UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

EL TEOREMA DE HAHN BANACH EN LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONALES LINEALES ACOTADOS SOBRE EL ESPACIO $C[a, b]$

TESIS

PRESENTADO POR:

OMAR ZIF CCAMA AROCUTIPA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PROMOCIÓN 2010

PUNO-PERÚ

2016

A mis padres: Eulogio Arturo Ccama Baca y Nilda Julia Arocutipa Arohuanca; a ellos por concebirme, formarme y educarme. A mis hermanos: Felix Adolfo, Brayan Arturo y a la más engreída de todos mi hermana Liseth Paula, a ellos por estar siempre a mi lado y alegrarme la vida. A la memoria de mi abuelo Segundo Arocutipa Ccama.

Agradecimientos

- Agradezco profundamente de la Universidad Nacional del Altiplano y a la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas por darme una oportunidad de ser profesional.
- Agradezco a todos mis maestros de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas por sus enseñanzas y conocimientos compartidos.
- Agradezco a Julio Cesar Villalta Pacori por ser un maestro y más que maestro un amigo que supo inculcarme su sabiduría.

Índice general

Resumen

El objetivo de la investigación es la representación de funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a, b]$; donde $[a, b]$ es un intervalo compacto fijado. Esta representación se efectuará en términos de la integral de Riemann – Stieltjes, que es una generalización de la integral de Riemann.

Para la representación de funcionales lineales acotados sobre $C[a, b]$, se debe hacer uso del Teorema de Hahn – Banach, el cual permite extender funcionales lineales. Es por esta razón el estudio de dicho teorema.

Palabras Clave: Funcional lineal, Integral de Riemann - Stieltjes, Teorema de Hahn Banach, Teorema de Riesz.

Abstract

The objective of the research is the representation of bounded linear functional on the space $C[a,b]$; where $[a,b]$ is a compact fixed interval. This representation will be made in terms of the integral of Riemann - Stieltjes, which is a generalization of the Riemann integral.

For the representation of linear bounded functional on $C[a,b]$ should make use of Theorem Hahn - Banach, which allows to extend functional linear. For this reason the study of the theorem.

Keywords: Linear functional, integral of Riemann - Stieltjes, Theorem Hahn - Banach, Theorem Riesz.

Introducción

El Teorema de Hahn Banach es un teorema de extensión de funcionales lineales, su estudio nos invita el manejo de nuevas herramientas matemáticas del Análisis Funcional y el Análisis Real. El Teorema de Hahn Banach es considerado como uno de los cuatro pilares del Análisis Funcional junto con el teorema de Banach - Steinhaus, de la aplicación abierta y del grafo cerrado.

La integral de Riemann - Stieltjes juega un papel muy importante en la representación de funcionales lineales; tal es así, en el teorema de representación de Riesz. Este trabajo está dividido en dos capítulos:

En el PRIMER CAPITULO, presentamos los espacios normados y los espacios de Banach, nuestro interés está en definir que es un espacio de Banach y de que propiedades goza dicho espacio. También hablamos del dual de un espacio normado que viene hacer un espacio de Banach y definimos el concepto de funcional lineal.

En el SEGUNDO CAPITULO, definimos los resultados del trabajo de investigación como el Teorema de Hahn Banach, la integral de Riemann – Stieltjes y concluimos con el teorema de representación de Riesz.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema, Antecedentes y Objetivos de la Investigación

1.1. Planteamiento del Problema

A inicios del ciclo XX se gestaba el análisis funcional como el marco abstracto adecuado para solucionar una serie de problemas en Análisis. Uno de los pilares del análisis funcional es el teorema de Hahn – Banach, el cual se publicó en el año de 1929 como una generalización del teorema de Hahn publicado en el año de 1927. El teorema de Hahn – Banach es primordial en el análisis funcional y en las matemáticas; por tal motivo es necesario la comprensión, demostración y su aplicación para representar funcionales lineales acotados en $C[a, b]$.

Supongamos que E es un espacio vectorial sobre el campo F, M es un subespacio vectorial de E y $f : M \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal. No es difícil construir una extensión lineal g de f a todo E. Basta tomar una base algebraica de M y completarla hasta obtener una base de E; por ultimo, se define g como f en M, y arbitrariamente en los nuevos vectores base, y se extiende linealmente a la variedad lineal generada por la nueva base, que es E. Lo que no es tan fácil es conseguir controlar la extensión lineal a E. Si ya había cierto control en la aplicación lineal original. Esto es lo que hace el Teorema de Hahn – Banach.

Se sabe que si X es un espacio normado sobre un campo F. El espacio dual $X*$ de X, consiste de todos los funcionales lineales acotados definidos en X, es un espacio de Banach sobre F independientemente de si X lo fuera o no. En algunas aplicaciones es útil, conocer la forma general de los funcionales lineales acotados en espacios de importancia práctica.

Problema General

Por las razones expuestas anteriormente, el trabajo de investigación plantea responder la siguiente interrogante:

¿Cuál es la representación de los funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a, b]$ mediante el Teorema de Hahn Banach?

Problemas Específicos

- ¿En qué medida el Teorema de Hahn – Banach ayudará a representar los funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a, b]$?
- ¿Cuál es el rol que desarrolla la integral de Riemann Stieltjes en la representación de los funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a, b]$?
- ¿Cómo se aplica el Teorema de Hahn Banach y la integral de Riemann Stieltjes para la representación de los funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a, b]$?

1.2. Justificación de la investigación

La investigación generaliza la representación de funcionales lineales acotados en el espacio $C[a, b]$, mediante la utilización del Teorema de Hahn Banach; en donde cumple un rol muy importante la integral de Riemann Stieltjes en la representación de los funcionales lineales acotados en $C[a, b]$.

El desarrollo de esta representación permite estudiar un nuevo concepto de integral el cual no se ha mencionado en los cursos de formación de pre grado; su estudio invita a estudiar un nuevo tipo de integral que viene hacer una generalización de la integral común de Riemann.

La importancia del teorema de Hahn – Banach no se limita al estudio de extensión de funcionales, más aun su estudio estará dirigido a muchas ramas; como mecánica cuántica, economía, procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales parciales, series de Fourier entre otros. El proyecto de investigación se origina en la inquietud de profundizar conocimientos teóricos en el análisis Funcional

1.3. Antecedentes de la investigación

Los antecedentes relacionados al trabajo de investigación son:

- **Zepeda Claudia (2012)**. *El teorema de representación de Riesz.* En este artículo se estudia el teorema de Riesz para el caso de funcionales lineales en $C[a, b]$, utilizando la integral de Riemann – Stieltjes.

- **Cabello Píñar Juan Carlos (Granada 2009)**. *Análisis Funcional.* Artículo publicado en el año 2009, en donde se hace el estudio de los espacios de Banach para luego aplicarlo a un grupo variado de ejemplos; en particular se define la integral de Riemann – Stieltjes para identificar el dual de $C[a, b]$ con $NVB[a, b]$ al espacio cociente de las funciones de variación acotadas normalizado a través del teorema de

Riesz .

- **Corach G, Andruchov E.(1997)**. *Notas de análisis funcional.* Publicación realizada en el año 1997 el cual detalla los espacios normados y los espacios de Banach para luego exponer el teorema de Hahn – Banach para el caso real y complejo los cuales son usados para ciertas aplicaciones en el espacio de funciones continuas $C[a, b]$.

- **Villanueva Díez Ignacio (1998)**. *Análisis funcional y variable compleja.* Artículo que detalla los espacios normados y de Banach las cuales se usarán para el estudio del trabajo final.

- **Valé Sánchez Jorge Alberto (1983)**. *Una construcción de la integral de Riemann Stieltjes y sus aplicaciones.* Tesis que muestra el desarrollo de la integral de Riemann – Stieltjes el cual permitirá entender detalladamente ésta integral que viene hacer una herramienta para la representación de funcionales.

- **Kreyszig Erwin. (1978)**. *Introductory functional analysis with applications.* Texto en el cual se basa el trabajo de investigación, se menciona los espacios normados, espacios de Banach y finalmente el teorema de Hahn – Banach para su aplicación en la representación de funcionales lineales acotados en $C[a, b]$.

1.4. Objetivos de la investigación

1.4.1. Objetivo general

Desarrollar la representación de los funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a,b]$ mediante el Teorema de Hahn Banach.

1.4.2. Objetivos específicos

- Analizar el Teorema de Hahn - Banach para la representación general de los funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a,b]$.
- Analizar el rol que cumple la integral de Riemann Stieltjes para la representación de los funcionales acotados sobre el espacio $C[a,b]$.
- Aplicar el Teorema de Hahn – Banach y la integral de Riemann Stieltjes para la representación de los funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a,b]$.

1.5. Hipótesis de la investigación

1.5.1. Hipótesis general

Determinación de la representación de los funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a,b]$ mediante el teorema de Hahn – Banach.

1.5.2. Hipótesis específicos

- Mediante el Teorema de Hahn – Banach se representa los funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a,b]$.
- La integral de Riemann Stieltjes cumple un rol muy importante en la representación de los funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a,b]$.
- Aplicación del Teorema de Hahn – Banach y la integral de Riemann Stieltjes en la representación de los funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a,b]$.

Capítulo 2

ESPACIOS NORMADOS Y ESPACIOS DE BANACH

2.1. Espacio Métrico

En este capitulo estudiaremos las propiedades de los espacios métricos y la convergencia de una sucesión de Cauchy en un espacio métrico, para formar un espacio métrico completo.

2.1.1. Definición (Espacio métrico, métrica)

Un espacio métrico es una par (X, d), donde X es una conjunto y d es una métrica definida en X (o función distancia en X), ésto es, una función definida sobre $X \times X$ tal que para todo $x, y, z \in X$ se tiene:

$(M1)$ d es de valor real, finito y no negativo

$(M2)$ $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$

$(M3)$ $d(x, y) = d(y, x)$

$(M4)$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Nota: De $(M4)$ obtenemos por inducción la generalización de la desigualdad triangular

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

Nota: Un subespacio $(Y, \tilde{d})$ de (X, d) es obtenido si consideramos un subconjunto $Y \subset X$ y restringimos d a $Y \times Y$; así la métrica en Y es la restricción

$$\tilde{d} = d|_{Y \times Y}$$

$\tilde{d}$ es llamado la métrica inducida en Y por d.

Ejemplos de espacios métricos:

1.1-2 La recta real $\mathbb{R}$. Éste es el conjunto de todos los números reales, viene a ser un espacio métrico con la métrica usual definida por:

$$d(x, y) = |x - y|$$

1.1-3 El plano Euclideano $\mathbb{R}^2$. El espacio métrico $\mathbb{R}^2$, llamado también plano Euclideano, se obtiene si consideramos el conjunto de pares ordenados de números reales $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$, etc., y la métrica Euclideana definida por:

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$$

Nota: Podemos obtener otro espacio métrico, si consideramos el mismo conjunto anterior pero con otra métrica d_1 definida por:

$$d_1(x, y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|$$

Esto ilustra el importante hecho que de un conjunto dado, podemos obtener varios espacios métricos eligiendo métricas diferentes.

1.1-4 El espacio Euclideano $\mathbb{R}^3$. Éste espacio métrico se obtiene del conjunto de ternas ordenadas de números reales $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$; $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, etc., y la métrica Euclideana definida por:

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}$$

Los ejemplos anteriores son casos particulares del espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$.

1.1-5 El espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$. Éste espacio será un espacio métrico si se toma el conjunto de todas as n-uplas ordenadas de números reales $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$; $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, etc., y la métrica Euclideana definida por:

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2}$$

1.1-6 El espacio unitario $\mathbb{C}^n$. El espacio unitario n-dimencional $\mathbb{C}^n$, es un espacio métrico si consideramos todas las n-uplas ordenadas de números complejos con la métrica definida por:

$$d(x, y) = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2}$$

Nota: Cuando $n = 1$ este espacio resulta ser el plano complejo $\mathbb{C}$ con la métrica usual definida por:

$$d(x, y) = |x - y|$$

1.1-7 El espacio de sucesiones L^∞. Sea X el conjunto de todos las sucesiones acotadas de números complejos, es decir, todo elemento de X es una sucesión compleja $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ ó $x = (\xi_j)$ tal que para todo $j = 1, 2, \ldots$ se tiene

$$|\xi_j| \leq C_x$$

donde C_x es un número real que depende de x, pero no depende de j. Consideremos la métrica definida por:

$$d(x,y) = \sup_{j\in\mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j|$$

donde $y = (\eta_j) \in X$ y $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

El espacio métrico así obtenido es denotado por L^∞.

1.1-8 El espacio de funciones $C[a,b]$. Consideremos X como el conjunto de todas las funciones de valor real $x, y, \ldots$ que son funciones de una variable real independiente t y son definidas y continuas en un intervalo cerrado $J = [a,b]$.

Consideremos la métrica definida por

$$d(x,y) = \max_{t\in J} |x(t) - y(t)|$$

nosotros obtenemos un espacio métrico que es denotado por $C[a,b]$; todo elemento de $C[a,b]$ es una función.

1.1-9 El espacio métrico discreto. Sea X un conjunto y sea d la métrica discreta para X. Definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ si } x = y \\ 1, \text{ si } x \neq y \end{cases}$$

Este espacio (X,d) es llamado un espacio métrico discreto.

1.1-10 Espacio de funciones acotadas $B(A)$. Por definición, cada elemento $x \in B(A)$ es una función definida y acotada en el conjunto A, y la métrica esta definida por

$$d(x,y) = \sup_{t\in A} |x(t) - y(t)|$$

En el caso de que $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$, se escribe $B[a,b]$ por $B(A)$.

1.1-11 El espacio $BV[a,b]$ de funciones de variación acotada. Sea $BV[a,b]$ la clase de todas las funciones de variación acotada sobre $[a, b]$, es decir todo f para el cual la variación total $Var(f) = sup\sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$ es finita, donde el supremo se toma sobre todas las particiones $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Consideremos la métrica definida por

$$d(f, g) = Var(f - g)$$

2.2. Convergencia, Sucesión de Cauchy, Completitud

En un espacio métrico (X, d), para definir la convergencia de una sucesión se usa la métrica d en ese espacio.

2.2.1. Definición (Convergencia de una sucesión, Límite)

Una sucesión (x_n) en un espacio métrico (X, d) es convergente en X, si existe un $x \in X$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$d(x_n, x) < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

El punto x se llama el límite de (x_n) y esto se denota por

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

o, simplemente $x_n \to x$.

Diremos que (x_n) converge a x o se tiene límite x. Si (x_n) no es convergente, diremos que es divergente.

Nota: El límite de una sucesión convergente debe ser un punto del espacio X, por ejemplo, sea X el intervalo abierto $]0, 1[$ en $\mathbb{R}$ con la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$. Entonces la sucesión $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ no es convergente, ya que 0, es el punto que la sucesión converge y no esta en X.

2.2.2. Definición (Diámetro, Sucesión Acotada)

Sea (X, d) un espacio métrico, un subconjunto no vacío $M \subset X$ es acotado si su diámetro

$$\delta(M) = \sup_{x,y \in M} d(x, y)$$

es finito. Y llamamos una sucesión (x_n) en X una sucesión acotada cuando el conjunto de sus términos es un subconjunto acotad de X.

2.2.3. Teorema (Acotación, Límite)

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico. Entonces, una sucesión convergente en X es acotado y su límite es único.

DEMOSTRACIÓN Supongase que $x_n \to x$. Entonces, tomando $\varepsilon = 1$, podemos encontrar un N tal que $d(x_n, x) < 1$ para todo $n > N$. Por lo tanto por la desigualdad triangular $(M4)$, Sec. 1.1, para todo tenemos $d(x_n, x) < 1 + a$ donde

$$a = max\{d(x_1, x), \ldots, d(x_n, x)\}$$

Esto prueba que (x_n) es acotado. Ahora demostraremos la unicidad del límite. Consideremos que $x_n \to x$ y $x_n \to z$, obtenemos de $(M4)$

$$0 \leq d(x, z) \leq d(x, x_n) + d(x_n, z) \to 0 + 0$$

luego, $0 \leq d(x, z) \leq 0$, esto quiere decir $d(x, z) = 0$. Ahora por $(M2)$ se tiene $x = z$ esto prueba la unicidad del límite.

2.2.4. Definición (Sucesión de Cauchy, Completitud)

Una sucesión (x_n) en un espacio métrico $X = (X, d)$ es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{para todo } m, n > N$$

El espacio X es completo si toda sucesión de Cauchy en X converge.

Nota: El recíproco no es verdadero para un espacio métrico arbitrario, ya que existe espacios métricos que contienen una sucesión de Cauchy, pero no tienen elementos que son el límite.

2.2.5. Teorema (Sucesión Convergente)

Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.

Demostración Si $x_n \to x$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n > N$$

por lo tanto por la desigualdad triangular obtenemos para $m, n > N$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Esto prueba que (x_n) es de Cauchy.

2.3. Ejemplos

1.3-1 Completitud de $\mathbb{R}^n$. El espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$ es completo.

DEMOSTRACIÓN Recordemos que la métrica en $\mathbb{R}^n$ (la métrica Euclideana) está definido por

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \eta_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $x = (\xi_j)$ y $y = (\eta_j)$. Consideremos una sucesión de Cauchy (x_m) en $\mathbb{R}^n$, escribiendo $x_m = (\xi_!^{(m)}, ..., \xi_n^{(m)})$. Ya que (x_m) es de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que

$$d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad (m, r > N) \tag{2.1}$$

Elevando al cuadrado obtenemos: $\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right)^2 < \varepsilon^2$

Ahora tenemos para $m, r > N$ y $j = 1, ..., n$

$$\left(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right)^2 < \varepsilon^2 \quad \text{y} \quad \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right| < \varepsilon$$

Esto demuestra que para cada j fijo, $(1 \leq j \leq n)$, la sucesión $\left(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, ...\right)$ es una sucesión de Cauchy de números reales. Esto converge por la completitud de números reales, diremos que, $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ cuando $m \to \infty$. Usando eso n límites, definimos $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Claramente se observa que $x \in \mathbb{R}^n$. De la ecuación (2.1), con $r \to \infty$,

$$d(x_m, x) \leq \varepsilon \quad (m > N)$$

Esto prueba que x es el límite de (x_m) y prueba que la completitud de $\mathbb{R}^n$ porque (x_m) fue una sucesión de Cauchy arbitraria.

1.3-2 Completitud de L^∞. El espacio L^∞ es completo.

DEMOSTRACIÓN Sea (x_m) una sucesión de Cauchy en el espacio L^∞, donde $x_m =$

$\left(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, ...\right)$. Ya que la métrica en L^∞ está dado por

$$d(x,y) = \sup_j |\xi_j - \eta_j|$$

donde $x = (\xi_j)$, $y = (\eta_j)$ y (x_m) es de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que para todo $m.n > N$,

$$d(x_m, x_n) = \sup_j \left|\xi_j^{(m)} - \eta_j^{(n)}\right| < \varepsilon$$

Para todo j fijo, tenemos

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| < \varepsilon \quad (m, n > N) \tag{2.2}$$

Por lo tanto para todo j fijo, la sucesión $\left(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, ...\right)$ es una sucesión de Cauchy de números. Este converge por la completitud de $\mathbb{C}$, diremos que $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ cuando $m \to \infty$. Usando esos infinitos límites $\xi_1, \xi_2, ...$, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ y probamos que $x \in L^\infty$ y $x_m \to x$. De la ecuación (2.2) con $n \to \infty$ tenemos

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| \leq \varepsilon \quad (m > N) \tag{2.3}$$

Ya que $x_m = (\xi_j^{(m)}) \in L^\infty$, existe un número real k_m tal que $\left|\xi_j^{(m)}\right| \leq k_m$ para todo j.

Por lo tanto por la desigualdad triangular

$$|\xi_j| \leq \left|\xi_j - \xi_j^{(m)}\right| + \left|\xi_j^{(m)}\right| \leq \varepsilon + k_m \quad (m > N)$$

la desigualdad se cumple para todo j, y el lado derecho no involucra j.

Por lo tanto (ξ_j) es una sucesión acotada de números. Esto implica que $x = (\xi_j) \in L^\infty$. También, de (2.3) obtenemos

$$d(x_m, x) = \sup_j \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| \leq \varepsilon \quad (m > N)$$

Esto demuestra que $x_m \to x$. Ya que (x_m) fue una sucesión de Cauchy arbitraria, L^∞ es completo.

1.3-3 Completitud de $C[a,b]$. El espacio de funciones $C[a,b]$ es completo; aquí $[a,b]$ es cualquier intervalo cerrado en $\mathbb{R}$.

Demostración Sea (x_m) una sucesión de Cauchy en $C[a,b]$. Entonces dado un $\varepsilon > 0$ existe un N tal que para todo $m, n > N$ se tiene

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \tag{2.4}$$

donde $J = [a,b]$. Por lo tanto para un fijo $t = t_0 \in J$,

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon \quad (m, n > N)$$

Esto prueba que $(x_1(t_0), x_2(t_0), ...)$ es una sucesión de Cauchy de números reales. Ya que $\mathbb{R}$ es completo, la sucesión converge, diremos, $x_m(t_0) \to x(t_0)$ cuando $m \to \infty$. De esta manera podemos asociar cada $t \in J$ a un único número real $x(t)$. Esto define una función x sobre J, y prueba que $x \in C[a,b]$ y $x_m \to x$. De la ecuación (2.4) con $n \to \infty$ tenemos

$$\max_{t \in J} |x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon \qquad (m > N)$$

Por lo tanto para todo $t \in J$

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon \qquad (m > N)$$

Esto prueba que $(x_m(t))$ converge a $x(t)$ uniformemente en J.Ya que los x_m son continuos en J y la convergencia es uniforme, el límite de la función x es continua en J, como se sabe del cálculo.

Por lo tanto $x \in C[a,b]$. También $x_m \to x$. Esto prueba la completitud de $C[a,b]$.

Ejemplos de espacios métricos incompletos.

1.3-4 Espacio $\mathbb{Q}$. El conjunto de todo los números racionales no es completo.

1.3-5 Polinomios. Sea X el conjunto de todos los polinomios considerados como funciones de t en algún intervalo cerrado finito $J = [a, b]$ y define una métrica d en X por

$$d(x, y) = \underset{t \in J}{max} |x(t) - y(t)|$$

Este espacio métrico (X, d) no es completo. En efecto, un ejemplo de una sucesión de Cauchy sin límite en X está dado por una sucesión de polinomios que convergen uniformemente en J a una función continua, no a un polinomio.

1.3-6 Funciones continuas. Sea X el conjunto de todos las funciones continuas de valor real definidas en $J = [0, 1]$, y sea

$$d(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt$$

Este espacio métrico (X, d) no es completo.

DEMOSTRACIÓN Las funciones x_m en la figura forman una sucesión de Cauchy porque $d(x_m, x_n)$ es el área del triángulo en $fig(b)$, y para todo $\varepsilon > 0$,

$$d(x_m x_n) < \varepsilon \quad \text{cuando} \;\; m, n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Demostraremos que esta sucesión de Cauchy no es convergente, tenemos

$$x_m(t) = 0 \;\; si \;\; t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \qquad x_m(t)\, si\, t \in [a_m, 1]$$

donde $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$. Por lo tanto, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &= \int_0^1 |x_m(t) - x(t)|\, dt \\ &= \int_0^{1/2} |x(t)|\, dt + \int_{1/2}^{a_m} |x_m(t) - x(t)|\, dt + \int_{a_m}^1 |1 - x(t)|\, dt \end{aligned}$$

Ya que los integrandos son positivos, lo es cada integral en la derecha. Por lo tanto $d(x_m, x) \to 0$ esto implica que cada integral se aproxima a cero y ya que x es continua, tenemos

$$x(t) = 0\, si\, t \in [0, \frac{1}{2} > \quad x(t) = 1\, si\, t \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$$

pero esto es imposible para una función continua. Por lo tanto (x_m) no converge , esto es, no tiene un límite en X. Esto prueba que X no es completo.

2.4. ESPACIO VECTORIAL

2.4.1. Definición (Espacio Vectorial)

Un espacio vectorial (o espacio lineal) sobre un cuerpo K es un conjunto no vacío X de elementos $x, y, ...$ llamados vectores junto con dos operaciones algebraicas. Esas operaciones son llamadas la adición de vectores y la multiplicación de vectores por escalares, esto es, por elementos de K.

La adición de vectores asocia todo par ordenado (x, y) de vectores un vector $x + y$ columnas da suma de x y y, de manera que se tiene las siguientes propiedades. La adición de vectores es conmutativa y asociativa, esto es, para todo vector se tiene

$$x + y = y + x$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

Además, existe un vector 0, llamado el vector cero. y para todo vector x existe un vector $-x$, tal que para todos los vectores tenemos

$$x + 0 = x$$

$$x + (-x) = 0$$

La multiplicación por escalares asocia todo vector x y un escalar α un vector αx, llamado el producto de α y x, de tal manera que todos los vectores x, y y escalares α, β se tiene

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$1x = x$$

y las leyes distributivas

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

De esta definición verificamos que la adición es una aplicación $X \times X \to X$, mientras que la multiplicación por escalares es una aplicación $K \times X \to X$.

Ejemplos

2.4.2. El Espacio $\mathbb{R}^n$

Sea X el conjunto de todas las n-uplas de números reales. Si $x = (\xi_!, ..., \xi_n)$ y $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$, definimos la adición y multiplicación escalar como $x + y = (\xi_1 + \eta_1, ..., \xi_n + \eta_n)$ y $\lambda x = (\lambda\xi_1, ..., \lambda\xi_n)$ donde λ es un escalar. El conjunto X junto con las dos operaciones algebraicas, definidas forman un espacio vectorial, el cual es denotado por $\mathbb{R}^n$.

2.4.3. El Espacio $\mathbb{C}^n$

Este consiste de todas las n-uplas de números complejos $x = (\xi_!, ..., \xi_n)$, $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$, etc., y es un espacio vectorial complejo con las operaciones algebraicas definidas como en el ejemplo anterior, donde ahora $\lambda \in \mathbb{C}$.

2.4.4. El Espacio $C[a, b]$

Cada punto de este espacio es una función continua de valor real sobre $[a, b]$. El conjunto de todas esas funciones forma un espacio vectorial real con las operaciones algebraicas definidas de manera usual:

$$\begin{aligned} (x + y)(t) &= x(t) + y(t) \\ (\alpha x)(t) &= \alpha x(t) \qquad\qquad , \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En efecto, $x + y$ y αx son funciones continuas de valor real definidas sobre $[a, b]$ si x y y son funciones y α es real.

2.4.5. Definición (Subespacio)

Un subespacio de un espacio vectorial X es un subconjunto no vacío Y de X, tal que, para todo $y_1, y_2 \in Y$ y escalares α, β se tiene $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. por lo tanto Y es un espacio vectorial, las dos operaciones algebraicas son inducidas de X.

Nota: Un subespacio especial de X es el subespacio impropio $Y = X$.

Todos los otros subespacios de X ($\neq \{0\}$) son llamados propios.

Otro subespacio especial de un espacio vectorial X es $Y = \{0\}$.

2.4.6. Definición (Combinación Lineal)

Una combinación lineal de vectores $x_1, ..., x_m$ de un espacio vectorial X es una expresión de la forma:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$$

donde los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ son escalares.

2.4.7. Definición (Span)

Para un subconjunto no vacío $M \subset X$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de M es llamado el span de M, y se denota por

$$span\, M$$

obviamente, este es un subespacio Y de X, y diremos que Y es generado por M.

2.4.8. Definición (Independencia Lineal, Dependencia Lineal)

La independencia y dependencia lineal de un conjunto M de vectores $x_1, ..., x_r$ $(r \geq 1)$ es un espacio vectorial X están definidas por la siguiente ecuación

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = 0 \tag{2.5}$$

donde $\alpha_1, ..., \alpha_r$ son escalares. Claramente, la ecuación (2.5) se obtiene para $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$. Si esta es la única r-upla de escalares para que la ecuación (2.5) se cumpla, diremos que el conjunto M es linealmente independiente. M es linealmente dependiente si M no es linealmente independiente, esto es, si (2.5) se cumple para alguna r-upla de escalares, no todos ceros.

Nota: Un subconjunto arbitrario M de X es linealmente independiente si todo subconjunto finito no vacío de M es linealmente independiente.

M es linealmente dependiente si M no es linealmente independiente.

Usaremos el concepto de independencia y dependencia lineal para definir la dimensión de un espacio vectorial, como sigue.

2.4.9. Definición (Base de un Espacio Vectorial)

Sea X un espacio vectorial. Si $dim\,X = n$, una n-upla linealmente independiente de vectores de es una base para X (o base en X). Si $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base para X; todo $x \in X$ tiene una representación única como una combinación lineal de los vectores base:

$$x = \alpha_1 e_! + \cdots + \alpha_n e_n$$

Por ejemplo, una base para $\mathbb{R}^n$ es

$$\begin{aligned} e_! &= (1, 0, 0, ..., 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, ..., 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, ..., 1) \end{aligned}$$

algunas veces es llamado base canónica de $\mathbb{R}^n$.

2.4.10. Definición (Espacio Vectorial de Dimensión Finita e Infinita)

Un espacio vectorial X es de dimensión finita, si existe un entero positivo n tal que X contiene un conjunto linealmente independiente de n vectores, mientras que cada conjunto de $n + 1$ o más vectores de X es linealmente dependiente. n es llamado la dimensión de

X, escrito $n = dim\, X$. Por definición, $X = \{0\}$ es dimensionalmente finito, y $dim\, X = 0$. Si X no es de dimensión finita, se dice que es de dimensión infinita.

En análisis, los espacios vectoriales de dimensión finita son de mayor interés que los de dimensión finita. Por ejemplo, $C[a, b]$ y L^2 son de dimensión infinita, mientras que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son n-dimensional.

2.5. Espacio Normado, Espacio de Banach

2.5.1. Definición (Espacio Normado)

Un espacio normado X es un espacio vectorial con una norma definida en este. Una norma en un espacio vectorial X (real o complejo) es una función de valor real sobre X cuyo valor en un $x \in X$ esta denotado por

$$\|x\| \qquad \text{(se lee "norma de } x\text{")}$$

y que tiene las siguientes propiedades

$(N1)$ $\|x\| \geq 0$

$(N2)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(N3)$ $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$

$(N4)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdad triangular)

Aquí x y y son vectores arbitrarios en X y α es un escalar.

Nota: Un norma en X define una métrica d en X que está dado por

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad (x, y \in X) \tag{2.6}$$

y es llamado la métrica inducida por la norma. El espacio normado así definido es denotado por $(X, \|\cdot\|)$ o simplemente por X.

2.5.2. Definición (Espacio de Banach)

Un espacio de Banach en un espacio normado completo.

Los espacios de Banach son importantes porque ellos gozan de ciertas propiedades que no tienen los espacios incompletos.

Para un uso posterior, de (N4) def. 2.5.1 verificamos que

$$|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\| \tag{2.7}$$

La fórmula (2.7) implica una importante propiedad de la norma.

La norma es continua, esto es, $x \mapsto \|x\|$ es una aplicación continua de $(X, \|\cdot\|)$ en $\mathbb{R}$.

EJEMPLOS

2.5.3. Espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$ y Espacio Unitario $\mathbb{C}^n$

Estos espacios son espacios de Banach con la norma definida por

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2} \tag{2.8}$$

En efecto, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son completos, y de la ecuación (2.8) resulta la métrica

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{|\xi_1 - \eta_!|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2}$$

En particular en $\mathbb{R}^3$ tenemos

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

Esto confirma que la norma generaliza la noción elemental de la longitud $|x|$ de un vector.

2.5.4. Espacio L^∞

Este espacio fue definido en 1.1.7 y es un espacio de Banach con la norma definida por

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|$$

la completitud fue probado en 2.3.2.

2.5.5. Espacio $C[a,b]$

Este espacio fue definido en 1.1.8 y es un espacio de Banach con la norma definida por

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \tag{2.9}$$

donde $J = [a,b]$. La completitud fue probada en 1.3.3.

2.5.6. Espacios Normados Incompletos

De los espacios métricos incompletos en 1.3.4, 1.3.5 y 1.3.6 podemos obtener espacios normados incompletos.

Por ejemplo, la métrica en 1.3.6 inducida por la norma definida por

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt \tag{2.10}$$

2.6. Operadores Lineales

En cálculo se considera la recta real $\mathbb{R}$, y las funciones de valor real sobre $\mathbb{R}$ (o en un subconjunto de $\mathbb{R}$). Tales funciones son aplicaciones de su dominio en $\mathbb{R}$.

En análisis funcional consideramos espacios más generales, tales como espacios métricos y espacios normados, y aplicaciones de esos espacios.

En el caso de espacios vectoriales y, en particular, espacios normados, una aplicación es llamado un operador.

2.6.1. Definición (Operador Lineal)

Un operador lineal T es un operador $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{R}(T)$ tal que:

(i) El dominio $\mathcal{D}(T)$ de T es un espacio vectorial y el rango $\mathcal{R}(T)$ toma valores en un espacio vectorial sobre el mismo campo.

(ii) Para todo $x, y \in \mathcal{D}(T)$ y escalares α,

$$\left.\begin{array}{c} T(x+y) = Tx + Tx \\ T(\alpha x) = \alpha T(x) \end{array}\right\} \tag{2.11}$$

Nota: 1) El espacio nulo de T es el conjunto de todos los $x \in \mathcal{D}(T)$ tal que $Tx = 0$.

2) Generalmente, $\mathcal{D}(T) \subset X$, $\mathcal{R}(T) \subset Y$ donde X e Y son espacios vectoriales definidos sobre el mismo campo.

3) Claramente, (2.11) es equivalente a

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \tag{2.12}$$

4) Si consideramos $\alpha = 0$ en (2.11) obtenemos

$$T0 = 0 \tag{2.13}$$

La fórmula (2.11) expresa el hecho que un operador lineal T es un Homomorfismo de un espacio vectorial en otro espacio vectorial, esto es, T presenta las dos operaciones de espacio vectorial.

EJEMPLOS

2.6.2. Operador Identidad

El operador identidad $I_X : X \to X$ está definido por $I_X x = x$ para todo $x \in X$, escribimos simplemente I por I_X; así $Ix = x$.

2.6.3. Operador Cero

El operador $0 : X \to Y$ está definido por $0x = 0$ para todo $x \in X$.

2.6.4. Operador Diferenciación

Sea X el espacio vectorial de todos los polinomios sobre $[a, b]$. Podemos definir un operador lineal T en X por

$$Tx(t) = x\prime(t)$$

para todo $x \in X$, donde la prima denota la derivada con respecto a t. Este operador T aplica X sobre el mismo.

2.6.5. Operador Integración

Un operador lineal T del espacio $C[a, b]$ en si mismo puede ser definida por

$$Tx(t) = \int_a^t x(t)dt \qquad t \in [a, b]$$

2.6.6. Operador Matriz

Una matriz real $A = (\alpha_{jk})$ con r filas y n columnas define un operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ por medio de donde $x = (\xi_j)$(N2) e n componentes y $y = (\eta_j)$ tiene r componentes y ambos vectores son escritos como vectores columna porque de la multiplicación de matrices:

escribimos $y = Ax$ por

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_! \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

T es lineal porque la multiplicación de matrices es una operación lineal.

En estos ejemplos podemos verificar que los rangos y espacios nulos de ta les operadores lineales son espacios vectoriales.

2.6.7. Teorema (Rango y Espacio Nulo)

Sea T un operador lineal, entonces:

(a) El rango $\mathcal{R}(T)$ es un espacio vectorial

(b) Si $dim\mathcal{D}(T) = n < \infty$, entonces $dim\mathcal{R}(T) \leq n$

(c) El espacio nulo $\mathcal{N}(T)$ es un espacio vectorial

Demostración (a) Consideremos $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ y probaremos que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$ para cualquier escalar α, β. Ya que $y_!, y_2 \in \mathcal{R}(T)$, tenemos que $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$ para algún $x_!, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ y $\alpha x_! + \beta x_2 \in \mathcal{D}(T)$ porque $\mathcal{D}(T)$ es un espacio vectorial. Por la linealidad de T

$$T(\alpha x_! + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$$

Por lo tanto $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$. Ya que $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ fueron arbitrarios y también fueron los escalares, esto prueba que $\mathcal{R}(T)$ es un espacio vectorial.

(b) Elijamos $n + 1$ elementos $y_1, ..., y_{n+1}$ de $\mathcal{R}(T)$ de manera arbitraria. Entonces tenemos $y_1 = Tx_1, ..., y_{n+1} = Tx_{n+1}$ para algún $x_1, ..., x_{n+1} \in \mathcal{D}(T)$. Ya que $dim\mathcal{D}(T) = n$, el conjunto $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$ debe ser linealmente dependiente. Por lo tanto

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$$

para alguno escalares $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$ no todos ceros. Ya que T es lineal y $T0 = 0$, aplicando T a ambos lados tenemos

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) &= T0 \\ \alpha_1 T x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} T x_{n+1} &= 0 \\ \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Esto prueba que $\{y_1, ..., y_{n+1}\}$ es un conjunto linealmente dependiente porque los α_j no son todos ceros. Recordemos que este subconjunto de $\mathcal{R}(T)$ fue considerado de forma arbitraria, concluimos que $\mathcal{R}(T)$ no tiene subconjuntos linealmente independientes de $n + 1$ o más elementos.

es definición $dim\mathcal{R}(T) \leq n$.

(c) Consideremos $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T)$. Entonces $Tx_1 = Tx_2 = 0$. Ya que T es lineal, para escalares α, β tenemos

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = 0$$

Esto prueba que $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{N}(T)$. Por lo tanto $\mathcal{N}(T)$ es un espacio vectorial.

Una consecuencia inmediata de la parte (b) de la demostración es que los operadores lineales preservan la dependencia lineal.

Nota: Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ es inyectiva ó uno a uno si puntos diferentes en el dominio tienen imágenes diferentes, esto es, si para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2 \tag{2.14}$$

equivalentemente,

$$Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \tag{2.15}$$

En este caso existe la aplicación

$$\begin{aligned} T^{-1} : \mathcal{R}(T) &\to \mathcal{D}(T) \\ y_0 &\mapsto x_0 \qquad (y_0 = Tx_0) \end{aligned} \tag{2.16}$$

que aplica todo $y_0 \in \mathcal{R}(T)$ en un $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ para el cual $Tx_0 = y_0$. Ver figura.

La aplicación T^{-1} es llamada la inversa de T.

De (2.16) se tiene

$$T^{-1}Tx = x \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(T)$$
$$TT^{-1}y = y \qquad \text{para todo } y \in \mathcal{D}(T)$$

En conexión con los operadores lineales sobre espacios vectoriales la situación es como sigue. La inversa de un operador lineal existe si y solo si el espacio nulo del operador consiste sólo del vector cero.

Más precisamente se usa el siguiente criterio.

2.6.8. Teorema (Operador Inverso)

Sea X, Y espacios vectoriales, ambos reales o complejos. Sea $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(T) \subset X$ y rango $\mathcal{R}(T) \subset Y$. Entonces:

(a) La inversa $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{D}(T)$ existe si y solo si

$$Tx = 0 \Rightarrow x = 0$$

(b) Si T^{-1} existe, este es un operador lineal.

(c) Si $dim\mathcal{D}(T) = n < \infty$ y T^{-1} existe, entonces $dim\mathcal{R}(T) = dim\mathcal{D}(T)$

Demostración (a) Supongamos que $Tx = 0$ esto implica que $x = 0$.

Sea $Tx_1 = Tx_2$. Ya que T es lineal,

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$$

Por la hipótesis se tiene $x_1 - x_2 = 0$. Por lo tanto $Tx_1 = Tx_2$ entonces $x_1 = x_2$, y T^{-1} existe por (4*). Contrariamente, si T^{-1} existe, entonces se cumple (4*). Se (4*) con $x_2 = 0$ y la ecuación (3) obtenemos

$$Tx_1 = T0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Esto completa la demostración de (a).

(b) Asumimos que T^{-1} existe y probaremos que T^{-1} es operador lineal. El dominio de T^{-1} es $\mathcal{R}(T)$ y es un espacio vectorial pro el teorema 1.6.7 (a). Consideremos $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ y sus imágenes

$$y_1 = Tx_1 \quad \text{y} \quad y_2 = Tx_2$$

Entonces

$$x_1 = T^{-1}y_1 \quad \text{y} \quad x_2 = T^{-1}y_2$$

T es lineal, esto es, para cada α y β escalares se tiene

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

Ya que $x_j = T^{-1}y_1$, implica que

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2$$

y prueba que T^{-1} es lineal.

(c) Tenemos que $dim\mathcal{R}(T) \leq dim\mathcal{D}(T)$ por el teorema 1.6.7(b), y $dim\mathcal{D}(T) \leq dim\mathcal{R}(T)$ por el mismo teorema pero aplicado a T^{-1}. De estas dos afirmaciones se concluye que

$$dim\mathcal{R}(T) = dim\mathcal{D}(T)$$

2.6.9. Lema (Inversa de la compuesta)

Sean X, Y, Z espacios vectoriales, $T : X \to Y$ y $S : Y \to Z$ operadores lineales biyectivos. Entonces la inversa $(ST)^{-1} : Z \to X$ de la compuesta ST existe, y

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

2.7. Operadores Lineales Continuos y Acotados

2.7.1. Definición (Operador Lineal Acotado)

Sea X e Y espacios vectoriales y $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ un operador lineal, donde $\mathcal{D}(T) \subset X$. El operador T es acotado si existe un número real c tal que para todo $x \in \mathcal{D}(T)$,

$$\|Tx\| \leq c\,\|x\| \tag{2.17}$$

Nota: La norma $\|Tx\|$ es una norma en Y y $\|x\|$ es una norma en X.
se tiene de un operador lineal acotado no es la misma que una función real o compleja, donde una función acotada es aquella cuyo rango es un conjunto acotado.

¿Cuál es el c más pequeño tal que (2.17) se cumpla para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ distinto del nulo? [Podemos omitir $x = 0$ ya que $Tx = 0$ para $x = 0$ por (2.13), sec. 2.6].

De la ecuación (2.17):

$$\|Tx\| \leq c\,\|x\|$$

dividiendo

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c \qquad (x \neq 0)$$

Entonces el menor valor de c para que se verifique la desigualdad es el supremo, esto es

$$\sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Esto motiva la siguiente definición.

2.7.2. Definición (Norma de un operador)

Sea X y Y espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado, donde $\mathcal{D}(T) \subset X$.

La norma del operador T es

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{2.18}$$

Nota: Si $\mathcal{D}(T) = \{0\}$, se define $\|T\| = 0$, en este caso, $T = 0$ ya que $T0 = 0$ por (3) sec.1.6.

De (2.18), se define que; si $c = \|T\|$ entonces

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| \tag{2.19}$$

Esta relación se aplica muy frecuentemente.

2.7.3. Lema (Norma)

Sea T un operador lineal acotado, entonces:

(a) Una fórmula alternativa para la norma de T es

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|=1}} \|Tx\| \tag{2.20}$$

(b) La norma definida por (2.18) satisface (N1) a (N4) de la sec.2.5.

Demostración (a) Consideremos $\|x\| = a$ y sea $y = \left(\frac{1}{a}\right) x$, donde $x \neq 0$. Entonces $\|y\| = \frac{\|x\|}{a} = 1$, y ya que T es lineal, de (2.18) tenemos

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ x\neq 0}} \frac{1}{a}\|Tx\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ x\neq 0}} \left\|T\left(\frac{1}{a}x\right)\right\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|y\|=1}} \|Ty\|$$

Escribiendo x por y se obtiene (2.20).

(b) (N1) $\|T\| \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}(T)$. Por la propia definición de norma que se dió en la parte (a) se tiene $\|T\| \geq 0$, ahora

(N2) $\|T\| = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|=1}} \|Tx\| = 0 \Leftrightarrow Tx = 0, \forall x \in \mathcal{D}(T) \Leftrightarrow T = 0$ es decir, T es un operador nulo.

(N3) $\|\alpha T\| = |\alpha|\,\|T\|$, en efecto

$$\|\alpha T\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|=1}} \|\alpha Tx\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|=1}} |\alpha|\,\|Tx\| = |\alpha| \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|y\|=1}} \|Tx\| = |\alpha|\,\|T\|$$

donde $x \in \mathcal{D}(T)$.

Finalmente (N4), probaremos la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
\|(T_1+T_2)\| &= \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|y\|=1}} \|(T_1+T_2)x\| \\
&= \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|y\|=1}} \|T_1x+T_2x\| \\
&\leq \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|y\|=1}} \|T_1x\| + \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|y\|=1}} \|T_2x\| \\
&= \|T_1\| + \|T_2\|
\end{aligned}$$

De esto se concluye que

$$\|T_1+T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$$

EJEMPLOS

2.7.4. Operador Identidad

El operador identidad $I : X \to X$ es un espacio normado $X \neq \{0\}$ es acotado y tiene norma $\|I\| = 1$

2.7.5. Operador Cero

El operador cero $0 : X \to Y$ es un espacio normado X es acotado y tiene norma $\|0\| = 0$

2.7.6. Operador Derivada

Sea Tx el espacio normado de todos los polinomios sobre $J = [0,1]$ con la norma $\|x\| = max\,|x(t)|\,, t \in J$.

El operador derivada T está definido en X por

$$Tx(t) = x\prime(t)$$

Este operador es lineal pero no acotado. Ciertamente, sea $x_n(t) = t^n$, donde $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\|x\| = 1$ y

$$Tx_n(t) = x_n'(t) = nt^{n-1}$$

Tal que $\|Tx_n\| = n$ y $\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} = n$. Ya que $n \in \mathbb{N}$ y es arbitrario, ésto prueba que no existe un escalar c tal que $\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} \leq c$. De ésto y (1) concluimos que T no es acotado.

2.7.7. Operador Integral

Podemos definir un operador integral $T : C[0,1] \to C[0,1]$ por

$$y = Tx \,\mathrm{donde}\, y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

Donde k es una función llamado el kernel de T y es continua en el cuadrado cerrado $G = J \times J$ en el $t\tau - plano$, donde $J = [0,1]$. Este operador es lineal.

T es acotado.

Para probar esto, primero la continuidad de k en el cuadrado cerrado implica que k e acotado, esto es, existe un k_0 tal que $|k(t,\tau)| \leq k_0$ para todo $(t,\tau) \in G$, donde k_0 es un número real. Además

$$|x(t)| \leq \max_{t \in J} |x(t)| = \|x\|$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|y\| = \|Tx\| &= \underset{t\in J}{max}\left|\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau\right| \\ &\leq \underset{t\in J}{max}\int_0^1 |k(t,\tau)|\,|x(\tau)|\,d\tau \\ &\leq k_0\,\|x\|\end{aligned}$$

El resultado es $\|Tx\| \leq k_0\,\|x\|$. Esto es (2.17) con $c = k_0$. Por lo tanto T es acotado.

2.7.8. Operador Matriz

Una matriz real $A = (\alpha_{ij})$ con r filas y n columnas define un operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ por medio de

$$y = Ax \tag{2.21}$$

donde $x = (\xi_j)$ e $y = (\eta_j)$ son vectores columna con n y r componentes respectivamente, y usando la multiplicación de matrices como 2.6.6.

En términos de componentes, (2.21) se convierte en

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k \quad (j = 1, ..., r) \tag{2.22}$$

T es lineal porque la multiplicación de matrices es una operación lineal.

T es acotado.

Para probar esto, recordemos de 2.5.3 que la norma en $\mathbb{R}^n$ está definido por

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n}\xi_m^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

similarmente para $y \in \mathbb{R}^r$. De (2.22) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned}
\|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^{r} \eta_j^2 &= \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \xi_k \right)^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{r} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
&= \|x\|^2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2
\end{aligned}$$

Notemos que la suma doble en la última línea no depende de x, se puede escribir este resultado en la forma

$$\|Tx\|^2 \leq c^2 \|x\|^2 \quad donde\, c^2 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2$$

Esto da (2.17) y completa la demostración que T es acotado.

2.7.9. Teorema (Dimensión Finita)

Si un espacio normado X es de dimensión finita, entonces todo operador lineal en X es acotado.

Demostración Sea $dim X = n$ y $\{e_1, ..., e_n\}$ una base para X. Consideremos un $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ y un operador lineal T sobre X. Ya que T es lineal,

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j T e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \, \|Te_j\| \leq \max_k \|Te_k\| \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|$$

En la última suma aplicamos el Lema xxxx con $\alpha_j = \xi_j$ y $x_j = e_j$.

Entonces obtenemos

$$\sum |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum \xi_j e_j \right\| = \frac{1}{c} \|x\|$$

De todo esto se tiene

$$\|Tx\| \leq \gamma \|x\| \quad \text{donde } \gamma = \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\|$$

Luego se verifica que T es acotado.

Nota: Cuando se habla de continuidad de una aplicación no necesariamente lineal, se dice que tal aplicación es continua si ella es continua en todo punto del dominio. Ahora, si tal aplicación es un operador lineal, basta mostrar que ella es continua en un único punto para concluir que es continua en todo punto de su dominio.

2.7.10. Teorema (Continuidad y Acotación)

Sea $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ un operador lineal, donde $\mathcal{D}(T) \subset X$ y X, Y son espacios normados. Entonces

(a) T es continua si y solo si T es acotado

(b) Si T es continua en un sólo punto, es continua

Demostración (a) Asumimos que T es continua en un punto arbitrario $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Entonces, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ se tiene

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon \tag{2.23}$$

Consideremos cualquier $y \neq 0 \in \mathcal{D}(T)$. Escribiendo $x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y$ entonces $x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|}y$. Por lo tanto $\|x - x_0\| = \delta$, usando (2.23), y ya que T es lineal se tiene

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\|$$

de (2.23): $\frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\| < \varepsilon$ así $\|Ty\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|y\|$. Considerando $c = \frac{\varepsilon}{\delta}$ se tiene $\|Ty\| \leq c \|y\|$, lo que prueba que T es acotado.

Recíprocamente , asumimos que T es acotado. Si $T = 0$ se cumple el resultado. Sea $T \neq 0$. Entonces $\|T\| \neq 0$. Siendo T acotado, sea $c = \|T\|$ y consideremos cualquier $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Asimismo, considerando $\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$ y siendo T lineal, entones para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ si $\|x - x_0\| < \delta$ se tiene

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \, \|x - x_0\| <= \|T\| \, \frac{\varepsilon}{\|y\|} = \varepsilon$$

es decir, $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$. Por lo tanto, T es continua.

(b) Si T es continua en un punto de su dominio, entonces por la prueba del ítem (a) se tiene que T es acotada, que a si vez implica la continuidad de T por (a).

2.7.11. Corolario (Continuidad , Espacio Nulo)

Sea T un operador lineal acotado. Entonces:

(a) Si $x_n \to x$ [donde $x_n, x \in \mathcal{D}(T)$] entonces $Tx_n \to Tx$

(b) El espacio nulo $\mathcal{N}(T)$ es cerrado.

Nota: Se puede demostrar también las siguientes proposiciones:

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \, \|T_2\| \quad \text{y} \quad \|T^n\| \leq \|T\|^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

válido para operadores lineales acotados $T_2 : X \to Y$, $T_1 : Y \to Z$ y $T : X \to X$, donde X, Y, Z son espacios normados.

2.7.12. Definición (Operadores Iguales, Restricción y Extensión)

Sean T_1 y T_2 dos operadores lineales. Se dice que T_1 y T_2 son operadores iguales, si $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$ y si $T_1 x = T_2 x$ para todo $x \in \mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$.

Sea T un operador lineal. Una restricción de $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ a un subconjunto $B \subset \mathcal{D}(T)$ es denotado por

$$T \mid_B$$

y este operador está definido por

$$T \mid_B : B \to Y, \; T \mid_B x = Tx, \text{ para todo } x \in B$$

Una extensión de T a un conjunto $M \supset \mathcal{D}(T)$ es un operador

$$\tilde{T} : M \to N \text{ tal que } \tilde{T} \mid_{\mathcal{D}(T)} = T$$

esto es, $\tilde{T}x = Tx$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ [Por lo tanto T es la restricción de $\tilde{T}$ a $\mathcal{D}(T)$].

El teorema que sigue se refiere a la extensión de un operador lineal acotado.

2.7.13. Teorema (Extensión Lineal Acotado)

Sea

$$T : \mathcal{D}(T) \to Y$$

un operador lineal acotado, donde $\mathcal{D}(T)$ se encuentra en un espacio normado X y Y es un espacio de Banach. Entonces T Forma una extensión

$$\tilde{T} : \overline{\mathcal{D}(t)} \to Y$$

Donde $\tilde{T}$ es un operador lineal acotado de norma

$$\left\| \tilde{T} \right\| = \|T\|$$

Demostración Consideremos cualquier $x \in \overline{\mathcal{D}(t)}$. Si $x \in \mathcal{D}(t)$ entonces existe una sucesión $(x_n) \in \mathcal{D}(t)$ tal que $x_n \to x$, luego existe Tx. Supongamos que $x \notin \mathcal{D}(t)$, entonces dado un $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ se tiene $\|x_m - x_n\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|}$. Como T es lineal y acotado, tomando $m, n > n_0$ se tiene

$$\|Tx_m - Tx_n\| = \|T(x_m - x_n)\| = \|T\| \, \|x_m - x_n\| < \|T\| \, \frac{\varepsilon}{\|T\|} = \varepsilon$$

Esto prueba que (Tx_n) es de Cauchy en Y y como Y es completo, existe un $y \in Y$ tal que

$$Tx \to y$$

Definamos $\tilde{T}$ por

$$\tilde{T}x = y$$

Note que ésta definición no depende de la elección de una sucesión en $\mathcal{D}(t)$ que converge a x. Suponga que $x_n, z_n \in \mathcal{D}(t)$ tales que $x_n \to x$ y $z_n \to x$. Consideremos una sucesión (v_m) tal que

$$(v_m) = (x_1, z_1, x_2, z_2, ...)$$

Como cada uno de los términos de esta sucesión converge a x, entonces $x_m \to x$. Asimismo, por el ítem (a) del corolario 2.7.9, la sucesión (Tv_m) es convergente y posee el mismo límite que las subsucesiones (Tx_n) y (Tz_n), es decir, $Tv_m \to y$.

Esto muestra que un operador $\tilde{T}$ está únicamente definido para cada $x \in \mathcal{D}(t)$.

Como T es lineal entonces $\tilde{T}$ el lineal, en efecto

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(\alpha x + \beta z) &= \tilde{T}\left(\lim_{n\to\infty} \alpha x_n + \lim_{n\to\infty} \beta z_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} T\left(\alpha x_n + \beta z_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} T\alpha x_n + \lim_{n\to\infty} T\beta z_n \\
&= \alpha\tilde{T}x + \beta\tilde{T}z
\end{aligned}$$

y como $\tilde{T}x = Tx$ para todo , entonces $\tilde{T}$ es una extensión de T.

Ahora, como T es acotado entonces $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$. Además de eso $x_n \to x$ y $Tx_n \to y = \tilde{T}x$, cuando $n \to \infty$, y siendo la norma una aplicación continua, se tiene

$$\left\|\tilde{T}x\right\| \leq \|T\| \|x\|$$

Es decir, $\tilde{T}$ es acotado y $\left\|\tilde{T}\right\| \leq \|T\|$. Por otro lado, $\left\|\tilde{T}\right\| \geq \|T\|$ porque la norma definida por un supremo, no puede disminuir en una extensión. Por lo tanto, $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$.

2.8. Funcionales Lineales

Un funcional es un operador cuyo rango se encuentra en la recta real $\mathbb{R}$ ó en el plano complejo $\mathbb{C}$. En el presente trabajo de investigación necesitamos considerar las siguiente definiciones.

2.8.1. Definición (Funcional Lineal)

Un funcional lineal f es un operador lineal acotado con dominio en un espacio vectorial X y rango en el campo escalar K de X. Así,

$$f : \mathcal{D}(f) \to K$$

donde $K = \mathbb{R}$ si X es real y $K = \mathbb{C}$ si X es complejo.

2.8.2. Definición (Funcional Lineal Acotado)

Un funciona lineal acotado f, es un operador lineal acotado con rango en el campo de los escalar del espacio normado X en el que el dominio $\mathcal{D}(f)$ se encuentra.

Así existe un número real c tal que para todo $x \in \mathcal{D}(f)$,

$$|f(x)| \leq c \, \|x\| \tag{2.24}$$

Además de eso, la norma de f es

$$\|f\| = \underset{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\|=1}}{sup} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{2.25}$$

ó

$$\|f\| = \underset{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\|=1}}{sup} |f(x)| \tag{2.26}$$

Nota: En la fórmula (2.24) si $c = \|f\|$, entonces,

$$|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| \tag{2.27}$$

2.8.3. Teorema (Continuidad y Acotación)

Un funcional lineal f con dominio $\mathcal{D}(f)$ en un espacio normado es continuo si y solo si f es acotado.

La demostración es análoga al teorema 2.7.8 para el caso en que $Y = K$.

Ejemplos

2.8.4. Norma

La norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un funcional sobre X que no es lineal.

2.8.5. Integral Definida

La integral definida es un número si consideramos ésta para una sola función. Pero todo cambia cuando consideramos la integral para todas las funciones en un cierto espacio de funciones, entonces la integral viene a ser un funcional sobre este espacio.

Consideremos la funcional f definida por

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt \quad x \in C[a,b]$$

Observe que f es un funcional lineal, pues para todo $x, \psi \in C[a,b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta\psi) &= \int_a^b (\alpha x + \beta\psi)(t)dt \\ &= \int_a^b [\alpha x(t) + \beta\psi(t)]\, dt \\ &= \alpha \int_a^b x(t)dt + \beta \int_a^b \psi(t)dt \\ &= \alpha f(t) + \beta f(\psi) \end{aligned}$$

Además, f es un funcional acotado y tiene norma $\|f\| = b - a$. En efecto, escribiendo $J = [a,b]$ y recordando la norma en $C[a,b]$, obtenemos

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq (b-a) \underset{t \in J}{max} |x(t)| = (b-a)\|x\|$$

Tomando el supremo sobre todos los $x \in C[a,b]$ de norma $\|x\| = 1$, obtenemos $\|f\| \leq b-a$, escogiendo en particular, $x = x_0 = 1$, note que $\|x_0\| = 1$ y usando (2.27)

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = |f(x_0)| = \int_a^b dt = b - a$$

es así,

$$\|f\| \geq b - a$$

Por lo tanto, $\|f\| = b - a$.

2.8.6. Espacio $C[a, b]$

Otra funcional importante sobre $C[a, b]$ es obtenido si elegimos un $t_0 \in J = [a, b]$ fijo y sea

$$f_j(x) = x(t_0) \qquad x \in C[a, b]$$

$f_1$es lineal, f_1Standarddo y tiene norma $\|f_1\| = 1$. En efecto, tenemos esto implica $\|f_1\| \leq 1$ por (2.25). Por otro lado, para $x_0 = 1$ tenemos $\|x_0\| = 1$ y obtenemos de (2.27)

$$\|f_1\| \geq |f_1(x_0)| = 1$$

Por lo tanto $\|f_1\| = 1$.

2.9. Espacios Normados de Operadores. Espacio Dual

En la sección 2.7 definimos el concepto de un operador lineal acotado y lo ilustramos por ejemplos básicos. En la presente sección nuestro objetivo es como sigue. Tomamos dos espacios normados X e Y (ambos reales y complejos) y consideramos el conjunto

$$B(X, Y)$$

que consiste de todos los operadores lineales acotados de X en Y, tal que los operadores están definidos sobre todo X y su rango está en Y. Queremos demostrar que $B(X, Y)$ puede ser un espacio normado.

Primero de todo, $B(X, Y)$ viene a ser un espacio vectorial si definimos la suma $T_1 + T_2$ de dos operadores $T_1, T_2 \in B(X, Y)$ por

$$(T_1 + T_2)\, x = T_1 x + T_2 x$$

y el producto αT de $T \in B(X,Y)$ y un escalar α por

$$(\alpha T)\, x = \alpha T x$$

Ahora recordando el lema 2.7.6(b) obtenemos el siguiente resultado:

2.9.1. Teorema (Espacio $B(X,Y)$)

El espacio vectorial $B(X,Y)$ de todos los operadores lineales acotados de un espacio normado X en un espacio normado Y es un espacio normado con la norma definida por

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \tag{2.28}$$

En este caso $B(X,Y)$ es un espacio de Banach?. Ésta es la principal interrogante, que responderemos en el siguiente teorema.

2.9.2. Teorema (Completación)

Y es un espacio de Banach, entonces $B(X,Y)$ es un espacio de Banach.

Demostración Consideremos una sucesión de Cauchy arbitraria (T_n) en $B(X,Y)$ probaremos que (T_n) converge a un operador $T \in B(X,Y)$. En vista que (T_n) es de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \qquad (m, n > N)$$

para todo $x \in X$, y $m, n > N$ así obtenemos

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)\, x\| \leq \|T_n - T_m\|\, \|x\| < \varepsilon\, \|x\| \tag{2.29}$$

Ahora, para todo x fijo y dado un $\tilde{\varepsilon}$ podemos elegir $\varepsilon = \varepsilon_x$ tal que $\varepsilon_x \|x\| < \tilde{\varepsilon}$. Luego de (2.29) tenemos $\|T_n x - T_m x\| < \tilde{\varepsilon}$ y vemos que $(T_n x)$ es de Cauchy en Y. Ya que Y es completo, $(T_n x)$ converge, $T_n x \to y$.

Claramente, el límite $y \in Y$ depende de la elección de X.

Así definidos un operador $T : X \to Y$, donde $y = Tx$. El operador T es lineal ya que

$$\lim T_n (\alpha x + \beta z) = \lim (\alpha T_n x + \beta T_n z) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n z$$

Probaremos que T es acotado, y $T_n \to T$, esto es, $\|T_n - T\| \to 0$ ya que de (2.29) se considera $m > N$ y $T_n x \to T_x$, obtenemos $m \to \infty$. Usando la continuidad de la norma, entonces obtenemos de (2.29) para todo $n > N$ y para todo $x \in X$

$$\|T_n x - Tx\| = \left\| T_n x - \lim_{m\to\infty} T_m x \right\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\| \tag{2.30}$$

Así demostraremos que $(T_n - T)$con $n > N$ es operador lineal acotado.

Ya que T_n es acotado, $T = T_n - (T_n - T)$, esto es, $T \in B(X, Y)$.

Además, si en (2.30) tomamos el supremo sobre todos los x de norma 1, obtenemos

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon \qquad (n > N)$$

de aquí $\|T_n - T\| \to 0$.

Éste teorema tiene una importante consecuencia con respecto al espacio dual X' de X, el cual está definido como sigue.

2.9.3. Definición (Espacio Dual X')

Sea X un espacio normado. Entonces el conjunto de todas las funciones lineales acotados en X constituye un espacio normado definido por

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |f(x)| \tag{2.31}$$

el cual es llamado el espacio dual de X y está denotado por X'.

2.9.4. Teorema (Espacio Dual)

El espacio dual X' de un espacio normado X es un espacio de Banach.

Demostración Note que $X' = \{f : X \to K; f \text{ es lineal y acotado}\}$. Asimismo, X' es un subconjunto $B(X, Y)$, donde $Y = K$, es decir, $Y = \mathbb{R}$ o $Y = \mathbb{C}$, como K es completo, aplicando el teorema 2.9.2 se tiene que X' es de Banach.

2.9.5. Definición

Un isomorfismo de un espacio normado X en un espacio normado $\tilde{X}$ es operador lineal biyectivo $T : X \to \tilde{X}$ el cual preserva la noma, esto es, para todo $x \in X$

$$\|Tx\| = \|x\|$$

(Aquí T es isométrico). X es luego llamado isomorfo con $\tilde{X}$, y X y $\tilde{X}$ son llamados espacios isomorfos de un punto de vista abstracto, X y $\tilde{X}$ son entonces idénticos, es decir $X \cong \tilde{X}$.

Ejemplos

2.9.6. Espacio $\mathbb{R}^n$

El espacio dual de $\mathbb{R}^n$ es $\mathbb{R}^n$.

Demostración Tenemos $\mathbb{R}^{n'} = \mathbb{R}^{n*}$ por el teorema 2.7.9 y todo $f \in \mathbb{R}^{n*}$ tiene una representación

$$f(x) = \sum \xi_k \gamma_k \qquad \gamma_k = f(e_k)$$

(la suma de 1 a n). Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|f(x)| \leq \sum |\xi_k \gamma_k| \leq \left(\sum \xi_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \gamma_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\| \left(\sum \gamma_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Tomando el supremo sobre todos los x de norma 1, obtenemos

$$\|f\| \leq \left(\sum \gamma_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sin embargo, ya que para $x = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ la igualdad es obtenida en la desigualad de Cauchy-Schwarz, debemos tener

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Esto prueba que la norma de f es la norma euclideana, y $\|f\| = \|c\|$, donde $c = (\gamma_k) \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto la aplicación de $\mathbb{R}^{n'}$ es $\mathbb{R}^n$ definida por $f \mapsto c = (\gamma_k)$, $\gamma_k = f(e_k)$, preserva su norma, ya que ésta es lineal y biyectiva, éste es un isomorfismo.

2.9.7. Espacio L^1

El espacio dual de L^1 es L^∞.

Demostración Una base de Schauder para L^1 es (e_k) , donde $e_k = (\delta_{kj})$ tiene 1 en la k-ésima lugar y ceros en las otras. Luego todo $x \in L^1$ tiene una única representación

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \tag{2.32}$$

Consideremos cada $f \in L^{1'}$, donde $L^{1'}$ es el espacio dual de L^1. Ya que f es lineal y acotado,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k \qquad \gamma_k = f(e_k) \tag{2.33}$$

donde los números $\gamma_k = f(e_k)$ son únicamente determinados por f, también $\|e_k\| = 1$ y

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \, \|e_k\| = \|f\| \, , \quad \underset{k}{sup} \, |\gamma_k| \leq \|f\| \tag{2.34}$$

por lo tanto $(\gamma_k) \in L^{\infty}$.

Por otro lado, para todo $b = (\beta_k) \in L^{\infty}$ podemos obtener una función lineal acotada g en L^1. En efecto, podemos definir g en L^1 por

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k$$

donde $x = (\xi_k) \in L^1$. Luego g es lineal, y de la acotación se tiene

$$|g(x)| \leq \sum |\xi_k \beta_k| \leq \underset{j}{sup} \, |\beta_j| \sum |\xi_k| = \|x\| \, \underset{j}{sup} \, |\beta_j|$$

(suma de 1 a ∞). Por lo tanto $g \in L^1$.

Finalmente demostraremos que la norma de f es la norma en el espacio L^{∞} de (2.28) tenemos

$$|f(x)| = \left| \sum \xi_k \gamma_k \right| \leq \underset{j}{sup} \, |\gamma_j| \sum |\xi_k| = \|x\| \, \underset{j}{sup} \, |\gamma_j|$$

Tomando el supremo sobre todos los x de norma 1, verificamos que

$$\|f\| \leq \sup_{j} |\gamma_j|$$

por esto y (2.34)

$$\|f\| = \sup_{j} |\gamma_j| \tag{2.35}$$

el cual es la norma en L^∞. Por lo tanto ésta formula puede ser escrito $\|f\| = \|c\|_\infty$ donde $c = (\gamma_j) \in L^\infty$. Demostraremos que la aplicación lineal biyectiva de L^1 es L^∞ definida por $f \mapsto c = (\gamma_j)$ es un homomorfismo.

2.9.8. Espacio L^p

El espacio dual de L^p es L^q; de aquí, $1 < p < +\infty$ y q es la conjugada de p, esto es, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demostración Una base de Schauder para L^p es (e_k), donde $e_k = (\delta_{kj})$ como en el ejemplo anterior. Luego todo $x \in L^p$ tiene una única representación

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \tag{2.36}$$

considerando todo $f \in L^{p'}$, donde $L^{p'}$ es el espacio dual de L^p. Ya que f es lineal y acotado.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k \quad \gamma_k = f(e_k) \tag{2.37}$$

Sea q la conjugada de p y consideremos $x_n = \left(\xi_k^{(n)}\right)$ con

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{|\gamma_k|^q}{\gamma_k} & \text{si } k \leq n \text{ y } \gamma_k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k > n \text{ o } \gamma_k = 0 \end{cases} \tag{2.38}$$

Reemplazando en (2.37) obtenemos

$$f\left(x_n\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}\gamma_k=\sum_{k=1}^{n}\left|\gamma_k\right|^q$$

usando (2.38) y $(q-1)p=q$

$$\begin{aligned}
f\left(x_n\right)\leq\|f\|\left\|x_n\right\|&=\|f\|\left(\sum\left|\xi_k^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\|f\|\left(\sum\left|\gamma_k\right|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\|f\|\left(\sum\left|\gamma_k\right|^q\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

(la suma es de 1 a n). Tomando extremos

$$f\left(x_n\right)=\sum\left|\gamma_k\right|^q\leq\|f\|\left(\sum\left|\gamma_k\right|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

dividiendo por el último factor y usando $1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$ obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\gamma_k\right|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\gamma_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\|f\|$$

ya que n es arbitrario, haciendo $n\to\infty$, obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\gamma_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\|f\| \tag{2.39}$$

por lo tanto $(\gamma_k)\in L^q$.

(conversely) contrariamente, o por otro lado, para todo $b=(\beta_k)\in L^q$ podemos obtener una correspondencia de los funcionales lineales acotados g es L^p. En efecto, definimos g en L^p por

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_K\beta_k$$

donde $x = (\xi_K) \in L^p$. Luego g es lineal y de la acotación, tenemos $g \in L^{p'}$.

Finalmente probaremos que la norma de f es la norma en el espacio L^q de (2.37) y de la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned} |f(x)| = \left|\sum \xi_K \gamma_K\right| &\leq \left(\sum |\xi_K|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |\gamma_K|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|x\| \left(\sum |\gamma_K|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre todos los x de norma 1 obtenemos

$$\|f\| \leq \left(\sum |\gamma_K|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

de (2.39) verificamos la igualdad, esto es

$$\|f\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_K|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

esto puede ser escrito

$$\|f\| = \|c\|_q \tag{2.40}$$

, donde $c = (\gamma_k) \in L^q$ y $\gamma_k = f(e_k)$.

La aplicación de $L^{p'}$ en L^q definida por $f \mapsto c$ es lineal y biyectivo, y de (2.40) verificamos que la norma se preserva, ya que es un homomorfismo.

Capítulo 3

TEOREMA DE HAHN BANACH

3.1. Lema de Zorn

Se necesita del lema de Zorn en la demostración del teorema de Hahn Banach, el cual es un teorema de extensión para funcionales lineal. Empecemos definiendo algunos conceptos previos.

3.1.1. Definición

Un conjunto parcialmente ordenado, es un conjunto M en el cual está definido un orden parcial, esto es, una relación binaria $\leq$ que satisface las condiciones:

$(PO1)$	$a \leq a$ para todo $a \in M$	(Reflexiva)
$(PO2)$	si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$	(Antisimétrica)
$(PO3)$	si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$	(Transitiva)

Parcialmente enfatizamos que M puede contener elementos a y b para el cual $a \leq b$ ó $b \leq a$ no se cumplen. Entonces a y b son elementos incomparables. En contraste, dos elementos a y b son llamado elementos comparables si ellos satisfacen $a \leq b$ o $b \leq a$ (o ambos).

Un conjunto totalmente ordenado ó cadena, es un conjunto parcialmente ordenado tal que para todo, cualquiera dos elementos del conjunto son comparables. En otras palabras, una cadena es un conjunto parcialmente ordenado que no tiene elementos incomparables.

Una cota superior de un subconjunto W de un conjunto parcialmente ordenado M es el elemento $\mu \in M$ tal que

$$x \leq \mu \quad \text{para todo}\, x \in W$$

Un elemento maximal de M es un $m \in M$ tal que

$$m \leq x \quad \text{implica}\, m = x$$

(Nuevamente, M puede o no tener elementos maximales. Notar además que un elemento maximal no necesariamente es una cota superior).

Ejemplos

3.1.2. Los Números Reales

Sea M el conjunto de todos los números reales y sea $x \leq y$ con su usual significado. M es totalmente ordenado. M no tiene elementos maximales.

Conjunto Potencia. Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto potencia (conjunto de todos los subconjuntos) de un conjunto X y sea $A \leq B$, esto es, A es un subconjunto de B. Entonces $\mathcal{P}(X)$ es parcialmente ordenado. El único elemento maximal de $\mathcal{P}(X)$ es X.

3.1.3. n-uplas de Números

Sea M el conjunto de todas las n-uplas ordenadas $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$,... de números reales y sea $x \leq y$ esto quiere decir $\xi_j \leq \eta_j$ para todo $j = 1, ..., n$, donde $\xi_j \leq \eta_j$ es un orden parcial en M con su usual significado.

3.1.4. Enteros Positivos

Sea $M = \mathbb{N}$ el conjunto de los números enteros positivos. Sea $m \leq n$ significa que m divide a n. Este define un orden parcial en $\mathbb{N}$.

3.1.5. Lema de Zorn

Sea $M \neq \phi$ un conjunto parcialmente ordenado. Supongase que toda cadena $C \subset M$ tiene una cota superior. Entonces M tiene un elemento maximal.

3.2. Teorema de Hahn - Banach

El teorema de Hahn - Banach es un teorema de extensión para funcionales lineales, f el cual está definido sobre un subespacio Z de un espacio vectorial X y tiene ciertas propiedades de acotación el cual puede ser formulada en términos de una funcional sublineal.

3.2.1. Definición (Funcional Sublineal)

Una funcional sublineal es un funcional de valor real p sobre un espacio vectorial X el cual es subaditivo, esto es

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{para todo}\, x, y \in X \tag{3.1}$$

y homogéneo - positivo, esto es

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \text{para todo}\, \alpha \geq 0\, \text{en}\, \mathbb{R}; y, x \in X \tag{3.2}$$

Nota: La norma de un espacio normado es una funcional.

Se asume que la funcional f a ser extendido está mayorizado sobre $Z \subset X$ por una funcional p definida sobre X, y extendemos f de Z a X sin perder la linealidad y el mayorante, tal que la funcional extendida $\tilde{f}$ sobre X es aún lineal y mayorante por p.

3.2.2. Teorema de Hahn - Banach (Extensión de Funcionales Lineales)

Sea X un espacio vectorial real y p un funcional sublineal sobre X. Además sea f un funcional lineal que está definida sobre un subespacio Z de X y satisface

$$f(x) \leq p(x) \quad \text{para todo}\, x \in Z \tag{3.3}$$

Entonces f tiene una extensión lineal $\tilde{f}$ de Z a X satisfaciendo

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \text{para todo}\, x \in X \tag{3.4}$$

esto es, $\tilde{f}$ es una funcional sobre X que satisface (3.4) sobre X y $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in Z$.

Demostración Probaremos:

(a) El conjunto E de todas las extensiones lineales g de f que satisfacen $g(x) \leq p(x)$ sobre su dominio $\mathcal{D}(g)$ puede ser ordenado parcialmente, y el Lema de Zorn proporciona un elemento maximal $\tilde{f}$ de E.

(b) $\tilde{f}$ está definida sobre el espacio entero X.

(c) Una relación auxiliar el cual fue usada en (b).

Empecemos con la parte

(a) Sea E el conjunto de todas las extensiones lineales g de f el cual satisface la condición

$$g(x) \leq p(x) \quad \text{para todo}\, x \in \mathcal{D}(g)$$

Claramente, $E \neq \phi$ ya que $f \in E$. En E podemos definir un orden parcial

$$g \leq h$$

que significa h es una extensión de g. Esto es, por definición, $\mathcal{D}(h) \supset \mathcal{D}(g)$ y $h(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}(g)$.

Para toda cadena $C \subset E$ definimos $\tilde{g}$ por

$$\tilde{g}(x) = g(x) \quad \text{si}\, x \in \mathcal{D}(g) \quad (g \in C)$$

$\tilde{g}$ es un funcional lineal, el dominio viene a ser

$$\mathcal{D}\left(\tilde{g}\right) = \underset{g \in C}{\cup} \mathcal{D}(g)$$

que es un espacio vectorial ya que C es una cadena. La definición de $\tilde{g}$ no es ambiguo. En efecto, para un $x \in \mathcal{D}\left(g_1\right) \cap \mathcal{D}\left(g_2\right)$ con $g_1, g_2 \in C$ ya que se tiene $g_1(x) = g_2(x)$ ya que C es una cadena, y por consiguiente $g_1 \leq g_2$ o bien $g_2 \leq g_1$.

Claramente, $g \leq \tilde{g}$ para todo $g \in C$. Puesto que $C \subset E$ fue arbitraria, el Lema de Zorn implica que E tiene un elemento maximal $\tilde{f}$.

Por la definición de E, $\tilde{f}$ es una extensión lineal de f que satisface

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \quad x \in \mathcal{D}\left(\tilde{f}\right) \tag{3.5}$$

(b) Probaremos que $\mathcal{D}\left(\tilde{f}\right)$ es todo X. Supongase que esto es falso. Entonces podremos elegir un $y_1 \in X - \mathcal{D}\left(\tilde{f}\right)$ y considerar el subespacio Y_1 de X generado por $\mathcal{D}\left(\tilde{f}\right)$ y y_1.

Note que $y_1 \neq 0$ ya que $0 \in \mathcal{D}\left(\tilde{f}\right)$. Cada $x \in Y_1$ puede ser escrito

$$x = y + \alpha y_1 \quad y \in \mathcal{D}\left(\tilde{f}\right)$$

Ésta representación es única. En efecto, $y + \alpha Y_1 = \tilde{y} + \beta Y_1$ con $\tilde{y} \in \mathcal{D}\left(\tilde{f}\right)$ implica que $y - \tilde{y} = (\beta - \alpha)\, y_1$, donde $y - \tilde{y} \in \mathcal{D}\left(\tilde{f}\right)$ mientras que $y_1 \notin \mathcal{D}\left(\tilde{f}\right)$, tal que la única solución es $y - \tilde{y} = 0$ y $\beta - \alpha = 0$. Ésto verifica la unicidad.

Un funcional $g_1$sobre Y_1 está definido por

$$g_1\left(y + \alpha y_1\right) = \tilde{f}(y) + \alpha c \tag{3.6}$$

donde c es una constante real. No es difícil verificar que $g_1$es lineal. Además, para $\alpha = 0$ se tiene $g_1(y) = \tilde{f}(y)$.

Por lo tanto $g_1$es una extensión propia de $\tilde{f}$, esto es, una extensión tal que $\mathcal{D}\left(\tilde{f}\right)$ es un subconjunto propio de $\mathcal{D}\left(g_1\right)$.

Consecuentemente, si probamos que $g_1 \in E$ demostrando que

$$g_1(x) \leq p(x) \quad \text{para todo}\, x \in \mathcal{D}\left(g_1\right) \tag{3.7}$$

Esto contradice la maxibilidad de $\tilde{f}$, tal que $\mathcal{D}\left(\tilde{f}\right) \neq X$ es falso y $\mathcal{D}\left(\tilde{f}\right) = X$ es verdadero.

(c) Finalmente, probaremos que g_1 con un apropiado c en (3.6) satisface (3.7).

Consideremos un y, z en $\mathcal{D}\left(\tilde{f}\right)$. De (3.5) y (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) = \tilde{f}(y - z) &\leq p(y - z) \\ &= p\left(y + y_1 - y_1 - z\right) \\ &\leq p\left(y + y_1\right) + p\left(-y_1 - z\right) \end{aligned}$$

tomando extremos

$$\tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) \leq p\left(y + y_1\right) + p\left(-y_! - z\right)$$

$$-\, p\left(-y_1 - z\right) - \tilde{f}(z) \leq p\left(y + y_1\right) - \tilde{f}(y) \tag{3.8}$$

Donde $y_1$es fijo. Ya que y no aparece en la izquierda y z no en la derecha, la desigualdad se mantiene si tomamos el supremo sobre $z \in \mathcal{D}\left(\tilde{f}\right)$ en el lado izquierdo (al cual llamaremos m_0) y el ínfimo sobre $y \in \mathcal{D}\left(\tilde{f}\right)$ en la derecha (al cual llamaremos m_1).

Entonces $m_0 \leq m_1$ y para un c con $m_0 \leq c \leq m_1$ obtenemos de (3.8)

$$-\, p\left(-y_1 - z\right) - \tilde{f}(z) \leq c \qquad \text{para todo}\, z \in \mathcal{D}\left(\tilde{f}\right) \tag{3.9}$$

$$c \leq p\left(y + y_1\right) - \tilde{f}(y) \qquad \text{para todo}\, y \in \mathcal{D}\left(f\right) \tag{3.10}$$

Probaremos (3.7) primero para un negativo α en (3.6) y luego para un positivo α. Dado $\alpha < 0$ usamos (3.9) con z reemplazado por α^{-1} y, esto es,

$$-p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right) \leq c$$

Multiplicando por $-\alpha > 0$ se tiene

$$\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) + \tilde{f}\left(y\right) \leq -\alpha c$$

De ésto y (3.6), usando $y = \alpha y_1 = x$, obtenemos

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq -\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) = p\left(\alpha y_1 + y\right) = p(x)$$

Para $\alpha = 0$ usando (3.10) con y reemplazado por $\alpha^{-1}y$ obtenemos

$$c \leq p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right)$$

Multiplicando por $\alpha > 0$

$$\alpha c \leq \alpha p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}\,(y) = p(x) - \tilde{f}\,(y)$$

De esto y de (3.6)

$$g_1(x) = \tilde{f}\,(y) + \alpha c \leq p(x)$$

3.2.3. Teorema de Hahn - Banach (Generalizado)

Sea X un espacio vectorial real o complejo y p una funcional de valor real en X que es subaditiva, esto es, para todo $x, y \in X$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \tag{3.11}$$

y que para todo escalar α se tiene

$$p\,(\alpha x) = |\alpha|\,p(x) \tag{3.12}$$

Además, sea f un funcional lineal que es definido en un subespacio Z de X y que satisface

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \text{para todo}\, x \in Z \tag{3.13}$$

Entonces f tiene una eztensión lineal $\tilde{f}$ de Z a X satisfaciendo

$$\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x) \quad \text{para todo}\, x \in X$$

3.2.4. Teorema de Hahn - Banach (Espacios Normados)

Sea f un funcional lineal acotado en un subespacio Z de un espacio normado X. Entonces existe un funcional lineal acotado $\tilde{f}$ en X que es una extensión de f a X y tiene la misma norma

$$\left\|\tilde{f}\right\|_X = \|f\|_Z$$

donde

$$\left\|\tilde{f}\right\|_X = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left|\tilde{f}(x)\right|, \quad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

(y $\|f\|_Z = 0$ en el caso trivial $Z = \{0\}$).

Demostración Si $Z = \{0\}$, entonces $f = 0$, y por la extensión es $\tilde{f} = 0$.

Sea $Z \neq \{0\}$. Queremos usar el teorema 3.2.3. Por lo tanto, debemos primero encontrar un p apropiado. Para todo $x \in Z$ tenemos

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z \|x\|$$

Este es de la forma (3.13), donde

$$p(x) = \|f\|_Z \|x\|$$

Vemos que p esta definido sobre todo X. Además, p satisface (3.11) en X ya que por la desigualdad triangular,

$$p(x+y) = \|f\|_Z \|x+y\| \leq \|f\|_Z (\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y)$$

p también satisface (3.12) en X porque

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \|f\|_Z \|x\| = |\alpha| p(x)$$

Por lo tanto, podemos ahora aplicar el teorema 3.2.3 y concluir que existe un funcional lineal $\tilde{f}$ en X que es una extensión de f y satisface

$$\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x) = \|f\|_Z \|x\| \quad x \in X.$$

Teniendo el supremo sobre todos lo $x \in X$ de norma 1, obtenemos la desigualdad

$$\left\|\tilde{f}\right\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \left|\tilde{f}(x)\right| \leq \|f\|_Z$$

Ya que bajo una extensión la norma no puede disminuir, se tiene $\left\|\tilde{f}\right\|_X \geq \|f\|_Z$. Por lo tanto

$$\left\|\tilde{f}\right\|_X = \|f\|_Z$$

lo que demuestra el teorema.

3.3. La Integral de Riemann - Stieltjes

Inicialmente, abordaremos la integral de Riemann y posteriormente, la integral de Riemann - Stieltjes.

3.3.1. Definición (Partición)

Sea $[a, b]$ un intervalo dado. Una partición del intervalo $[a, b]$ es un subconjunto finito de puntos $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \subset [a, b]$ tal que $a, b \in P$ y también

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

se escribe $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ donde $i = 1, 2, ..., n$

Ahora sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función real acotada y $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Para $i = 1, 2, ..., n$, sean m_i y M_i el infimo y el supremo, respectivamente, dos valores de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, es decir

$$m_i = \inf f(t) \quad (t_{i-1} \leq t \leq t_i)$$

$$M_i = \sup f(t) \quad (t_{i-1} \leq t \leq t_i)$$

A partir de esto se define una suma inferior $s\,(P, f)$ y una sma superior $S\,(P, f)$ de la función f.

$$\begin{aligned} s\,(P, f) &= m_1\Delta t_1 + \cdots + m_n\Delta t_n &&= \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta t_i \\ S\,(P, f) &= M_1\Delta t_1 + \cdots + M_n\Delta t_n &&= \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta t_i \end{aligned}$$

y finalmente,

$$\int_a^b f(t)dt = \sup s\,(P, f) \tag{3.14}$$

$$\int_a^b f(t)dt = \inf S\,(P, f) \tag{3.15}$$

en el que el ínfimo y el supremo son relativos a todas las particiiones P de $[a, b]$. Los miembros a la izquierda en (3.14) y (3.15) son llamados, respectivamente, Integral de Riemann inferior y superior aplicado al intervalo $[a, b]$. Si (3.14) y (3.15) coiciden, se dice que f es Riemann . integrable en $[a, b]$, ó que f es R-integrable y el valor común de (3.14) y (3.15) es denotado por

$$\int_a^b f(t)dt \tag{3.16}$$

que es la integral de Riemann de f aplicado a $[a, b]$.

Siendo m el ínfimo y M el supremo de f en $[a, b]$, entonces

$$m \leq f(t) \leq M \quad (a \leq t \leq b)$$

luego, para toda partición P del intervalo $[a,b]$

$$m(b-a) \leq s\,(P,f) \leq S\,(P,f) \leq M(b-a)$$

de modo que los números $s\,(P,f)$ y $P\,(P,f)$ estén en un conjunto acotado.

Esto muestra que las integrales inferior y superior están definidas para toda función f acotada.

Nota: Una propiedad útil de las integrales de Riemann en que si f es integrable en el intervalo $[a,b]$, entonces $|f|$ también es integrable en $[a,b]$ y satisface

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Inicialmente será introducida la integral de Riemann-Stielties con respecto a las funciones monótonas crecientes. Posteriormente seran consideradas las funciones de variación acotada.

3.3.2. Definición (Integral de Riemann-Stieltjes)

Sea α una función monótona creciente en $[a,b]$. Como los números $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ son finitos, se sigue que α está acotada en $[a,b]$. Para cada partición P de $[a,b]$, tenemos

$$\Delta\alpha_i = \alpha\,(t_i) - \alpha\,(t_{i-1})$$

Claramente, $\Delta\alpha_i \geq 0$. Para cualquier función real f acotado en $[a,b]$ considere

$$\begin{aligned} s\,(P,f,\alpha) &= m_1\Delta t_1 + \cdots + m_n\Delta t_n &&= \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\alpha_i \\ S\,(P,f,\alpha) &= M_1\Delta t_1 + \cdots + M_n\Delta t_n &&= \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i \end{aligned}$$

donde M_i y m_i, tienen el mismo significado de la definición anterior. Asimismo por definición

$$\underline{\int_a^b} f(t)d\alpha = \sup s\left(P, f, \alpha\right) \tag{3.17}$$

$$\overline{\int_a^b} f(t)d\alpha = \inf S\left(P, f, \alpha\right) \tag{3.18}$$

siendo, nuevamente, el ínfimo y el supremo relativos a toda partición p de $[a, b]$.

Si los miembros a la izquierda de (3.17) y (3.18) son iguales, su valor común es denotado por

$$\int_a^b f(t)d\alpha(t) \tag{3.19}$$

o simplemente,

$$\int_a^b fd\alpha \tag{3.20}$$

Ésta es la integral de Riemann-Stieltjes, o simplemente la integral de Stieltjes, de f con respecto a la función α en $[a, b]$. Si (3.19) existe, es decir, si (3.17) y (3.18) son iguales, se dice que f es integrable es relación a α en el sentido de Riemann y se escribe que f es RS-integrable.

Nota: En el caso que $\alpha(t) = t$, la integral de Riemann-Stieltjes viene a ser la integral de Riemann.

A partir de ahora será investigada la existencia de la integral (3.20). Por lo tanto, se considera f real y acotada y α monótona creciente en $[a, b]$.

3.3.3. Definición (Refinaminto)

Se dice que $P^\star$ es un refinamiento de P si $P \subset P^\star$, es decir, si todo punto de P es un punto de $P^\star$.

Dadas dos particiones P_1 y P_2, se dice que $P^\star$ es un refinamiento común si $P^\star = P_1 \cup P_2$.

3.3.4. Teorema

Si $P^\star$ un refinamiento de P, entonces

$$s\left(P, f, \alpha\right) \leq s\left(P^\star, f, \alpha\right) \tag{3.21}$$

$$S\left(P^\star, f, \alpha\right) \leq S\left(P, f, \alpha\right) \tag{3.22}$$

Demostración Para demostrar (3.21), suponga inicialmente que la partición $P^\star$ resulta de P añadido de un único punto $t^\star$, es decir, $P^\star = P \cup \{t^\star\}$, de forma que $t_{i-1} < t^\star < t_i$, en el que t_{i-1} y t_i son dos puntos consecutivos de P. Sean

$$w_1 = \inf f(t) \quad (t_{i-1} \leq t \leq t^\star)$$
$$w_2 = \inf f(t) \quad (t^\star \leq t \leq t_i)$$

Como

$$m_i = \inf f(t) \quad (t_{i-1} \leq t \leq t_i)$$

se tiene que

$$w_1 \geq m_i \quad y \quad w_2 \geq m_i$$

y además de eso,

$$t_i - t_{i-1} = (t_i - t^\star) + (t^\star - t_{i-1})$$

Sabemos que

$$s\left(P^\star, f, \alpha\right) = m_1\left[\alpha\left(t_1\right) - \alpha\left(t_0\right)\right] + m_2\left[\alpha\left(t_2\right) - \alpha\left(t_1\right)\right] + \cdots + w_1\left[\alpha\left(t^\star\right) - \alpha\left(t_{i-1}\right)\right] + w_2\left[\alpha\left(t_i\right) - \alpha\left(t^\star\right)\right] +$$

$$s\left(P, f, \alpha\right) = m_1\left[\alpha\left(t_1\right) - \alpha\left(t_0\right)\right] + m_2\left[\alpha\left(t_2\right) - \alpha\left(t_1\right)\right] + \cdots + m_i\left[\alpha\left(t_i\right) - \alpha\left(t_{i-1}\right)\right] + \cdots$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
s\left(P^{\star}, f, \alpha\right) - s\left(P, f, \alpha\right) &= w_1\left[\alpha\left(t^{\star}\right) - \alpha\left(t_{i-1}\right)\right] + w_2\left[\alpha\left(t_i\right) - \alpha\left(t^{\star}\right)\right] - m_i\left[\alpha\left(t_i\right) - \alpha\left(t_{i-1}\right)\right] \\
&= \left(w_1 - m_i\right)\left[\alpha\left(t^{\star}\right) - \alpha\left(t_{i-1}\right)\right] + \left(w_2 - m_i\right)\left[\alpha\left(t_i\right) - \alpha\left(t^{\star}\right)\right] \geq 0
\end{aligned}
$$

Por consiguiente

$$s\left(P^{\star}, f, \alpha\right) \geq s\left(P, f, \alpha\right)$$

Si $P^{\star}$ contiene k puntos más que P, basta repetir el procedimiento anterior para k puntos. La demostración de (3.22) es de forma análoga.

3.3.5. Teorema

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha$$

Demostración Sea $P^{\star}$ un refinamiento común de dos particiones P_1 y P_2. Por el teorema 3.3.4

$$s\left(P_1, f, \alpha\right) \leq s\left(P^{\star}, f, \alpha\right) \leq S\left(P^{\star}, f, \alpha\right) \leq S\left(P_2, f, \alpha\right)$$

es decir,

$$s\left(P_1, f, \alpha\right) \leq S\left(P_2, f, \alpha\right) \tag{3.23}$$

Manteniendo la partición P_2 fija y considerando el supremo sobre todo P_1, resulta de (3.23) que

$$\sup s\left(P_1, f, \alpha\right) = \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq S\left(P_2, f, \alpha\right)$$

De la misma forma, manteniendo la partición P_1 fija y considerando el ínfimo sobre todo

P_1 se tiene

$$s(P_1, f, \alpha) \leq \inf S(P_2, f, \alpha) = \overline{\int_a^b} f d\alpha$$

Por lo tanto se tiene

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha$$

3.3.6. Teorema

Una función f es RS-integrable si y solamente si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P tal que

$$S(P, f, \alpha) - s(P, f, \alpha) < \varepsilon$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que f es RS-integrable. Dado $\varepsilon > 0$, existen particiones P_1 y P_2 tales que

$$S(P_2, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.24}$$

$$\int_a^b f d\alpha - s(P_1, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.25}$$

Sea P un refinamiento común de P_1 y P_2. Del teorema 3.3.4 juntamente con (3.24) y (3.25), muestra que

$$S(P, f, \alpha) \leq S(P_2, f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < s(P_1, f, \alpha) + \varepsilon \leq s(P, f, \alpha) + \varepsilon$$

es decir,

$$S(P, f, \alpha) < s(P, f, \alpha) + \varepsilon$$

Por lo tanto,

$$S(P, f, \alpha) - s(P, f, \alpha) < \varepsilon$$

Recíprocamente, para toda patición P se tiene

$$s(P,f,\alpha) \leq \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha \leq S(P,f,\alpha)$$

y como, por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que

$$S(P,f,\alpha) - s(P,f,\alpha) < \varepsilon$$

entonces,

$$\sup s(P,f,\alpha) = \inf S(P,f,\alpha)$$

Por lo tanto, la función f es RS-integrable.

3.3.7. Teorema

Si f es continua es $[a,b]$ entonces f es RS-integrable en relación a α en $[a,b]$. Además de eso, para todo $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\,\Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon \tag{3.26}$$

cualquiera que sea la partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ de $[a,b]$ con $\max \Delta t_i < \varepsilon$, y para cada alección de puntos $k_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Demostración Dado $\varepsilon > 0$, sea $\eta > 0$ tal que

$$[\alpha(b) - \alpha(a)]\,\eta < \varepsilon$$

como f es contínua es el intervalo compacto $[a,b]$, entonces f es uniformente continua en $[a,b]$. Asimismo, existe $\delta > 0$ tal que $t,k \in [a,b]$

$$|t-k| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(k)| < \eta \tag{3.27}$$

Si P es cualquier partición de $[a,b]$ tal que $\max \Delta t_i < \delta$ $(1 \leq i \leq n)$, entonces de (3.27) se tiene

$$M_i - m_i \leq \eta \quad (i = 1, ..., n)$$

Luego,

$$\begin{aligned} S(P,f,\alpha) - s(P,f,\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} \eta\Delta\alpha_i \\ &= n\sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \eta\,[\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon \end{aligned}$$

es decir,

$$S(P,f,\alpha) - s(P,f,\alpha) < \varepsilon$$

Por lo tanto, por el teorema 3.3.6, se sigue que f es RS-integrable.

Ahora, para probar (3.26), note que siendo f RS-integrable, suponga que $S(P,f,\alpha) - s(P,f,\alpha) < \varepsilon$ sea válida para $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ y $k_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Asimismo, $f(k_i) \in [m_i, M_i]$. Luego,

$$\begin{aligned} m_i \leq f(k_i) \leq M_i &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\,\Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i \\ &\Rightarrow s(P,f,\alpha) \leq \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\,\Delta\alpha_i \leq S(P,f,\alpha) \end{aligned}$$

Por otro lado, $s(P,f,\alpha) \leq \int_a^b f d\alpha \leq S(P,f,\alpha)$. Por lo tanto,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\,\Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon$$

suponiendo que α es monótona creciente en $[a,b]$, se demuestra el teorema.

3.3.8. Teorema

Si f es monótona en $[a,b]$ y si α es continua en $[a,b]$, entonces f es RS-integrable.

Demostración Dado $\varepsilon > 0$, cualquiera que sea el entero positivo n, considere una partición P tal que

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \quad (i = 1, ..., n)$$

ya que por hipótesis, α es contínua.

supongamos que f es monótona creciente, sean

$$M_i = f(t_i), \ \ m_i = f(t_{i-1}) \qquad (i = 1, ..., n)$$

Asimismo

$$\begin{aligned} S(P, f, \alpha) - s(P, f, \alpha) &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} [f(b) - f(a)] < \varepsilon \end{aligned}$$

haciendo n suficientemente grande. Luego,

$$S(P, f, \alpha) - s(P, f, \alpha) < \varepsilon$$

Por lo tanto, por el teorema 3.3.6, se sigue que f es RS-integrable.

En seguida serán enunciados algunas propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes.

3.3.9. Teorema

a) Si f y g son RS-integrables en $[a,b]$, entonces $f+g$ es RS-integrable y se tiene

$$\int_a^b (f+g)\, d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$$

b) Si f es RS-integrable en $[a,b]$ y c es una constante cualquiera, entonces cf es RS-integrable y

$$\int_a^b cf d\alpha = c\int_a^b f d\alpha$$

c) Si f y g son RS-integrables en $[a,b]$, y si $f(t) \leq g(t)$ en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b g d\alpha$$

d) Si f es RS-integrable en $[a,b]$ y si $|f(t)| \leq M$ en $[a,b]$, entonces

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq M\left[\alpha(b) - \alpha(a)\right]$$

e) Si f es RS-integrable en $[a,b]$ y si $a < c < b$, entonces f es RS-integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ se tiene

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

f) Si f es RS-integrable en relación a α_1 en $[a,b]$ y f es RS-integrable en relación a α_2 en $[a,b]$, entonces f es RS-integrable en relación a $\alpha_1 + \alpha_2$ en $[a,b]$ y se tiene

$$\int_a^b f d\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2$$

g) Si f es RS-integrable en $[a,b]$ y c una constante positiva, entonces f es RS-integrable en relación a $c\alpha$ en $[a,b]$ y se tiene

$$\int_a^b f d\left(c\alpha\right) = c\int_a^b f d\alpha$$

3.3.10. Ejemplo

Sea

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{si}\, t < \frac{1}{2} \\ 2, & \text{si}\, t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{y}\; f(t) = t^2$$

Será demostrado que f es RS-integrable y que

$$\int_0^1 f d\alpha = \frac{1}{2}$$

La idea es utilizar el teorema 3.3.6. Sea $\varepsilon > 0$ considere una partición P del intervalo $[0, 1]$ donde

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k \leq \cdots \leq t_{2k} = 1 \;\; \text{y}\; \Delta t_k = \frac{1}{2k}$$

Es preciso determinar k. Note que

$$\begin{aligned}
t_0 &= 0 \\
t_1 &= t_0 + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k} \\
t_2 &= t_1 + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = 2\left(\frac{1}{2k}\right) \\
t_3 &= t_2 + \frac{1}{2k} = 2\left(\frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2k} = 3\left(\frac{1}{2k}\right) \\
&\vdots \\
t_{k-1} &= (k-1)\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \\
t_k &= k\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Considerando

$$M_i = \sup\{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

$$m_i = \inf\{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

y siendo, $f(t)$ creciente en el intervalo $[a,b]$ entonces

$$S(P,f,\alpha) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 [2-0] = \frac{1}{2}$$
$$s(P,f,\alpha) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)^2 [2-0] = 2\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{4k^2}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2}$$

luego,

$$S(P,f,\alpha) - s(P,f,\alpha) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}$$

siendo $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, basta considerar k como el mayor entero positivo tal que

$$k > \frac{1+\sqrt{1-2\varepsilon}}{2\varepsilon}, \text{ ya que } \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}\right) < \varepsilon$$

luego,

$$S(P,f,\alpha) - s(P,f,\alpha) < \varepsilon.$$

En el caso en que $\varepsilon > \frac{1}{2}$, todo $k > 0$ satisface. Por lo tanto, dado un $\varepsilon > 0$, existe una partición P tal que

$$S(P,f,\alpha) - s(P,f,\alpha) < \varepsilon$$

determinado por k. Asimismo, existe $\int_a^b f d\alpha$, ya que

$$\underline{\int_0^1} f d\alpha = \overline{\int_0^1} f d\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 f d\alpha = \frac{1}{2}$$

Nota: Hasta este momento, la integración de la función f en $[a,b]$ fué referente a las funciones monótonas crecientes α. Ahora, toda la teoría de integración presentada anteriormente puede ser ampliada sustituyendo la clase de funciones monótonas por la clase de funciones de variación acotada.

3.3.11. Definición (Funciones de Variación Acotada)

Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Una función w definida en $[a, b]$ se llama función de variación acotada en $[a, b]$ si su variación total $\mathrm{Var}\,(w, a, b)$ de w en $[a, b]$ es finita, donde

$$\mathrm{Var}\,(w, a, b) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |w\,(t_i) - w\,(t_{i-1})| < \infty; P\,\text{partición de}\,[a, b] \right\} \tag{3.28}$$

En el que el supremo es relativo a todas las particiones de $[a, b]$. Cuando el intervalo es evidente, se escribe $\mathrm{Var}\,(w)$.

Las funciones de variación acotada pueden, por ejemplo, ser obtenidas a partir del siguiente resultado:

3.3.12. Lema

Si f es una función Riemann-integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces una función F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es una función de variación acotada en $[a, b]$.

Demostración Para mostrar que F es de variación acotada, sea

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

una partición P de $[a, b]$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |F\,(x_i) - F\,(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Por lo tanto, considerando el supremo sobre todas las posibles particiones del intervalo

$[a, b]$, se tiene

$$\operatorname{Var}(F) \leq \int_a^b |f(t)|\, dt < \infty$$

Nota: El conjunto de todas las funciones de variación acotada en $[a, b]$ forman un espacio vectorial. La norma de este espacio está definido por

$$\|w\| = |w(a)| + \operatorname{Var}(w) \tag{3.29}$$

Para probar que (3.29) define una norma, considere $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ cualquier partición de $[a, b]$ y

$$\operatorname{Var}(w) = \sup \sum_{i=1}^{n} |w(t_i) - w(t_{i-1})|$$

en el que el supremo es relativo a todas las particiones de $[a, b]$. Observe que si $w = 0$, entonces

$$|w(a)| + \operatorname{Var}(w) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \|w\| = 0$$

Por otro lado, si $\|w\| = 0$, entonces

$$0 \geq -|w(a)| = \operatorname{Var}(w) = \sup \sum_{i=1}^{n} |w(t_i) - w(t_{i-1})|$$

implicando que $\operatorname{Var}(w) = 0$. Luego, $w = 0$.

Ahora, $\|w\| \geq 0$ por la propia definición de norma.

Tambien se tiene

$$\begin{aligned} \|\alpha w\| = |\alpha w| + \operatorname{Var}(\alpha w) &= |\alpha|\,|w(a)| + |\alpha| \operatorname{Var}(w) \\ &= |\alpha|\,(|w(a)| + \operatorname{Var}(w)) \\ &= |\alpha|\,\|w\| \end{aligned}$$

Probando la desigualdad triangular. Sea

$$\Delta w_i = w\left(t_i\right) - w\left(t_{i-1}\right) \text{ y } \Delta \tilde{w}_i = \tilde{w}\left(t_i\right) - \tilde{w}\left(t_{i-1}\right)$$

Entonces, para cualquier partición P de $[a, b]$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta w_i - \Delta \tilde{w}_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |\Delta w_i| + \sum_{i=1}^{n} |\Delta \tilde{w}_i|$$

Luego,

$$\sup \sum_{i=1}^{n} |\Delta w_i - \Delta \tilde{w}_i| \leq \sup \sum_{i=1}^{n} |\Delta w_i| + \sup \sum_{i=1}^{n} |\Delta \tilde{w}_i|$$

es decir,

$$\operatorname{Var}\left(w + \tilde{w}\right) \leq \operatorname{Var}\left(w\right) + \operatorname{Var}\left(\tilde{w}\right).$$

Además de eso, por la desigualdad triangular, se tiene

$$|w(a) + \tilde{w}(a)| \leq |w(a)| + |\tilde{w}(a)|$$

Además,

$$\begin{aligned}
\|w + \tilde{w}\| = |\left(w + \tilde{w}\right)\left(a\right)| + \operatorname{Var}\left(w + \tilde{w}\right) &= |w(a) + \tilde{w}(a)| + \operatorname{Var}\left(w + \tilde{w}\right) \\
&\leq |w(a)| + |\tilde{w}(a)| + \operatorname{Var}\left(w\right) + \operatorname{Var}\left(\tilde{w}\right) \\
&= \left[|w(a)| + \operatorname{Var}\left(w\right)\right] + \left[|\tilde{w}(a)| + \operatorname{Var}\left(\tilde{w}\right)\right] \\
&= \|w\| + \|\tilde{w}\|
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|w + \tilde{w}\| \leq \|w\| + \|\tilde{w}\|$$

Nota: El espacio de las funciones de variación acotada, con la norma definida en (3.29), es denotado por $BV[a, b]$.

3.3.13. Teorema

Si α es monótona creciente en $[a, b]$, entonces α es de variación acotada en $[a, b]$ y $\mathrm{Var}(\alpha) = \alpha(b) - \alpha(a)$.

Demostración Sea P cualquier partición del intervalo $[a, b]$, donde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha\left(x_i\right) - \alpha\left(x_{i-1}\right)\right| &= \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha\left(x_i\right) - \alpha\left(x_{i-1}\right)\right] \\
&= \alpha\left(x_1\right) - \alpha\left(x_0\right) + \alpha\left(x_2\right) - \alpha\left(x_1\right) + \cdots + \alpha\left(x_n\right) - \alpha\left(x_{n-1}\right) \\
&= \alpha\left(x_n\right) - \alpha\left(x_0\right) \\
&= \alpha\left(b\right) - \alpha\left(a\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, considerando el supermo sobre todas las posibles particiones del intervalo $[a, b]$, se tiene

$$\mathrm{Var}\left(\alpha\right) = \alpha\left(b\right) - \alpha\left(a\right)$$

Nota: El resultado permanece válido si α es monótona decreciente, y en este caso

$$\mathrm{Var}\left(\alpha\right) = \alpha\left(a\right) - \alpha\left(b\right)$$

3.3.14. Teorema

Una función f es de variación acotada en $[a, b]$ si, y solamente si, es la diferencia de dos funciones monótonas crecientes.

DEMOSTRACIÓN Sea

$$\beta(t) = \mathrm{Var}\,(f, a, t)\,, \qquad a \leq t \leq b \tag{3.30}$$

Note que β es monótona creciente, ya que la variación total de cualquier función de variación acotada sobre cualquier intervalo es no negativa.

Considere una función $\gamma(t) = \beta(t) - f(t)$. Falta mostrar que γ es monótona creciente, en efecto, si $t_! \leq t_2$, entonces

$$\gamma\,(t_2) - \gamma\,(t_1) = [\beta\,(t_2) - \beta\,(t_1)] - [f\,(t_2) - f\,(t_1)] \tag{3.31}$$

Ahora, $|f\,(t_2) - f\,(t_1)| \leq \beta\,(t_2) - \beta\,(t_!)$, por la propia definición de β.

Luego, en (3.31) se tiene

$$\gamma\,(t_2) - \gamma\,(t_1) \geq 0 \Rightarrow \gamma\,(t_2) \geq \gamma\,(t_1)\,,$$

resultado que γ es monótona creciente.

Por lo tanto, de (3.30) se tiene $f = \beta - \alpha$, es la diferencia de dos funciones monótonas crecientes.

Recíprocamente, si $f = \beta - \alpha$, donde β y γ son monótonas crecientes, entonces por el teorema 3.3.12, se tiene que β y γ son de variación acotada en $[a, b]$. Luego, como f es la diferencia de dos funciones de variación acotada en $[a, b]$, se tiene que f es de variación acotada en $[a, b]$.

EL TEOREMA DE REPRESENTACIÓN PARA FUNCIONALES LINEALES ACOTADOS SOBRE $C[a.b]$. POR RIESZ (1909).

3.4. Teorema de RIESZ (Funcionales sobre $C[a, b]$)

Todo funcional lineal acotado f sobre $C[a, b]$ puede ser representado por una integral de Riemann-Stieltjes

$$f(x) = \int_a^b x(t)dw(t) \tag{3.32}$$

donde w es de variación acotada sobre $[a, b]$ y tiene la variación total

$$\mathrm{Var}(w) = \|f\| \tag{3.33}$$

Demostración Del Teorema de Hahn-Banach 3.2.4 para espacios normados, verificamos que f tiene una extensión $\tilde{f}$ de $C[a, b]$ al espacio normado $B[a, b]$ de todas las funcions acotadas y tiene la misma norma definida por

$$\|x\| = \sup_{t\in J} |x(t)| \quad , J = [a, b]$$

Además por este teorema, la funcional lineal $\tilde{f}$ es acotado y tiene la misma norma que f, esto es,

$$\left\|\tilde{f}\right\| = \|f\|$$

Nosotros definimos la función w necesaria en (3.32). Para éste propósito consideramos la función x_t mostrada en la figura:

Ésta función está definido sobre $[a, b]$ y, por definición, 1 está en $[a, t]$ y 0 caso contrario. Claramente $x_t \in B[a, b]$. Llamaremos a x_t la función característica del intervalo $[a, t]$. Usando x_t y la función $\tilde{f}$, definimos w sobre $[a, b]$ por

$$w(a) = 0 \quad w(t) = \tilde{f}\,(x_t) \quad , t \in < a, b].$$

Mostraremos que ésta función w es de variación acotada y

$$\operatorname{Var}(w) \leq \|f\|$$

Para una cnatidad compleja podemos usar la forma polar. De hecho, $\theta = \arg\xi$, podemos escribir

$$\xi = |\xi| \, e(\xi)$$

Donde

$$e(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si}\, \xi = 0 \\ e^{i\theta} & \text{si}\, \xi \neq 0 \end{cases}$$

observemos que si $\xi \neq 0$, entonces $|\xi| = \frac{\xi}{e^{i\theta}} = \xi e^{-i\theta}$.

Por lo tanto para cada ξ, cero o no, tenemos

$$|\xi| = \xi \overline{e(\xi)} \tag{3.34}$$

donde la barra indica conjugación compleja. Para simplificar fórmulas posteriores también escribimos

$$\varepsilon_j = \overline{e(w(t_j) - w(t_{j-1}))}$$

y $x_{t_j} = x_j$. De esta manera evitamos subíndices de subíndices. Luego, por (3.34) para cada partición obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\left|w\left(t_{j}\right)-w\left(t_{j-1}\right)\right| &= \left|\tilde{f}\left(x_{1}\right)\right|+\sum_{j=2}^{n}\left|\tilde{f}\left(x_{j}\right)-\tilde{f}\left(x_{j-1}\right)\right| \\ &= \varepsilon_{1}\tilde{f}\left(x_{1}\right)+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_{j}\left[\tilde{f}\left(x_{j}\right)-\tilde{f}\left(x_{j-1}\right)\right] \\ &= \tilde{f}\left(\varepsilon_{1}x_{1}+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_{j}\left[x_{j}-x_{j-1}\right]\right) \\ &\leq \left\|\tilde{f}\right\|\left\|\varepsilon_{1}x_{1}+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_{j}\left[x_{j}-x_{j-1}\right]\right\|\end{aligned}$$

A la derecha, $\left\|\tilde{f}\right\| = \|f\|$ (ver antes) y el otro factor $\|\cdots\|$ es igual a 1 porque $|\varepsilon_j| = 1$ y de la definición de x_j observamos que para cada $t \in [a,b]$ sólo uno de los términos $x_1, x_2 - x_1, ...$ no es cero (y su norma es 1). A la izquierda, podemos tomar el supremo sobre todas las particiones de $[a,b]$. Luego tenemos

$$\operatorname{Var}(w) \leq \|f\| \tag{3.35}$$

pos lo tanto w es de variación acotada sobre $[a,b]$.

Ahora, probaremos (3.32), donde $x \in C[a,b]$. Para cada partición P_n definimos una función z_n teniendo en cuenta que z_n depende de P_n no necesariamente de n. La definición de la fórmula es

$$z_n = x\left(t_0\right)x_1 + \sum_{j=2}^{n} x\left(t_{j-1}\right)\left[x_j - x_{j-1}\right] \tag{3.36}$$

Luego $z_n \in B[a,b]$. Por la definición de w.

$$\tilde{f}\left(z_n\right) = x\left(t_0\right)\tilde{f}\left(x_1\right) + \sum_{j=2}^{n} x\left(t_{j-1}\right)\left[\tilde{f}\left(x_j\right) - \tilde{f}\left(x_{j-1}\right)\right]$$
$$= x\left(t_0\right)w\left(t_1\right) + \sum_{j=2}^{n} x\left(t_{j-1}\right)\left[w\left(t_j\right) - w\left(t_{j-1}\right)\right]$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x\left(t_{j-1}\right)\left[w\left(t_j\right) - w\left(t_{j-1}\right)\right] \tag{3.37}$$

donde la última desigualdad se obtiene de $w\left(t_0\right) = w(a) = 0$. Ahora elegimos una sucesión $\left(P_n\right)$ de particiones de $[a,b]$ tal que $\eta\left(P_n\right) \to 0$, observe que t_j en (3.37) se aproxima a la integral en (3.32), y de (3.32) $\tilde{f}(z_n) \to \tilde{f}(x)$, el cual es igual a $f(x)$ ya que $x \in C[a,b]$.

Demostraremos que $\tilde{f}(z_n) \to \tilde{f}(x)$. Recordando la definición de x_t, se observa que de (3.36) resulta $z_n(a) = x(a)$,1 ya que la suma en (3.36) es cero en $t = a$. Por lo tanto $z_n(a) - x(a) = 0$. Además, por (3.36), si $t_{j-1} < t \leq t_j$, entonces se obtiene

$$z_n(t) = x\left(t_{j-1}\right),1$$

Se sigue que para esos t

$$\left|z_n(t) = x(t)\right| = \left|x\left(t_{j-1}\right) - x(t)\right|$$

Por consiguiente, si $\eta\left(P_n\right) \to 0$, entonces $\|z_n - x\| \to 0$ porque x es contínua en $[a,b]$, por lo tanto, es uniformemente continua en $[a,b]$, ya que $[a,b]$ es compacto. La continuidad de $\tilde{f}$ implica

$$\tilde{f}\left(z_n\right) \to \tilde{f}(x) \text{ y}$$

$$\tilde{f}(x) = f(x),$$

de manera, que (3.32) esta establecido.

Finalmente se prueba (3.33). De (3.32) tenemos

$$|f(x)| \leq \max_{t \in J} |x(t)| \operatorname{Var}(w) = \|x\| \operatorname{Var}(w)$$

Tomando el supremo sobre los $x \in C[a, b]$ de norma uno, se obtiene

$$\|f\| \leq \operatorname{Var}(w)$$

Junto con (3.35) tenemos

$$\operatorname{Var}(w) = \|f\|$$

Nota: Se observa que w en el teorema no es único, Pero se puede volver único considerando a w con las siguientes condiciones:

(i) w es cero en a y continua de la derecha

$$w(a) = 0, \, w\,(t + 0) = w(t) \qquad (a < t < b)$$

Capítulo 4

Metodología de la Investigación

4.1. Tipo de Investigación

El trabajo de investigación, de acuerdo a la naturaleza del problema a los objetivos formulados, reúne condiciones para ser calificado como una investigación básica.

4.2. Método de Investigación

En la investigación se enuncia y demuestra el teorema de Hahn – Banach, por lo que se empleará el método hipotético deductivo basado en la investigación bibliográfica y documental.

4.3. Diseño de Investigación

Debido a la naturaleza de la investigación, ésta responde a una investigación descriptiva y de carácter demostrativo.

.

Conclusiones

Al terminar el trabajo de investigación, se llegó a las siguientes conclusiones:

- El Teorema de Hahn Banach no requiere considerar una topología específica en el espacio vectorial X, su interés es solamente extender un funcional y su demostración hace uso del Lema de Zorn.

- El interés del teorema de Hahn Banach, radica en que puede encontrarse una extensión lineal que siga dominado por una funcional sublineal p, más no en el problema de la existencia de la extensión.

- En el Teorema de Representación de Riesz, ω no es único, pero puede hacerse único, haciendo que, ω sea una función normalizada de variación acotada.

Recomendaciones

- El presente resultado que obtiene la fórmula de representación general para funcionales lineales acotados en $C[a, b]$, donde $[a, b]$ es un intervalo compacto fijo, en términos de la integral de Riemann- Stieltjes, puede ser generalizado a funcionales lineales continuos positivos sobre el espacio de funciones continuas definido en cierto espacio topológico. Más precisamente, cualquier funcional lineal continuo positivos sobre el espacio de funciones continuas en espacios de Hausdorff localmente compactos, puede representarse de forma única por una medida regular de Borel sobre un $\sigma - \acute{a}lgebra$ del espacio topológico. Las personas interesadas pueden investigar al respecto; el articulo [ZC] de Claudia Zepeda "El teorema de representación de Riesz" puede servir para tal caso.

- El teorema de representación de Riesz de acuerdo a cómo se presentó en la recomendación anterior, tiene dos aplicaciones notables, una de ellas es su aplicabilidad en la construcción del núcleo de Poisson, utilizado para resolver el problema de Dirichlet en dos dimensiones. Específicamente, sirve para hallar las soluciones a la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Específicamente, sirve para hallar las soluciones a la ecuación de Laplace en dos dimensiones, dadas las condiciones de frontera de Dirichlet sobre un disco unitario. Los núcleos de Poisson se encuentran a menudo en aplicaciones en la teoría de control y problemas en dos dimensiones en la electrostática. La otra aplicación del teorema de Riesz, es su papel fundamental en la demostración del interesante resultado del teorema de Mazur en el espacio $C(K)$, el cual asegura que a partir de una sucesión puntualmente convergente en $C(K)$, podemos obtener una sucesión uniformemente convergente con el mismo punto de convergencia, a partir de ciertas combinaciones convexas. Recomendamos la bibliografía de [ZC] para establecer dichos resultados.

- Existen versiones más generales del Teorema de Representación de Riesz, que no fueron desarrollados en este trabajo, por el nivel de complejidad de su estudio. Sin embargo, el resultado desarrollado en este trabajo de investigación puede ser útil como referencia básica, en el estudio futuro del teorema en versiones más generales.

- Otras aplicaciones interesantes, en donde el teorema de representación de Riesz juega un papel fundamental y podrían considerarse en trabajos posteriores son:

  - Teorema de Krein – Smulian, que caracteriza cuando la envoltura convexa cerrada de un conjunto compacto es de nuevo compacto, en este contexto el Teorema de Riesz permite identificar el dual de $C(X)$ con el espacio $M(K)$ de las medidas de Radon definidas en $\sigma - \acute{a}lgebra$ de Borel de K, lo cual es fundamental para su demostración.

  - Caracterización débilmente compacta de Grothendieck, estas aplicaciones no fueron incorporadas en el presente trabajo por el nivel de complejidad en su estudio y la falta de tiempo; sin embargo, es conveniente hacer mención de ellas, puesto que algunas personas podrían estar interesados en estudiar con detalle tales resultados.

Bibliografía

[K] Kreyszig Erwin(1978), Introductory functional analysis with applications; editors John Wiley & Sons – university of Windsor.

[R] Rudin, Walter (1979); Análisis Funcional, editorial Reverté, Universidad Complutense de Madrid.

[B] Brezis, Haim (1984); Analyse fonctionnelle, Alianza Editorial, Madrid España.

[C] Collatz, Lothar (1966); Functional analysis and numerical mathematics, Academis Press New York USA.

[L] Lang, Serge (1993); Real and Functional Analysis, Springer-Verlag New York

[M] MacCluer, Barbara D. (2009); Elementary Functional Analysis, Edit. Board university of Virginia.

[C] Conway, Jhon B (1985); A Course in Functional Analysis. Springer – Verlag New York.

[S] Saxe, Karen (2002); Beginning Functional Analysis, Spriger-Verlag New York.

[AK] Abiac Fernando, Kalton Nigel J. (2006); Topics in Banach Space Theory, Springer – Verlag USA.