UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

RELACIONES ENTRE LA INTEGRAL DE RIEMANN Y LA INTEGRAL DE LEBESGUE

TESIS

PRESENTADA POR:

WILSON MACHACA HUANCOLLO

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICA

PUNO - PERÚ

2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

RELACIONES ENTRE LA INTEGRAL DE RIEMANN Y LA INTEGRAL DE LEBESGUE

TESIS PRESENTADA POR:

WILSON MACHACA HUANCOLLO

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN
PiLAr
FICA

APROBADO POR EL JURADO REVISOR CONFORMADO POR:

PRESIDENTE : Msc. LUIS HUBER VENTURO ORBEGOSO

PRIMER MIEMBRO : Lic. AMÉRICO BOLIVAR ESPINOZA

SEGUNDO MIEMBRO : Lic. DERLY PARI MENDOZA

DIRECTOR : Mg. JULIO CESAR VILLALTA PACORI

ÁREA : Matemática.
TEMA : Teoría de la Medida.
LÍNEA DE INVESTIGACIÓN : Matemática Pura.

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 04 de Diciembre del 2018

DEDICATORIA

Dedicado especialmente a:
mi padre Bonifacio (✝), a mi madre Carmen,
a mi esposa Gladis y a mi hijo Nadyr Giussepe;
quienes son la razón de lo que soy y lo que espero ser.

AGRADECIMIENTO

A mis padres por su constante e invaluable apoyo en todos los sentidos, durante mis estudios de Pregrado.

A la Universidad Nacional del Altiplano con su Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemática por haber forjado mi vida como profesional conjuntamente con quienes fueron mis docentes, compañeros y amigos.

A mi Director de Tesis Mg Julio Cesar Villalta Pacori y a los miembros del jurado calificador, en particular al Lic. Derly Pari Mendoza por sus constantes alcances, observaciones y correcciones para concluir el presente trabajo.

A mi esposa por su constante motivación para seguir adelante, a mi hijo por llegar en un día muy especial y oportuno de mi vida y ser ahora la razón de mis logros.

A mis hermanos y a toda mi familia que apoyaron directa o indirectamente para la conclusión de este trabajo de investigación.

Y a Dios por sobre todas las cosas, ya que sin el nada tendría sentido en este mundo terrenal mucho menos el complejo mundo de la matemática.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

En el presente trabajo, se introducen conceptos de teoría de la medida, integral de Lebesgue e integral de Riemann, para obtener la relación de la integral de Riemann con la integral de Lebesgue. Se demuestra que la integral de Riemann de una función existe si, y sólo si, el conjunto de discontinuidades de la función tiene medida de Lebesgue cero, y en este caso la integral de Riemann es igual en valor a la integral de Lebesgue; para lograr esta demostración se utiliza el teorema de la convergencia dominada, la cual se caracteriza por usar límites. Finalmente se muestra algunos ejemplos de funciones Riemann no integrable y Riemann integrable.

Palabras clave: Integral de Riemann, Integral de Lebesgue.

ABSTRACT

In the present work, we introduce the measure theory, Lebesgue integral, Riemann integral, to obtain the relation of the Riemann integral with the Lebesgue integral, it is demonstrated that the Riemann integral of a function exists if and only if, the set of discontinuities of the function has Lebesgue measure zero, and in this case the Riemann integral is equal in value to the Lebesgue integral; to achieve this demonstration the dominated convergence theorem is used, which is characterized by using limits. Finally some examples of not Riemann integrable and Riemann integrable functions are shown.

Keywords: Riemann Integral, Lebesgue Integral.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es establecer condiciones para poder determinar, cuando la integral de Lebesgue y la integral de Riemman de una función existen y coinciden. La integral de Riemann se define sobre particiones del dominio de la función y evaluando el valor de la función en los puntos de cada intervalo de la partición. Sin embargo para poder definir la integral de Lebesgue se realiza una partición de la imagen de la función y se mide el tamaño del dominio para los cuales la imagen de la función está comprendida entre dichos valores. Para medir conjuntos es necesario desarrollar la teoría de la medida el cual es parte del propósito en este trabajo de investigación. La idea es que, se pretende generalizar la noción de longitud en $\mathbb{R}$; más concretamente, se buscará una función no negativa m, definida en todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Una de las limitaciones que se presenta con la integral de Riemman es que no se llegan a teoremas indispensables relacionados a integrales. La dificultad se presenta cuando se quiere interrelacionar a la integral con operaciones, como el límite por ejemplo. Por ello se requiere abordar la integral de Riemann desde un punto de vista nuevo, tal que solucionen estas dificultades a través de una generalización de la integral de Riemman y esto se hace con la integral de Lebesgue.

Para un mejor entendimiento sobre la diferencia que existe entre estas dos integrales, se presenta el siguiente ejemplo. Supongamos que se tiene el bolsillo lleno de monedas con valores de 2 y 5 nuevos soles y se quiere saber de cuanto de dinero disponemos. Para ello, existen al menos dos posibles formas de contar:

(1) En la primera forma, extraemos las monedas una a una y vamos sumando sus valores.

(2) en la segunda forma, sacamos todas las monedas y las agrupamos de acuerdo a sus valores, formando así un grupo de monedas de 2 soles y otro de 5 soles; multiplicamos las cantidades por sus respectivos valores y sumamos.

Es claro que estas dos formas de contar nos darán el mismo resultado. Por medio de este ejemplo evidenciamos que la segunda forma de contar que corresponde a la integral de Lebesgue, es mucho más eficaz y elegante que la primera forma que concierne a la integral de Riemman.

Como se verá en este trabajo, la definición de la integral de Lebesgue también implica de hecho un poco más de conceptualización que la definición de la integral de Riemann, lo cual hace que esta integral nos permita integrar en espacios más abstractos.

Existe un ejemplo, que por supuesto incluiremos en los resultados del presente trabajo, de una función que es Lebesgue integrable mas no Riemann integrable, estamos hablando de la función de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

1.1. Descripción del problema

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada sobre $[a, b]$, la integral de Riemman consiste en hacer una partición sobre $[a, b]$ en subintervalos, para luego multiplicar las longitudes de dichos subintervalos con el valores de la función en sus respectivos subintervalos, y finalmente sumar; es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Sea f una función medible, la integral de Lebesgue consiste en hacer un partición sobre el rango de f, en seguida encontramos las preimagenes E_k de los y_k para luego calcular sus respectivas medidas y multiplicar por el valor de la función y_k donde finalmente sumamos estos resultados; es decir:

$$\int_a^b f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

Este trabajo de investigación queda definida mediante la siguientes interrogantes:

¿Sera que la integral de Lebesgue de una función existe y coincide con la integral de Riemann, cuando la integral de Riemann de esa misma función existe?
¿Cuándo las funciones Lebesgue integrables son Riemann integrables?

1.2. Antecedentes de la investigación

Los antecedentes relacionados al presente trabajo de investigación son los siguientes:

(1) **MANUEL, Luis O. (2011).** En su artículo titulado “Teoría de la medida e integral de Lebesgue” desarrolla la teoría de la medida desde σ-álgebras de manera muy resumida. En la presente investigación se propone desarrollar dicha teoría de manera muy detallada y exhaustiva dando a conocer todas las definiciones necesarias para la construcción de la medida en $\mathbb{R}$.

(2) **ALEGRÍA, Pedro (2007).** En sus apuntes que llevan por título “Teoría de la medida” inicia con el desarrollo de la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ continuando con la derivación e integración de funciones medibles. No realiza una comparación entre las teorías de Riemann y Lebesgue.

(3) **METZGER ALVÁN, Roger (2002).** En su artículo titulado “Teoría de la Medida en $\mathbb{R}$”, aborda los conceptos de medida desde un punto de vista intuitivo; realiza directamente la construcción de la medida y la integral de Lebesgue. En la presente investigación se propone dar a conocer la construcción de la medida de Lebesgue de manera comprensible señalando lo que previamente se usará.

(4) **MEDINA, Herbert A. (1995).** En sus notas que llevan como título “Apuntes de la teoría de la medida” da a conocer sobre la teoría de la medida enfatizando lo necesario mas no lo suficiente para luego concluir en los espacios de L^p.

1.3. Hipótesis de la investigación

La integral de Lebesgue de una función existe y coincide con la integral de Riemann, cuando la integral de Riemann de esa misma función existe, es decir, se probará que el conjunto de las funciones Riemann integrables $f : R \to \mathbb{R}$ es un subespacio lineal de $\widetilde{L}_+(R) \cap \widetilde{L}_-(R)$; donde $\widetilde{L}_+(R)$ denota el conjunto de funciones $f : R \to \mathbb{R}$ tal que existe una sucesión creciente $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\ldots}$ con $\varphi_k \leq f$ en R y $f(x) = \lim \varphi_k(x)$, y $\widetilde{L}_-(R) = \{-f/f \in \widetilde{L}_+(R)\}$, además la integral de Riemann y la integral de Lebesgue coinciden en el conjunto de las funciones Riemann integrables. En otros términos bajo ciertas condiciones la integral de Lebesgue contiene a la clase de funciones Riemann integrables.

Las funciones Lebesgue integrables son Riemann integrables si, y solo si el conjunto de puntos en el cual la función es discontinua tiene medida de Lebesgue igual a cero; en aquel caso, la integral de Riemann es igual al valor de la integral de Lebesgue.

1.4. Objetivos de la investigación

1.4.1. Objetivo general

Establecer condiciones para poder determinar cuando la integral de Lebesgue y la integral de Riemann de una función existen y coinciden en un dominio dado de la función.

1.4.2. Objetivos específicos

(1) Efectuar un desarrollo detallado de la integral de Riemann de una función.

(2) Presentar un desarrollo detallado de la integral de Lebesgue de una función.

(3) Realizar una comparación entre las integrales de Riemann y de Lebesgue de una función.

(4) Caracterizar la integral de Riemann y la integral de Lebesgue.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. La Integral de Riemann

2.1.1. Supremo e ínfimo

Dada una función acotada $f : X \to \mathbb{R}$, recordemos que $\sup f = \sup f(X) = \sup\{f(x) : x \in X\}$ e $\text{ínf } f = \text{ínf } f(X) = \text{ínf}\{f(x) : x \in X\}$

Lema 2.1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que, para todo $x \in A$ e $y \in B$, se tiene que $x \leq y$. Entonces $\sup A \leq \sup B$. Para que $\sup A = \text{ínf } B$ es necesario y suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$, existan $x \in A$ e $y \in B$ tales que $y - x < \varepsilon$.

Demostración: Cada $y \in B$ es una cota superior de A, luego $\sup A \leq y$. Lo que demuestra que $\sup A$ es una cota inferior de B y por tanto $\sup A \leq \text{ínf } B$. Si tuviésemos la desigualdad estricta $\sup A < \text{ínf } B$; entonces $\varepsilon = \text{ínf } B - \sup A > 0$ e $y - x \geq \varepsilon$ para cualesquiera $x \in A$ e $y \in B$. Recíprocamente, si sup $A =$ ínf B entonces, dado $\varepsilon \geq 0$, sup $A - \varepsilon/2$ no es una cota superior de A e ínf $B + \varepsilon/2$ no es una cota inferior de B, luego existen $x \in A$ e $y \in B$, tales que sup $A - \varepsilon/2 < x \leq$ sup $A =$ ínf $B \leq y <$ ínf $B + \varepsilon/2$. Por lo tanto $y - x < \varepsilon$. $\square$

Lema 2.2. Sean A y B conjuntos acotados en $\mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces los conjuntos $A+B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ y $c.A = \{c.x : x \in A\}$ también son acotados. Además, se tiene $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, $\text{ínf}(A + B) = \text{ínf } A + \text{ínf } B$, $\sup(c.A) = c.\sup A$ y $\text{ínf}(c.A) = c.\text{ínf } A$, cuando $c \geq 0$. Si $c < 0$ entonces, $\sup(c.A) = c.\text{ínf } A$ e $\text{ínf}(c.A) = c.\sup A$.

Demostración: Escribiendo $a = \sup A$ y $b = \sup B$, para todo $x \in A$ e $y \in B$ se tiene $x \leq a$ e $y \leq b$, luego $x + y \leq a + b$. por tanto, $a + b$ es una cota superior de $A + B$. Además, dado $\varepsilon > 0$, existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $a - \varepsilon/2 < x$ y $b - \epsilon/2 < y$, de donde $a + b - \varepsilon < x + y$. Lo que demuestra que $a + b$ es la menor cota superior de $A + B$, es decir $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. La igualdad $\sup(c.A) = c.\sup A$ es obvia si $c = 0$. Si $c > 0$, dado cualquier número d menor que $c.a$ tenemos $d/c < a$, luego existe $x \in A$ tal que $d/c < x$. De donde $d < c.x$. Lo que demuestra que $c.a$ es la menor cota superior de $c.A$, es decir, $\sup(c.A) = c.\sup A$. $\square$

Corolario 2.1. Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Entonces las funciones $f + g, cf : X \to \mathbb{R}$ también están acotadas para todo $c \in \mathbb{R}$. Además $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$, $\text{ínf}(f + g) \geq \text{ínf}(f) + \text{ínf}(g)$, $\sup(cf) = c.\sup f$ e $\text{ínf}(cf) = c.\text{ínf}(f)$ cuando $c \geq 0$. Si $c < 0$, se tiene que $\sup(cf) = c.\text{ínf}(f)$ e $\text{ínf}(cf) = c.\sup f$.

Demostración: Sean $A = f(X)$, $B = g(X)$, $C = (f+g)(X) = \{f(x)+g(x) : x \in X\}$. Evidentemente, $C \subset A+B$, luego $\sup(f+g) = \sup(C) \leq \sup(A+B) = \sup A + \sup B = \sup f + \sup g$. Además, $\sup(cf) = \sup\{c.f(x) : x \in X\} = \sup(cA) = c.\sup A = c.\sup f$, cuando $c \geq 0$. Los demás casos enunciados en el corolario se prueban de forma análoga □

Observación 2.1. De hecho se puede tener $\sup(f+g) > \text{ínf}(f) + \text{ínf}(g)$. Basta considerar $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ y $g(x) = -x$.

Lema 2.3. Dada $f : X \to \mathbb{R}$ acotada, sean $m = \text{ínf}(f)$, $M = \sup(f)$ y $\omega = M - m$. Entonces $\omega = \sup\{\mid f(x) - f(y) \mid : x, y \in X\}$.

Demostración: Dados cualesquiera $x, y \in X$, que para fijar ideas supondremos tales que $f(x) \geq f(y)$, se tiene $m \leq f(y) \leq f(x) \leq M$, de donde $\mid f(x) - f(y) \mid \leq M - m = \omega$. Por otra parte, dado cualquier $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $x, y \in X$ tales que $f(x) > M - \varepsilon/2$ y $f(x) < m + \varepsilon/2$. Entonces $\mid f(x) - f(y) \mid \geq f(x) - f(y) > M - m - \varepsilon = \omega - \varepsilon$. Así, ω es la menor de las cotas superiores del conjunto $\{\mid f(x) - f(y) \mid : x, y \in X\}$, lo que prueba el lema. □

Lema 2.4. Sean $A' \subset A$ y $B' \subset B$ conjuntos acotados de números reales. si para cada $a \in A$ y $b \in B$ existen $a' \in A'$ y $b' \in B'$ tales que $a \leq a'$ y $b' \leq b$, entonces $\sup A' = \sup A$ e $\text{ínf}\, B' = \text{ínf}\, B$.

Demostración: Evidentemente $\sup A$ es una cota superior de A'. Además, si $c < \sup A$ existe $a \in A$ tal que $c < a$, luego existe $a' \in A'$ tal que $c < a \leq a'$, por tanto c no es una cota superior de A'. Así, $\sup A$ es la menor cota superior de A', esto es, $\sup A = \sup A'$. Un razonamiento análogo demuestra el resultado para $\text{ínf}\, B = \text{ínf}\, B'$. □

2.1.2. La integral de Riemann

Una *partición* del intervalo $[a, b]$ es un subconjunto finito de puntos $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\} \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ y $b \in P$. De manera que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. El intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, de longitud $t_i - t_{i-1}$, se llamará i-ésimo intervalo de la partición P. Evidentemente, $\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a$.

Sean P y Q particiones del intervalo $[a, b]$, se dice que Q *refina* P cuando $P \subset Q$. La manera más sencilla de refinar una partición consiste en añadirle un nuevo punto.

Dada una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, usaremos la notación $m = \text{ínf}\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. En particular, tenemos $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Si $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, la notación $m_i = \text{ínf}\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$, $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ y $\omega_i = M_i - m_i$, indica el ínfimo, el supremo y la oscilación de $f(x)$ en el i-ésimo intervalo de P. Cuando f es continua los valores m_i y M_i son alcanzados por f en $[t_{i-1}, t_i]$. En particular, en este caso existen $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tales que $\omega_i = |f(y_i) - f(x_i)|$.

La *suma inferior* de f relativa a la partición P es el número:

$$s(f;P) = m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

La *suma superior* de f relativa a la partición P es por definición:

$$S(f;P) = M_1(t_1 - t_0) + \cdots + M_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Evidentemente $m(b-a) \leq s(f;P) \leq S(f;P) \leq M(b-a)$, sea cual fuere la partición P. Además $S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1})$.

Cuando en el contexto esté claro quien es f se puede escribir simplemente $s(P)$ y $S(P)$ en vez de $s(f;P)$ y $S(f;P)$, respectivamente.

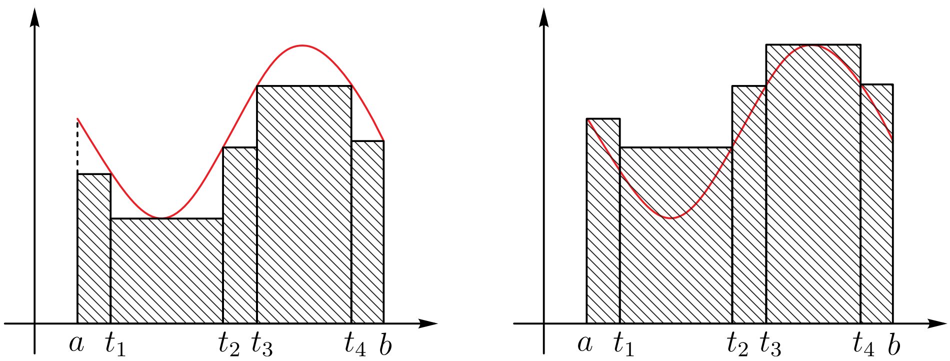

Figura 2.1: La suma inferior y la suma superior

En el caso de que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, los números $s(f;P)$ y $S(f;P)$ son valores aproximados, por defecto y por exceso respectivamente, del área de la región limitada por el gráfico de f, en el intervalo $[a,b]$ en el eje de abscisas y las perpendiculares a dicho eje en los puntos a y b. Cuando $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, esas sumas son aproximadamente de dicha área con el signo invertido.

La *integral superior* y la *integral inferior* de una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se definen, respectivamente, como:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f;P), \qquad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P S(f;P)$$

donde el $\sup$ y el $\inf$ se toman en el conjunto de todas las particiones P del intervalo $[a,b]$.

Notar que la integral de Riemman puede ser definido de manera equivalente de la siguiente forma

Sea f una función acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$ ademas $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donde $x_0 = a$ y $x_n = b$, una partición de este intervalo. Hagamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para

$i = 1, 2, \ldots, n$.

La *suma inferior de Riemann* de f sobre P es el número

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i$$

donde $m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}$.

De manera similar, la *suma superior de Riemann* de f sobre P es el número

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i$$

donde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}$.
Notemos que ambos números están bien definidos ya que f es una función acotada. Es necesario definir $\|P\| = \text{máx}\{x_i - x_{i-1}/i = 1, 2, \ldots, n\}$
Asi la función f se dice ser ***Riemann integrable*** en $[a, b]$ si

$$\lim_{\|P\| \to 0} L(f,P) = \lim_{\|P\| \to 0} U(f,P)$$

Teorema 2.1. Cuando se refina una partición, la suma inferior no disminuye y la suma superior no aumenta. O sea: $P \subset Q \Rightarrow s(f;P) \leq s(f;Q)$ y $S(f;Q) \leq S(f;P)$.

Demostración: Supongamos inicialmente que la partición $Q = P \cup \{r\}$ resulte al añadir a P un único punto r y que, por ejemplo, $t_{j-1} < r < t_j$. Sean m' y m'' los ínfimos de f en los intervalos $[t_{j-1}, r]$ y $[r; t_j]$, respectivamente: Evidentemente, $m_j \leq m'$, $m_j \leq m''$ y $t_j - t_{j-1} = (t_j - r) + (r - t_{j-1})$. Por tanto:

$$\begin{aligned} s(f;P) - S(f;P) &= m''(t_j - r) + m'(r - t_{j-1}) - m_j(t_j - t_{j-1}) \\ &= (m'' - m_j)(t_j - r) + (m' - m_j)(r - t_{j-1}) \geq 0 \\ s(f;P) - S(f;P) &\geq 0 \end{aligned}$$

Para obtener el resultado en el caso general, donde Q se obtiene al añadir a P k puntos, se usa k veces lo que acabamos de probar. Análogamente, se tiene $P \subset Q \Rightarrow S(f;Q) \leq S(f;P)$. □

Corolario 2.2. Para cualesquiera particiones P y Q del intervalo $[a, b]$ y cualquier función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se tiene $s(f;P) \leq S(f;Q)$.

En efecto, la partición $P \cup Q$ refina simultáneamente P y Q, luego $s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \leq S(f;P \cup Q) \leq S(f;Q)$.

Corolario 2.3. Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces:

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M(b-a)$$

Demostración: Las desigualdades de los extremos son obvias, la central resulta del Corolario y del lema 2.1 □

Corolario 2.4. Sea P_0 una partición de $[a, b]$. Si consideramos las sumas $s(f; P)$ y $S(f; P)$ relativas exclusivamente a las particiones P que refinan P_0, obtendremos los mismos valores de $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ y de $\overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Demostración: Es suficiente combinar el Teorema 2.1 y el Lema 2.4. $\square$

Una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice *integrable* cuando su integral inferior y su integral superior son iguales. Este valor común se llama *integral* (de Riemann) de f, y se denota por $\int_a^b f(x)dx$.

Cuando f es integrable, su integral $\int_a^b f(x)dx$ es el número real cuyas aproximaciones por defecto son las sumas inferiores $s(f; P)$ y cuyas aproximaciones por exceso son las sumas superiores $S(f; P)$. El Teorema 2.1 afirma que estas aproximaciones mejoran cuando se refina la partición P. Geométricamente, cuando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, la existencia de $\int_a^b f(x)dx$ significa que la región limitada por el gráfico de f, el segmento $[a, b]$ en el eje de las abscisas y las perpendiculares a dicho eje en los puntos a y b es medible (esto es posee área), y el valor de la integral es, por definición, el área de esta región. En el caso general, se tienen el área externa $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ y el área interna $\underline{\int_a^b} f(x)dx$, que pueden ser diferentes, como veremos a continuación.

Ejemplo 2.1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida mediante $f(x) = 0$ si x es racional y $f(x) = 1$ si x es irracional. Dada una partición cualquiera P, como cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ contiene números racionales e irracionales, tenemos $m_i = 0$ y $M_i = 1$, luego $s(f; P) = 0$ y $S(f; P) = b - a$. Así, f no es integrable, pues $\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0$ y $\overline{\int_a^b} f(x)dx = 1$.

Ejemplo 2.2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ constante, $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces, sea cual fuere la partición P, tenemos $m_i = M_i = c$ en todos los intervalos de la partición, luego $s(f; P) = S(f; P) = c(b - a)$. Así, f es integrable y $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = c(b - a)$.

Teorema 2.2 (Condición inmediata de integrabilidad). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es integrable.

(2) Para todo $\varepsilon > 0$, existen particiones $P; Q$ de $[a, b]$ tales que $S(f; Q) - s(f, P) < \varepsilon$.

(3) Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$S(f; Q) - s(f; P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$$

.

Demostración: Sean A el conjunto de las sumas inferiores y B el conjunto de las sumas superiores de f. Por el Corolario 2.2 del Teorema 2.1, se tiene que $s \leq S$ para toda $s \in A$ y toda $S \in B$. Suponiendo (1), entonces $\sup A = \inf B$. Luego por el Lema 2.1, $(1) \Rightarrow (2)$. Para probar que $(2) \Rightarrow (3)$ basta observar que si $S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon$ entonces, como la partición $P_0 = P \cup Q$ refina ambas, del Teorema 2.1 se sigue que $s(f;P) \leq s(f;P_0) \leq S(f;P_0) \leq S(f;Q)$, de donde se sigue que $S(f;P_0) - s(f;P_0) < \varepsilon$. Finalmente $(3) \Rightarrow (1)$ por el Lema 2.1. □

Ejemplo 2.3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = c$ cuando $a < x \leq b$ y $f(a) = A$. Afirmamos que f es integrable y que $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$. Para fijar ideas, supongamos que $c < A$. Entonces dada cualquier partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tenemos $m_1 = c$, $M_1 = A$ y $m_i = M_i = c$ para $1 < i \leq n$. Por tanto, $S(f;P) - s(f;P) = (A-c)(t_1 - t_0)$. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, tomamos una partición P tal que $t_1 - t_0 < \varepsilon/(A-c)$, y obtenemos $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$. Luego f es integrable. Además como $s(f;P) = c(b-a)$ para toda la partición P, tenemos $\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a)$. Finalmente, como f es integrable. resulta $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a)$. Evidentemente, se tiene un resultado análogo cuando $f(x) = c$ para $x \in [a, b\rangle$.

2.1.3. Propiedades de la integral

Teorema 2.3. Sean $a < c < b$. Una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable si, y solo si, sus restricciones $f_{[a,c]}$ y $f_{[c,b]}$ son integrables. En caso afirmativo, se tiene $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Demostración: Sean A y B, respectivamente, los conjuntos de las sumas inferiores de $f_{[a,c]}$ y $f_{[c,b]}$. Es fácil ver que $A + B$ es el conjunto de las sumas inferiores de f relativas a las particiones de $[a,b]$ que contiene al punto c. Por el Corolario 2.4 del Teorema 2.1, para calcular la integral inferior de f basta considerar las particiones de este tipo, pues estas son las que refinan $P_0 = \{a, b, c\}$. Por el Lema 2.2, $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup(A+B) = \sup A + \sup B = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$. Análogamente se demuestra que $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \sup(A+B) = \sup A + \sup B = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$. Luego:

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = \left(\overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f \right) + \left(\overline{\int_c^b} f - \underline{\int_c^b} f \right).$$

Como las dos restas dentro de los paréntesis son mayores o iguales que cero, su suma es cero si ambas son nulas. Así, f es integrable si, y sólo si, sus restricciones $f_{[a,c]}$ y $f_{[c,b]}$ los son. En el caso afirmativo, se tiene la igualdad $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$ $\square$

Ejemplo 2.4. Se dice que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una *función escalonada* cuando existe una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ y números reales $c_1, c_2 \ldots, c_n$ tales que $f(x) = c_i$ cuando $t_{i-1} < x < t_i$. (Observe que no se exige nada a los valores $f(t_i)$). Del Teorema 2.3 y del Ejemplo 3 se sigue que toda función escalonada es integrable y que

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1}).$$

Observación: La igualdad $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ tiene sentido exclusivamente cuando $a < c < b$. para que sea válida, sean cuales fueren $a, b, c \in \mathbb{R}$, de aquí en adelante consideraremos lo siguiente:

(1) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Aceptado esto, la igualdad anterior es válida para toda función integrable. Para verificar esto hay seis casos a considerar: $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ y $c \leq b \leq a$. Basta en cada caso admitir la integrabilidad de f en el mayor de los intervalos.

Teorema 2.4. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables. Entonces:

(1) La suma $f + g$ es integrable y

$$\int_a^b \big[f(x) + g(x)\big]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(2) El producto $f.g$ es integrable. Si $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b c.f(x)dx = c.\int_a^b f(x)dx.$

(3) Si $0 < k \leq |g(x)|$ para todo $x \in [a, b]$, entonces el cociente f/g es integrable.

(4) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

(5) $|f|$ es integrable y $\displaystyle\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

Demostración:

(1) Dada cualquier partición P de $[a, b]$, denotamos por m_i', m_i'' y m_i los ínfimos de f, g y $f + g$ en el i-ésimo de P, respectivamente. Del Corolario 2.2 del Lema 2.2 se deduce que $m_i' + m_i'' \leq m_i$, luego $s(f; P) + s(g; P) \leq s(f + g; P) \leq \underline{\int_a^b}(f + g)$ para toda partición P. Si tomamos dos particiones P y Q también tendremos:

$$s(f; P) + s(g; Q) \leq s(f; P \cup Q) + s(g; P \cup Q) \leq \underline{\int_a^b}(f + g),$$

por consiguiente

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g = \sup_P s(f;P) + \sup_Q s(g;Q)$$
$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g = \sup_{P,Q}\big[s(f;P) + s(g;Q)\big]$$
$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} (f+g)$$

Esto prueba, la primera de las desigualdades que vienen a continuación; la tercera se demuestra de forma análoga y la segunda es obvia:

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} (f+g) \leq \overline{\int_a^b} (f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$$

Cuando f y g son integrables las tres desigualdades se convierten en igualdades, lo que prueba (1).

(2) Sea K tal que $|f(x)| \leq K$ y $|g(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$. Dada un partición P sean, respectivamente, ω_i', ω_i'' y ω_i las oscilaciones de f, g y $f.g$ en el i-ésimo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\big|f(y).g(y) - f(x).g(x)\big| &= \big|\big(f(y)-f(x)\big)g(y) + f(x)\big(g(y)-g(x)\big)\big| \\ &\leq \big|f(y)-f(x)\big|\big|g(y)\big| + \big|f(x)\big|\big|g(y)-g(x)\big| \\ &\leq K|w_i' + w_i''|.\end{aligned}$$

De donde $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) \leq K\big[\sum \omega_i'(t_i-t_{i-1}) + \sum \omega_i''(t_i - t_{i-1})\big]$. Por el teorema 2.2, la integrabilidad de $f.g$ es consecuencia de la integrabilidad de f y g. Con respecto a $c.g$, su integrabilidad resulta de lo que acabamos de probar. Además, si $c \geq 0$, tenemos $s(cf;P) = c.s(f;P)$ para cualquier partición P, de donde, por el Lema 2.2 se tiene que:

$$\int_a^b c.f = \underline{\int_a^b} c.f = c.\underline{\int_a^b} f = c.\int_a^b f.$$

Cuando $c < 0$, tenemos $s(cf;P) = cS(f;P)$, luego

$$\int_a^b cf = \underline{\int_a^b} cf = c\overline{\int_a^b} f = c\int_a^b f.$$

(3) Como $f/g = f(1/f)$, basta probar que si g es integrable y $0 < k \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $1/g$ es integrable. Indicamos mediante ω_i y ω_i', respectivamente, las oscilaciones de g y $1/g$ en el i-ésimo intervalo de la partición P de forma que $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.K^2$. Para cualesquiera x, y en el i-ésimo intervalo de P se tiene:

$$\left[\frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)}\right] = \frac{\big|g(x)-g(y)\big|}{\big|g(y)g(x)\big|} \leq \frac{\omega_i}{K^2},$$

por tanto $\omega_i' < \omega_i/K^2$. Así $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \epsilon$, luego $1/g$ es integrable.

(4) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $s(f;P) \leq s(g;P)$ y $S(f;P) \leq S(g;P)$ para toda partición P, de donde

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(5) La desigualdad evidente $\big||f(y)| - |f(x)|\big| \leq \big|f(y) - f(x)\big|$ demuestra que la oscilación de $|f|$ en cualquier conjunto no supera la de f. Luego, f integrable implica $|f|$ integrable. Además, como $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a,b]$, de (4) resulta que $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$, o sea

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

□

Corolario 2.5. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq K(b-a)$.

Observación 2.2. Si una función integrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Esto es consecuencia del apartado (4) del teorema anterior. Sin embargo, es posible que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ y $\int_a^b f(x)dx = 0$ sin que f sea idénticamente nula. Basta tomar $f(x) = 1$ en un conjunto finito de puntos de $[a,b]$ y $f(x) = 0$ en los demás puntos de $[a,b]$. Por el Ejemplo (4), f es integrable y su integral es nula. No obstante, si f es continua y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx = 0$ implica que f es idénticamente nula. En efecto, si hubiese algún punto $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = c > 0$ entonces existiría un intervalo $[\alpha,\beta]$, donde $x_0 \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$, tal que $f(x) > c/2$ para todo $x \in [\alpha,\beta]$. Entonces, como $f(x) \geq 0$, tendríamos $\int_a^b f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx > \frac{c}{2}(\beta-\alpha) > 0$, lo que es absurdo.

2.1.4. Condiciones suficientes para la integrabilidad

Teorema 2.5. Toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de f en el compacto $[a,b]$, existe un $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a,b]$, $|y-x| < \delta$ implican $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$. Sea P una partición de $[a,b]$ tal que todos sus intervalos tienen longitud menor que δ. En cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P existen x_i, y_i tales que $m_i = f(x_i)$ y $M_i = f(y_i)$, de donde $\omega_i = f(y_i) - f(x_i) < \varepsilon/(b-a)$. Así $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$. Por el Teorema 2.2, f es integrable. □

Teorema 2.6. Toda función monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable.

Demostración: Para fijar ideas, sea f creciente. Dado $\varepsilon > 0$, sea $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que todos sus intervalos tiene longitud menor que $\varepsilon/\big(f(b) - f(a)\big)$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ tenemos $\omega_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$, por tanto $\sum \omega_i = f(b) - f(a)$ además:

$$\begin{aligned}\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} . \sum \omega_i \\ \omega_i(t_i - t_{i-1}) &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} . \sum \big[f(t_i) - f(t_{i-1})\big] \\ \omega_i(t_i - t_{i-1}) &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Luego f es integrable. □

Si $a < b$, denotaremos mediante $|J| = b - a$ la *longitud* del intervalo (abierto, cerrado o semiabierto) I cuyos extremos son a y b. Se dice que el conjunto X tiene medida nula cuando, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un recubrimiento numerable (finito o infinito) de X, $X \subset \bigcup I_k$, cuyos elementos son intervalos abiertos I_k tales que la suma de sus longitudes es $\sum |J_k| < \varepsilon$.

Ejemplo 2.5. Todo conjunto numerable $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ tiene medida nula.

En efecto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, sea J_k el intervalo abierto centrado en x_k de longitud $\varepsilon/2^{k+1}$. Entonces $X \subset \bigcup I_k$ y $\sum |I_k| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. En particular, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales tiene medida nula.

Teorema 2.7. Si el conjunto D de los puntos de discontinuidad de una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene medida nula entonces f es integrable.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, existen intervalos $I_1, \dots, I_k, \dots$ tales que $D \subset \bigcup I_k$ y $\sum |J_k| < \varepsilon/2K$, donde $K = M - m$ es la oscilación de f en $[a, b]$. Para cada $x \in [a, b] - D$, sea J_k un intervalo abierto centrado en x donde la oscilación de f es menor que $\varepsilon/2(b - a)$. Por el teorema de Borel-Lebesgue, el recubrimiento abierto $[a, b] \subset \big(\bigcup_k I_k\big) \cup \big(\bigcup_x I_x\big)$ posee un subcubrimiento finito $[a, b] \subset I_1 \cup \ldots \cup I_m \cup J_{x_1} \cup \ldots \cup J_{x_n}$. Sea P la partición de $[a, b]$ formada por los puntos a, b y los extremos de estos $m + n$ intervalos que pertenecen a $[a, b]$. Indicaremos mediante $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$ los intervalos de P que están contenidos en algún $\overline{I_k}$ y mediante $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ los demás intervalos de P. Entonces $\sum(t_\alpha - t_{\alpha-1}) < \varepsilon/2K$ y la oscilación de f en cada intervalo $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ es $\omega_\beta < \varepsilon/2(b - a)$. Luego:

$$\begin{aligned}S(f;P) - s(f;P) &= \sum \omega_\alpha(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \omega_\beta(t_\beta - t_{\beta-1}) \\ &< \sum K(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \frac{\varepsilon(t_\beta - t_{\beta-1})}{2(b - a)} \\ &< K\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon(b - a)}{2(b - a)} \\ S(f;P) - s(f;P) &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Luego f es integrable. □

2.2. La integral de Lebesgue

2.2.1. Notación y terminología

Se denota como A^c y se lee "complemento de A" para el conjunto de puntos que no están en A. Para evitar algunas de las paradojas de la teoría de conjuntos, suponemos que todos nuestros conjuntos son subconjuntos de algún conjunto dado X. Para ser precisos se define

$$A^c = \{x \in X : x \notin A\}$$

La notación

$$A - B = A \cap B^c$$

se lee como la diferencia de A menos B (es común también denotar ello como $A \backslash B$). Definimos

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

El conjunto $A \Delta B$ es conocido como diferencia simétrica de A y B, es el conjunto de puntos que están en uno de los conjuntos pero no en el otro. Si I es algún conjunto no vació de indices entonces una colección de subconjuntos $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es disjunto si $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ cuando $\alpha \neq \beta$.

La notación $A_i \uparrow$ significa que $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ y $A_i \uparrow A$ significa que ademas de $A_i \uparrow$ se debe cumplir que $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. De igual forma $A_i \downarrow$ significa que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ y $A_i \downarrow A$ significa que ademas de $A_i \downarrow$ se debe cumplir que $A = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$

Usamos $\mathbb{Q}$ para denotar el conjunto de los números racionales, $\mathbb{R}$ para el conjunto de los números reales y $\mathbb{C}$ para el conjunto de los números complejos.

También usamos la notación

$$x \vee y = \max(x, y) \qquad , \qquad x \wedge y = \min(x, y)$$

para escribir un número real x en términos de sus partes positiva y negativa, como $x = x^+ - x^-$, donde

$$x^+ = x \vee 0 \qquad , \qquad x^- = (-x) \vee 0.$$

Si z es un numero complejo, entonces $\bar{z}$ es el conjugado complejo de z.

Si f es una función con dominio un subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces, $\lim_{y \to x^+} f(y)$ y $\lim_{y \to x^-} f(y)$ denotan los límites laterales de f en x respectivamente.

Se dice que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente si $x < y$ implica que $f(x) \leq f(y)$ y es estrictamente creciente si $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$. De igual modo definimos decreciente (si $x > y$ entonces $f(x) \geq f(y)$) y estrictamente decreciente (si $x > y$ entonces $f(x) > f(y)$).Una función f es monótona, si es creciente o decreciente.

Dada una sucesión $\{a_n\}$ de números reales, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_n \sup_{m\geq n} a_m,$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_n \inf_{m\geq n} a_m$$

Por ejemplo, si

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{n: par} \\ -\dfrac{1}{n}, & \text{n: impar.} \end{cases}$$

Luego $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$. Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite si y solo si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ y los límites son finitos. Se utilizan definiciones análogas cuando tomamos un límite a lo largo de los números reales. Por ejemplo,

$$\limsup_{y\to x} f(y) = \inf_{\delta>0} \sup_{|y-x|<\delta} f(y).$$

2.2.2. Álgebras y σ-álgebras

Mas adelante cuando se construyan medidas, veremos que no se pueden definir en general la medida de un conjunto arbitrario, se debe restringir la clase de conjuntos a considerar. Dicha clase que se debe usar son los σ-álgebras.

Definición 2.1. Sea X un conjunto. Un álgebra es una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X tal que:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ y $X \in \mathcal{A}$.

(2) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.

(3) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ están en $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ y $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

si además de estas condiciones, cumple con lo siguiente:

(4) Cuando $A_1, A_2, \ldots$ están en $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ y $\bigcap_{i=1}^\infty A_i$ están en $\mathcal{A}$.

entonces $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra.

En (4) solamente se aceptan uniones e intersecciones numerables; no se permite uniones e intersecciones no numerables. Puesto que $\bigcap_{i=1}^\infty A_i = \left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i^c\right)^c$, el requerimiento de que $\bigcap_{i=1}^\infty A_i$ este en $\mathcal{A}$ es redundante.
El par $(X, \mathcal{A})$ se llama espacio de medida. Un conjunto A es medible si $A \in \mathcal{A}$

Ejemplo 2.6. Sea $X = \mathbb{R}$, el conjunto de los número reales, y $\mathcal{A}$ es la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Entonces $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra.

Ejemplo 2.7. Sea $X = [0, 1]$ y $\mathcal{A} = \left\{\emptyset, X, \left[0, \frac{1}{2}\right], \left\langle\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra.

Ejemplo 2.8. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $\mathcal{A} = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2, 3\}\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra

Ejemplo 2.9. Sea $X = [0, 1]$ y $B_1, B_2, \ldots, B_8$ subconjuntos de X que son disjuntos por parejas cuya unión es todo el conjunto X. Sea $\mathcal{A}$ la colección de todas las uniones finitas de los B_i's incluyendo al conjunto vacío ($\mathcal{A}$ consta de 2^8 elementos). Se verifica que $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra.

Lema 2.5. Si $\mathcal{A}_\alpha$ es un σ-álgebra para algún α en un conjunto I, entonces $\cap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ es un σ-álgebra.

Demostración:

(1) $\emptyset \in \cap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ ya que $\emptyset \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ es un σ-álgebra) y $X \in \cap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ ya que $X \in \mathcal{A}_\alpha$, $\forall \alpha \in I$.

(2) Como $\mathcal{A}_\alpha$ es un σ-álgebra los complementos de $A_1, A_2, \ldots \in \cap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ es decir $A_1^c, A_2^c, \ldots \in \cap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$.

(3) No es necesario, ya que el siguiente item es una generalización.

(4) Sean $A_1, A_2, \ldots \in \cap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$, entonces $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_\alpha$, $\forall\alpha \in I$ ademas $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ luego $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \cap_{\alpha\in I}\mathcal{A}$.

$\square$

Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de X; sea

$$\sigma(\mathcal{C}) = \cap\big\{\mathcal{A}_\alpha : \mathcal{A}_\alpha \text{ es un } \sigma\text{-algebra}\big\},$$

como la intersección de todos los σ-álgebras que contiene $\mathcal{C}$. Dado que al menos existe un σ-álgebra que contiene $\mathcal{C}$, es decir el que consiste en todos los subconjuntos de X, nunca tomaremos la intersección sobre una clase vacía de σ-álgebras. En vista del Lema 2.5, $\sigma(\mathcal{C})$ es un σ-álgebra. Llamaremos a $\sigma(\mathcal{C})$ el σ-álgebra generado por la colección $\mathcal{C}$ o decimos que $\mathcal{C}$ genera el σ-álgebra $\sigma(\mathcal{C})$. Esta claro que si $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$, entonces $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$. Dado que $\sigma(\mathcal{C})$ es un σ-álgebra, entonces $\sigma\big(\sigma(\mathcal{C})\big) = \sigma(\mathcal{C})$.

Si X tiene alguna estructura adicional, digamos que es un espacio métrico entonces podemos hablar de conjuntos abiertos. Si $\mathcal{G}$ es una colección de subconjuntos abiertos de X, entonces llamaremos a $\sigma(\mathcal{G})$ como el σ-álgebra de Borel en X y esto a menudo se denota como $\mathcal{B}$. Los elementos de $\mathcal{B}$ se llaman conjuntos de Borel y se dicen que son Borel medibles. Mas adelante veremos que cuando X es la recta real $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ no es igual a la colección de todos los subconjuntos de X.

Terminaremos esta sección con la siguiente proposición:

Proposición 2.1. Si $X = \mathbb{R}$, entonces el σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ es generado por cada una de las siguientes colecciones de conjuntos:

(1) $\mathcal{C}_1 = \big\{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbb{R}\big\}$

(2) $\mathcal{C}_2 = \big\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\big\}$

(3) $\mathcal{C}_3 = \{\langle a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$

(4) $\mathcal{C}_4 = \{\langle a, \infty\rangle : a, b \in \mathbb{R}\}$

Demostración:

(1) Sea $\mathcal{G}$ una colección de conjuntos abiertos. Por definición $\sigma(\mathcal{G})$ es un σ-álgebra de Borel. Como cada elemento de $\mathcal{C}_1$ es abierto, entonces $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{G}$, consecuentemente $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}$.
Para obtener la inclusión inversa, si G es abierto, este es la unión contable de intervalos abiertos, esto por la proposición 1.5. Cada intervalo abierto finito esta en $\mathcal{C}_1$. Dado que $\langle a, \infty\rangle = \cup_{n=1}^{\infty}\langle a, a+n\rangle$, entonces $\langle a, \infty\rangle \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ si $a \in \mathbb{R}$ y de manera similar $\langle -\infty, a\rangle \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ si $a \in \mathbb{R}$. Por tanto si G es abierto, entonces $G \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. Esto nos dice que $\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$, de donde luego $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G}) \subset \sigma\big(\sigma(\mathcal{C}_1)\big) = \sigma(\mathcal{C}_1)$.

(2) Si $[a, b] \in \mathcal{C}_2$, entonces $[a, b] = \cap_{n=1}^{\infty}\langle a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\rangle \in \sigma(\mathcal{G})$. Por tanto $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{G})$, y en consecuencia $\sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma\big(\sigma(\mathcal{G})\big) = \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}$.
Si $\langle a, b\rangle \in \mathcal{C}_1$, escogemos $n_0 \geq 2/(b-a)$ y lo denotamos como:

$$\langle a, b\rangle = \cup_{n=n_0}^{\infty}\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \in \sigma(\mathcal{C}_2).$$

Por lo tanto $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$, del cual se deduce que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma\left(\sigma(\mathcal{C}_2)\right) = \sigma(\mathcal{C}_2)$.

(3) Usando $\langle a, b\rangle = \cap_{n=1}^{\infty}\left\langle a, b + \frac{1}{n}\right\rangle$, vemos que $\mathcal{C}_3 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$, y arriba concluimos que $\sigma(\mathcal{C}_3) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}$. Usando $\langle a, b\rangle = \cup_{n=n_0}^{\infty}\left\langle a, b - \frac{1}{n}\right]$, siempre que n_0 sea lo suficientemente grande, $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_3)$, y arriba hemos argumentado que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_3)$.

(4) Ya que $\langle a, b] = \langle a, \infty\rangle - \langle b, \infty\rangle$, entonces $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_4)$. Dado que $\langle a, \infty\rangle = \cup_{n=1}^{\infty}\langle a, a+n]$, entonces $\mathcal{C}_4 \subset \sigma(\mathcal{C}_3)$. Por lo anterior esto es suficiente para implicar que $\sigma(\mathcal{C}_4) = \mathcal{B}$.

□

2.2.3. Medidas

Definición 2.2. Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ un σ-álgebra de conjuntos de X. Una medida en $(X, \mathcal{A})$ es una función (de conjuntos) $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) si $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, son disjuntos por parejas, entonces:

$$\mu\big(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Decir que los A_i son disjuntos por parejas significa que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$

La parte (2) de la definición 2.2 es llamada *aditividad numerable*, diremos que una función de conjunto es *aditiva finita* si

$$\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ están en $\mathcal{A}$ y son disjuntos por parejas. La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es llamado espacio de medida.

Ejemplo 2.10. Sea X un conjunto cualquiera, sea $\mathcal{A} = P(x)$ la colección de todos los subconjuntos de X. Definimos $\mu(A)$ como el número de elementos en A donde $A \in \mathcal{A}$. Se prueba que $\mu : A \to [0; \infty]$ es una medida en $(X, \mathcal{A})$ llamada medida de conteo, definida por $\mu(A) = |A|$.

Ejemplo 2.11. Sea $X = \mathbb{R}$, sea $\mathcal{A}$ la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$ y $a_1, a_2, \ldots \geq 0$. Sea

$$\mu(A) = \sum_{\{i : x_i \in A\}} a_i$$

La medida de conteo es un caso particular de esto si $x_i = 1$ y todo $a_i = 1$.

Ejemplo 2.12. Sea X un conjunto arbitrario y sea $\mathcal{A}$ un σ-álgebra de X, fijemos $x \in X$ luego definimos $\mu_x : \mathcal{A} \to [0; \infty]$ por

$$\mu_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

entonces μ es una medida en $(X; \mathcal{A})$. Esta medida μ_x es llamada *masa puntual* en X.

Proposición 2.2. Lo siguiente se cumple:

(1) Si $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(2) Si $A_i \in \mathcal{A}$ y $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, entonces $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

(3) Supongase que $A_i \in \mathcal{A}$ y $A_i \uparrow A$ entonces $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(4) Supongase que $A_i \in \mathcal{A}$ y $A_i \downarrow A$. Si $\mu(A_i) < \infty$, entonces se tendría que $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Demostración:

(1) Sea $A_1 = A$, $A_2 = B - A$ y $A_3 = A_4 = \cdots = \emptyset$. Ahora usando la parte (2) de la definición de medida podemos escribir los siguiente:

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(A) + \mu(B - A) + 0 + 0 + \cdots \\ &\geq \mu(A). \end{aligned}$$

(2) Sea $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1$, $B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2)$, $B_4 = A_4 - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ y en general $B_i = A_i - \left(\cup_{j=1}^{i-1} A_j\right)$. Entonces los B_i son disjuntos por parejas, $B_i \subset A_i$ para cada i, y $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \end{aligned}$$

(3) Definimos los B_i como en (2). Dado que $\cup_{i=1}^n B_i = \cup_{i=1}^n A_i$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(\cup_{i=1}^\infty A_i) \\
&= \mu(\cup_{i=1}^\infty B_i) \\
&= \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{i=1}^n B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{i=1}^n A_i)
\end{aligned}$$

(4) Aplicando (3) a los conjuntos $A_1 - A_i$, $i = 1, 2, \dots$. Se verifica que $A_1 - A_i \uparrow A_1 - A$ para $i = 1, 2, \dots,$ y así; ya que $A_1 - A_i \subset A_1 - A_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots$ ademas $\cup_{i=1}^\infty (A_1 - A_i) = A_1 - A$. Luego le aplicamos la parte (3) así

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) - \mu(A) &= \mu(A_1 - A) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 - A_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} [\mu(A_1) - \mu(A_n)]
\end{aligned}$$

Ahora restamos $\mu(A_i)$ de ambos miembros y luego multiplicamos ambos miembros por -1

$\square$

Ejemplo 2.13. Para ver que la condición $\mu(A_1) < \infty$ es necesario que en (4) de la Proposición (2.2), $X = \mathbb{N}$, μ la medida de conteo y $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$. Es claro que los A_i forman una sucesión decreciente, es decir

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1, 2, 3, \dots\} \\
A_2 &= \{2, 3, 4, \dots\} \\
A_3 &= \{3, 4, 5, \dots\} \\
&\vdots \\
A_i &= \{i, i+1, i+2, \dots\}
\end{aligned}$$

de los cuales se ve que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots A_i \supset A_{i+1}$, para $i = 1, 2, 3 \dots$ Es claro también que $\mu(A_i) = \infty$, $i = 1, 2, 3 \dots$ pero $\mu(\cap_{i=1}^\infty A_i) = \mu(\emptyset) = 0$. Por tanto es necesario que $\mu(A) < \infty$ ya que $\mu(A) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Definición 2.3. Una medida μ es una *medida finita* si $\mu(X) < \infty$. Una medida es una medida σ*-finita* si existen conjuntos $E_i \in \mathcal{A}$ para $i = 1, 2, \dots$ tal que $\mu(E_i) < \infty$, $\forall i$ y $\cup_{i=1}^\infty E_i = X$. En el caso que μ es una medida finita entonces $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es llamado un espacio de medida finita y en el caso que μ es una medida σ-finita, el espacio $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida.

Sean $F_n = \cup_{i=1}^{n} E_i$, entonces $\mu(F_n) < \infty$ para cada n y $X = \cup_{i=1}^{\infty} F_n$ se cumple que $F_n \uparrow X$. Luego no existe pérdida de generalidad en suponer que los E_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ forman una sucesión creciente en la Definición (2.3).

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Un subconjunto $A \subset X$ es conjunto nulo si existe un conjunto $B \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset B$ y $\mu(B) = 0$. No se requiere que $A \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ contiene a todos los subconjuntos nulos, entonces $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es llamado el espacio de la medida completo tal que $\overline{\mu}$ es una extensión de μ ($\overline{\mu}$ es una medida en $\overline{\mathcal{A}}$) es decir $\overline{\mu} = \mu(B)$ cuando $B \in \mathcal{A}$.

Una probabilidad o *medida de probabilidad* es una medida μ tal que $\mu(X) = 1$. En tal caso el espacio $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se denota por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde $\mathcal{F}$ es un σ-*campo* que es lo mismo que un σ-álgebra.

2.2.4. Construcción de medidas

El objetivo de esta parte del presente trabajo de investigación es dar un método para construir medidas. Este es un procedimiento complicado que envuelve el concepto de medida exterior, el ejemplo mas importante que obtendremos es la medida de Lebesgue en la recta. No es posible definir la medida de Lebesgue de cada subconjunto de los reales.

Si definimos que la medida m (en $\mathbb{R}$) de un intervalo abierto es su longitud, es decir

$$\begin{aligned} m(\langle a, b\rangle) &= b - a \\ m(\langle a, +\infty\rangle) &= \infty \\ m(\langle -\infty, b\rangle) &= \infty \end{aligned}$$

y sabemos que un conjunto abierto G de $\mathbb{R}$ es la unión numerable de intervalos abiertos disjuntos, si $G = \cup_{i=1}^{\infty} \langle a_i, b_i\rangle$, donde los intervalos $\langle a_i, b_i\rangle$ son disjuntos por parejas, entonces

$$\begin{aligned} m(G) &= \sum_{i=1}^{\infty} m(\langle a_i, b_i\rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \end{aligned}$$

Luego siendo E un subconjunto de $\mathbb{R}$ definimos

$$m(E) = \inf\{m(G)/G \text{ es abierto y } E \subset G\}$$

Sin embargo m no es una medida en el σ-álgebra de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Para remediar el problema vamos a considerar un σ-álgebra menor. Esta es la idea esencial detrás de la construcción de la medida de Lebesgue, pero es técnicamente más simple trabajar con intervalos de la forma $\langle a, b]$ en lugar de intervalos abiertos.

Definición 2.4 (Medida exterior). Sea X un conjunto. Una medida exterior es una función μ^*, definido, en la colección de todos los subconjuntos de X, tal que

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(2) Si $A \subset B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(3) $\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ donde los A_i, $i = 1, 2, \dots$ son subconjuntos de X.

Un conjunto N es nulo con respecto a $\mu^*(N) = 0$. Una forma común de generar medidas exteriores es como sigue.

Proposición 2.3. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de X tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$ y existen $D_1, D_2, \dots$ en $\mathcal{C}$ con $X = \cup_{i=1}^{\infty} D_i$. Sea $\ell : \mathcal{C} \to [0; \infty]$ tal que $\ell(\emptyset) = 0$. Entonces

$$\mu^*(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i)/A_i \in \mathcal{C};\ i = 1, 2, \dots ; E \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}.$$

es una medida exterior.

Demostración: (1) y (2) son obvias, se sigue de la definición de medida exterior. Probaremos (3). Sean $A_1, A_2, \dots$ subconjuntos de X y $\varepsilon > 0$. Para cada i existe conjuntos $C_{i1}, C_{i2}, \dots \in \mathcal{C}$ tal que $A_i \subset \cup_{j=1}^{\infty} C_{ij}$ también para cada i

$\sum_j \ell(C_{ij}) \leq \mu^*(A_i) + \epsilon/2^i$. Entonces $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \cup_i \cup_j C_{ij}$ y además:

$$\begin{aligned}
\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) &\leq \sum_{i,j} \ell(C_{ij}) \\
&= \sum_i \left(\sum_j \ell(C_{ij})\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Ya que ε es arbitrario y, $\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ □

Ejemplo 2.14. Sea $X = \mathbb{R}$ y sea $\mathcal{C}$ una colección de todos los intervalos de la forma $\langle a, b]$. Definamos $\ell : \mathcal{C} \longrightarrow [0, \infty]$ por $\ell(\langle a, b]) = b - a$ si $\mu^* : P(\mathbb{R}) \longrightarrow \langle 0, \infty]$ es definida por (2.4), entonces la Proposición (2.3) establece que μ^* es una medida exterior, sin embargo, μ^* no es una medida de la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Veremos que si se restringe μ^* a un σ-álgebra $\mathscr{L}$ tal que $\mathscr{L}$ esta contenido propiamente en $P(\mathbb{R})$, entonces $\mu^* : \mathscr{L} \longrightarrow [0, \infty]$ es una medida; esta medida es llamada medida de Lebesgue y el σ-álgebra $\mathscr{L}$ es llamado el σ-álgebra de Lebesgue.

Ejemplo 2.15. Sea $X = \mathbb{R}$ y sea $\mathcal{C}$ una colección de intervalos de la forma $\langle a, b]$ (como en el ejemplo anterior). Sea $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y que es continua por la derecha, esto es $\alpha(x) \leq \alpha(y)$ cuando $x < y$, $\alpha(x) = \text{lím}_{y \to x^+} \alpha(y)$ definamos $\ell : \mathcal{C} \longrightarrow [0, \infty]$ por

$$\ell(\langle a, b]) = \alpha(b) - \alpha(a)$$

Si $\mu^* : P(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ es definida por (2.4) entonces la Proposición (2.3) establece que μ^* es una medida exterior (mas no una medida). Restringiendo μ^* a un σ-álgebra menor, obtenemos la medida que es llamada *medida de Lebesgue - Stieltjes* correspondiente a α; en particular si $\alpha(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, obtenemos la medida de Lebesgue.

Definición 2.5. Sea μ^* una medida exterior, un conjunto $A \subset X$ es μ^*-medible si

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \tag{2.1}$$

donde $E \subset X$ es cualquiera.

Teorema 2.8. Si μ^* es una medida exterior en X, entonces $\mathcal{A}$ que es una colección de los conjuntos μ^*-medibles es un σ-álgebra. Si μ es la restricción de μ^* al σ-álgebraμ, entonces μ es una medida. Mas aun $\mathcal{A}$ contiene todos los conjuntos nulos. Este resultado es conocido como el *Teorema de Carathéodory*

Demostración: Por la Definición (2.4),

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

para todo $E \subset X$. Luego para mostrar que $A \subset X$ es μ^*-medible (2.1) es suficiente mostrar que:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

la relación anterior es verdad cuando $\mu^*(E) = \infty$.

Paso 1. Primero mostraremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$ por simetría y la definición de $\mathcal{A}$. Supongamos que $A, B \in \mathcal{A}$ y $E \subset X$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \big[\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c)\big] \\ &\quad + \big[\mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)\big] \end{aligned}$$

La segunda igualdad se deriva de la definición de $\mathcal{A}$, primero reemplazando E reemplazando por $E \cap A^c$. Los primeros tres sumando del segundo miembro de la ecuación tienen una suma mayor o igual que $\mu^*\big(E \cap (A \cup B)\big)$ porque $A \cup B \subset (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$. Dado que $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, entonces

$$\mu^*(E) \geq \mu^*\big(E \cap (A \cup B)\big) + \mu^*\big(E \cap (A \cup B)^c\big),$$

lo cual muestra que $A \cup B \in \mathcal{A}$. Por tanto $\mathcal{A}$ es álgebra.

Paso 2. A continuación mostraremos que $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra. Sean A_i disjuntos por parejas en $\mathcal{A}$, sea $B_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$, y $B = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. Si $E \subset X$,

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}) \end{aligned}$$

De manera similar

$$\mu^*(E \cap B_{n-1}) = \mu^*(E \cap A_{n-1}) + \mu^*(E \cap B_{n-2})$$

y continuando así, obtenemos:

$$\mu^*(E \cap B_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i).$$

Como $B_n \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \end{aligned}$$

Sea $n \to \infty$. Recordando que μ^* es una medida exterior, tendriamos:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \qquad (2.2) \\ &\geq \mu^*\left(\cup_{i=1}^{\infty}(E \cap A_i)\right) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \\ \mu^*(E) &\geq \mu^*(E) \end{aligned}$$

Esto muestra que $B \in \mathcal{A}$.

Ahora si $C_1, C_2, \ldots$ son conjuntos en $\mathcal{A}$, sea $A_1 = C_1$, $A_2 = C_2 - A_1$, $A_3 = C_3 - (A_1 \cup A_2)$, y en general $A_i = C_i - \left(\cup_{j=1}^{i-1} A_j\right)$. Como cada $C_i \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $A_i = C_i \cap C_{i-1}^c \in \mathcal{A}$. Los A_i son disjuntos por parejas, entonces por el párrafo anterior tenemos que:

$$\cup_{i=1}^{\infty} C_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

También, $\cap_{i=1}^{\infty} C_i = \left(\cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i^c\right)^c \in \mathcal{A}$, y por lo tanto $\mathcal{A}$ es un álgebra.

Paso 3. Mostremos que μ^* restricto al σ-álgebra $\mathcal{A}$ es medida de la relación (2.2) obtenemos que

$$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c)$$

Tomando $E = B$, donde $B = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ entonces

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_i) + \mu^*(B \cap B^c) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i). \end{aligned}$$

Asi $\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ donde los A_i son los pares disjuntos. Se sigue que μ^* en $\mathcal{A}$ es aditivo numerable, luego, es una medida.

Paso 4. Finalmente, si $\mu^*(A) = 0$ y $E \subset X$, entonces:

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) &= \mu^*(E \cap A^c) \\ &\leq \mu^*(E) \end{aligned}$$

Lo cual muestra que $\mathcal{A}$ contiene a todos los conjuntos nulos. □

Definición 2.6 (Medida de Lebesgue - Stieltjes). Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{C}$ una colección de intervalos de la forma $\langle a, b]$. Sea $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y continua por la derecha. Esto significa que $\alpha(x) \leq \alpha(y)$ si $x < y$ y $\lim_{z \to x^+} \alpha(z) = \alpha(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Definamos $\ell : \mathcal{C} \longrightarrow [0; \infty]$ dado por

$$\ell\big(\langle a, b]\big) = \alpha(b) - \alpha(a)$$

Definamos

$$\mu^*(E) = \text{ínf}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i) : A_i \in \mathcal{C} \text{ para cada } i \text{ y } E \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i\right].$$

(En este trabajo de investigación usualmente utilizaremos m en lugar de μ cuando estemos hablando acerca de la medida de Lebesgue-Stieltjes.) Por la Proposición (2.3) m^* es una medida exterior y por el teorema (2.8), m^* es una medida en la colección de conjuntos m^*-medibles.

Si K y L son intervalos adyacentes, es decir si $K = \langle a, b]$ y $L = \langle b, c]$, entonces $K \cup L = \langle a, c]$ y además:

$$\begin{aligned} \ell(K) + \ell(L) &= \big[\alpha(b) - \alpha(a)\big] + \big[\alpha(c) - \alpha(b)\big] \\ &= \alpha(c) - \alpha(a) \\ &= \ell(K \cup L) \end{aligned} \tag{2.3}$$

por definición de ℓ.

El siguiente paso en la construcción de la medida de Lebesgue - Stieltjes correspondiente a α es el resultado.

Proposición 2.4. Cada conjunto en el σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$ es m^*-medible.

Demostración: Como la colección de los m^*-medibles es un σ-álgebra, esto es suficiente para mostrar que cada intervalo J de la forma $\langle c, d]$ es m^*-medible. Sea E cualquier conjunto con $m^*(E) < \infty$; necesitamos demostrar que:

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap J) + m^*(E \cap J^c) \tag{2.4}$$

Elegimos los $I_1, I_2, \ldots$ cada uno de ellos tomando la forma $\langle a_i, b_i]$, tal que $E \subset \cup_i I_i$ y además

$$m^*(E) \geq \sum_i \big[\alpha(b_i) - \alpha(a_i)\big] - \varepsilon.$$

Dado que $E \subset \cup_i I_i$, entonces tenemos:

$$m^*(E \cap J) \leq \sum_i m^*(I_i \cap J)$$

y

$$m^*(E \cap J^c) \leq \sum_i m^*(I_i \cap J^c)$$

Sumando tenemos:

$$m^*(E \cap J) + m^*(E \cap J^c) \leq \sum_i \big[m^*(I_i \cap J) + m^*(I_i \cap J^c)\big]$$

Donde $I_i \cap J$ es un intervalo, es decir es un intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha, y $I_i \cap J^c$ es la unión de cero, uno o dos intervalos, dependiendo de las ubicaciones relativas de I_i y J. Usando (4.4) ya sea cero, uno, o dos veces, veremos que:

$$m^*(I_i \cap J) + m^*(I_i \cap J^c) = m^*(I_i).$$

Asi

$$\begin{aligned} m^*(E \cap J) + m^*(E \cap J^c) &\leq \sum_i m^*(I_i) \\ &\leq m^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, esto prueba la relación (2.4). □

Deseamos probar que la medida de un intervalo de la forma $\langle a, b]$ coincide con su longitud. Para ello establecemos el siguiente lema.

Lema 2.6. Sea $J_k = \langle a_k, b_k \rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n$, una colección finita de intervalos abiertos finitos que cubren intervalos finitos cerrados de la forma $[C, D]$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \big[\alpha(b_k) - \alpha(a_k)\big] \geq \alpha(D) - \alpha(C) \tag{2.5}$$

Demostración: Como los J_k cubren el intervalo $[C, D]$, existe al menos un intervalo, es decir, J_{k_1}, tal que $C \in J_{k_1}$. Si J_{k_1} cubre $[C, D]$, nos detenemos. De lo contrario, $b_{k_1} \leq D$, y debe haber al menos un intervalo, es decir J_{k_2}, tal que $b_{k_1} \in J_{k_2}$ Si $[C, D] \subset J_{k_1} \cup J_{k_2}$, nos detenemos. Si no, entonces $b_{k_1} < b_{k_2} \leq D$, y debe haber al menos un intervalo, es decir, J_{k_3} que contiene a b_{k_2}. En cada etapa elegimos J_{k_j} para que $b_{k_{j-1}} \in J_{k_j}$. Continuamos hasta que hayamos recubierto $[C, D]$ con los intervalos $J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_m}$. Dado que $\{J_k\}$ es un recubrimiento finito, nos detendremos para algún $m \leq n$.

Por nuestra construcción tenemos:

$$a_{k_1} \leq C < b_{k_1}, \qquad a_{k_m} < D < b_{k_m}$$

y para $2 \leq j \leq m$,

$$a_{k_j} < b_{k_{j-1}} < b_{k_j},$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha(D) - \alpha(C) &\leq \alpha(b_{k_m}) - \alpha(a_{k_1}) \\
&= \left[\alpha(b_{k_m}) - \alpha(b_{k_{m-1}})\right] + \left[\alpha(b_{k_{m-1}}) - \alpha(b_{k_{m-2}})\right] + \cdots \\
&\quad + \left[\alpha(b_{k_2}) - \alpha(b_{k_1})\right] + \left[\alpha(b_{k_1}) - \alpha(a_{k_1})\right] \\
&\leq \left[\alpha(b_{k_m}) - \alpha(a_{k_m})\right] + \left[\alpha(b_{k_{m-1}}) - \alpha(a_{k_{m-1}})\right] + \cdots \\
&\quad + \left[\alpha(b_{k_2}) - \alpha(a_{k_2})\right] + \left[\alpha(b_{k_1}) - \alpha(a_{k_1})\right].
\end{aligned}$$

Dado que $\{J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_m}\} \subset \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$, esto prueba (4.6) □

Proposición 2.5. Si $e, f \in \mathbb{R}$ entonces $m^*(\langle e, f]) = \ell(\langle e, f])$.

Demostración: Primero demostraremos que $m^*(\langle e, f]) \leq \ell(\langle e, f])$. Esto es fácil. Sea $A_1 = \langle e, f]$ y $A_2 = A_3 = \cdots = \emptyset$. Entonces $\langle e, f] \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, por tanto:

$$\begin{aligned}
m^*(\langle e, f]) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i) \\
&= \ell(A_1) \\
m^*(\langle e, f]) &= \ell(\langle e, f])
\end{aligned}$$

Para el otro sentido, supongamos que $\langle e, f] \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, donde $A_i = \langle c_i, d_i]$. Sea $\varepsilon > 0$ y escogemos un $C \in \langle e, f\rangle$ tal que $\alpha(C) - \alpha(e) < \varepsilon/2$. Esto es posible por la continuidad correcta de α. Sea $D = f$. Para cada i escogemos $d_i' > d_i$ tal que $\alpha(d_i') - \alpha(d_i) < \varepsilon/2^{i+1}$ y sea $B_i = \langle c_i, d_i'\rangle$.

Entonces $[C, D]$ es compacto y B_i es un recubrimiento finito para $[C, D]$. Usando compacidad para elegir un recubrimiento finito $\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ de $\{B_i\}$. Ahora aplicando el Lema 2.6. Concluimos que:

$$\begin{aligned}
\ell(\langle e, f]) &\leq \alpha(D) - \alpha(C) + \varepsilon/2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha(d_k') - \alpha(c_k)\right] + \varepsilon/2 \\
\ell(\langle e, f]) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomando el ínfimo sobre todas las colecciones numerables $\{A_i\}$ que cubren $\langle e, f]$, obtenemos:

$$\ell(\langle e, f]) \leq m^*(\langle e, f]) + \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, $\ell(\langle e, f]) \leq m^*(\langle e, f])$. □

Ahora dejamos de lado el asterisco de m^* y llamaremos m a la medida de *Lebesgue-Stieltjes* correspondiente a α. En el caso particular que $\alpha(x) = x$, m es llamado la medida de Lebesgue. En el caso especial de la medida de Lebesgue, la colección de conjuntos los m^*-medibles es llamado el σ-álgebra de Lebesgue. Un conjunto es *Lebesgue medible* si este este se encuentra en el σ-álgebra de Lebesgue.

Dada una medida μ en $\mathbb{R}$ tal que $\mu(K) < \infty$ cuando K es compacto, se define $\alpha(x) = \mu\big(\langle 0, x]\big)$ si $x \geq 0$ y $\alpha(x) = -\mu\big(\langle x, 0]\big)$ si $x < 0$. Entonces α esta aumentando continuamente por la derecha.

2.2.5. Ejemplos y resultados relacionados a la medida de Lebesgue Stieltjes

Ejemplo 2.16. Sea m una medida de Lebesgue. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\{x\}$ es un conjunto cerrado y por lo tanto $\{x\}$ es Borel medible. Además

$$
\begin{aligned}
m\big(\{x\}\big) &= \lim_{n\to\infty} m\left(\left\langle x - \frac{1}{n}, x\right]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[x - \left(x - \frac{1}{n}\right)\right] \\
m\big(\{x\}\big) &= 0
\end{aligned}
$$

Concluimos que

$$
\begin{aligned}
m\big([a,b]\big) &= m\big(\langle a,b]\big) + m\big(\{a\}\big) \\
&= b - a + 0 \\
m\big([a,b]\big) &= b - a
\end{aligned}
$$

y además

$$
\begin{aligned}
m\big(\langle a,b\rangle\big) &= m\big(\langle a,b]\big) - m\big(\{b\}\big) \\
&= b - a - 0 \\
m\big(\langle a,b\rangle\big) &= b - a
\end{aligned}
$$

Dados que los σ-álgebras son cerrados bajo la operación de uniones numerables, entonces los conjuntos numerables son Borel medibles. Sumando 0 a si mismo numerablemente muchas veces este sigue siendo 0, por lo que la medida de Lebesgue de un conjunto contable es 0.

Sin embargo hay conjuntos no numerables que tienen la medida de Lebesgue 0. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.17 (El conjunto de Cantor). Sea $F_0 = [0,1]$. F_1 se obtiene de F_0 quitando la tercera parte intermedia, es decir

$$F_1 = F_0 - \left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$$

F_1 consta de dos intervalos de longitud $\frac{1}{3}$ cada uno. F_2 se obtiene de F_1 quitando la tercera parte intermedia de los intervalos que conforman F_1 es decir

$$F_2 = F_1 - \left[\left\langle \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right\rangle \right]$$

Así se continua de esta forma, es decir removiendo las terceras partes intermedias obtenemos un conjunto de Cantor

$$C = \cap_{i=1}^{\infty} F_n$$

C es no numerable, cerrado, cada punto de el es un punto límite y no contiene intervalos; $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ (decreciente).

$$\begin{aligned}
m(F_0) &= 1 \\
m(F_1) &= 2\left(\frac{1}{3}\right) \\
m(F_2) &= 4\left(\frac{1}{9}\right) = 2^2\left(\frac{1}{3^2}\right) \\
&\vdots \\
m(F_n) &= 2^n\left(\frac{1}{3^n}\right) = \frac{2^n}{3^n}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
m(C) &= \lim_{n\to\infty} m(F_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.18. Sigamos con la construcción del conjunto de Cantor con esta diferencia. En lugar de remover l tercera parte intermedia en la primera etapa eliminamos la cuarta parte intermedia, es decir removemos $\left\langle \frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right\rangle$. En cada uno de los dos intervalos que quedan, se quitan los decimos sextos medios. En cada uno de los cuatro intervalos que quedan, se quitan los intervalos medios de longitud $\frac{1}{64}$, y así sucesivamente. El total que eliminamos es:

$$\frac{1}{4} + 2(\frac{1}{16}) + 4(\frac{1}{64}) + \cdots = \frac{1}{2}$$

El conjunto que queda no contiene intervalos, es cerrado, cada punto es un punto límite, es no contable, y tiene medida $\frac{1}{2}$. Tal conjunto es llamado el conjunto generalizado de Cantor. Por supuesto otras opciones como $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, etc. son posibles.

Sea $A \subset [0,1]$ un conjunto Borel medible. Mostraremos que A es “casi igual” a una intersección numerable de conjuntos abiertos y es así “casi igual” a una unión numerable de conjuntos cerrados.

Proposición 2.6. Supongamos que $A \subset [0,1]$ es un conjunto Borel medible. Sea m la medida de Lebesgue.

(1) Dado que $\varepsilon > 0$, existe un conjunto abierto G tal que la $m(G - A) < \varepsilon$ y $A \subset G$.

(2) Dado que $\varepsilon > 0$, existe un conjunto cerrado F tal que la $m(A - F) < \varepsilon$ y $F \subset A$.

(3) Existe un conjunto H que contiene a A que es la intersección contable de una sucesión decreciente de conjuntos abiertos y $m(H - A) = 0$.

(4) Existe un conjunto F que está contenido en A que es la unión contable de una sucesión creciente de conjuntos cerrados que está contenida en A y $m(A - F) = 0$.

Demostración:

(1) Existe un conjunto de la forma $E = \cup_{j=1}^{\infty} \langle a_j, b_j]$ tal que $A \subset E$ y $m(E - A) < \varepsilon/2$. Sea $G = \cup_{j=1}^{\infty} \langle a_j, b_j + \varepsilon 2^{-j-1}\rangle$. Entonces G es abierto y contiene a A y

$$m(G - E) < \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-j-1} = \varepsilon/2.$$

Por lo tanto

$$m(G - A) \leq (G - E) + m(E - A) < \varepsilon$$

(2) Se encuentra un conjunto abierto G tal que $A' \subset G$, donde $A' = [0, 1] - A$. Sea $F = [0, 1] - G$. Entonces F es cerrado, $F \subset A$, y $m(A - F) \leq m(G - A') < \varepsilon$.

(3) Por (1), para cada i, hay un conjunto abierto G_i que contiene a A tal que $m(G_i - A) < 2^{-i}$. Entonces $H_i = \cap_{j=1}^{i} G_j$ contendrá a A, es abierto, y como está contenido en G_i, entonces $m(H_i - A) < 2^{-i}$. Sea $H = \cap_{i=1}^{\infty} H_i$. H no necesita ser abierto, pero es la intersección de muchos conjuntos abiertos contables. El conjunto H es un conjunto de Borel que contiene A y $m(H - A) \leq (H_i - A) < 2^{-i}$ para cada i, por lo tanto $m(H - A) = 0$.

(4) Si $A' = [0, 1] - A$, aplicando (3) a A' para encontrar un conjunto H que contenga a A' y que sea la intersección contable de una sucesión decreciente de conjuntos abiertos tal que $m(H - A') = 0$. Sea $J = [0, 1] - H$. Se deja al lector verificar que J tiene las propiedades deseadas.

□

2.2.6. Funciones medibles

Medibilidad

Supongamos que $(X, \mathcal{A})$ es un espacio medible.

Definición 2.7. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es medible ($\mathcal{A}$ medible), si

$$\{x/f(x) > a\} \in \mathcal{A} \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Una función de valor complejo, es decir $f : X \to \mathbb{C}$ es medible si las partes real e imaginaria son medibles.

Ejemplo 2.19. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ tal que f es constante, es decir $f(x) = k$ entonces el conjunto $\{x/f(x) > a\}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ es X o bien $\emptyset$, f es medible ya que $X, \emptyset \subset \mathcal{A}$

Ejemplo 2.20. Supongamos que $f(x) = 1$ entonces $\mathcal{B} = \{x/1 > a\}$, existen tres casos:

(1) Si $a > 1$ entonces $\mathcal{B} = \emptyset$

(2) Si $a = 1$ entonces $\mathcal{B} = \emptyset$

(3) Si $a < 1$ entonces $\mathcal{B} = X$

así f es medible.

Ejemplo 2.21. Sea $A \subset X$ y $f : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \in A^c \end{cases}$$

entonces el conjunto $\{x/f(x) > a\}, \forall a \in \mathbb{R}$, resulta ser $A, \emptyset$ o X, así f es medible si y solo si $A \subset \mathcal{A}$ (ya que $\emptyset$ y $X \in \mathcal{A}$)

Ejemplo 2.22. Sea $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra de Borel y $f(x) = x$ (funcion identidad), entonces $\{x/f(x) > a\} = \{x/x > a\}$ ya que $f(x) = x$ ademas $x > a \equiv \langle a, +\infty\rangle$ y como cualquier intervalo pertenece al algebra de Borel, entonces $\langle a, +\infty\rangle$ pertenece al σ-álgebra y este pertenece a $\mathcal{A}$, luego f es medible.

Proposición 2.7. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\{x/f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(2) $\{x/f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$

(3) $\{x/f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$

(4) $\{x/f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$

Demostración: (1) y (2) son equivalentes ya que una es complemento de la otra, y por la misma razón (3) y (4) son resultan ser equivalentes, es decir $\{x/f(x) > a\}^c = \{x/f(x) \leq a\}$ como el conjunto $\{x/f(x) > a\}$ esta en $\mathcal{A}$ y como $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra entonces su complemento esta en $\mathcal{A}$.

Si f es medible, entonces la siguiente igualdad

$$\{x/f(x) \geq a\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{x/f(x) > a - 1/n\}$$

muestra que (4) se cumple si (1) se cumple. Si (4) se cumple, entonces (1) se cumple mediante el uso de la siguiente igualdad

$$\{x/f(x) > a\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{x/f(x) \geq a + 1/n\}$$

Esto completa la prueba. □

Proposición 2.8. Si X es un espacio métrico, $\mathcal{A}$ contiene todos los conjuntos abiertos, y $f : X \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es medible.

Demostración: Notar que $\{x/f(x) > a\} = f^{-1}(\langle a, \infty\rangle)$ es abierto y por tanto está en $\mathcal{A}$. □

Proposición 2.9. Sea $c \in \mathbb{R}$ si f y g son funciones medibles y de valor real, entonces $f + g, c.f, -f, fg, \text{máx}\{f, g\}$ y $\text{mín}\{f, g\}$ son funciones medibles

Demostración:

(1) Por demostrar que $f + g$ es medible.
En efecto. Si $f(x) + g(x) < a$, $\forall a \in \mathbb{R}$ entonces $f(x) < a - g(x)$, por la propiedad arquimediana en los números reales, existe un $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < r < a - g(x)$. Por lo tanto

$$\{x/f(x) + g(x) < a\} = \cup_{r\in\mathbb{Q}}\big(\{x/f(x) < r\} \cap \{x/g(x) < a - r\}\big)$$

Esto prueba que $f + g$ es medible.

(2) Por demostrar que $-f$ es medible.
En efecto. $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{x/ - f(x) > a\} = \{x/f(x) < -a\}$ y por la Proposición 2.7 el conjunto $\{x/f(x) < -a\} \in \mathcal{A}$. Así $-f$ es medible.

(3) Por demostrar que $c.f$ es medible.
En efecto. Se presentan los siguientes casos:

i) Si $c > 0$, entonces, $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{x/c.f(x) > a\} = \{x/f(x) > a/c\} \in \mathcal{A}$, luego $c.f$ es medible.

ii) Si $c = 0$, por el Ejemplo 2.19 $c.f$ es medible.

iii) Si $c < 0$, entonces, $c.f = -|c|.f = -(|c|.f)$ por (i) en $(|c|.f)$ es medible y $-(|c|.f)$ por el $(-f$ es medible) entonces $-(|c|.f)$ es medible y como $-(|c|.f) = c.f$, luego $c.f$ es medible.

(4) Por demostrar que $f.g$ es medible.
En efecto. Afirmamos que f^2 es medible.
Si $a < 0$, $\{x/f(x) > a\} = X, \forall x \in X$.
Si $a \geq 0$, $\{x/f^2(x) > a\} = \{x/f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x/f(x) < -\sqrt{a}\}$
Así:

$$f.g = \frac{1}{2}\big[(f + g)^2 - f^2 - g^2\big]$$

Por lo tanto $f.g$ es medible.

(5) Por demostrar que $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ son medibles.
Para todo $a \in \mathbb{R}$ la siguiente igualdad

$$\Big\{x/\,\text{máx}\Big(f(x), g(x)\Big) > a\Big\} = \{x/f(x) > a\} \cup \{x/g(x) > a\}$$

muestra que $\text{máx}(f, g)$ es medible; puesto que $\text{mín}(f, g) = -\,\text{máx}(-f, -g)$. Luego $\text{mín}(f, g)$ también es medible.

$\square$

Proposición 2.10. Si f_i es una función medible de valor real para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $\sup_i f_i$, $\inf_i f_i$, $\lim_{i\to\infty} \sup f_i$ y $\lim_{i\to\infty} \inf f_i$ son funciones medibles, siempre que estas sean finitas.

Demostración: Que $\lim_i \sup f_i$ y $\lim_i \inf f_i$ sean funciones medibles, se sigue a partir del hecho de que $\sup_i f_i$ e $\inf_i f_i$ son funciones medibles, ya que por ejemplo:

$$\lim_{i\to\infty} \sup f_i = \inf_i \sup_{i\geq j} f_j$$

$$\lim_{i\to\infty} \inf f_i = \sup_i \inf_{i\geq j} f_j$$

tenemos que para todo $a \in \mathbb{R}$

$$\Big\{x/\sup f_i(x) > a\Big\} = \cap_{i=1}^{\infty}\Big\{x/f_i(x) > a\Big\}$$

luego $\sup_i f_i$ es medible; del mismo modo, $\inf_i f_i$ es medible. $\square$

Definición 2.8. Diremos que $f = g$ casi en todas partes si se cumple que $m\Big(\{x/f(x) \neq g(x)\}\Big) = 0$. De igual modo diremos que $f_i \to f$ casi en todas partes, si la medida del conjunto de los x para los cuales $f_i(x)$ no converge a $f(x)$ es igual a cero.

Si X es un espacio métrico, $\mathcal{B}$ es un σ-álgebra de Borel y $f : X \to \mathbb{R}$ es medible con respecto a $\mathcal{B}$, diremos que f es Borel medible. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible con respecto al σ-álgebra de Lebesgue, diremos que f es lebesgue medible; esto se refiere a un intervalo abierto, cerrado con respecto a la medida exterior.
De acuerdo a la Proposición 2.8 todas las funciones continuas son Borel medibles.

Proposición 2.11. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces f es Borel medible.

Demostración: Supongamos que f es creciente, es decir $f(x) \leq f(y)$ cuando $x < y$; de lo contrario consideremos un $-f$. Dado $a \in \mathbb{R}$, sea $x_0 = \sup\{y/f(y) \leq a\}$.
Si $f(x_0) \leq a$, entonces $\{x/f(x) > a\} = \langle x_0, \infty\rangle$
Si $f(x_0) > a$, entonces $\{x/f(x) > a\} = [x_0, \infty\rangle$.

En cualquier caso, $\{x/f(x) > a\}$ es un conjunto de Borel. Por lo tanto, f es Borel medible. $\square$

Proposición 2.12. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{A}$ medible. Si A se encuentra en el σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ el σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$. Sea $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}/f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$; es claro que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.

Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{C}$ se sigue que $f^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i f^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}$, ya que $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra es decir que la unión pertenece a $\mathcal{A}$; significa que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo uniones

numerables y complementos. Del mismo modo se demuestra que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo intersecciones numerables y complementos.
Si $A \in \mathcal{C}$, entonces $A \in \mathcal{B}$ y $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ luego $A^c \in \mathcal{B}$ y $f^{-1}(A^c) = (f(A))^c \in \mathcal{A}$, se sigue que $A^c \in \mathcal{B}$ ademas $\mathcal{C}$ contiene a $\emptyset$ y $\mathbb{R}$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ es un σ-álgebra.

Puesto que $f : X \to \mathbb{R}$ es una función $\mathcal{A}-$medible para todo $a \in \mathbb{R}$ $\{x/f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ esto es $f^{-1}(\langle a, \infty\rangle) \in \mathcal{A}$. Por consiguiente, $\mathcal{C}$ debe contener los intervalos de la forma $\langle a, \infty\rangle$, luego $\mathcal{C}$ debe contener el σ-álgebra generado por estos intervalos que es el σ-álgebra de Borel. Por lo tanto $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, de esto finalmente se concluye que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. $\square$

La Proposición 2.12 afirma que si f es medible entonces la imagen inversa de un conjunto de Borel es medible.

Observación 2.3. Existen conjuntos Lebesgue medibles que no son Borel medibles. La medida de Borel esta contenida en los conjuntos Lebesgue medibles y este es toda la colección de conjuntos m^* medibles.

2.2.7. Aproximación de funciones

Definición 2.9. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Sea $E \in \mathcal{A}$, la función característica de E, $\chi_E : X \to \{0, 1\}$ se define como:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } x \in E \\ 0 & , \quad \text{si } x \in E^c \end{cases}$$

Una *función simple* $S : X \to \mathbb{R}$, es una función de la forma

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$, $E_i \in \mathcal{A}$ esto es, son subconjuntos medibles.

Proposición 2.13. Supongamos que f es una función medible no negativa entonces existe una sucesión S_n de funciones simples que son medibles no negativas tal que dicha sucesión crece hacia f.

Demostración: Sean

$$E_{ni} = \left\{ x \middle/ \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}$$
$$F_n = \{x/f(x) \geq n\}$$

para $n = 1, 2, \ldots \quad i = 1, 2, \ldots, n2^n$. Notemos que E_{ni} y F_n son medibles.

Definimos:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{ni}} + n\chi_{F_n} \qquad \ldots(*)$$

Se cumple que $S_n(x) = n$, si $f(x) \geq n$. Si $f(x)$ esta entre $\frac{(i-1)}{2^n}$ e $\frac{i}{2^n}$ para $\frac{i}{2^n} \leq n$, entonces $S_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$

S_n es una función simple; se verifica que $E_{ni} \cap F_n = \emptyset$. Si $f(x) \geq n$ entonces $x \in F_n$, $x \notin E_{ni}$ luego en $(*)$ $S_n(x) = n$ si $\frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}$ entonces $x \in E_{ni}$, $x \notin F_n$; en consecuencia se tiene que:

$$S_n(x) = \frac{1-1}{2^n}\chi_{E_{n1}}(x) + \frac{2-1}{2^n}\chi_{E_{n2}}(x) + \cdots + \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{ni}}(x) + \cdots + \frac{n2^n-1}{2^n}\chi_{E_{nn2^n}}(x)$$

Consideramos que los conjuntos E_{ni} (para n fijo) son disjuntos, entonces

$$S_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$$

Puesto que una función característica es medible entonces S_n es medible. $\square$

2.2.8. La integral de Lebesgue

Definición 2.10. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$$

es una función simple medible no negativa, la integral de Lebesgue de s se define como

$$\int s d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) \tag{2.6}$$

Aquí, si $A_i = 0$ y $\mu(E_i) = \infty$, hacemos uso de la convención $a_i\mu(E_i) = 0$. Si $f \geq 0$ es una función medible, entonces se define

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ es simple}\right\} \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.23. Sea la función $s(x) = [\![x]\!]^2$; $-2 \leq x \leq 3$, tenemos lo siguiente

$$s(x) = \begin{cases} 4 & , \quad -2 \leq x < -1 \\ 1 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 4 & , \quad 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

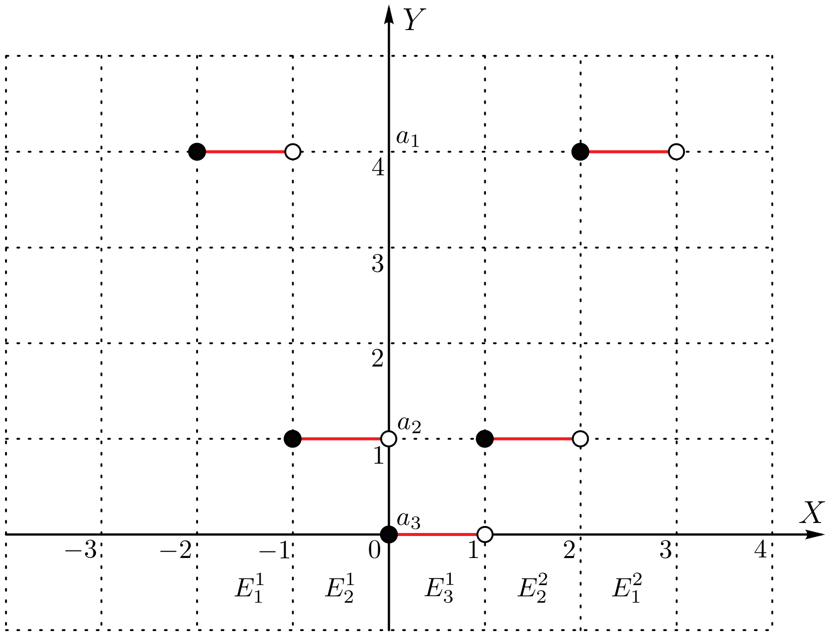

Figura 2.2: Gráfica de la función $s(x) = [\![x]\!]^2$

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} s d\mu &= \sum_{i=1}^{3} a_i \mu(E_i) \\
&= a_1\mu(E_1) + a_2\mu(E_2) + a_3\mu(E_3) \\
&= 4\mu(E_1^1 \cup E_1^2) + 1\mu(E_2^1 \cup E_2^2) + 0\mu(E_3^1) \\
&= 4[\mu(E_1^1) + \mu(E_1^2)] + 1[\mu(E_2^1) + \mu(E_2^2)] + 0[\mu(E_3^1)] \\
&= 4(1+1) + 1(1+1) + 0(1)
\end{aligned}$$

$$\int_{-2}^{3} s d\mu = 10$$

Sea f es una función medible y $f^+ = \text{máx}(f, 0)$ y $\text{máx}(-f, 0)$. Siempre que $\displaystyle\int f^+ d\mu$ y $\displaystyle\int f^- d\mu$ no sean infinitas, luego se define

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \tag{2.8}$$

Finalmente, si $f = u + iv$ es de valor complejo y $\displaystyle\int (|u| + |v|) du$ es finito, se define

$$\int f d\mu = \int u d\mu + i \int v d\mu. \tag{2.9}$$

Una función s puede escribirse como una función simple en más de una forma. Por ejemplo $s = \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ si A y B son disjuntos. No es difícil verificar que la definición de $\int s du$ no se ve afectado por la forma en que s esta escrito. Si $s = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i} =$

$\sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$, entonces necesitamos mostrar que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(B_j) \tag{2.10}$$

Para una partición dada $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$, se definen las funciones m_i y M_i en $[a,b]$ por

$$\ell_P(x) = m_i(f) \quad , \quad x \in [x_{i-1}; x_i] \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

y

$$u_P(x) = M_i(f) \quad , \quad x \in [x_{i-1}; x_i] \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

respectivamente, luego hacemos que $\ell_P(b) = u_P(b) = f(b)$ y se observa que estas funciones son acotadas y medibles, ademas sus integrales de Lebesgue son

$$(L)\int_a^b \ell_P = L(f,P) \qquad \text{y} \qquad (L)\int_a^b u_P = U(f,P)$$

Definición 2.11. Si f es medible y $\displaystyle\int |f| d\mu < \infty$, entonces f es integrable.

Proposición 2.14.

(1) Si f es una función medible y de valor real con $a \leq f(x) \leq b$ para todo x y $\mu(X) < \infty$, entonces $a\mu(X) \leq \displaystyle\int f d\mu \leq b\mu(X)$.

(2) Si f y g son funciones medibles de valor real, e integrables con $f(x) \leq g(x)$ para todo x, entonces $\displaystyle\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

(3) Si f es integrable, entonces $\displaystyle\int cf d\mu = c \int f d\mu$ para todo c complejo.

(4) Si $\mu(A) = 0$ y f es integrable, entonces $\displaystyle\int f \chi_A d\mu = 0$.

La integral $\displaystyle\int f \chi_A d\mu$ a menudo se escribe $\displaystyle\int_A f d\mu$. Otra notación para la integral es omitir la μ y escribir $\displaystyle\int f$ si esta claro que medida se esta utilizando.

Cuando estamos integrando una función f con respecto a la medida m de Lebesgue, es habitual escribir $\displaystyle\int f(x)dx$ para $\displaystyle\int f(x)m(dx)$; se define

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)m(dx).$$

Proposición 2.15. Si f es integrable, entonces

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|$$

Demostración: Para el caso real, esto es fácil. $f \leq |f|$, así $\int f \leq \int |f|$. también $-f \leq |f|$, así $-\int f \leq \int |f|$. Luego se combinan estos dos casos.

Para el caso complejo $\int f$ es un número complejo. Si este es 0, la desigualdad es trivial. Si no lo es, entonces $\int f = re^{i\theta}$ para algún r y θ. Luego

$$\left|\int f\right| = r = e^{-i\theta}\int f = \int e^{-i\theta} f.$$

De la definición de $\int f$ cuando f es complejo, se tiene que $\text{Re}\left(\int f\right) = \int \text{Re}(f)$. Como $\left|\int f\right|$ es real, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\left|\int f\right| &= \text{Re}\left(\int e^{-i\theta}\right)\\ &= \int \text{Re}\left(e^{-i\theta} f\right)\\ &\leq \int |f|\end{aligned}$$

□

2.2.9. Teoremas referentes a límites

La razón principal por la cual la integral de Lebesgue es mucho mas fácil de trabajar que la integral de Riemann es que se comporta muy bien al tomar límites, En adelante demostraremos el teorema de convergencia monótona, el Lema de Fatou's y el teorema de convergencia dominada. También probaremos que la integral de Lebesgue es lineal.

2.2.10. Teorema de convergencia monótona

Uno de los resultados mas importantes concernientes a la integral de Lebesgue es el teorema de convergencia monótona.

Teorema 2.9. Supongamos que f_n es una sucesión no negativa de funciones medibles con $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$ para todo x y además

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Para todo x. Entonces $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

Demostración: Por (2) de la Proposición (2.14), $\int f_n$ es una sucesión creciente de números reales. Sea L el límite. Como $f_n \leq f$ para todo n, entonces $L \leq \int f$. Debemos mostrar que $L \geq \int f$.

Sea $s = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}$ una función simple no negativa menor o igual que f y además con $c \in \langle 0, 1\rangle$. Sea $A_n = \{x/f_n(x) \geq c\, s(x)\}$.
Como $f_n(x)$ crece hacia $f(x)$ para cada x y $c < 1$, entonces $A_n \uparrow X$. Para cada n,

$$\begin{aligned}\int f_n &\geq \int_{A_n} f_n \\ &\geq c \int_{A_n} s_n \\ &= c \int_{A_n} \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i} \\ &= c \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(E_i \cap A_n)\end{aligned}$$

Si hacemos que $n \to \infty$, por la parte (3) de la Proposición (2.2) el lado derecho converge hacia

$$c \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(E_i) = c \int s.$$

Para todo $L \geq c \int s$. Como c es arbitrario en el intervalo $\langle 0, 1\rangle$ entonces $L \geq \int s$. Tomando el supremo sobre todo $s \leq f$ simple $s \leq f$, obtenemos $L \geq \int f$. $\square$

Ejemplo 2.24. Sea $X = [0, \infty\rangle$ y $f_n(x) = -\dfrac{1}{n}$ para todo x. Entonces $\int f_n = -\infty$, pero $f_n \uparrow f$ donde $f = 0$ y $\int f = 0$. La razón por la cual el teorema de convergencia monótona no se aplica aquí es que los f_n no son no negativos.

Ejemplo 2.25. Supongamos que $f_n = n\chi_{\langle 0, \frac{1}{n}\rangle}$. Entonces $f_n > 0$, $f_n \to 0$ para cada x, pero $\int f_n = 1$ no converge hacia $\int 0 = 0$. La razón por la cual el teorema de convergencia monótona no se aplica aquí es que los f_n no crecen hacia f para cada x.

2.2.11. Linealidad de la integral de Lebesgue

Una vez que se tiene el teorema de convergencia monótona, se pueden demostrar que la integral de Lebesgue es lineal.

Teorema 2.10. Si f y g son funciones no negativas y medibles o si f y g son integrables entonces

$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Demostración: Primero supongamos que f y g son funciones no negativas y simples, decimos, que $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$ y $g = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son disjuntos dos a dos y que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son disjuntos dos a dos. Como $a_i = 0$ y $b_j = 0$ son permisibles, también podemos asumir que $\cup_{i=1}^{m} A_i = X = \cup_{j=1}^{n} B_j$. Entonces

$$f + g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_i + b_j)\chi_{A_i \cap B_j},$$

luego tenemos

$$\begin{aligned}
\int (f+g) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_i + b_j)\mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i\mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_j\mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j\mu(B_i) \\
\int (f+g) &= \int f + \int g.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el teorema en este caso se demuestra.

Luego suponemos que f y g son funciones no negativas. Tomamos s_n simple y creciente hacia f y t_n simple y creciente hacia g. Entonces $s_n + t_n$ son funciones crecientes simples hacia $f + g$, luego el resultado final se obtiene del teorema de convergencia monótona y

$$\begin{aligned}
\int (f+g) &= \lim_{n\to\infty} \int (s_n + t_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int s_n + \lim_{n\to\infty} \int t_n \\
\int (f+g) &= \int f + \int g.
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que f y g son funciones de valor real e integrables pero toman valores positivos y negativos. Como

$$\begin{aligned}
\int |f+g| &\leq \int \Big(|f| + |g|\Big) \\
&= \int |f| + \int |g| \\
\int |f+g| &< \infty,
\end{aligned}$$

entonces $f + g$ es integrable. luego podemos escribir

$$\begin{aligned}
(f+g)^+ - (f+g)^- &= f + g \\
(f+g)^+ - (f+g)^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^-
\end{aligned}$$

asi

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^-$$

Luego usando el resultado para funciones no negativas, se tiene

$$\int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int (f+g)^-$$

Reorganizando, se tiene

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \int (f+g)^+ - \int (f+g)^- \\ &= \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- \\ \int (f+g) &= \int f + \int g.\end{aligned}$$

Si f y g son de valor complejo, se aplica lo anterior a las partes real e imaginaria. □

Proposición 2.16. Supongamos que los f_n son funciones medibles no negativas. Entonces

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Demostración: Sea $F_n = \sum_{n=1}^{N} f_n$. Como $0 \leq F_n(x) \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, podemos escribir lo siguiente

$$\begin{aligned}\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n &= \int \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n \\ &= \int \lim_{N\to\infty} F_N \qquad (2.11) \\ &= \lim_{N\to\infty} \int F_N \qquad (2.12) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f_n \\ \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n,\end{aligned}$$

Esto usando el teorema de convergencia monótona y la linealidad de la integral. □

2.2.12. Lema de Fatou's

El siguiente teorema es conocido como el Lema de Fatou's.

Teorema 2.11. Supongamos que los f_n son no negativos y medibles. Entonces

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

Demostración: Sea $g_n = \inf_{i\geq n} f_i$. Entonces los g_n son no negativos y los g_n crecen hacia $\liminf_n f_n$. Claramente se tiene que para cada $i \geq n$, así se tiene que $\int g_n \leq \int f_i$. Por lo tanto

$$\int g_n \leq \inf_{i\geq n} \int f_i. \qquad (2.13)$$

Si tomamos el límite en (2.13) cuando $n \to \infty$, en el lado izquierdo obtenemos $\int \liminf_n f_n$ por el teorema de convergencia monótona, mientras que en el lado derecho obtenemos $\liminf_n \int f_n$. □

Un típico caso del Lema de Fatou's es el siguiente. Supongamos que tenemos $f_n \to f$ y $\sup_n \int |f_n| \leq K < \infty$. Entonces $|f_n| \to |f|$, y por el Lema de Fatou's, $\int |f| \leq K$.

2.2.13. Teorema de convergencia dominada

Otro muy importante teorema que sera útil es el teorema de convergencia dominada.

Teorema 2.12. Supongamos que los f_n son funciones medibles de valor real y $f_n(x) \to f(x)$ para cada x. Supongamos que existe una función g integrable no negativo, tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo x. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \to \int f d\mu$$

Demostración: Como $f_n + g \geq 0$, por el Lema de Fatou's, tenemos

$$\begin{aligned}\int f + \int g &= \int (f+g)\\ &\leq \liminf_{n\to\infty} (f_n + g)\\ \int f + \int g &= \liminf_{n\to\infty} f_n + \int g\end{aligned}$$

Como g es integrable, entonces

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n. \tag{2.14}$$

De manera similar, $g - f_n \geq 0$, así

$$\begin{aligned}\int g - \int f &= \int (g-f)\\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int (g - f_n)\\ &= \int g + \liminf_{n\to\infty} \int (-f_n)\end{aligned}$$

luego, tenemos

$$\begin{aligned}-\int f &\leq \liminf_{n\to\infty} \int (-f_n)\\ &= -\liminf_{n\to\infty} \int f_n\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int f \geq \liminf_{n\to\infty} \int f_n. \tag{2.15}$$

Finalmente de (2.14) y (2.15) queda probado el teorema. □

El ejemplo (2.25) es un ejemplo donde el límite de las integrales no es la integral del límite porque no hay una función dominante g.

Si en el teorema de convergencia monótona o en el teorema de convergencia dominada solo tenemos $f_n(x) \to f(x)$ casi en todas partes, la conclusión aún se cumple. Por ejemplo, si los f_n son medibles, no negativos, y $f_n \uparrow f$, casi en todas partes, sea $A = x/f_n(x) \to f(x)$. Entonces $f_n\chi_A(x) \uparrow f\chi_A(x)$ para cada x. Como A^c tiene medida 0, vemos que de la parte (4) de la Proposición (2.14) y el teorema de convergencia monótona que

$$\begin{aligned} \lim_n \int f_n &= \lim_n \int f_n\chi_A \\ &= \int f\chi_A \\ &= \int f. \end{aligned}$$

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Materiales

Recursos y materiales bibliográficos obtenidos de distintas universidades nacionales y/o internacionales así como las páginas web, agregado a ello materiales de escritorio y cómputo.

3.2. Metodología de la investigación

3.2.1. Tipo de investigación

El tipo de investigación es básicamente teórico a nivel explicativo, el cual se caracteriza porque los resultados sirven para profundizar los conocimientos del tema en cuestión. Así como también se explican y desarrollan más profundamente los conocimientos que existen en la teoría de la medida.

3.2.2. Método

Los métodos que se usan son deductivo, analítico y sintético, ya que la ejecución del proyecto consiste en la exploración, interpretación y análisis.

3.2.3. Técnica

Lectura y análisis de materiales de consulta para la asimilación apropiada.

3.2.4. Estrategias

Revisión bibliográfica y búsqueda en Internet de saberes previos e información que facilite la interpretación de la investigación.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Comparación de la integral de Riemann con la integral de Lebesgue

Ahora se hará la comparación de la integral de Lebesgue con la integral de Riemann. Se mostrara que la integral de Riemann de una función existe si y solo si el conjunto de discontinuidades de la función tiene medida de Lebesgue cero, y en este caso la integral de Riemann y la integral de Lebesgue coinciden en el mismo valor.

Empezamos recordando algunas definiciones y hechos básicos a cerca de la integral de Riemann.

Sea f una función acotada en el intervalo cerrado $[a, b]$ ademas $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donde $x_0 = a$ y $x_n = b$, una partición de este intervalo. Hagamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.
La *suma inferior de Riemann* de f sobre P es el número

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i$$

donde $m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}$.

De manera similar, la *suma superior de Riemann* de f sobre P es el número

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i$$

donde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}$.
Notemos que ambos números están bien definidos ya que f es una función acotada.

Es necesario definir el número $\|P\| = \text{máx}\{x_i - x_{i-1}/i = 1, 2, \ldots, n\}$
Así la función f se dice ser *Riemann integrable* en $[a, b]$ si

$$\lim_{\|P\|\to 0} L(f, P) = \lim_{\|P\|\to 0} U(f, P)$$

En este caso, el valor común de estos limites es la *integral de Riemann* de f sobre $[a, b]$ y los denotaremos por $(R)\displaystyle\int_a^b f$. Esta notación con el fin de hacer la comparación con la integral de Lebesgue.

Para una partición dada $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, se definen las funciones m_i y M_i en $[a, b]$ por

$$\ell_P(x) = m_i(f) \quad , \quad x \in [x_{i-1}; x_i] \quad , \quad 1 \leq i \leq n \tag{4.1}$$

y

$$u_P(x) = M_i(f) \quad , \quad x \in [x_{i-1}; x_i] \quad , \quad 1 \leq i \leq n \tag{4.2}$$

respectivamente, luego hacemos que $\ell_P(b) = u_P(b) = f(b)$ y se observa que estas funciones son acotadas y medibles, ademas sus integrales de Lebesgue son

$$(L)\int_a^b \ell_P = L(f, P) \qquad \text{y} \qquad (L)\int_a^b u_P = U(f, P) \tag{4.3}$$

A continuación probaremos que una función Riemann integrable f en $[a, b]$ es Lebesgue integrable sobre el mismo intervalo y que sus integrales respectivas son iguales, es decir

$$(R)\int_a^b f = (L)\int_a^b f$$

En efecto, sea f una función Riemann integrable en $[a, b]$ y

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_k \subseteq \ldots$$

una familia encajada de particiones del intervalo $[a, b]$ tal que la sucesión $\|P_k\|$ converge a cero. Para $k \in \mathbb{N}$ dado, denotamos por ℓ_k y u_k las funciones ℓ_P y u_P definidas para la partición P_k por (4.1) y (4.2), respectivamente. Entonces tenemos

$$(L)\int_a^b \ell_k = L_k \qquad , \qquad (L)\int_a^b u_k = U_k$$

donde L_k y U_k son las sumas de Riemann inferior y superior respectivamente correspondientes a P_k (ver 4.3). Puesto que la sucesión (u_k) es decreciente. Por consiguiente, cada una de estas sucesiones converge puntualmente a alguna función medible acotada, por decir ℓ y u respectivamente, luego tenemos

$$\ell \leq f \leq u \tag{4.4}$$

ya que $f_k \leq f \leq u_k$. Por el teorema de la convergencia acotada (Teor ...),

$$L_k \longrightarrow (L)\int_a^b \ell \qquad y \qquad U_k \longrightarrow (L)\int_a^b u \tag{4.5}$$

Puesto que f es Riemann integrable, ambas sucesiones (L_k) y (U_k) convergen a $(R)\displaystyle\int_a^b f$. Se sigue que

$$(R)\int_a^b f = (L)\int_a^b \ell = (L)\int_a^b u$$

En particular, $(L)\displaystyle\int_a^b (u - f) = 0$. Puesto que $u - f = 0$

Corolario 4.1. Sea f una función medible, no negativa y acotada en E. Si $\int_E f = 0$, entonces $f(x) = 0$ en casi todas partes en E.

El Corolario (4.1) y la relación (4.4) implican que $\ell = f = u$ en casi todas partes en $[a, b]$. Por consiguiente, f es medible y por (4.5) se concluye que

$$(R) \int_a^b f = (L) \int_a^b f$$

lo cual completa la prueba.

Hemos probado que cada función Riemann integrable es también Lebesgue integrable. Si embargo, el resultado inverso no se cumple. En efecto, la función de Dirichlet es Lebesgue integrable pero no Riemann integrable; como veremos a continuación.

Ejemplo 4.1 (La función de Dirichlet). Definimos la función $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Puesto que el conjunto de los números racionales en $[0; 1]$, es numerable, su medida es cero. Así, f es la función cero en casi todas partes en $[0; 1]$. Se sigue que f es Lebesgue integrable con integral igual a cero. Si embargo, se muestra que f no es Riemann integrable.

Así la integral de Lebesgue es una verdadera generalización de la integral de Riemann.

4.2. Caracterizaciones de la integral de Riemann y la integral de Lebesgue

Proposición 4.1. Sea f una función medible no negativa en E, entonces

$$\int_E f = 0$$

si y solo si, $f = 0$ casi en todas partes en E.

Lema 4.1. Sean $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$, sucesiones de funciones, cada una de las cuales son integrables en E, tal que $\{\varphi_n\}$ es creciente mientras que $\{\psi_n\}$ es decreciente en E.
Supongamos que la función f en E tiene la propiedad

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n$$

en E para todo n.
Si

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (\psi_n - \varphi_n) = 0,$$

entonces

$$\{\varphi_n\} \longrightarrow f \ \text{ puntualmente casi en todas partes en } E,$$
$$\{\psi_n\} \longrightarrow f \ \text{ puntualmente casi en todas partes en } E,$$

f es integrable sobre E.

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n = \int_E f \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty}\int_E \psi_n = \int_E f$$

Demostración: Para $x \in E$, definimos

$$\varphi^*(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) \qquad \text{y} \qquad \psi^*(x) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(x)$$

Las funciones φ^* y ψ^* se encuentran correctamente definidas puesto que sucesiones monótonas de números reales extendidos convergen a un número real extendido y ellos son medibles puesto que cada una es el límite puntual de una sucesión de funciones medibles. Tenemos las desigualdades

$$\varphi_n \leq \varphi^* \leq f \leq \psi^* \leq \psi_n \quad \text{en } E \text{ para todo } n. \tag{4.6}$$

Por la monotonicidad y linealidad de la integral de funciones medibles no negativas,

$$0 \leq \int_E (\psi^* - \varphi^*) \leq \int_E (\psi - \varphi) \quad ; \quad \text{para todo } n$$

asi que

$$0 \leq \int_E (\psi^* - \varphi^*) \leq \lim_{n\to\infty}\int_E (\psi_n - \varphi_n) = 0$$

Puesto que $\psi^* - \varphi^*$ es una función medible no negativa y $\int_E (\psi^* - \varphi^*) = 0$ la Proposición (4.1) asegura que $\psi^* = \varphi^*$ casi en todas partes en E. Pero $\varphi^* \leq f \leq \psi^*$ en E. Por consiguiente

$$\{\varphi_n\} \longrightarrow f \qquad \text{y} \qquad \{\psi_n\} \longrightarrow f$$

puntualmente casi en todas partes en E. De este modo, f es medible.

Seguidamente puesto que $0 \leq f - \varphi_1 \leq \psi_1 - \varphi_1$ en E y ψ_1, φ_1 son integrables sobre E, inferimos del criterio de la comparación de la integral que f es integrable sobre E. De la desigualdad (4.6) deducimos que para todo n,

$$0 \leq \int_E \psi_n - \int_E f = \int_E (\psi_n - f) \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n)$$

y

$$0 \leq \int_E f - \int_E \varphi_n = \int_E (f - \varphi_n) \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n)$$

y por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n = \int_E f = \lim_{n\to\infty}\int_E \psi_n$$

□

Teorema 4.1. Sea f una función acotada en un conjunto de medida finita E. Entonces f es Lebesgue integrable sobre E si y solo si, es medible.

Demostración: Probemos que si f es una función medible acotada en un conjunto de medida finita E entonces f es Lebesgue integrable sobre E.

En efecto, sea n un número natural. Por el *Lema de aproximación simple*, con $E = \dfrac{1}{n}$, existen dos funciones simples φ_n y ψ_n definidos en E para los cuales

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \ \text{ en } E$$

y

$$0 \leq \psi_n - \varphi_n \leq \frac{1}{n} \ \text{ en } E$$

por la monotonicidad y linealidad de la integral para funciones simples,

$$0 \leq \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n = \int_E [\psi_n - \varphi_n] \leq \frac{1}{n} m(E)$$

sin embargo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{ínf}\left\{ \int_E \psi \Big/ \psi \text{ simple}, \psi \geq f \right\} - \sup\left\{ \int_E \varphi \Big/ \varphi \text{ simple}, \varphi \leq f \right\} \\ &\leq \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n \\ &\leq \frac{1}{n} m(E) \end{aligned}$$

Estas desigualdades se cumplen para cada número natural n y $m(E)$ finito. Por consiguiente, las integrales de Lebesgue superior e inferior son iguales y así la función f es integrable sobre E.

Para el resultado recíproco. supongamos que f es Lebesgue integrable. De la igualdad de las integrales de Lebesgue superior e inferior concluimos que existen sucesiones de funciones simples $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ para las cuales

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \ \text{ en } E \text{ para todo } n,$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_E [\psi_n - \varphi_n] = 0$$

Puesto que el máximo y el mínimo de un par de funciones simples son nuevamente simples, usando la monotonicidad de la integración y posiblemente reemplazando φ_n por $\max_{1\leq i\leq n} \varphi_i$ y ψ_n por $\min_{1\leq i\leq n} \psi_i$, podemos suponer que $\{\varphi_n\}$ es creciente y $\{\psi_n\}$ es decreciente. Por el Lema (4.1) precedente, $\{\varphi_n\} \longrightarrow f$ puntualmente casi en todas partes en E. Por consiguiente, f es medible puesto que es el límite puntual casi en todas partes de una sucesión de funciones medibles. $\square$

Al inicio del resultado central de este trabajo de investigación, mostramos que si una función acotada en el intervalo cerrado, acotado $[a, b]$ es Riemann integrable sobre $[a, b]$, es Lebesgue integrable sobre $[a, b]$ y las integrales son iguales. Podemos inferir del Teorema (4.1) que si una función acotada en $[a, b]$ es Riemann integrable, entonces es medible. El siguiente teorema es mucho mas preciso.

Teorema 4.2 (Lebesgue). Sea f una función acotada en el intervalo cerrado, acotado $[a, b]$. Entonces f es Riemann integrable sobre $[a, b]$ si, y solo si, el conjunto de puntos en $[a, b]$ para los cuales f no es continua tiene medida cero.

Demostración: Primeramente supongamos que f es Riemann integrable. Podemos inferir de la igualdad de las integrales de Riemann superior e inferior sobre $[a, b]$ que existen sucesiones de particiones $\{P_n\}$ y $\{P'_n\}$ de $[a, b]$ para las cuales

$$\lim_{N\to\infty}\Big[U(f,P_n) - L(f,P'_n)\Big] = 0$$

donde $U(f, P_n)$ y $L(f, P'_n)$ son las sumas de Darboux superior e inferior respectivamente. Puesto que, bajo un refinamiento, las sumas inferiores de Darboux crecen y las sumas superiores de Darboux decrecen, posiblemente reemplazando cada P_n por un refinamiento común de $P_1, P_2, \dots P_n, P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ podemos asumir que cada P_{n+1} es un refinamiento de P_n y $P_n = P_{n'}$. Para cada índice n, definimos φ_n siendo la función de paso inferior asociada con f con respecto a P_n, esto es, que coincida con f en los puntos de la partición de P_n y que en cada intervalo abierto determinado por P_n tenga valor constante igual al ínfimo de f en aquel intervalo. Definimos la función de paso superior ψ_n de una manera similar. Por definición de las sumas de Darboux,

$$L(f,P_n) = \int_a^b \varphi_n \qquad \text{y} \qquad U(f,P_n) = \int_a^b \psi_n \qquad \text{para todo } n.$$

Entonces $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ son sucesiones de funciones integrables tal que para cada indice n, $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ en E. Ademas, la sucesión $\{\varphi_n\}$ es creciente y $\{\psi_n\}$ es decreciente, ya que cada P_{n+1} es un refinamiento de P_n. Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b(\psi_n - \varphi_n) = \lim_{n\to\infty}[U(f,P_n) - L(f,P_n)]$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b(\psi_n - \varphi_n) = 0.$$

Inferimos del Lema (4.1) que

$$\{\varphi_n\} \longrightarrow f \qquad \text{y} \qquad \{\psi_n\} \longrightarrow f$$

puntualmente casi en todas partes en $[a, b]$.

El conjunto E de todos los puntos x para los cuales o bien $\{\psi_n(x)\}$ o bien $\{\varphi_n(x)\}$ no convergen a $f(x)$ tiene medida cero. Sea E_0 la unión de E y el conjunto de todos los puntos de partición de los P_n. Como es la unión de un conjunto de medida cero y un conjunto numerable, $m(E_0) = 0$. Afirmamos que f es continua en cada punto de $E \sim E_0$.

En efecto, sea $x_0 \in (E \sim E_0)$. Para mostrar que f es continua en x_0, sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $\{\psi_n(x_0)\}$ y $\{\varphi_n(x_0)\}$ convergen a $f(x_0)$, podemos elegir un número natural n_0 para el cual,

$$f(x_0) - \varepsilon < \varphi_{n_0}(x_0) \leq f(x_0) \leq \psi_{n_0}(x_0) < f(x_0) + \varepsilon \tag{4.7}$$

Puesto que x_0 no es un punto de partición de P_{n_0}, podemos elegir $\delta > 0$ tal que el intervalo abierto $\langle x_0 - \delta; x_0 + \delta\rangle$ esta contenido en el intervalo abierto I_{n_0} determinado por P_{n_0} el cual contiene a x_0.
Esta contención implica que

$$\text{si } |x - x_0| < \delta \Rightarrow \varphi_{n_0}(x_0) \leq \varphi_{n_0}(x) \leq f(x) \leq \psi_{n_0}(x) \leq \psi_{n_0}(x_0) \tag{4.8}$$

De las desigualdades (4.7) y (4.8) inferimos que

$$\text{si } |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(x_0)| < \delta.$$

Así, f es continua en x_0.

Resta probar el resultado recíproco. Supongamos que f es continua casi en todos los puntos en $[a, b]$. Sea $\{P_n\}$ cualquier sucesión de particiones de $[a, b]$ para el cual

$$\lim_{n\to\infty} \text{espacio } P_n = 0$$

afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0 \tag{4.9}$$

Si se verifica (4.9), entonces a partir de la siguiente estimación para las integrales de Riemann inferior y superior,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dxf - \underline{\int_a^b} f(x)dxf \leq [U(f, P_n) - L(f, P_n)] \text{ para todo } n.$$

concluimos que f es integrable sobre $[a, b]$. Para cada n, sea φ_n y ψ_n funciones de paso inferior y superior asociadas a f sobre la partición P_n. Probar (4.9) es probar que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [\psi_n - \varphi_n] = 0 \tag{4.10}$$

La integral de Riemann de una función escalonada es la integral de Lebesgue. Ademas dado que la función f es acotada en el conjunto acotado $[a, b]$, las sucesiones $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ están acotadas uniformemente en $[a, b]$. Por lo tanto por el teorema de convergencia acotada, para verificar (4.10) basta con demostrar que $\{\varphi_n\} \longrightarrow f$ y $\{\psi_n\} \longrightarrow f$ puntualmente en el conjunto de puntos en $\langle a; b\rangle$ en el cual f es continuo y que no son puntos de partición de ninguna partición P_n. Sea x_0 tal punto. Mostraremos que,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_0) = f(x_0) \quad \text{ y } \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n(x_0) = f(x_0) \tag{4.11}$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, tal que

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta. \tag{4.12}$$

Escogemos un indice N para el cual el espacio $P_n < \delta$ si $n \geq N$ y I_n es el intervalo abierto de partición determinado por P_n, que contiene a x_0, entonces $I_n \subseteq \langle x_0 - \delta; x_0 + \delta\rangle$. Inferimos de (4.12) que

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi_n(x_0) < f(x_0) < \psi_n(x_0) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

y por tanto

$$0 \leq \psi_n(x_0) - f(x_0) < \varepsilon \quad \text{y} \quad 0 \leq f(x_0) - \varphi_n(x_0) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Así (4.11) se sostiene y esto completa la prueba. □

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

1. Se logró establecer las condiciones para determinar que la integral de Lebesgue y la integral de Riemann de una función existen y coinciden en un dominio dado de la función, mediante una función real acotada medible en un intervalo cerrado y que tiene medida de Lebesgue 0 en los puntos de discontinuidad.
2. Se ha efectuado un desarrollo detallado de la integral de Riemann de una función usando particiones.
3. Se ha realizado un desarrollo detallado de la integral de Lebesgue, presentando y demostrando: el teorema de la convergencia monótona, lema de Fatou's y el teorema de la convergencia dominada.
4. Se ha realizado la comparación y caracterización de la integral de Riemann y la integral de Lebesgue a través bases teóricas y ejemplos, los cuales muestran sus diferencias.

CAPÍTULO VI
RECOMENDACIONES

1. La relación entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue ha sido realizado para funciones medibles en un dominio de $\mathbb{R}$, quedando la posibilidad de realizar esta relación para funciones de varias variables.
2. La relación entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue ha sido realizado para funciones propias, seria recomendable establecer relaciones para integrales impropias.
3. Se recomienda utilizar las relaciones entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue en el estudio de la serie de Fourier, la transformada de Fourier y otros temas; ya que estos tienen aplicaciones en la física y en la ingeniería.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Richard F. Bass. *Real analysis for graduate students*. Createspace Ind Pub, version 3.1 edition, 2016.

[2] H.L. Royden and P.M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Prentice Hall, fourth. edition, 2010.

[3] Elon lages lima. *Análisis Real*, volume I. IMCA, 1997.

[4] Hasser La Salle y A. Sullivan. *Análisis Matemático 1*, volume 1. 20 edition, 1986.

[5] Roger Metzger. *Teoria de la medida en* $\mathbb{R}$. IMCA. 2002.

[6] Gerald B. Folland. *Real Analysis*. John Wiley & Sons, INC, second edition, 1999.

[7] Paul R. Halmos. *Measure Theory*. Springer - Verlag, 1970.