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Ahora vamos a mostrar que $u_n \to u$ en E. En efecto, mostraremos primero $(u_n) \subset E$ es acotado. Por otro lado note que existe un $M > 0$tal que

$$|I(u_n)| \leq M, \qquad \forall n\epsilon\mathbb{N}.$$

Y $\left|\frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n\right| \leq \frac{1}{\mu}\|I'(u_n)\|\|u_n\| \leq \frac{1}{\mu}\|u_n\|$ para n suficientemente grande.

Así

$$M+\mu^{-1}\parallel u_n\parallel\geq I(u_n)-\frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\parallel u_n\parallel^2+\int_\Omega\left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\parallel u_n\parallel^2+\int_{\{x\in\Omega;|u_n(x)|\geq r\}}\left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)dx$$

$$+\int_{\{x\in\Omega;|u_n(x)|<r\}}\left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)dx$$

$$\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\parallel u\parallel^2+\int_{\{x\in\Omega;|u_n(x)|<r\}}\left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)dx$$

Sea $g(s)=\frac{1}{\mu}f(x,s)s-F(x,s),\ s\epsilon[-r,r]$.

Observe que $g$es una función continua en $[-r,r]$,alcanza su valor mínimo en alguns$_0\in[-r,r]$, es decir,

$$g(s_0)\leq g(s),\forall s\in[-r,r].$$

Consecuentemente

$$M+\mu^{-1}\|u_n\|\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2+g(s_0)|\{x\epsilon\Omega;|u_n(x)|<r\}|.$$

Luego consideremos los siguientes casos:

a) $g(s_0)\geq 0$ implica

$$M+\mu^{-1}\|u_n\|\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2.$$

Observe que si $\|u_n\|\to\infty$ entonces esta desigualdad genera una contradicción.

b) Si $g(s_0)<0$ entonces

$$g(s_0)|\{x\epsilon\Omega;|u_n(x)|<r\}|\geq g(s_0)|\Omega|.$$

Luego

$$M+\mu^{-1}\|u_n\|\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2+g(s_0)|\Omega|.$$

Y observe de nuevo que si $\|u_n\|\to\infty$ entonces esta desigualdad genera una contradicción.

Así como de ambos casos tenemos que $(u_n)\subset E$ es una secuencia acotada y desde que $E=W_0^{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo (Teorema 54), a menos de subsecuencia, tenemos

$$u_n\rightharpoonup u\ en\ E.$$

Por otro lado,

$$I'(u_n)(u_n-u)=\int_\Omega \nabla u_n(\nabla u_n-\nabla u)dx-\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)dx$$

$$=\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx-\int_\Omega \nabla u_n \nabla u dx-\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)dx \ldots.(11)$$

Afirmación. $\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)dx \to 0.$

En efecto, por las inmersiones compactas de Sobolev (Teorema 64), tenemos

$$u_n \to u en L^p(\Omega), 1 \leq p < \frac{2N}{N-2}.$$

Y por el Teorema de Vainberg (Teorema 31), a menos de una subsecuencia, tenemos

$$u_n(x) \to u(x) c.s. en\ \Omega.$$

y existe $h \epsilon L^p(\Omega)$ tal que

$$|u_n(x)| \leq h(x) c.s. en\ \Omega.$$

Consecuentemente,

$$f\big(x,u_n(x)\big)\big(u_n(x)-u(x)\big) \to 0 c.s. en\ \Omega.$$

Y

$$|f(x,u_n(x))(u_n(x)-u(x))| \leq (a_1+a_2|u_n(x)|^t)(|u_n(x)|+|u(x)|)$$
$$\leq 2a_1 h(x)+2a_2 h(x)^{t+1} =: H,$$

donde $H \epsilon L^1(\Omega)$. Luego por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue (Teorema 30), tenemos

$$\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)dx \to 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Así (10), (11) y (12), tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \to \int_\Omega |\nabla u|^2 dx ó \|u_n\|^2 \to \|u\|^2 \ldots\ldots (13)$$

Por tanto de (13), a menos de una subsecuencia,

$$\|u_n-u\|^2 \to 0.$$

O sea a menos de una subsecuencia,

$$u_n \to u \; en \; E = W_0^{1,2}(\Omega),$$

y

$$I(u_n) \to I(u) = c > 0, I'(u_n) \to I'(u) = 0,$$

Lo que significa que $u \epsilon E$ es una solución no trivial de (P).

5. CONCLUSIONES

- Se demostró formalmente el Teorema del Paso de la Montaña de Willem, para lo cual se enuncio algunos resultados preliminares del Análisis No lineal.

- Se asoció un funcional al Problema No Lineal de Direchlet, y se verifico si este funcional satisfacía las hipótesis del Teorema del Paso de la Montaña, y de ahí se concluyó la existencia de una sequencia que convergía al nivel c de dicho teorema.

- Se mostró que la sequencia encontrada era limitada, que convergia fracamente y convergia fuertemente en los espacios de Lebesgue.

- Se mostró que la secuencia convergia fuertemente en el espacio donde buscamos la solución, y que el punto donde convergia tal secuencia era una solución del Problema No lineal de Direchlet.

6. RECOMENDACIONES

- Para un mejor abordaje del Teorema del Paso de la Montaña de Willem se recomienda el estudio de análisis no lineal.

- Como el Problema No Lineal de Direchlet depende de las condiciones sobre la función f. Entonces si fuera posible se podría disminuir las condiciones sobre f y asi abarcar a un mayor número de Problemas.

- Se recomienda también usar el Teorema del Paso de la Montaña de Willem para resolver otras ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P. H. (1973). **Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Aplications.** University of Wisconsin, Madison.

- Donizete Bastos W.(1989). **O Teorema do Passo da Montanha e uma Aplicação**. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. São José de Rio Preto, Brazil.

- Folland G.B.(1999). **Real Analisis Modern Techniques and Their Aplications**. United State of América; Jhon Wiley and Sons, Inc.

- Haim B.(2010). **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** Rutger University. USA; Springer.

- Kesavan S. (1989). **Topics in Functional Analysis and Aplications**. Tata Institute of Fundamental Research. India.

- Willem M. (1983). **Minimax Theorems**. Birkhäuser.

- Rabinowitz P. H. (1988**). Minimax Methods in Critical Point Theory with Aplications to Diferential Equations**. Regional Conference held at the Univerty of Miami. Rhode Island.