Dedicado a mi padre Eduardo

y madre Maura

Agradecimientos

- Agradezco a Dios por haberme permitido llegar a donde llegué, por haberme proporcionado todos los momentos de vida. En fin, por todo;

- A mi esposo por un amigo, compañero y una persona especial en mi vida, y por su apoyo constante en todos estos últimos años;

- A mi familia que me apoyo en esta jornada y me incentivo para que alcanzase mi objetivo, con palabras de apoyo y optimismo;

- A mis hermanos por cada momento de felicidad que me brindaron, por ser en verdad un apoyo para mí;

- A la doctora Patricia Hilario Tacuri por el apoyo que me brindo en la realización de mi proyecto de investigación y a mi director de tesis Julio Villalta Pacori por su orientación de la misma;

- A todos los profesores, amigos(as) que tuve la oportunidad de conocerlos(as) en el transcurso de todos estos años; de forma general a todos los que contribuyeron para el término de mi proyecto de tesis.

INDICE

Resumen

En este trabajo, abordamos la diferenciabilidad en espacios de Banach y el teorema del punto fijo. El objetivo principal de este trabajo, es demostrar el teorema de la función implícita en espacios de Banach usando el teorema del punto fijo como una herramienta fundamental en la demostración.

Palabras claves: Banach, Diferenciabilidad, Contracción, Implícita.

Abstract

In this paper, we discuss the diferentiability in Banach spaces and the fixed point theorem. The main objective of this work is to demonstrate the theorem of the implicit function in Banach spaces using the fixed point theorem as a fundamental tool in the demonstration.

Key words: Banach, Diferentiability, Contraction, Implicit.

Capítulo 1

Introducción

Desde su aparición a principios del siglo XX, el análisis funcional se ha desarrollado considerablemente convirtiéndose en una herramienta poderosa y útil para abordar una amplia variedad de problemas. Aquí resaltaré, el trabajo del matemático Polonés Stefan Banach en cuya tesis desarrolla una teoría general de una clase de espacios normados (denotados por B-espacios, en su tesis) y operadores lineales entre dichos espacios, en esta época del siglo XIX se sistematizó la aplicación de los métodos topológicos al estudio de los espacios de Banach (espacios normados completos).
Por otro lado, el teorema del punto fijo de Banach es uno de los resultados fundamentales en estos espacios de Banach, el cual garantiza la existencia y unicidad del punto fijo para determinados tipos de ecuaciones y aplicaciones. Además este teorema del punto fijo es una herramienta principal en la demostración del teorema de la función implícita, que a su vez este último teorema dado en modernas técnicas del análisis es usado como por ejemplo en ecuaciones diferenciales parciales elípticas.
El presente trabajo tiene por objetivo enunciar y demostrar el teorema de la función implícita en espacios de Banach que envuelve funciones definidas en un abierto
$U \times V$, un subconjunto abierto de $X \times Y$ y asumiendo valores en Z, donde X, Y y Z son espacios de Banach. Considerando ciertas hipótesis sobre G y suponiendo

$$G(x_0, y_0) = 0 \text{ con } (x_0,\ y_0) \in U \times V$$

El teorema garantiza la existencia de una única aplicación

$$y = f(x): U \subset X \to V \subset Y$$

Sobre la vecindad de U de x_0 y V de y_0, que es solución de la ecuación

$$G\big(x, f(x)\big) = 0$$

Así, decimos que $G\big(x, f(x)\big) = 0$ define implícitamente y como una función de x.

En el capítulo 2 consta de la revisión literaria en donde presentamos los conceptos y resultados fundamentales del análisis funcional involucrados en el tema.

En el capítulo 3 daremos a conocer los materiales y métodos utilizados para el tema tratado.
En el capítulo 4 presentamos el teorema de la función implícita en espacios de Banach
haciendo uso el teorema del punto fijo para la demostración respectiva. Así se verá que fueron usados algunos resultados importantes como la diferenciabilidad, el teorema del punto fijo de Banach.
Finalmente se hace referencia respecto de las conclusiones a las que se llegó al realizar el presente trabajo.

Capítulo 2

Revisión de Literatura

En este capítulo presentaremos un resumen de los resultados básicos necesarios para el desarrollo de los capítulos siguientes, abordaremos algunos conceptos acerca de espacios métricos, sucesión de Cauchy, espacios métricos completos, aplicaciones continuas, espacios de Banach, operadores lineales acotadas y continuas, diferenciabilidad, punto fijo de Banach, contracción. Tales conceptos son imprescindibles para el entendimiento de la demostración del teorema de la función implícita.

2.1 Espacios Métricos

Definición 1. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$. Sea $d: X \times X \to \mathbb{R}$ decimos que d es una **métrica** si satisface las siguientes condiciones para cualesquiera $x, y, z \in X$

$d1)$ $d(x; y) \geq 0$
$d2)$ $d(x; y) = 0$ si y solo si $x = y$
$d3)$ $d(x; y) = d(y; x)$
$d4)$ $d(x, y) \leq d(x; z) + d(z; y)$.

La propiedad $d4)$ es conocida como desigualdad triangular.

Definición 2. El conjunto $X \neq \emptyset$ asociado con la métrica d es llamado *espacio métrico* y será denotado por $(X; d)$.

Observación 2.1. De $d4)$ obtenemos, por inducción, la desigualdad triangular generalizada. Esto es, para $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n \in X$,

$$d(x_1; x_n) \leq d(x_1; x_2) + d(x_2; x_3) + d(x_3; x_4) + \cdots + d(x_{n-1}; x_n)$$

Algunas veces escribimos solamente X en lugar de (X; d).

Definición 3. Un subespacio $(Y; \bar{d})$ de $(X; d)$ es obtenido al considerar $Y \subset X$ y $\bar{d}$ como la restricción de d al conjunto $Y \times Y$, como

$$\bar{d} = d|_{Y \times Y}.$$

$\bar{d}$ es llamada métrica inducida en Y por d.

En seguida, damos a conocer algunos ejemplos de espacios métricos.

Ejemplo 2.2. La recta $(\mathbb{R}; d)$ llamada métrica usual es un espacio métrico.

En efecto, consideremos el conjunto de todos los números reales, y sea $|.|$el valor absoluto, la función $d: X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $d(x; y) = |x - y|$ es una métrica sobre $\mathbb{R}$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ obtenemos

d1) Si $d(x; y) = |x - y|$ entonces $(x; y) = |x - y| \geq 0$ por definición del valor absoluto.

d2) Si $d(x; y) = |x - y| = 0$. Entonces $x - y = 0$, es decir $x = y$. Ahora, mostrando
inversamente cuando $x = y$, entonces $|x - y| = 0$. Por tanto $d(x; y) = |x - y| = 0$.

d3) $d(x; y) = |x - y| = |(-1)(-x + y)| = |y - x| = d(y; x)$

d4) $d(x; y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x; z) + d(z; y)$.

Por lo tanto, d es una métrica y $(\mathbb{R}; d)$ un espacio métrico.

Ejemplo 2.3. El plano euclidiano $\mathbb{R}^2$

El espacio métrico $(\mathbb{R}^2; d)$ es obtenido del conjunto de pares ordenados de números reales $x = (\xi_1, \xi_2); y = (\eta_1, \eta_2)$, donde $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es definida por

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$$

En efecto, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ tenemos

d1) $d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} \geq 0$, pues la raíz cuadrada es positiva.

d2) $\Rightarrow$) Si $d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} = 0$. De ello notemos que $(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 = 0$. Entonces $\xi_1 = \eta_1,\ \xi_2 = \eta_2$.
$\Leftarrow$) Si $\xi_1 = \eta_1,\ \xi_2 = \eta_2$, entonces $(\xi_1 - \eta_1)^2 = 0,\ (\xi_2 - \eta_2)^2 = 0$. Así,
$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$.

d3) $d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} = \sqrt{((-1)(\eta_1 - \xi_1))^2 + ((-1)(\eta_2 - \xi_2))^2} = \sqrt{(\eta_1 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \xi_2)^2} = d(y, x)$.

d4) $d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$

Sean $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2), z = (\zeta_1, \zeta_2)$. Debemos demostrar que

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

En efecto, recordemos que la métrica en $\mathbb{R}^2$ puede ser inducida por el producto interno, esto es

$$d(x,y) = \sqrt{< x-y, x-y >} \quad \text{para } x,y \in \mathbb{R}^2$$

En seguida considerando $x - y = (\xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2)$, tenemos

$$\begin{aligned} d(x,y)^2 &=< x-y, x-y >= (\xi_1-\eta_1)^2 + (\xi_2-\eta_2)^2 \\ &= (\xi_1-\zeta_1+\zeta_1-\eta_1)^2 + (\xi_2-\zeta_2+\zeta_2-\eta_2)^2 \\ &= (\xi_1-\zeta_1)^2 + 2(\xi_1-\zeta_1)(\zeta_1-\eta_1) + (\zeta_1-\eta_1)^2 + (\xi_2-\zeta_2)^2 + \\ &\quad 2(\xi_2-\zeta_2)(\zeta_2-\eta_2) + (\zeta_2-\eta_2)^2 \\ &= (\xi_1-\zeta_1)^2 + (\zeta_1-\eta_1)^2 + (\xi_2-\zeta_2)^2 + (\zeta_2-\eta_2)^2 \\ &\quad +2[(\xi_1-\zeta_1)(\zeta_1-\eta_1) + (\xi_2-\zeta_2)(\zeta_2-\eta_2)] \end{aligned}$$

$$d(x,y)^2 = d(x,z)^2 + d(z,y)^2 < A \tag{2.1}$$

Donde $A = (\xi_1-\zeta_1)(\zeta_1-\eta_1) + (\xi_2-\zeta_2)(\zeta_2-\eta_2)$

Ahora consideremos lo siguiente

$$u = x - z \qquad \text{y} \qquad v = z - y$$

Luego,

$$u = (\xi_1-\zeta_1, \xi_2-\zeta_2) \qquad \text{y} \qquad v = (\zeta_1-\eta_1, \zeta_2-\eta_2)$$

Por la desigualdad de Cauchy- Schwarz, tenemos

$$\begin{aligned} |\langle u,v\rangle| &= |(\xi_1-\zeta_1)(\zeta_1-\eta_1) + (\xi_2-\zeta_2)(\zeta_2-\eta_2)| \\ &\leq (\sqrt{(\xi_1-\zeta_1)^2 + (\xi_2-\zeta_2)^2})(\sqrt{(\zeta_1-\eta_1)^2 + (\zeta_2-\eta_2)^2}) \end{aligned}$$

Así, se sigue que

$$\begin{aligned} A \leq |(\xi_1-\zeta_1)(\zeta_1-\eta_1) + (\xi_2-\zeta_2)(\zeta_2-\eta_2)| &\leq d(x,z).d(y,z) \\ &= \big(d(x,z) + d(y,z)\big)^2. \end{aligned}$$

De ahí obtenemos

$$\big(d(x,y)\big)^2 \leq \big(d(x,z) + d(z,y)\big)^2$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Por lo tanto concluimos que $(\mathbb{R}^2; d)$ es un espacio métrico.

Ejemplo 2.4. El espacio tri-dimensional $(\mathbb{R}^3; d)$ dado por las triplas ordenadas $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),\ y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ y la métrica euclidiana definida por

$$d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}$$

Es un espacio métrico.

Ejemplo 2.5. El espacio eucliadiano $\mathbb{R}^n$, el espacio $\mathbb{C}^n$, el plano complejo es un espacio métrico.
El conjunto $\mathbb{R}^n$ es formado por todas las n-uplas sucesiones finitas, siendo $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),\ y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ puntos arbitrarios de $\mathbb{R}^n$ y la métrica euclidiana definida por

$$d_1(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2}.$$

El espacio $\mathbb{C}^n$ es el espacio de todas las n-uplas ordenada de números complejos con la métrica definida por

$$d_2(x,y) = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + |\xi_2 - \eta_2|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2}.$$

Cuando $n = 1$ tenemos el plano complejo $\mathbb{C}$ con la métrica usual definida por

$$d_2(x,y) = |x - y|.$$

Estas métricas d_1 y d_2 junto con $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ respectivamente $(\mathbb{R}^n, d_1)$ y $(\mathbb{C}^n, d_2)$ son espacios métricos.

Ejemplo 2.6 Espacio de sucesiones l^∞

Sea X el conjunto de todas las sucesiones de números limitadas, esto es, $X = \{x = (x = (\xi_1, \xi_2, \dots)/|\xi_j| \leq c_x\},\ \xi_1, \xi_2, \dots \in \mathbb{R}$ tal que para todo $j = 1,2, \dots$ el número c_x depende de x, más no depende de j. Escogemos la métrica definida por

$$d(x,y) = sup_{j\in\mathbb{N}}|\xi_j - \eta_j|$$

Donde $y = (\eta_j) \in X$ y $\mathbb{N} = \{1,2, \dots\}$ y sup denota supremo (la menor de las cotas superiores).
Denotaremos este espacio métrico por $l^\infty = (X, d)$, llamada espacio de sucesiones. A seguir demostraremos que d es una métrica.

Sea $x = (\xi_1, \xi_2, \dots),\ y = (\eta_1, \eta_2, \dots),\ z = (\zeta_1, \zeta_2)) \in X$. Entonces
$d1)$ $d(x,y) = sup_{j\in\mathbb{N}}|\xi_j - \eta_j| \geq 0$ pues $|\xi_j - \eta_j|$ es positiva.

$d2)$ Si $d(x,y) = sup_{j\in\mathbb{N}}\left|\xi_j - \eta_j\right| = 0$ entonces $\left|\xi_j - \eta_j\right| = 0$, de donde $\xi_j = \eta_j$. En seguida mostraremos la recíproca, si $\xi_j = \eta_j$ entonces $\left|\xi_j - \eta_j\right| = 0$ de donde $d(x,y) = sup_{j\in\mathbb{N}}\left|\xi_j - \eta_j\right| = 0$. Es decir $d(x,y) = 0$.

d3) $d(x,y) = sup_{j\in\mathbb{N}}|\xi_j - \eta_j| = sup_{j\in\mathbb{N}}|(-1)(\eta_j - \xi_j)| = sup_{j\in\mathbb{N}}|\eta_j - \xi_j| =$
$= d(y,x)$.

$d4$) Sean x, y, z en X,

$$d(x,y) = sup_{j\in\mathbb{N}}|\xi_j - \eta_j| = sup_{j\in\mathbb{N}}|\xi_j - \zeta_1 + \zeta_1 - \eta_j|$$
$$\leq sup_{j\in\mathbb{N}}|\xi_j - \zeta_1| + sup_{j\in\mathbb{N}}|\zeta_1 - \eta_j| = d(x,z) + d(z,y).$$

Es decir $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Por lo tanto $l^\infty = (X,d)$ es un espacio métrico.

Ejemplo 2.7. El espacio de las funciones $C[a,b]$.

Sea $X = C[a,b]$ el conjunto de todas las funciones continuas de valores reales, definidas sobre una variable $t \in C[a,b]$, con la métrica dado por

$$d(x,y) = max_{t\in C[a,b]}|x(t) - y(t)|.$$

Así. Con esta métrica es un espacio métrico y es denotado por $C[a,b] = (X,d)$.

Ejemplo 2.8. Espacio métrico discreto

Sea X cualquier espacio, en este considere la métrica discreta, definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$$

Este espacio (X,d) es un espacio métrico y es llamado espacio métrico discreto.

2.2 Conjuntos abiertos, cerrados y vecindad

Definición 4. Sea (X,d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $r > 0$. Definimos:

a) **La bola abierta** de centro x_0 y radio r es el conjunto de todos los puntos de X dado por

$$B(x_0;r) = \{x \in X, tal\ que\ d(x,x_0) < r\}.$$

b) **La bola cerrada** de centro x_0 y radio r es el conjunto dado por

$$\bar{B}(x_0;r) = \{x \in X, tal\ que\ d(x,x_0) \leq r\}.$$

c) **La esfera** de centro x_0 y radio r, por definición, el conjunto

$$S(x_0;r) = \{x \in X, tal\ que\ d(x,x_0) = r\}.$$

También $S(x_0;r) = \bar{B}(x_0;r) - B(x_0;r)$.

Ahora consideraremos dos nuevos conceptos.

Definición 5. Un subconjunto M en un espacio métrico X es llamado **abierto**, si para cualquier punto x_0 del mismo, podemos hallar una bola abierta $B(x_0;r)$ la cual está contenida en M.

Definición 6. Un subconjunto $K \subset X$ es llamado **cerrado** si su complemento (en X) es abierto, esto es $K^c = X - K$ es abierto.

Ejemplo 2.9. Una bola abierta es un conjunto abierto

En efecto, si la bola abierta es dada por

$$B(x_0;r) = \{x \in X, tal\ que\ d(x,x_0) < r\}.$$

Sea $\bar{x} \in B(x_0;r)$ y $d(\bar{x},x_0) < r$. Denotamos $r_1 = r - d(\bar{x},x_0) < r$. Así $B(\bar{x},r_1) \subset B(x_0;r)$. Ahora tomemos un elemento $y \in B(\bar{x},r_1)$ de donde obtenemos $d(y,\bar{x}) < r_1$. De esto,

$$d(y,x_0) \leq d(y,\bar{x}) + d(\bar{x},x_0) < r_1 + d(\bar{x},x_0) = r - d(\bar{x},x_0) + d(\bar{x},x_0) = r.$$

Por lo tanto $B(x_0;r)$ es un conjunto abierto,
Ejemplo 2.10. Una bola cerrada es un conjunto cerrado.

Sea $K = B(x_0;r)$ y $K^c = X - B(x_0;r)$. Mostremos que K^c es un conjunto abierto

En efecto, sea $x_1 \in K^c$, mostremos que existe una bola abierta $B(x_1;r_1)$ contenida en $X - B(x_0;r)$. Como x_1 no está en $B(x_0;r)$ se tiene entonces que $d(x_1;x_0) > r$. Definamos $r_1 - d(x_1;x_0) - r > 0$ esto es equivalente a $r = d(x_1;x_0) - r_1$. Veamos que

$B(x_1;r_1) \subset X - B(x_0;r)$. En efecto, sea $y \in B(x_1;r_1)$ entonces $d(y,x_1) < r_1$. De lo cual tenemos $d(x_1;x_0) \leq d(x_1;y) + d(y;x_0) < r_1 + d(y;x_0)$. Luego

$d(x_1;x_0) < r_1 + d(y;x_0)$. Por lo tanto $d(x_1;x_0) - r_1 < d(y;x_0)$ es decir $r < d(y;x_0)$ esto significa que $y \notin B(x_0;r)$ o sea $y \in X - B(x_0;r)$.

Definición 7. Una bola abierta $B(x_0;\varepsilon)$ de radio $\varepsilon > 0$ els llamada una ε –vecindad de x_0. Diremos por vecindad de x_0 a cualquier subconjunto de x que contiene una ε –vecindad de x_0.

Observación 2.11.
a) Vemos de la definición que cada vecindad de x_0 contiene x_0.
b) Si N es una vecindad de x_0 y $N \subset M$, entonces M es también una vecindad de x_0.

2.3 Aplicaciones continuas

Definición 8. Sean $(X, d), (Y, \bar{d}\,)$ espacios métricos. Una aplicación $T: X \to Y$ se dice que es continua en un punto $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$d(x; x_0) < \delta \text{ entonces } \bar{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon.$$

Decimos que T es continua en X, si T es continua para todo punto de X.
Es interesante que las aplicaciones continuas puedan ser caracterizadas en términos de conjuntos abiertos. Así, el teorema siguiente nos brinda el siguiente resultado.

Teorema 2.12. Sean X, Y espacios métricos. $T: X \to Y$ es continua si y solamente si la imagen inversa de un subconjunto abierto de Y es un subconjunto abierto de X.

Demostración

Suponga que T es continua. Sea $S \subset Y$ un subconjunto abierto y S_0 la imagen inversa de S. Si $S_0 = \emptyset$, S_0 es abierto. Sea $S_0 \neq \emptyset$, para cualquier $x_0 \in S_0$, sea $y_0 = Tx_0 \in S$, como S es abierto, entonces existe una ε –vecindad N de y_0.

Desde que T es continua existe una δ-vecindad N_0 que es aplicado en N. Como

$N \subset S$, tenemos $N_0 \subset S_0$ es un conjunto abierto, pues $x_0 \in S$ fue considerado arbitrariamente.

Recíprocamente, suponga que la imagen inversa de cualquier conjunto abierto en Y es un conjunto abierto en X. Entonces para cada $x_0 \in X$ y cualquier ε –vecindad N de Tx_0, la imagen inversa N_0 de N es abierto, desde que N es abierto, y N_0 contiene x_0. Por lo tanto N_0 es aplicado en N. Consecuentemente por la definición T es continua en x_0. Como $x_0 \in X$ fue considerado de forma arbitraria, entonces T es continua.

Definición 9. Sean X, Y espacios métricos, $T: X \to Y$ una aplicación. Se dice que es **lipschitziana** (lipschitziana continua) si existe una constante $k > 0$ llamada constante de Lipschitz tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \text{ para todo } x, y \in X.$$

Ejemplo 2.13. Toda aplicación lipschitziana es continua pues, dado $\varepsilon > 0$, y tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, entonces $d(x, p) < \delta$ implica $d(T(x), T(p))) \leq kd(x, p) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$ para cualquier
$p \in X$, es decir $d(T(x), T(p))) \leq \varepsilon$.

Ejemplo 2.14. Las funciones continuas más simples son las funciones constantes. Definimos la función $T: X \to Y$, $y_0 \in Y$ con $T(x) = y_0$, para todo $x \in X$. Entonces. Si S es un conjunto abierto en Y, $T^{-1}(S) = \emptyset$ cuando $y_0 \notin S$, y $T^{-1}(S) = X$ si $y_0 \in S$. Como X y $\emptyset$ son abiertos en X, T es continua.

Ejemplo 2.15. La función identidad es otro ejemplo sencillo de una función continua. Definimos $T: X \to Y$. Como $T(x) = x$ para cada $x \in X$. Entonces $T^{-1}(S) = S$ para cada abierto S en X.

Definición 10. Sea M un subconjunto de un espacio métrico X, entonces

a) Un punto $x_0 \in X$ (puede o no ser punto de M) es llamado un **punto de acumulación** de M(o punto límite de M) si toda vecindad de x_0 contiene por lo menos un punto $y \in M$ diferente de x_0.

b) El conjunto formado por los puntos de M y por los puntos de acumulación de M es llamado la **cerradura** de M y es denotado por $\overline{M}$.
La cerradura es el menor conjunto cerrado que contiene M.

2.4. Convergencia, sucesión de Cauchy, complitud

Sabemos que sucesiones de números reales cumplen un papel importante en el cálculo y la métrica en $\mathbb{R}$ permite definir el concepto básico de convergencia de tal sucesión. El mismo satisface para cada sucesión de números complejos, en este caso usamos la métrica en el plano complejo. En un espacio métrico cualquier (X, d) la situación es casi similar, esto es, debemos considerar una sucesión (x_n) de elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de X y usar la métrica d para definir la convergencia de modo análogo al que fue hecho en el cálculo.

Definición 11. Una sucesión (x_n) en un espacio métrico $X = (X, d)$ se dice **convergente** si existe un $x \in X$ tal que

$$lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

En este caso x es llamado límite de (x_n) y escribimos

$$lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{ó} \qquad x_n \to x.$$

Cuando es necesario usaremos la notación $x_n \to x$ para indicar que la convergencia es con relación a la métrica d. En otras palabras, $x_n \to x$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n > n_0 \text{ implica } d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Definición 12. Decimos que un subconjunto no vacío $M \subset X$ es un conjunto **acotado** si su diámetro

$$\delta(M) = sup_{x,y \in M} d(x, y)$$

Es finito. Llamemos una sucesión $(x_n) \subset X$ de **sucesión acotada** si corresponde al conjunto de puntos de un subconjunto limitado de X.

Si M es limitado, entonces $M \subset B(x_0, r)$, donde x_0 es algún punto de X.

Mostremos ahora el siguiente lema:

Lema 2.16. Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico. Entonces

a) Una sucesión convergente en X es **acotada** y su límite es único.

b) Si $x_n \to x$; $y_n \to y$ en X, entonces $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

Demostración

a) Suponga que $x_n \to x$. Entonces, consideremos $\varepsilon = 1$, podemos encontrar un N tal que $d(x_n, x) < 1$ para todo $n > N$. Entonces por la desigualdad triangular M4) y para todo n tenemos $d(x_n, x) < 1 + a$, donde $a = \max\{d(x_1, x), \dots, d(x_N, x)\}$. Esto muestra que el conjunto de puntos de la sucesión (x_n) es un conjunto acotado. Así, considerando $y \in B_x(1 + a)$ y por la desigualdad triangular M4) tenemos

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, y) + d(y, x) < 1 + a + 1 + a = 2a + 2.$$

Entonces $\delta\big(B_x(1 + a)\big) = sup_{x_n, x \in B_x(1+a)} d(x_n, x) \leq 2a + 2$. Así pues, el diámetro de la bola $B_x(1 + a)$ quedaría finito. Esto muestra que (x_n) es una sucesión acotada.

Ahora mostremos la unicidad. Supongamos que $x_n \to x$ y $x_n \to z$ de la desigualdad triangular, obtenemos

$$0 \leq d(x, z) \leq d(x, x_n) + d(x_n, z) \to 0 + 0 = 0.$$

Luego $d(x, z) = 0$ implica que $x = z$.

b) Usando la desigualdad triangular tenemos

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \tag{2.2}$$

Luego,

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n).$$

De forma análoga,

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y).$$

De ahí

$$d(x,y) - d(x_n, y_n) \leq d(x, x_n) + d(y_n, y).$$

Multiplicando por (-1) obtenemos

$$d(x_n, y_n) - d(x,y) \geq -d(x_n, x) - d(y_n, y) \tag{2.3}$$

De (2.2) y (2.3) tenemos

$$-(d(x_n, x) + d(\, y_n, y)) \;\leq d(x_n, y_n) - d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

Significa que,

$$|d(x_n, y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0.$$

Se sigue que,

$d(x_n, y_n) - d(x,y) \to 0$. Es decir $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$.

En seguida definiremos el concepto de complititud de un espacio.

Definición 13. Una sucesión (x_n) en un espacio métrico (X,d) es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \text{ para todo } m, n > N.$$

Definición 14. Un espacio (X,d) se dice que es **completo** si toda sucesión de Cauchy converge en X, esto es; si tiene un límite el cual es un elemento de X.

Ejemplo 2.17. $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son espacios completos

Ejemplo 2.18. (complititud de $\mathbb{R}^n$). Consideremos el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, formado por las n-uplas $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots . x_n)$**,** para todo $1 \leq i \leq n$. Denotamos este espacio con la métrica de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por

$$d(x,y) = \left|\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \eta_j)^2\right|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + \cdots + (\xi_j - \eta_j)^2}$$

Donde $x = (\xi_j), y = (\eta_j) \in \mathbb{R}^n$. Mostremos que $\mathbb{R}^n$es completo, para lo cual consideremos alguna sucesión de Cauchy (x_m) en $\mathbb{R}^n$, escrito por $x_m = \left(\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)}\right)$. Desde que (x_m) es una sucesión de Cauchy, dado para todo $\varepsilon > 0$, existe un N tal que

$$d(x_m, x_r) = [\textstyle\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \text{ para todo } m, r > N. \tag{2.4}$$

Tomando para $m, r > N$ y $j = 1, \dots, n$, tenemos

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| = [(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Entonces

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| < \varepsilon \text{ para } m, r > N.$$

Esto muestra que para cada j fijo y $(1 \leq j \leq n)$, la sucesión $\xi_j^1, \xi_j^2, \dots$ es de Cauchy de números reales. Como $\mathbb{R}$ es completo, $\xi_j^m \to \xi_j$ en $\mathbb{R}$ cuando $m \to \infty$. En seguida definimos $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Claramente $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, de (2.4) con $r \to \infty$, obtenemos

$$d(x_m, x) \leq \text{ para } m > N.$$

De esto sigue que $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, ya que (x_m) fue considerada una sucesión de Cauchy arbitraria. Por lo tanto $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ es completo.

Ejemplo 2.19. Espacio Incompleto

Considere $X = (0,1]$ con la métrica usual definida por $d(x, y) = |x - y|$, y una sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ con $n = 1,2,3, \dots$ Esta es una sucesión de Cauchy, más no es convergente, porque el punto 0 no pertenece a X. Por tanto X es un espacio incompleto.

Teorema 2.20. Toda sucesión (x_n) de un espacio métrico X es una sucesión de Cauchy.

Demostración

En efecto, sea $(x_n) \subset X$ y $x_n \to x$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N = \mathrm{N}(\varepsilon)$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > N$. También, consideremos $(x_m) \subset X$ y $x_m \to x$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N = \mathrm{N}(\varepsilon)$ tal que $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $m > N$. Por la desigualdad triangular tenemos
$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, para todo $m, n > N$.

Por lo tanto $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para todo $m, n > N$ es una sucesión de Cauchy.

Teorema 2.21. Sea M un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X, d) y $\bar{M}$ su clausura, entonces

a) $x \in \bar{M}$ si y solo si existe una sucesión (x_n) en M tal que $x_n \to x$.

b) M es **cerrado** si y solo si $(x_n) \subset M$, $x_n \to x$ implica $x \in M$.

Demostración

a) ($\Rightarrow$) En efecto, sea $x \in \bar{M}$. Si $x \in M$, consideremos la sucesión $x_n = (x_1, x_2, \dots)$ que converge a x. Si $x \notin M$, este es un punto de acumulación de M. Por tanto, para cada $n = 1,2, \dots$ Las bolas $B(x, \frac{1}{n})$ contiene $x_n \in M$ y $x_n \to x$ porque $\frac{1}{n} \to 0$.

($\Leftarrow$) Si $x \in M$ entonces $x \in \bar{M}$ pues $M \subset \bar{M}$. Ahora si $x \notin M$ entonces $x \in \bar{M}$ ó $x \notin \bar{M}$. Es decir $x \in (X - \bar{M})$. Como $(x_n) \in M$, $x_n \to x$ dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in B(x, \varepsilon)$. O sea x es un punto de acumulación de M. Así $x \in \bar{M}$.

b) Sea M cerrado, debemos mostrar que si $(x_n) \subset M$, $x_n \to x$ implica $x \in M$. Sabemos que $M \subset \bar{M}$, faltaría apenas mostrar que $\bar{M} \subset M$.

En efecto, tomemos $(x_n) \in \bar{M}$ donde $x_n \to x$, así $x \in \bar{M}$. Por a) tenemos si $x \in \bar{M}$ si y solo si existe una sucesión (x_n) en M tal que $x_n \to x$. Así $x \in M$.

Teorema 2.22. Un subespacio M de un espacio métrico completo X es **completo** si y solo si M es un conjunto **cerrado** en X.

Demostración

($\Rightarrow$) Por la parte a) del teorema anterior se tiene, para cada $x \in \bar{M}$ existe una sucesión (x_n) en M tal que $x_n \to x$. Como (x_n) es una sucesión de Cauchy y M es completo entonces (x_n) converge en M, de ahí $x \in M$. Así mismo $\bar{M} \subset M$. Como también sabemos que $M \subset \bar{M}$, entonces $M = \bar{M}$. Esto prueba que M es cerrado, pues $x \in \bar{M}$fue considerado arbitrario.

($\Leftarrow$) Sea M un conjunto cerrado y (x_n) una sucesión de Cauchy en M. Entonces $x_n \to x \in X$, implica que $x \in \bar{M}$ por a) de l teorema anterior y $x \in M$, sabemos que M es cerrado $M = \bar{M}$. Como (x_n) es una sucesión de Cauchy arbitraria en M, esto prueba que M es completo.

El siguiente teorema muestra la importancia de la convergencia de las sucesiones en conexión con la continuidad de una aplicación.

Teorema 2.23. Una aplicación $T: X \to Y$ de un espacio métrico (X, d) en el espacio métrico $(Y, \bar{d})$ es **continua** en un punto $x_0 \in X$ si y solamente si

$$x_n \to x_0 \text{ entonces } Tx_n \to Tx_0.$$

Demostración

($\Rightarrow$)Suponga que T es continua en x_0; entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \text{ implica } \bar{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Sea $x_n \to x_0$, entonces existe un N tal que para todo $n > N$, implica $d(x_n, x_0) < \delta$. De aquí, por (2.5) $\bar{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$ para todo $n > N$. Por definición esto significa que $Tx_n \to Tx_0$.

($\Leftarrow$) Suponga que $x_n \to x_0$, implica $Tx_n \to Tx_0$. Probaremos que T es continua en x_0.
Suponga que T no sea continua en x_0 entonces existe ($\varepsilon > 0$) tal que para todo $\delta > 0$, existe $x \neq x_0$ satisfaciendo $d(x, x_0) < \delta$ mas $\bar{d}(Tx, Tx_0) \geq \varepsilon$. En particular, para $\delta = \frac{1}{n}$ existe un x_n satisfaciendo $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ pero $\bar{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$. Claramente $x_n \to x_0$, pero $Tx_n \nrightarrow Tx_0$, es decir Tx_n no converge a Tx_0. Esto es una contradicción. Por lo tanto $Tx_n \to Tx_0$, queda probado el teorema.

2.5 Espacios de Banach

Definición 15. Un espacio normado es un par $(X, \|.\|)$ formado por un espacio vectorial X y una aplicación $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ llamada norma, que satisface las siguientes propiedades:

a) $\|x\| \geq 0, \forall\, x \in X$.
b) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
c) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall\, x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall\, x, y \in X$.

Observación 2.24. Todo espacio normado es un espacio métrico, para ver esto, considere la métrica d dada por la norma, esto es;

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

d es llamada métrica inducida por la norma. La afirmación recíproca no es verdadera, esto es; no todo espacio métrico es normado.

Veamos el siguiente ejemplo para justificar esta afirmación.

Ejemplo 2.25. Sea d la métrica discreta dada en el ejemplo (2.8). Siendo d dada por la norma $\|.\|$, para $x \neq 0$ notemos que

$$\|2x\| = d(2x, 0) = 1. \tag{2.6}$$

Por otro lado, por definición de norma

$$\|2x\| = |2|\|x\| = 2d(x, 0) = 2.1 = 2 \tag{2.7}$$

De (2.6) y (2.7) observamos que la norma no está bien definido. Lo que implica que, la métrica discreta no induce una norma.

Definición 16. Se dice que un espacio normado X es un **espacio de Banach** si es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la norma.

Así, con la noción de sucesiones tenemos que X es un espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy en X es convergente a un punto de X. En este caso decimos que la norma de X es completa.

Una condición necesaria para que una métrica induzca una norma será dada en la siguiente proposición.

Proposición 2.26. Si $(X, \|.\|)$ es un espacio normado, la aplicación

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in X.$$

Satisface las siguientes condiciones:

a) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$;

b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

En efecto, sean $x, y, z \in X$, notemos que

$$d(x + z, y + z) = \|x + z - y - z\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - \lambda)\| = |\lambda| d(x, y).$$

Recíprocamente, si X es un espacio vectorial y (X, d) es un espacio métrico en el que se verifica a) y b), entonces $(X, \|.\|)$ es un espacio normado donde $\|x\| = d(x, 0)$. En seguida, daremos a conocer algunos ejemplos de espacios de Banach.

Ejemplo 2.27. $X = \mathbb{R}$ con la norma del valor absoluto es un espacio de Banach.

Ejemplo 2.28. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^2$ dotado de la norma

$$\|x - y\| = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$$

donde $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ es un espacio de Banach.
En efecto, debemos probar que el espacio $\mathbb{R}^2$ es completo. Para tal fin consideremos una sucesión de Cauchy (x_m) en $\mathbb{R}^2$, que denotaremos por

$(x_m) = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)})$, como (x_m) es una sucesión de Cauchy, sigue que dado $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, r > N$

$$\|x_m - x_r\| = \left\|\left(\xi_1^{(m)} - \xi_1^{(r)}, \xi_2^{(m)} - \xi_2^{(r)}\right)\right\| =$$

$$\sqrt{(\xi_1^{(m)} - \xi_1^{(r)})^2 + (\xi_2^{(m)} - \xi_2^{(r)})^2} < \varepsilon \tag{2.8}$$

Además, como $(\xi_1^{(m)} - \xi_1^{(r)})^2 \leq (\xi_1^{(m)} - \xi_1^{(r)})^2 + (\xi_2^{(m)} - \xi_2^{(r)})^2$. Sigue que

$$|\xi_1^{(m)} - \xi_1^{(r)}| = \sqrt{\left(\xi_1^{(m)} - \xi_1^{(r)}\right)^2} \leq \sqrt{\left(\xi_1^{(m)} - \xi_1^{(r)}\right)^2 + \left(\xi_2^{(m)} - \xi_2^{(r)}\right)^2} < \varepsilon,$$

Entonces,

$$|\xi_1^{(m)} - \xi_1^{(r)}| < \varepsilon.$$

De forma análoga,

$$|\xi_2^{(m)} - \xi_2^{(r)}| < \varepsilon.$$

Luego, notemos que las sucesiones $(\xi_1^{(m)})$, $(\xi_2^{(m)})$ son sucesiones de Cauchy de números reales. Como por ejemplo (2.27), $\mathbb{R}$ es un espacio de Banach (completo), entonces estas sucesiones convergen en $\mathbb{R}$. Denotemos por ξ_1, ξ_2 tales puntos de convergencia, esto es; $\xi_1^{(m)} \to \xi_1$ y $\xi_2^{(m)} \to \xi_2$.
Ahora, definamos $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ y observemos que

$$\|x_m - x\| = \sqrt{(\xi_1^{(m)} - \xi_1)^2 + (\xi_2^{(m)} - \xi_2)^2}$$

$$\leq \sqrt{\left(\xi_1^{(m)} - \xi_1\right)^2} + \sqrt{(\xi_2^{(m)} - \xi_2)^2}$$

$$= \left|\xi_1^{(m)} - \xi_1\right| + |\xi_2^{(m)} - \xi_2| \to 0.$$

Lo que implica

$$d(x_m, x) \leq \varepsilon \text{ para todo } m > N.$$

Por lo tanto $\mathbb{R}^2$ es un espacio métrico completo, donde la métrica es inducida por la norma. Luego $\mathbb{R}^2$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 2.29. Este espacio l^p definida por

$$l^p = \left\{x = (x_1, x_2, \dots)\ tal\ que\ \sum_{j=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty\right\}$$

Con la norma $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Es un espacio de Banach, con p fijo y $1 \leq p < +\infty$.

En efecto, sea (x_m) alguna sucesión de Cauchy en el espacio l^p, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que para todo $m, n > N$,

$$\|x_m - x_n\| = (\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right|^p)^{1/p} < \varepsilon$$

Para cada $j = 1,2, \ldots$, tenemos

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| = (\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right|^p)^{1/p}$$
$$\leq \left((\left|\xi_1^{(m)} - \xi_1^{(n)}\right|^p + \cdots + (\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right|^p + \cdots\right)^{1/p} = \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Así,

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| < \varepsilon \text{ para } m, n > N.$$

Tomando j fijo. Vemos que cada coordenada forma una sucesión $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \ldots)$ de donde obtenemos una sucesión de Cauchy de números. Siendo $\mathbb{R}$ completo, sigue que $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ cuando $m \to \infty$.

En seguida, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ y mostremos que $x \in l^p$, esta sucesión es convergente, es decir $x_m \to x$. De (2.9) tomemos para todo $m, n > N$,

$$\sum_{j=1}^{k}\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right|^p < \varepsilon^p$$

Para $(k = 1,2, \ldots)$. Sea $n \to \infty$, obtenemos para $m > N$,

$$\sum_{j=1}^{k}\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right|^p \leq \varepsilon^p$$

Ahora, sea $k \to \infty$ entonces para $m > N$,

$$\|x_m - x\| = \sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right|^p \leq \varepsilon^p \tag{2.10}$$

De esto sigue que $x_m - x = (\xi_j^{(m)} - \xi_j) \in l^p$. Ya que $x_m \in l^p$, se sigue

$$x = x_m + (x - x_m) \in l^p$$

Desde que l^p es un espacio vectorial. Faltaría apenas ver que $x_m \to x$, para eso de (2.10) tenemos

$$\|x_m - x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

Por lo tanto l^p es un espacio de Banach.

Ejemplo 2.30. El espacio l^∞ dotado con la norma

$$\|x - y\| = sup_j\left|\xi_j - \eta_j\right|$$

Con $x = (\xi_j), y = (\ \eta_j)$ es un espacio de Banach.

En efecto, sea (x_m) alguna sucesión de Cauchy en el espacio l^∞, donde $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots)$. Luego dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que $m.n > N$,

$$\|x_m - x_n\| = sup_j\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| < \varepsilon$$

Para j fijo,

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| \leq sup_j\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| < \varepsilon$$

Entonces,

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| < \varepsilon \text{ para } m.n > N, \tag{2.11}$$

La sucesión $\xi_j^{(m)} = (\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \ldots)$ es una sucesión de Cauchy de números en $\mathbb{R}$. Siendo $\mathbb{R}$ completo, $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ cuando $m \to \infty$. O sea $x_m = (\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \ldots, \xi_j^{(m)}, \ldots)$ converge a $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots)$. En seguida mostremos que $x \in l^\infty$ y $x_m \to x$. De (2.11) con $n \to \infty$, tenemos

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| \leq \varepsilon \text{ para } m > N \tag{2.12}$$

Ya que $x_m = \left(\xi_j^{(m)}\right) \in l^\infty, k_m > 0$ tal que $\left|\xi_j^{(m)}\right| \leq k_m$para todo j, usando la desigualdad triangular obtenemos,

$$|\xi_j| = |\xi_j - \xi_j^{(m)} + \xi_j^{(m)}| \leq |\xi_j - \xi_j^{(m)}| + |\xi_j^{(m)}| \leq \varepsilon + k_m$$

Por lo tanto,

$$sup_j\left|\xi_j\right| \leq \varepsilon + k_m, \text{ para } j \in \mathbb{N}.$$

Entonces ξ_j es una sucesión acotada de números. Esto implica que $x = (\xi_j) \in l^\infty$ y también de (2.11)

$$sup_j\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| \leq \varepsilon \text{ para } m > N.$$

Entonces $\|x_m - x\| < \varepsilon$. Es decir $x_m \to x \in l^\infty$. Por lo tanto probamos que l^∞ es un espacio de Banach.

Ejemplo 2.31. El espacio $C[a,b]$ es un espacio de Banach.

En efecto, consideremos $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $C[a,b]$, probemos que tal sucesión converge en $C[a,b]$, para esto observemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $m,n > n_0$ sigue que

$$\|f_n - f_m\| = \max_{t\in C[a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \tag{2.13}$$

Y así para un $t_0 \in C[a,b]$, tenemos que

$$|f_n(t_0) - f_m(t_0)| \leq \max_{t\in C[a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

Luego $(f_n(t_0))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de números reales, por lo tanto es convergente. Definamos f la función tal que para cada $t_0 \in C[a,b]$, fijo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t_0) = f(t_0)$$

Ahora, verifiquemos que $f \in C[a,b]$. De (2.13) cuando $m \to \infty$ tenemos

$$\max_{t\in C[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$$

Así, para todo $t \in C[a,b]$,

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon \tag{2.14}$$

Lo que muestra que $(f_n(t))$ converge uniformemente para $f(t)$ en $[a,b]$. Ahora notemos que cada f_n es continua y sabemos que la convergencia uniforme de funciones continuas es una función continua. Por lo tanto $f \in C[a,b]$. Además de eso, usando (2.14)

$$\|f_n - f\| = \max_{t\in C[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$$

Lo que implica que $f_n \to f$.

2.6 Propiedades de espacios de Banach

Teorema 2.32. Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto $Y \subset X$ es completo si y solo si Y es cerrado en X.

Demostración

Sea Y un subespacio del espacio de Banach. Supongamos que Y es completo. Mostraremos que Y es cerrado, esto es $Y = \bar{Y}$. Es claro que $Y \subset \bar{Y}$, así mostraremos apenas que $\bar{Y} \subset Y$.
Para esto, consideremos $y \in \bar{Y}$, luego existe una sucesión (y_m) en Y tal que $y_m \to y$. Como toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. Sigue que dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in N$ tal que

$$\|y_m - y_n\| < \varepsilon \text{ para todo } m, n \geq n_0.$$

Además, siendo Y completo, la sucesión de Cauchy (y_m) converge a un punto en Y, llamemos y' este punto, es decir $y_m \to y'$. Como el límite es único tenemos que $y' = y \in Y$. Por tanto $y \in Y$ como queríamos mostrar. Así $Y = \bar{Y}$.

Recíprocamente supongamos que $Y \subset X$ es cerrado en X y probemos que Y es completo. Sea $(y_m) \subset Y$ una sucesión de Cauchy, debemos probar que $y_m \to y \in Y$. Como $Y \subset X$ entonces $(y_m) \subset X$, es decir (y_m) es una sucesión de Cauchy en X. Sin embargo X es completo, sigue que $y_m \to y \in X$. Ahora como Y es cerrado entonces $y \in Y$.

2.7 Espacios normados de dimensión finita

Definición 17. Sea X un espacio vectorial, se dice que X es de dimensión finita si su base tiene un número finito de elementos. A este número se le denota por $\dim X$.
Mostraremos a seguir que espacios de dimensión finita son espacios de Banach, para eso será utíl el siguiente lema que dice de la equivalencia entre normas en espacios de dimensión finita.

Lema 2.33. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de vectores **linealmente independiente** en un espacio normado X. Entonces existe un número $c > 0$ tal que para cada elección de escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tenemos

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$$

Demostración (Véase el texto de Kreyszig)

Teorema 2.34. Todo subespacio Y de dimensión finita de un espacio normado X es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es **completo.**

Demostración

Consideremos una sucesión (y_m) en el subespacio Y de dimensión finita y mostremos que esta sucesión es convergente en Y.

Sea $\dim Y = n$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base en Y. Así existen escalares $\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \dots, \alpha_n^{(m)}$ tal que (y_m) tiene una única representación

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n$$

Ya que (y_m) es una sucesión de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ existe un N tal que

$$\|y_m - y_r\| < \varepsilon \text{ para } m, r < N$$

Por el lema (2.33) tenemos, para algún $c > 0$ lo siguiente

$$\varepsilon > \|y_m - y_r\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right|$$

para todo $m, r > N$. Dividiendo por $c > 0$, obtenemos

$$\left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right) < \frac{\varepsilon}{c}$$

Por consiguiente $\alpha_j^{(m)}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, sabiendo que $\mathbb{R}$ es completo, $\alpha_j^{(m)}$ converge a α_j

$$y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Evidentemente $y \in Y$. Así

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j \right| \|e_j\|$$

Que tiende a cero, (y_m) converge a y, esto es $\|y_m - y\| \to 0$. De donde (y_m) es convergente en Y. Por lo tanto probamos que Y es completo.
Del teorema (2.4) y (2.34) tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.35. Todo subespacio de dimensión finita Y de un espacio normado X es **cerrado** en X.

Definición 18. Una norma $\|.\|$ en un espacio vectorial X es **equivalente** a una norma $\|.\|_0$ en X si existen números positivos a y b tal que para todo $x \in X$ tenemos

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0.$$

2.8. Operadores lineales continuos

Definición 19. Sean X, Y espacios vectoriales sobre el campo de los números reales. Decimos que una aplicación $T: X \rightarrow Y$ es lineal para todo $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$T(x+y) = T(x) + T(y),$$
$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

Mostremos algunos ejemplos

Ejemplo 2.37

1. Sea X un espacio vectorial. $I_X: X \rightarrow X$ el **operador identidad** definido por $I_X(x) = x$ para todo $x \in X$. Denotaremos $I_X = I$ para simplificar la notación. Este operador es lineal. En efecto, para $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$I_X(x+y) = x + y = I_X(x) + I_X(y)$$

$$I_X(\alpha x) = \alpha x = \alpha I_X(x).$$

2. Sean X, Y espacios vectoriales. El **operador cero** $0: X \rightarrow Y$ definido por $0(x) = 0$ para todo $x \in X$. Es claro que 0 es un operador lineal.

A seguir definiremos el operador inverso

Teorema 2.38 Sean X, Y espacios vectoriales. Sea $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal entonces

a) El **operador inverso** $T^{-1}: Y \rightarrow X$ existe si y solo si

$$Tx = 0 \Rightarrow x = 0$$

b) Si T^{-1} existe, este es un operador lineal.

c) Si $\dim X = n < \infty$ y T^{-1} existe entonces $\dim \mathrm{Y} = \dim X$.

Sean X, Y espacios normados, a seguir daremos la definición de operador lineal acotado y veremos que la acotabilidad de un operador es equivalente a su continuidad.

Definición 20. Sea $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal. Se dice T es **acotado** si existe un $c > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \text{ para todo } x \in X$$

Definición 21. Sea $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado, definimos la norma de un operador $\|T\|$ de T mediante

$$\|T\| = \inf\{c / \|Tx\| \leq c\|x\| \} \text{ para todo } x \in X.$$

Expresiones equivalentes de $\|T\|$ son:

- $\|T\| = sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$
- $\|T\| = sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|$
- $\|T\| = sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$

Ejemplo 2.39. Sea X un espacio normado y $x \in X$. El operador identidad $I: X \rightarrow X$ es acotado y $\|I\| = 1$.

En efecto $\|I(x)\| = \|x\| \leq \|x\|$, luego existe $c = 1 > 0$ tal que $\|I(x)\| \leq c\|x\|$. Además

$$\|I\| = sup_{x\neq 0}\frac{\|Ix\|}{\|x\|} = sup_{x\neq 0}1 = 1.$$

Ejemplo 2.40. Sean X, Y espacios normados. El operador cero $0: X \rightarrow Y$ es acotado y con norma $\|0\| = 0$.

Mostremos a continuación que en dimensión finita la acotabilidad sigue de la linealidad.

Teorema 2.41. Sea X un espacio normado de dimensión finita, entonces cada operador lineal en X s acotado.

Demostración

Sea $\dim X = n$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de X. Consideremos algún $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ y un operador lineal T en X,

$$\|Tx\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j T e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \|Te_j\| \leq \max_k \|Te_k\| \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \tag{2.15}$$

Por el lema (2.33), con $\alpha_j = \xi_j$ y $x_j = e_j$ obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \leq \frac{1}{c}\left\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right\| = \frac{1}{c}\|x\| \tag{2.16}$$

Reemplazando (2.16) en (2.15) tenemos

$$\|Tx\| \leq w\|Tx\| \text{ donde } w = \frac{1}{c}\max_k \|Te_k\|.$$

De esto probamos que T es acotado.

Teorema 2.42. Sean X, Y espacios normados. Sea $T: X \to Y$ un operador lineal, entonces

a) T es **continua** si y solo si T es **acotado.**

b) Si T es continua en un solo punto, T es continua.

Demostración

a) para $T = 0$ la demostración es trivial. Sea $T \neq 0$ entonces $\|T\| \neq 0$. Consideremos que T es acotado, debemos probar que T es continua, para ello asumamos algún $x_0 \in X$.
Sea algún $\varepsilon > 0$ dado tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \text{ donde } \delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

Entonces como por hipótesis T es lineal para todo $x \in X$, tenemos que

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\| < \|T\|\delta = \varepsilon$$

Siendo $x_0 \in X$ arbitrario, se muestra que T es continua.

Recíprocamente asumamos que T es continua en $x_0 \in X$, probemos que T es acotado, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon \tag{2.17}$$

En seguida tomando algún $y \neq 0$ en X y sea

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y$$

$$x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|}y.$$

Así, desde que T es lineal y usando (2.17), tenemos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\|T(\frac{\delta}{\|y\|}y)\right\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\| \leq \varepsilon.$$

Luego

$$\|Ty\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|y\|.$$

Esto puede ser escrito como $\|Ty\| \leq c\|y\|$ donde $c = \frac{\varepsilon}{\delta}$. Así mostramos que T es acotado.

b) si T es continua en $x_0 \in X$ implica que T es acotado en x_0 y por la segunda parte de la demostración de a) implica la continuidad de T.

2.9 Aplicación abierta

Teorema 2.43. (Teorema de Baire). Sean (X, d) un espacio métrico completo y $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tiene un interior no vacío.

Definición 22. Sean X, Y espacios de Banach. $T: X \to Y$ un operador lineal, se dice que T es una aplicación abierta si T transforma abiertos en abiertos, esto es si $A \subset X$ es abierto entonces $T(A)$ es abierto.

Teorema 2.44. Sean X, Y espacios de Banach y T un operador lineal y acotado es sobreyectiva, existe $c > 0$ tal que $B_Y(0, c) \subset T(B_X(0,1))$. En particular T transforma abiertos de X en abiertos de F, esto es T es una aplicación abierta.

Corolario 2.45. Sean X, Y espacios de Banach y T un operador lineal y acotado es biyectivo, entonces T^{-1} es un operador lineal y acotado.

Demostración
i) Primeramente mostraremos que T^{-1} es acotado. En efecto por el teorema de la aplicación abierta, existe $c > 0$ tal que

$$B_Y(0, c) \subset T(B_X(0,1))$$

Luego si $T(x) \in B_Y(0, c) \Rightarrow T(x) \in T\big(B_X(0,1)\big) \Rightarrow x \in B_X(0,1) \Rightarrow \|x\| < 1$. Esto es, si $\|Tx\| < c \Rightarrow \|x\| < 1$. Así afirmamos

$$\|x\| \leq \frac{1}{c}\|Tx\|, \text{ para todo } x \in X. \qquad (2.18)$$

De hecho, si existe $x_0 \neq 0$ en X tal que

$$\|x_0\| > \frac{1}{c}\|T(x_0)\| \Rightarrow \left\|T(\frac{x_0}{\|x\|})\right\| < c$$

Entonces $\left\|\frac{x_0}{\|x\|}\right\| < 1$. Lo cual contradice a (2.18). Luego considerando en (2.18), $x = T^{-1}(y)$ se tiene $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$ para todo $y \in Y$.

ii) En seguida mostraremos que T^{-1} es lineal, pues

$$T^{-1}(y_1 + y_2) = z \Leftrightarrow y_1 + y_2 = T(z)$$

Sea $y_1 = T(z_1), y_2 = T(z_2)$. Luego

$$T(z) = y_1 + y_2 = T(z_1) + T(z_2) = T(z_1 + z_2)$$

De ahí

$$z = z_1 + z_2 = T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2)$$

Así mismo

$$T^{-1}(\alpha y) = z \Leftrightarrow \alpha y = T(z)$$

Consideremos $y = T(z_1)$. Luego $T(z) = \alpha T(z_1) = T(\alpha z_1)$. Así $z = \alpha z_1 = \alpha T^{-1}(y)$. Concluimos que T^{-1} es lineal.

Por lo tanto de i) y ii) T^{-1} es un operador lineal y acotado.

2.10 Diferenciabilidad

En este capítulo estudiaremos las definiciones y alguna de sus propiedades de diferenciabilidad de funciones definidas de Banach, a saber la llamada diferenciabilidad de Frechet.

Definición 23. (diferenciabilidad de Frechet)

Sean X, Y espacios de Banach, U un abierto no vacío de X. Sea $F \subset X \to Y$ y $x \in U$. Se dice que F es Frechet diferenciable en x si existe un operador lineal y acotado $T: X \to Y$ tal que

$$\lim_{\|\xi\| \to 0} \frac{F(x + \xi) - F(x) - T(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

De forma equivalente

$$F(x + \xi) - F(x) - T(\xi) = o(\|\xi\|)$$

Con

$$\lim_{\|\xi\| \to 0} \frac{\|o(\|\xi\|)\|}{\|\xi\|} = 0$$

Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$F(x+\xi) - F(x) - T(\xi) \leq \varepsilon\|\xi\| \tag{2.19}$$

Para $x \in X$ con $\|\xi\| \leq \delta$. El $o(\|\xi\|)$ es llamado el resto de la diferencial y T la derivada de F, $T = F'(x)$.

Proposición 2.46. Sea U un subconjunto abierto de X. Sea $F: U \subset X \to Y$ Frechet diferenciable en $x \in U$, entonces la derivada de Frechet de F en el punto x es única.

Demostración
Sea x un elemento arbitrario de U, por hipótesis F es Frechet diferenciable en x, esto es existe un operador lineal y acotado $T: X \to Y$ tal que

$$F(x+\xi) - F(x) - T(\xi) = o(\|\xi\|) \tag{2.20}$$

De forma equivalente

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{F(x+\xi) - F(x) - T(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

Con

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|o(\|\xi\|)\|}{\|\xi\|} = 0$$

Supongamos que existe otro operador lineal y acotado $\hat{T}: X \to Y$ tal que

$$F(x+\xi) - F(x) - \hat{T}(\xi) = \hat{o}(\|\xi\|) \tag{2.21}$$

De forma equivalente

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{F(x+\xi) - F(x) - \hat{T}(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

Con

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|\hat{o}(\|\xi\|)\|}{\|\xi\|} = 0$$

Luego igualando (2.20) y (2.21) tenemos

$$T(\xi) + o(\|\xi\|) = \hat{T}(\xi) + \hat{o}(\|\xi\|)$$

$$\frac{T(\xi) + o(\|\xi\|)}{\|\xi\|} = \frac{\hat{T}(\xi) + \hat{o}(\|\xi\|)}{\|\xi\|}$$

$$\frac{T(\xi)-\hat{T}(\xi)}{\|\xi\|}=\frac{\hat{o}(\|\xi\|)-o(\|\xi\|)}{\|\xi\|}$$

En seguida, por desigualdad triangular obtenemos

$$\frac{\hat{o}(\|\xi\|)-o(\|\xi\|)}{\|\xi\|}\leq\frac{\hat{o}(\|\xi\|}{\|\xi\|}+\frac{o(\|\xi\|)}{\|\xi\|}$$

Sabiendo que,

$$\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|o(\|\xi\|)\|}{\|\xi\|}=0 \quad y \lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|\hat{o}(\|\xi\|)\|}{\|\xi\|}=0$$

Sigue que

$$\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\left\|T(\xi)-\hat{T}(\xi)\right\|}{\|\xi\|}=0.$$

Por lo tanto, para $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$\left\|T(\xi)-\hat{T}(\xi)\right\|\leq\varepsilon\|\xi\|$$

Para $x\in X$ con $\|\xi\|\leq\delta$.
Además para cualquier $x\in X$ con $x\neq 0$ el elemento $v=\frac{\delta x}{\|x\|}\in X$ tal que

$$\|v\|=\left\|\frac{\delta x}{\|x\|}\right\|=\frac{\delta\|x\|}{\|x\|}=\delta$$

Así,

$$\left\|T(v)-\hat{T}(v)\right\|\leq\varepsilon\|v\|$$

Luego se tiene que

$$\left\|T(x)-\hat{T}(x)\right\|\leq\varepsilon\|x\|$$

Haciendo que ε tienda a 0 tenemos

$T(x)-\hat{T}(x)=0$ para cada $x\in X$. En conclusión $T(x)=\hat{T}(x)$.

Definición 24. Sea $F\colon U\subset X\to Y$ decimos F es Frechet diferenciable con continuidad o continuamente Frechet diferenciable si

1. F es Frechet diferenciable en U es decir, es Frechet diferenciable en todo punto de U.

2. La aplicación derivada $F'\colon U\subset X\to Y$ es continua.

Teorema 2.47. (Derivada de una función compuesta)

Sean X, Y, Z espacios de Banach. Sea U un abierto en X y V un abierto en Y, consideremos las aplicaciones continuas

$$F: U \subset X \to Y \quad y \;\; G: V \subset Y \to Z$$

Y un punto $x_0 \in U$, si F es Frechet diferenciable en el punto x_0y si G es Frechet diferenciable en el punto $y = F(x_0)$, entonces la aplicación compuesta

$$G \circ F: U \subset X \to Z$$

Es Frechet diferenciable en $x_0 \in U$ y se verifica que

$$(G \circ F)'(x_0) = G'(F(x_0)) \circ F'(x_0)$$

Demostración

En efecto, por hipótesis sabemos que F es Frechet diferenciable en x_0. Considerando $\xi = x - x_0$ obtenemos

$$F(x) - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \qquad (2.22)$$

Con,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|o(\|x - x_0\|)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

También por hipótesis G es Frechet diferenciable en y_0, entonces

$$G(y) - G(y_0) = G'(y_0)(y - y_0) + o(\|y - y_0\|) \qquad (2.23)$$

Con,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\|o(\|y - y_0\|)\|}{\|y - y_0\|} = 0$$

Ahora calculemos $(G \circ F)(x) - (G \circ F)(x_0)$, para lo cual reemplazando y en vez de $F(x)$ y y_0 en vez de $(F)(x_0)$ en (2.23) tenemos

$$(G \circ F)(x) - (G \circ F)(x_0) = G\big(F(x)\big) - G(F(x_0))$$

$$= G'\big(F(x_0)\big)\big(F(x) - F(x_0)\big) + o(\|F(x) - F(x_0)\|)$$

En seguida reemplazamos en la última igualdad el valor $F(x) - F(x_0)$ por el valor obtenido en (2.22), y sabiendo que $G'\big(F(x_0)\big)$ es una aplicación lineal de Y en Z tenemos

$$(G\circ F)(x)-(G\circ F)(x_0)$$
$$=G'\big(F(x_0)\big)\big(F'(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)\big)+o(\|F(x)-F(x_0)\|)$$

$$=G'\big(F(x_0)\big)\big(F'(x_0)(x-x_0)\big)+G'\big(F(x_0)\big)o(\|x-x_0\|)\big)+o(\|F(x)-F(x_0)\|)$$

$$=G'\big(F(x_0)\big)\circ\big(F'(x_0)(x-x_0)\big)+G'\big(F(x_0)\big)o(\|x-x_0\|)\big)+o(\|F(x)-F(x_0)\|).$$

Para probar que $G\circ F$ es Frechet diferenciable en el punto x_0 y que tiene por derivada

$G'\big(F(x_0)\big)\circ F'(x_0)$ es suficiente demostrar que

$$G'\big(F(x_0)\big)o(\|x-x_0\|+o(\|F(x)-F(x_0)\|)=o(\|x-x_0\|)$$

$G'\big(F(x_0)\big)$ es un aplicación acotada. Así,

$$\left\|G'\big(F(x_0)\big)o(\|x-x_0\|+o(\|F(x)-F(x_0)\|)\right\|$$
$$\leq\left\|G'\big(F(x_0)\big)o(\|x-x_0\|\right\|+\|o(\|F(x)-F(x_0)\|)\|$$

$$\leq\left\|G'\big(F(x_0)\big)\right\|.\|o(\|x-x_0\|)\|+\|o(\|F(x)-F(x_0)\|)\|$$

Como

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\|o(\|x-x_0\|)\|}{\|x-x_0\|}=0$$

Entonces

$$\|o(\|x-x_0\|)\|\leq\frac{\varepsilon}{2\left\|G'\big(F(x_0)\big)\right\|}.\|x-x_0\|$$

Y también

$$\lim_{F(x)\to F(x_0)}\frac{\|o(\|F(x)-F(x_0)\|)\|}{\|F(x)-F(x_0)\|}=0$$

Entonces

$$\|o(\|F(x)-F(x_0)\|)\|\leq\frac{\varepsilon}{2(\|F'(x_0)\|+\varepsilon)}.\|F(x)-F(x_0)\| \qquad (2.24)$$

Además de (2.22) obtenemos

$$\|F(x)-F(x_0)\|=\|F'(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)\|$$

$$\leq \|F'(x_0)(x-x_0)\| + \|o(\|x-x_0\|)\|$$

$$\leq \|F'(x_0)\|.\|x-x_0\| + \varepsilon\|x-x_0\|$$

$$= (\|F'(x_0)\| + \varepsilon)\|x-x_0\|$$

$$\|F(x)-F(x_0)\| \leq (\|F'(x_0)\| + \varepsilon)\|x-x_0\|$$

Usando esta desigualdad en (2.24) obtenemos

$$\|o(\|F(x)-F(x_0)\|)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(\|F'(x_0)\| + \varepsilon)}.(\|F'(x_0)\| + \varepsilon)\|x-x_0\| = \frac{\varepsilon}{2}\|x-x_0\|.$$

En consecuencia,

$$\left\|G'\big(F(x_0)\big)o(\|x-x_0\|) + o(\|F(x)-F(x_0)\|)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x-x_0\| + \frac{\varepsilon}{2}\|x-x_0\| = \varepsilon\|x-x_0\|.$$

Finalmente

$$G'\big(F(x_0)\big)o(\|x-x_0\|) + o(\|F(x)-F(x_0)\|) = o\|x-x_0\|$$

Por lo tanto $G \circ F$ es Frechet diferenciable en x_0 y

$$(G \circ F)'(x_0) = G'\big(F(x_0)\big) \circ F'(x_0).$$

Teorema 2.48. Sean X, Y espacios de Banach. Sea $F\colon X \to Y$ una aplicación lineal continua, entonces F es Frechet diferenciable en cada punto de X tal que $F'(x) = F$ para cada $x \in X$.

Demostración

Probemos que existe una aplicación lineal continua $T\colon X \to Y$. En efecto,

$$F(x+\xi) = F(x) + F(\xi)$$

$$F(x+\xi) - F(x) = F(\xi) + 0(\xi)$$

Con $\lim_{\|\xi\|\to 0} 0(\xi) = 0$. Así $F = F'(x) = T$ para cada $x \in X$.

Corolario 2.49. Sea $F: U \to Y$ una aplicación diferenciable, U un subconjunto abierto de X. Sea $T: Y \to Z$ una aplicación lineal continua. Entonces

$$(T^{\circ}F)'(x) = T^{\circ}F'(x)$$

Para cada $v \in U$ tenemos

$$(T^{\circ}F)'(x)v = T(F'(x)v).$$

Demostración

Esto sigue del teorema (4.8) y la regla de cadena. Sea

$$T(F(x+\xi) - T\big(F(x)\big) = T(F(x+\xi) - F(x))$$

$$= T(F'(x)(\xi) + o(\|\xi\|))$$

$$= T(F'(x)(\xi)) + T(o(\|\xi\|))$$

$$= T\big(F'(x)\big)(\xi) + T\big(o(\|\xi\|)\big).$$

Así, $T'^{\left(F(x)\right)} = T(F(x))$ con $\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|T\left(o(\|\xi\|)\right)\|}{\|\xi\|} = 0$.
A continuación, considerando la definición de la derivada de Frechet, damos a conocer algunos ejemplos.

Ejemplo 2.50. Sean X, Y espacios normados completos y U un conjunto abierto en X.
Sean $F, G: U \to Y$ aplicaciones en el cual son diferenciables en $x \in U$. Entonces $F + G$ es diferenciable en x y

$$(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x)$$

Si c es un número, entonces

$$(cF)'(x) = cF'(x).$$

En efecto, sea $T_1 = F'(x), T_2 = G'(x)$ entonces

$$F(x+\xi) - F(x) = T_1\xi + o(\|\xi\|) \text{ con } \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|o(\|\xi\|)\|}{\|\xi\|} = 0$$

$$G(x+\xi) - G(x) = T_2\xi + \hat{o}(\|\xi\|) \text{ con } \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|\hat{o}(\|\xi\|)\|}{\|\xi\|} = 0$$

De ahí obtenemos

$$F(x+\xi) - F(x) + G(x+\xi) - G(x) = T_1\xi + o(\|\xi\|) + T_2\xi + \hat{o}(\|\xi\|)$$

$$(F+G)(x+\xi) - (F+G)(x) - (T_1+T_2)\xi = o(\|\xi\|) + \hat{o}(\|\xi\|) = \bar{o}(\|\xi\|).$$

De esto, debemos probar que

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|\bar{o}(\|\xi\|)\|}{\|\xi\|} = 0.$$

Entonces

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{(F+G)(x+\xi)-(F+G)(x)-(T_1+T_2)\xi}{\|\xi\|}$$
$$= \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{F(x+\xi)-F(x)-T_1\xi}{\|\xi\|} + \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{G(x+\xi)-G(x)-T_2\xi}{\|\xi\|} = 0$$

Por tanto $(F+G)'(x) = T_1 + T_2 = F'(x) + G'(x)$. Es decir $(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x)$.

Ejemplo 2.51. Sea $F_1 + F_2, G$ espacios normados completos y $F_1 \times F_2 \to G$ un producto. Sea U un conjunto en E y $f\colon U \to F_1$, $g\colon U \to F_2$ aplicaciones diferenciales en $x \in U$. Entonces el producto de las aplicaciones fg es diferenciable en x y

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Sea $T_1 = g'(x)$ y $T_2 = f'(x)$. Entonces

$$f(x+\xi)g(x+\xi) - f(x)g(x)$$
$$= f(x+\xi)g(x+\xi) - f(x+\xi)g(x) + f(x+\xi)g(x) - f(x)g(x)$$

$$= f(x+\xi)[g(x+\xi) - g(x)] + [f(x+\xi) - f(x)]g(x)$$

$$= f(x+\xi)[T_1\xi + o(\|\xi\|)] + [T_2\xi + \hat{o}(\|\xi\|)]\mathrm{g(x)}$$

$$= f(x+\xi)T_1(\xi) + f(x+\xi)o(\|\xi\|) + T_2(\xi)\mathrm{g(x)} + \hat{o}(\|\xi\|)\mathrm{g(x)}$$

$$= f(x)T_1(\xi) - f(x)T_1(\xi) + f(x+\xi)T_1(\xi) + f(x+\xi)o(\|\xi\|) + T_2(\xi)\mathrm{g(x)} + \hat{o}(\|\xi\|)\mathrm{g(x)}$$

$$= f(x)T_1(\xi) + [f(x+\xi) - f(x)]T_1(\xi) + f(x+\xi)o(\|\xi\|) + T_2(\xi)\mathrm{g(x)} + \hat{o}(\|\xi\|)\mathrm{g(x)}$$

$$= f(x)T_1(\xi) + T_2(\xi)\mathrm{g(x)} + [f(x+\xi) - f(x)]T_1(\xi) + f(x+\xi)o(\|\xi\|) + \hat{o}(\|\xi\|)\mathrm{g(x)}$$

Mostremos que $\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|\hat{o}(\|\xi\|)\|}{\|\xi\|}=0$, donde $\hat{o}(\|\xi\|)=[f(x+\xi)-f(x)]T_1(\xi)+f(x+\xi)o(\|\xi\|)+\hat{o}(\|\xi\|)\mathrm{g(x)}$. entonces

$$\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|\hat{o}(\|\xi\|)\|}{\|\xi\|}$$
$$=\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{[f(x+\xi)-f(x)]T_1(\xi)}{\|\xi\|}+\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{f(x+\xi)o(\|\xi\|)}{\|\xi\|}+\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\hat{o}(\|\xi\|)\mathrm{g(x)}}{\|\xi\|}$$
$$=\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{[f(x+\xi)-f(x)]T_1(\xi)}{\|\xi\|}+0+0$$

Si $|[f(x+\xi)-f(x)]T_1(\xi)|=|f(x+\xi)-f(x)||T_1(\xi)|\le|f(x+\xi)-f(x)||T_1|\|\xi\|$. Luego

$$0\le\left|\frac{[f(x+\xi)-f(x)]T_1(\xi)}{\|\xi\|}\right|\le|f(x+\xi)-f(x)||T_1|\to 0$$

Porque f es continua y diferenciable. Así mostramos que $\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|\hat{o}(\|\xi\|)\|}{\|\xi\|}=0$. Por lo tanto,

$$f(x)T_1(\xi)+T_2(\xi)g(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=(fg)'(x).$$

Ejemplo 2.52. Sean X,Y espacios de Banach. Sea $F:X\to Y$ una aplicación, $y\in X$ con $F(y)=y$. Entonces F es diferenciable en y, esto es $F'(y)=I$.

En efecto, considerando la definición de la derivada de Frechet,

$F(y+\xi)-F(y)=T(\xi)+o(\|\xi\|)$. Debemos encontrar T, con $\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|o(\|\xi\|)\|}{\|\xi\|}=0$, entonces

$$\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{F(y+\xi)-F(y)-T(\xi)}{\|\xi\|}=\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{y+\xi-y-T(\xi)}{\|\xi\|}=\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\xi-T(\xi)}{\|\xi\|}.$$

La única posibilidad para que el $\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|\xi-T(\xi)\|}{\|\xi\|}=0$, se tiene $\xi-T(\xi)=0$ entonces

$\xi=T(\xi)$ (Identidad). Así $F'(y)=I$.

Ejemplo 2.53. Sea $F: X \to Y$ con $F(\beta) = T^{-1}[G(\alpha,\beta)]$ para $\alpha \in X$ fijo. Mostremos la derivada respecto a la segunda variable, es decir $F'(\alpha,\beta) = T^{-1} \circ [D_2 G(\alpha,\beta)]$. De lo cual debemos encontrar H. En efecto, consideremos $T = D_2 G(\alpha,\beta)$ y utilizando la definición de Frechet con

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{T^{-1}[G(\alpha,\beta+\xi)] - T^{-1}[G(\alpha,\beta)] - H(\xi)}{\|\xi\|}$$

$$= \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{T^{-1}[G(\alpha,\beta+\xi) - G(\alpha,\beta)] - H(\xi)}{\|\xi\|}$$

$$= \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{T^{-1}[G(\alpha,\beta+\xi) - G(\alpha,\beta)] + T(\xi) - T(\xi) - H(\xi)}{\|\xi\|}$$

$$= \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{T^{-1}\big(T(\xi)\big) - H(\xi) + T^{-1}[G(\alpha,\beta+\xi) - G(\alpha,\beta) - T(\xi)]}{\|\xi\|}$$

$$= \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{T^{-1}\big(T(\xi)\big) - H(\xi)}{\|\xi\|} + T^{-1} \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{[G(\alpha,\beta+\xi) - G(\alpha,\beta) - T(\xi)]}{\|\xi\|}$$

$$= \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{T^{-1}\big(T(\xi)\big) - H(\xi)}{\|\xi\|} + T^{-1}(0)$$

$$= \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{T^{-1}\big(T(\xi)\big) - H(\xi)}{\|\xi\|}$$

Análogamente al ejemplo anterior

$$T^{-1}\big(T(\xi)\big) - H(\xi) = 0$$

$$H(\xi) = T^{-1}\big(T(\xi)\big)$$

$$H(\xi) = (T^{-1} \circ T)(\xi)$$

$$H = T^{-1} \circ T = T^{-1} \circ \big(D_2 G(\alpha,\beta)\big).$$

Por lo tanto $D_2 G(\alpha,\beta) = (T^{-1})[D_2 G(\alpha,\beta)]$.

Capítulo 3

Materiales y métodos

3.1 Materiales

Los recursos materiales necesarios de acuerdo al tiempo se tienen resumido en la siguiente tabla

Actividades	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	ene
Revisión de Bibliografía	X	X							
Redacción del proyecto		X	X						
Presentación del proyecto				X					
Revisión y aprobación del proyecto					X				
Obtención del borrador de tesis						X	X	X	
Sustentación									X

3.2 Presupuesto

Los recursos de bienes y servicios para el desarrollo de este proyecto de investigación se estimaron aproximadamente de la siguiente manera:

Descripción	Unidad de medida	Costo unitario(s/.)	Cantidad	Costo total(s/.)
Bibliografía	Und.	30	6	180
Uso de internet	Hrs.	1/hra	300	300
Papel Bond	Millares	20	3	60
Memoria Usb	4Gb	25	2	50
Impresión	Millares		2	230
Otros				300
Costo total				1120

3.3 Métodos

Los métodos que se usaran son deductivo, analítico como en los libros de Análisis Funcional del autor Steven G. Krantz, ya que la ejecución del proyecto consiste en la exploración, interpretación y análisis.

Capítulo 4

Resultados y discusión

4.1. El teorema del punto fijo de Banach en la prueba del teorema de la función implícita

En este capítulo daremos a conocer el resultado obtenido de acuerdo a la revisión literaria en el capítulo 2.

4.1.1. Punto fijo de Banach

Definición 25. Sea X un espacio métrico completo, $T: X \to X$ una aplicación. Decimos que un elemento $x \in X$ es un **punto fijo** de T si su imagen a través de T coincide con el mismo. Esto es $Tx = x$.

Ejemplo 4.1. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación rotación del plano, con ángulo θ definida por $T(x, y) = (x\cos\theta - y\, sen\,\theta, x sen\,\theta + y\cos\theta)$. La aplicación T tiene un solo punto fijo, esto es $T(0,0) = (0,0)$ el centro de la rotación.

Ejemplo 4.2. Sea la aplicación $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $x \to x^2$. Calculemos los puntos fijos de T. O sea los puntos $x \in \mathbb{R}$ tal que $Tx = x$, para esto observemos que

$$Tx = x^2$$

Luego $x = x^2$ lo cual implica que $x(x - 1) = 0$. De donde obtenemos que $x = 0$ ó
$x = 1$. Por lo tanto los puntos fijos de T son 0 y 1.

Ejemplo 4.3. Sea la función $\pi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\pi(x, y) = (x, 0)$ para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ llamada proyección. Recordemos que cualquier número real x es identificado como un par ordenado $(x, 0)$ en el plano, de ahí la proyección tiene infinidad de puntos fijos, es decir todos los puntos de $\mathbb{R}$.

El teorema del punto fijo es expresada a continuación en una observación de existencia y unicidad para puntos fijos de cierta aplicación y esto también da un procedimiento constructivo para obtener mejores aproximaciones al punto fijo. Este procedimiento es llamado una **iteración.**

Observación 4.4. El método de **iteración** consiste en escoger un elemento x_0 en un conjunto cualquiera e ir calculando recursivamente los elementos $x_0, x_1, x_2, x_3 \dots, x_n$ de la siguiente forma

$$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1, \dots, x_n = Tx_{n-1} \tag{4.1}$$

Definición 26. Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico. La aplicación $T: X \to X$ es llamada una **contracción** en X si existe una constante α con $0 < \alpha < 1$ tal que para todo $(x, y) \in X$ se tiene

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \tag{4.2}$$

En seguida damos a conocer algunos ejemplos de contracción.

Ejemplo 4.5. Sea $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = sen\ \frac{x}{2}, x \in \mathbb{R}$ mostremos que T es una contracción en $\mathbb{R}$.
En efecto, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$|T(x) - T(y)| = \left|sen\ \frac{x}{2} - sen\ \frac{y}{2}\right| = \left|2sen\ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)\right] \cos[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)]\right|$$

$$\leq 2\left|sen\ \left(\frac{x-y}{4}\right)\right| \left|\cos(\frac{x+y}{4})\right| \leq 2\left|sen\ \left(\frac{x-y}{4}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-y}{4}\right| = \frac{1}{2}|x-y|$$

Es decir

$$|T(x) - T(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

Por lo tanto T es una contracción en $\mathbb{R}$ con constante de contracción $\alpha = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 4.6. Sea $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación definida por $T(x) = \frac{x}{4}$ para $x, y \in \mathbb{R}$, mostremos que existe una constante α tal que T es una contracción. En efecto, sea

$$|T(x) - T(y)| = \left|\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right| = \left|\frac{x-y}{4}\right| \leq \frac{1}{4}|x-y|$$

$$|T(x) - T(y)| \leq \frac{1}{4}|x-y|$$

Concluimos que T es una contracción en $\mathbb{R}$ con constante de contracción $\alpha = \frac{1}{4}$.

Teorema 4.7. Sea X un espacio métrico completo. Sea $T: X \to X$ una contracción entonces T tiene **un único punto fijo,** esto es existe un único punto $x_0 \in X$ tal que $Tx_0 = x_0$.

Demostración

La idea de la prueba es construir una sucesión de Cauchy (x_n) de forma recursiva. Luego como el espacio X es completo, esta sucesión de Cauchy es convergente. O sea existe un punto $x \in X$ tal que $x_n \to x$ y probemos que x es el único punto fijo de T.
En efecto, sea $x_0 \in X$ y definamos la sucesión iterativa dado por

$$x_0, x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = T^n x_0, \dots$$

Ahora, mostremos que (x_n) es una sucesión de Cauchy. Para eso, notemos que

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(Tx_m, Tx_{m-1}) \leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) = d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2})$$

$$\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \leq \alpha^m d(x_1, x_0).$$

Entonces por la desigualdad triangular y la fórmula para la suma de una progresión geométrica obtenemos para $n > m$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-11}, x_n)$$

$$\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_1, x_0) = \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_1, x_0).$$

Desde que $0 < \alpha < 1$, en el numerador tenemos $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Consecuentemente

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m d(x_1, x_0)}{1 - \alpha} \ para\, n > m \tag{4.3}$$

Si $0 < \alpha < 1$ y $d(x_1, x_0)$ es fijo, al lado derecho tomemos para m suficientemente grande y $n > m$. Esto prueba que (x_m) es de Cauchy. Desde que X es completo (x_m) converge en X. Es decir $x_m \to x$.

En seguida mostraremos que x es el punto fijo de T. En efecto por la desigualdad triangular y (4.1) tenemos

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$$

Cuando m es suficientemente grande $d(x, Tx) = 0$ porque $x_m \to x$. Concluimos que $x = Tx$ por (M2). Esto muestra que x es un punto fijo de T.

Ahora mostraremos que x es el único punto fijo de T. En efecto supongamos que existe otro punto fijo, llamemos $\bar{x}$. Así $T\bar{x} = \bar{x}$, luego como $x = Tx$ se sigue que

$$d(x, \bar{x}) = d(Tx, T\bar{x}) \leq \alpha d(x, \bar{x})$$

$$d(x, \bar{x}) - \alpha d(x, \bar{x}) \leq 0$$

$$(1 - \alpha) d(x, \bar{x}) \leq 0.$$

Como $1 - \alpha > 0$ se sigue que $d(x, \bar{x}) = 0$. Lo que concluye que $x = \bar{x}$ por (M2). Por lo tanto el teorema queda probado.

Proposición 4.8. Sea X un espacio métrico completo. Sea $\bar{B} = \bar{B}(x, r)$ la bola cerrada en X. Asumamos que $H: \bar{B} \to X$ es una contracción con $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(H(x), x) \leq (1 - \alpha) r$$

Entonces H tiene un único punto fijo en $\bar{B}$.

Demostración

Sea x_0 un punto en $\bar{B}$, debemos mostrar que la imagen de H esté en la bola cerrada $\bar{B}$. En efecto, considerando la desigualdad triangular obtenemos

$$d(H(x_0), x) \leq d\big(H(x_0), H(x)\big) + d(H(x), x) \leq \alpha d(x_0, x) + (1 - \alpha) r$$

$$\leq \alpha r + (1 - \alpha) r = r$$

Por lo tanto $d(H(x_0), x) \leq r$. De esta desigualdad se verifica que la imagen de H en x_0 está en $\bar{B}$. Entonces $H: \bar{B} \to \bar{B}$ es una contracción. Por el teorema (4.7) H tiene un único punto fijo en $\bar{B}$ tal que $H(x_0) = x_0$.

Proposición 4.9. Sea X un espacio métrico completo, $B = B(x, r)$ la bola abierta en X. Además $H: B \to X$ es una contracción con $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(H(x), x) < (1 - \alpha) r$$

Entonces H tiene un único punto fijo en B.

Demostración

Análogamente a la proposición anterior mostraremos que la imagen de H esté en B.
En efecto, sea $y \in B = B(x, r)$ entonces

$$d(H(y), x) < d\big(H(y), H(x)\big) + d(H(x), x) < \alpha d(y, x) + (1 - \alpha) r = r.$$

Así,

$$d(H(y), x) < r$$

De ahí verificamos que $H(y)$ está en B, entonces $H: B \to B$ es una contracción y por teorema (4.7) H tiene un único punto fijo. Esto es $H(y) = y$.

Proposición 4.10. Sea X un espacio métrico completo y $H: X \to X$ una contracción con $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(H(w), w) = \rho \; entonces \; d(w, x) \leq \frac{\rho}{1 - \alpha}$$

Para $w \in X$, donde x es el punto fijo de H.

Demostración

Sea H una contracción y $d(H(w), w) = \rho$ con $w \in X$. Debemos mostrar $d(w, x) \leq \frac{\rho}{1-\alpha}$.
En efecto,

$$d(w, x) = d\big(w, H(x)\big) \leq d\big(w, H(w)\big) + d\big(H(w), H(x)\big) = \rho + \alpha d(w, x)$$

$$d(w, x) - \alpha d(w, x) \leq \rho$$
$$(1 - \alpha) d(w, x) \leq \rho$$

Multiplicando por $\frac{1}{1-\alpha} > 0$ obtenemos

$$d(w, x) \leq \frac{\rho}{1 - \alpha}.$$

Así, la proposición queda mostrada.

Proposición 4.11. Sea X un espacio métrico completo y S algún espacio métrico. Supóngase que $H: S \times X \to X$. Además $H(s, x)$ es una contracción en X uniformemente sobre $s \in S$ con $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(H(s, x), H(s, y)) \leq \alpha d(x, y) \text{ para todo } s \in S, x, y \in X$$

Además H es continua en s para cada fijo $s \in S$, sea $p_s \in X$ el único punto fijo satisfaciendo

$$H(s, p_s) = p_s$$

Entonces la aplicación $s \to p_s$ es una función continua de s.

Demostración

Considerando $s, t \in S$ debemos probar que dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $d(s,t) < \delta$ entonces $d(p_s, p_t) < \varepsilon$. En efecto si $H(.,p_t): S \times X \to X$ es continua en t para p_t fijo en X. De lo cual obtenemos, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $d(s,t) < \delta$ implica

$$d(H(s,p_t), H(t,p_t)) < \varepsilon$$

Por otro lado $H(t,p_t) = p_t$ entonces

$$d(H(s,p_t), p_t) < \varepsilon \tag{4.4}$$

Para $d(p_s, p_t)$ por (4.4) y por la desigualdad triangular obtenemos

$$d(p_s, p_t) \leq d(p_s, H(s,p_t)) + d(H(s,p_t), p_t)$$

$$< d(p_s, H(s,p_t)) + \varepsilon$$

$$= d(H(s,p_s), H(s,p_t)) + \varepsilon$$

$$(1-\alpha) d(p_s, p_t) \leq \varepsilon$$

$$d(p_s, p_t) \leq \frac{\varepsilon}{1-\alpha} = \bar{\varepsilon}$$

Así

$$d(p_s, p_t) \leq \bar{\varepsilon}$$

Por lo tanto la aplicación $s \to p_s$ es una función continua de s.

Teorema 4.12. Sea X un espacio métrico completo y S algún espacio métrico, $B = B(x,r)$ una bola abierta en X. Sea $H: S \times B \to X$ una contracción en X uniformemente sobre $s \in S$ con constante $0 < \alpha < 1$. Además H es continua en la variable s para cada valor fijo $x \in X$. Finalmente asuma que para cada $s \in S$, se cumple

$$d(H(s,x), x) < (1-\alpha) r$$

Entonces para $s \in S$ existe un único $p_s \in B$ tal que

$$H(s, p_s) = p_s$$

Y la aplicación $s \to p_s$ es continua de S a B.

Demostración

En efecto, por hipótesis tenemos la **aplicación** $H: S \times B \to X$ es una contracción en X uniformemente sobre $s \in S$ con $0 < \alpha < 1$, tal que

$$d(H(s,x),x) < (1-\alpha)r$$

Entonces $H(s,.)$ posee un único punto fijo $p_s \in B$ por la proposición (4.9) esto es

$$H(s,p_s) = p_s$$

En seguida, considerando la proposición (4.11) H es continua en s para cada fijo $x \in X$. Para cada $s \in S,\ p_s \in B$ es el único punto fijo satisfaciendo

$$H(s,p_s) = p_s$$

Y la aplicación $s \to p_s$ es una función continua de S a B.

$$h: S \to X$$

con $s \rightarrowtail h(s) = p_s$. Por lo tanto h es continua en S.

Definición 27. Sean X, Y, Z espacios de Banach y $F: X \times Y \to Z$ una aplicación. Entonces, para cada fijo $x_0 \in X$. Consideramos la diferenciabilidad de la aplicación

$$y \rightarrowtail F(x_0,y), \quad y \in Y$$

Si la derivada existe en el punto $y_0 \in Y$, entonces denotemos por $D_2F(x_0,y_0)$.

Teorema 4.13. Sean X, Y, Z espacios de Banach. Sea $U \times V$ un subconjunto abierto de $X \times Y$. Sea $G: U \times V \to Z$ una aplicación continua en $(x_0,y_0) \in U \times V$ tal que

a) $G(x_0,y_0) = 0$,

b) D_2F existe y es continua en $U \times V$,

c) $D_2F(x_0,y_0)$ es invertible.

Entonces existen bolas abiertas $M = B_X(x_0,r)$ y $N = B_Y(y_0,s)$ tal que, para cada
$\zeta \in M$ existe un único $\eta \in N$ satisfaciendo $G(\zeta,\eta) = 0$ y existe una única función continua $f: B_X(x_0,r) \to B_Y(y_0,s)$ definida cerca a x por la condición $f(\zeta) = \eta$.

Demostración

En efecto, consideremos $T = D_2G(x_0, y_0): Y \to Z$

Por hipótesis T es invertible, luego para $x \in U$, $y \in V$ podemos definir la aplicación $L: U \times V \to Y$ por

$$L(x, y) = y - T^{-1}[G(x, y)] \tag{4.5}$$

Afirmación: $L(x, y)$ es un aplicación continua, pues T^{-1} es continua (ver corolario (2.45)).

Derivando (4.5) con relación a la segunda variable y usando la regla de cadena, tenemos

$$D_2L(x, y) = I - T^{-1} \circ D_2G(x, y)$$

Luego, evaluando D_2L en (x_0, y_0), obtenemos

$$D_2L(x_0, y_0) = I - T^{-1} \circ D_2G(x_0, y_0) = I - T^{-1}(T) = I - I = 0 \tag{4.6}$$

Y considerando el ítem a), tenemos

$$L(x_0, y_0) = y_0 - T^{-1}[G(x_0, y_0)] = y_0 - T^{-1}(0) = y_0.$$

En seguida, probemos que D_2L sea continua en (x_0, y_0). Dado $\varepsilon > 0$ debemos probar que existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta_1$, $\|y - y_0\| < \delta_2$ entonces

$$\|D_2L(x, y) - D_2L(x_0, y_0)\| = \|I - T^{-1} \circ D_2G(x, y) - I + T^{-1} \circ D_2G(x_0, y_0)\|$$

$$= \|T^{-1} \circ D_2G(x, y) - T^{-1} \circ D_2G(x_0, y_0)\|$$

Así,

$$\|D_2L(x, y) - D_2L(x_0, y_0)\| \leq \|T^{-1}\| \|D_2G(x_0, y_0) - D_2G(x, y)\| \tag{4.7}$$

Sabemos por hipótesis que D_2G es continua en $(x_0, y_0) \in U \times V$. Dado un $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta_1, \|y - y_0\| < \delta_2 \;\Rightarrow \|D_2G(x, y) - D_2G(x_0, y_0)\| < \varepsilon \tag{4.8}$$

Reemplazando (4.8) en (4.7) obtenemos

$$\|D_2L(x, y) - D_2L(x_0, y_0)\| < \varepsilon$$

Donde $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\|T^{-1}\|}$.

Como D_2L es continua en (x_0, y_0) se sigue que, existen bolas $M = B_X(x_0, r)$ y $N = B_Y(y_0, s)$ tal que si $(x, y) \in M \times N$, entonces

$$\|D_2L(x, y) - D_2L(x_0, y_0)\| \leq \frac{1}{2}$$

Podemos considerar, sin pérdida de generalidad que $N = B_Y(y_0, s)$ y sigue de la última desigualdad y de (4.6) que

$$\|D_2L(x, y) - 0\| = \|D_2L(x, y)\| \leq \tfrac{1}{2} \text{ para todo } (x, y) \in M \times N.$$

Una vez que L es continua, existe una vecindad $W \subset M$ de x_0 tal que para $x \in W$, se tiene

$$\|L(x, y_0) - L(x_0, y_0)\| < \frac{s}{2}$$

ó

$$\|L(x, y_0) - y_0\| < \tfrac{s}{2} = (1 - \tfrac{1}{2})s \text{ para todo } x \in W \tag{4.9}$$

Ahora parametrizando L con un segmento en la segunda variable, con $x_1, x_2 \in N = B_Y(y_0, s)$ tal que

$$h(t) = L(x, (1 - t)x_1 + tx_2), t \in [0,1]$$

y aplicando el teorema del valor medio, desde que h es diferenciable en $(0,1)$ y continua en [0,1], entonces $r \in (0,1)$, tal que

$$\begin{aligned} \|h'(r)\| = \left\|\frac{h(1) - h(0)}{1 - 0}\right\| &= \|h(1) - h(0)\| \\ &= \|L(x, x_2) - L(x, x_1)\| \qquad (4.10) \end{aligned}$$

Si,

$$\|h'(t)\| = \|D_2L(x, (1 - t)x_1 + tx_2)(x_2 - x_1)\|$$

Esto, reemplazando en (4.10) tenemos

$$\|L(x, x_2) - L(x, x_1)\| = \|D_2L(x, (1 - t)x_1 + tx_2)(x_2 - x_1)\|$$

$$\leq \|D_2L(x, (1 - t)x_1 + tx_2)\|\|(x_2 - x_1)\| \leq \frac{1}{2}\|(x_2 - x_1)\|.$$

Esto implica que $L(x,y)$ es una contracción con constante $k = \frac{1}{2}$.

Por el teorema (4.12) y de (4.9) cuando

$$d(L(x,y_0),y_0) < \frac{s}{2} = (1-\frac{1}{2})s \text{ donde } \delta = \frac{1}{2} \text{ y } s = r.$$

Tenemos, para cada $\zeta \in M$ existe un único $\eta \in N$ tal que

$$L(\zeta,\eta) = \eta \iff G(x,y) = 0.$$

Además la aplicación $\zeta \mapsto \eta$ es continua de M a N tal que $f(\zeta) = \eta$.

Capítulo 5

Conclusiones

- En el teorema (4.13) se desarrolló la demostración del teorema de la función implícita en dimensión infinita, usando el teorema del punto fijo de Banach.

- En la sección (2.5) se estudió espacios de Banach, en la que ha permitido dar la base para entender el teorema de la función implícita.

- En la sección (2.10) se estudió la diferenciabiliad de Frechet.

- En el teorema (4.7) se demostró la existencia del único punto fijo de Banach.

Capítulo 6

Recomendaciones

A partir de la realización del presente trabajo se formula las siguientes recomendaciones

- Para lograr entender la demostración del teorema de la función implícita en espacios de Banach es básicamente estudiar el teorema del punto fijo, espacios de Banach, diferenciabilidad en espacios de Banach.

- Recomiendo para una futura investigación encontrar la derivada de la nueva función que se encuentra en el teorema de la función implícita.

Capítulo 7

Referencias

- [B] Barrera, W.E. (2010). ***Algunos teoremas del punto fijo para funciones T- contracciones*** (tesis de pregrado). Universidad de los Andes. Mérida.

- [F] Ferreira, M.S. (2008). ***El teorema del punto fijo de Banach y aplicaciones*** (tesis de prepago). Universidad Estadual. Brazil.

- [H] Honig, Ch.S. (1970). ***Análise Funcional e aplicacoes***. Vol VII. São Paulo.

- [H] Huaycani, J. (2013). ***Teorema del punto fijo de Banach en la existência y unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales*** (tesis de preprago). Universidad nacional del altiplano. Perú.

- [K] Krantz, S.G y Parks, H.R. (1951). ***The implicit Function Theorem***. Washington University. U.S.A.

- [K] Kreyszig, E. (1989). ***Introdutory Functinal Analysis with Applications***. University of Windsor. Estados unidos de américa; wiley.

- [L] Lages, E. (1970). ***Elementos de topologia geral***. Rio de janeiro.

- [L] Loayza, J.R. (2006). ***Aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach*** (tesis de pregrado). Universidad nacional mayor de San Marcos. Perú.

- [R] Rudin, W. (1966). ***Análisis, Principios de Análisis Matemático***, 2nd ed.

- [T] Treves, F. (1967). ***Topological Vector Spaces, distributions and Kernels***. Londón.

- [W] Wilberstaedt, J. M. (2000). ***Diferenciabilidade e o teorema da função implícita em espaços de Banach*** (tesis de pregrado). Universidad federal de Santa Catalina. Brazil.

- http://personales.upv.es/jbenitez/data/tesis.pdf.