



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO**  
**MATEMÁTICAS**



**ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN DEL MODELO SIR PARA  
DIFERENTES TASAS DE CONTAGIO USANDO LOS MÉTODOS  
DE EULER Y RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN**

**TESIS**

**PRESENTADA POR:**

**ALEXANDER JHOIS AROHUANCA MEDINA**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS:**

**MATEMÁTICAS**

**PUNO - PERÚ**

**2024**



## Reporte de similitud

NOMBRE DEL TRABAJO

**ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN DEL MODELO SIR PARA DIFERENTES TASAS DE CONTAGIO USANDO LOS MÉTODOS DE EULER Y RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN**

AUTOR

**ALEXANDER JHOIS AROHUANCA MEDINA**

RECuento de PALABRAS

**22916 Words**

RECuento de CARACTERES

**112496 Characters**

RECuento de PÁGINAS

**137 Pages**

TAMAÑO DEL ARCHIVO

**2.1MB**

FECHA DE ENTREGA

**Oct 29, 2024 9:00 PM GMT-5**

FECHA DEL INFORME

**Oct 29, 2024 9:02 PM GMT-5**

### ● 11% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 7% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 8% Base de datos de trabajos entregados
- 2% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

### ● Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Bloques de texto excluidos manualmente
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 12 palabras)

  
Adelaida Otazu Conza  
LIC. CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS  
Doc. MATEMÁTICA APLICADA  
Director de tesis



  
Adelaida Otazu Conza  
LIC. CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS  
Doc. MATEMÁTICA APLICADA

Resumen



## DEDICATORIA

Dedico este trabajo de investigación a mis amados padres Santos y Elena por el gran esfuerzo que hicieron por educarme, por su apoyo constante, por enseñarme a perseguir mis sueños con pasión y determinación, por inculcarme valores los cuales fueron un pilar importante para alcanzar mis objetivos personales y profesionales, lo cual hice superando cada obstáculo con valentía y perseverancia.

A mi hermano Alessandro, cuya presencia ha sido una de las más nobles inspiraciones en mi camino hacia el cumplimiento de mis metas.

A mi querido abuelito Fausto, que en paz descansa; sé que, de haber estado aquí, se habría sentido orgulloso de este logro y a mi abuelita Dionicia por el apoyo constante que me brindó a lo largo de estos años. Finalmente a mis tres leales compañeros de cuatro patas y a mi gata.

**Alexander Jhois Arohuanca Medina**



## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, a la Universidad Nacional del Altiplano, Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas, por su contribución a mi formación profesional.

Agradezco especialmente a mi asesora de tesis, Adelaida Otazu Conza, por su orientación, paciencia y apoyo constante durante todo el proceso de investigación. Sus valiosas sugerencias y observaciones han sido esenciales para alcanzar los objetivos establecidos.

Asimismo, deseo expresar mi gratitud a los jurados de la tesis por sus sugerencias y correcciones que contribuyeron a hacer posible este trabajo de investigación.

Quiero manifestar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que han participado de alguna forma en la elaboración de esta tesis.



## ÍNDICE DE GENERAL

	Pág.
<b>DEDICATORIA</b>	
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	
<b>ÍNDICE DE GENERAL</b>	
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	
<b>ÍNDICE DE ANEXOS</b>	
<b>ACRÓNIMOS</b>	
<b>RESUMEN .....</b>	<b>12</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>13</b>
<b>CAPÍTULO I14</b>	
<b>INTRODUCCIÓN</b>	
<b>1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....</b>	<b>19</b>
<b>1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA .....</b>	<b>19</b>
<b>1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>19</b>
1.3.1. Hipótesis General .....	19
1.3.2. Hipótesis Específicas .....	20
<b>1.4. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>20</b>
<b>1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>21</b>
1.5.1. Objetivo General .....	21
1.5.2. Objetivos Específicos.....	21

## CAPÍTULO II

### REVISIÓN DE LITERATURA



<b>2.1.</b>	<b>ANTECEDENTES</b> .....	23
<b>2.2.</b>	<b>MARCO TEÓRICO</b> .....	27
2.2.1.	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias .....	27
2.2.2.	Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales .....	32
2.2.3.	Autovectores .....	45
2.2.4.	Autovalores .....	47
2.2.5.	Sistema de Ecuaciones Diferenciales no Lineales .....	56
2.2.6.	Modelo SIR .....	59
2.2.7.	Normalización del Modelo SIR .....	64
2.2.8.	Región de Estabilidad .....	67
2.2.9.	Método de Euler .....	67
2.2.10.	Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden .....	81
2.2.11.	Aplicación del Método de Euler al Modelo SIR .....	98
2.2.12.	Aplicación del Método de RK4 al modelo SIR .....	100
<b>CAPÍTULO III</b>		
<b>MATERIALES Y MÉTODOS</b>		
<b>3.1.</b>	<b>DISEÑO METODOLÓGICO</b> .....	105
<b>3.2.</b>	<b>MATERIALES</b> .....	106
<b>CAPÍTULO IV</b>		
<b>RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>		
<b>4.1.</b>	<b>RESULTADOS</b> .....	107
<b>4.2.</b>	<b>DISCUSIÓN</b> .....	123
<b>V.</b>	<b>CONCLUSIONES</b> .....	125
<b>VI.</b>	<b>RECOMENDACIONES</b> .....	127
<b>VII.</b>	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	128



**ANEXOS..... 132**

**Área:** Ecuaciones Diferenciales Numéricas

**Tema:** Métodos Numéricos

**Línea de Investigación:** Matemática Aplicada

**FECHA DE SUSTENTACIÓN:** 15 de noviembre de 2024



## ÍNDICE DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
<b>Tabla 1</b> Resultados de la aproximación numérica con el método de Euler .....	77
<b>Tabla 2</b> Resultados de la aproximación numérica con el método de RK4 .....	91
<b>Tabla 3</b> Algunas tasas de reproducción básica estimados .....	110



## ÍNDICE DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
<b>Figura 1</b> Diagrama del modelo SIR con ausencia de parámetros.....	60
<b>Figura 2</b> Diagrama del modelo SIR.....	61
<b>Figura 3</b> Gráfico de la solución de la EDO con el Método de Euler.....	77
<b>Figura 4</b> Región de estabilidad del Método de Euler .....	80
<b>Figura 5</b> Gráfico de la solución de la EDO con el Método de RK4.....	92
<b>Figura 6</b> Región de estabilidad del Método de RK4 .....	97
<b>Figura 7</b> Diagrama de flujo para el Método de Euler.....	108
<b>Figura 8</b> Diagrama de flujo para el Método de RK4.....	109
<b>Figura 9</b> Modelo SIR para el Covid-19 con el Método de Euler.....	111
<b>Figura 10</b> Modelo SIR para el Covid-19 con el Método de RK4.....	112
<b>Figura 11</b> Modelo SIR para el Sarampión con el Método de Euler .....	114
<b>Figura 12</b> Modelo SIR para el Sarampión con el Método de RK4 .....	115
<b>Figura 13</b> Modelo SIR para el tercer caso con el Método de Euler .....	116
<b>Figura 14</b> Modelo SIR para el tercer caso con el Método de RK4 .....	117
<b>Figura 15</b> Modelo SIR para el Covid-19 con los Métodos de Euler y RK4.....	119
<b>Figura 16</b> Modelo SIR para el Sarampión con los Métodos de Euler y RK4 .....	120
<b>Figura 17</b> Modelo SIR para el tercer caso con los Métodos de Euler y RK4 .....	121
<b>Figura 18</b> Región de estabilidad de los Método de Euler y RK4.....	123



## ÍNDICE DE ANEXOS

	<b>Pág.</b>
<b>ANEXO 1</b> Implementación del Método de Euler en el Modelo SIR .....	132
<b>ANEXO 2</b> Implementación del Método de RK4 en el Modelo SIR .....	134
<b>ANEXO 3</b> Declaración Jurada de Autenticidad de Tesis .....	136
<b>ANEXO 4</b> Autorización para el depósito de tesis en el Repositorio Institucional....	137



## ACRÓNIMOS

### Índice de Símbolos

$\beta$ :	Tasa de Contagio
$\gamma$ :	Tasa de Recuperación
$R_0$ :	Tasa de Reproducción Básica
$X_c$ :	Solución Homogénea
$X_p$ :	Solución Particular
$L$ :	Operador Lineal Diferencial
$\lambda$ :	Autovalor
$v$ :	Autovector

### Índice de Abreviaturas

EDO:	Ecuación Diferencial Ordinaria
EDOs:	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
EDP:	Ecuación Diferencial Parcial
EDPs:	Ecuaciones Diferenciales Parciales
PVI:	Problema de Valor Inicial
PVIs:	Problema de Valores Iniciales
SIR:	Susceptibles – Infectos – Recuperados
LI:	Linealmente Independiente
LD:	Linealmente Dependiente



## RESUMEN

En la modelización matemática, el modelo básico Susceptibles-Infectados-Recuperados divide a la población en tres clases epidemiológicas o tres compartimentos, describiendo el flujo entre ellas. El objetivo de este trabajo es analizar la solución del modelo Susceptibles-Infectados-Recuperados mediante los métodos numéricos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden, considerando diferentes tasas de contagio, y la implementación del código se realizó en Python. La metodología de este trabajo de investigación es de tipo descriptivo-analítico, ya que el modelo Susceptibles-Infectados-Recuperados utiliza sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, las cuales se uso métodos numéricos para aproximar la solución. Para aproximar la solución se uso los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden. Los resultados concluyen que el método de Euler es inestable para una alta tasa básica de reproducción, obteniendo poca precisión; en cambio el método de Runge-Kutta de cuarto orden es más eficiente, obteniendo mayor estabilidad y precisión bajo las mismas condiciones. Por ello; al comparar ambos métodos, Runge-Kutta de cuarto orden es claramente mejor que el método de Euler en la modelización numérica del modelo Susceptibles-Infectados-Recuperados.

**Palabras clave:** Estabilidad, Método de Euler, Método de Runge-Kutta de cuarto orden, Modelo Susceptibles-Infectados-Recuperados, Python.



## ABSTRACT

In mathematical modeling, the basic Susceptible-Infected-Recovered model divides the population into three epidemiological classes or three compartments, describing the flow between them. The objective of this work is to analyze the solution of the Susceptible-Infected-Recovered model using fourth-order Euler and Runge-Kutta numerical methods, considering different contagion rates, and the implementation of the code was performed in Python. The methodology of this research work is descriptive-analytical, since the Susceptible-Infected-Recovered model uses systems of nonlinear ordinary differential equations, which numerical methods were used to approximate the solution. The Euler and Runge-Kutta fourth order methods were used to approximate the solution. The results conclude that the Euler method is unstable for a high basic reproduction rate, obtaining low accuracy; on the other hand, the fourth order Runge-Kutta method is more efficient, obtaining higher stability and accuracy under the same conditions. Therefore, when comparing both methods, fourth-order Runge-Kutta is clearly better than the Euler method in the numerical modeling of the Susceptible-Infected-Recovered model.

**Keywords:** Euler method, Runge-Kutta fourth order method, Stability, Susceptible-Infected-Recovered model, Python.



# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

La modelización matemática es una línea de investigación muy importante de la matemática que desempeña un papel importante en la investigación y desarrollo de modelos epidemiológicos. Nos permite la simulación de diferentes escenarios futuros, basándose en el cambio de las condiciones iniciales o en los parámetros del modelo por estudiar, es esencial para la planificación a largo plazo y para la preparación de posibles brotes epidemiológicos o pandemias como la más reciente del Covid-19; en esta investigación optamos por el modelo epidemiológico Susceptibles-Infectados-Recuperados (SIR), dado que nos ayuda a prever y comprender la propagación de alguna enfermedad bacteriana o vírica (Pliego, 2011), esto es importante para la planificación e implementación de estrategias de control y prevención de la enfermedad por estudiar.

El modelo epidemiológico SIR es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, está compuesto por tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, esto se debe a que las ecuaciones incluyen términos no lineales, como producto de las variables de estado S, I y R. Resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales puede ser complejo, particularmente cuando no hay soluciones analíticas disponibles y es ahí donde se opta al uso de métodos iterativos, también conocido como métodos numéricos, esto nos permite obtener soluciones aproximadas.

La tasa de contagio, también conocida como tasa de reproducción básica  $R_0$ , es un parámetro epidemiológico que cuantifica la capacidad de una enfermedad infecciosa para propagarse dentro de una población. Esta medida estima el número promedio de personas susceptibles que una persona infectada puede contagiar en condiciones



epidemiológicas específicas, cuando la mayoría de la población es susceptible al patógeno de dicha enfermedad (Ridenhour et al., 2018).

Si la tasa de contagio es igual a 1, cada persona infectada transmitirá la enfermedad a una persona adicional, manteniendo así una propagación constante. Cuando la tasa de contagio es inferior a 1, la enfermedad tiene menos probabilidades de propagarse de manera sostenida en la población, ya que cada individuo infectado transmite la enfermedad a menos de una persona, lo que eventualmente puede llevar a la disminución de casos. Por otro lado, si la tasa de contagio es superior a 1, la enfermedad tiende a propagarse, ya que cada persona infectada transmite la enfermedad a más de una persona, lo que puede dar lugar a un aumento exponencial de casos.

Este parámetro es esencial para comprender la dinámica de propagación de enfermedades infecciosas y es utilizado por los epidemiólogos y expertos en salud pública para evaluar la efectividad de las intervenciones y controlar brotes de enfermedades. La tasa de contagio puede variar en diferentes etapas de una epidemia o pandemia y puede ser influenciada por factores como medidas de control, comportamientos individuales y la inmunidad de la población.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) son una herramienta poderosa para comprender y predecir los cambios en entidades interrelacionadas en nuestro mundo dinámico. Desde la posición de la Tierra hasta la trayectoria de un proyectil, muchas de las variables que nos rodean están en constante cambio, y las EDO nos permiten modelar estas relaciones matemáticamente. En esencia, las EDO expresan cómo las variables y sus derivadas se relacionan entre sí, en función del tiempo u otras variables independientes. Al estudiar las EDO, no solo buscamos comprender cómo cambian las variables y sus derivadas, sino también cómo se relacionan entre sí las propias variables.



Por ejemplo, a partir de datos sobre la posición variable de una partícula y su velocidad, queremos determinar la relación entre la posición y el tiempo, lo que nos permite predecir su posición en cualquier momento futuro. Las EDO surgen en una variedad de campos, desde la física, hasta la economía; siempre que una ley universal se exprese en términos de variables y sus derivadas (Tenenbaun y Pollard, 1985). Además de modelar el comportamiento individual de variables a través de ecuaciones diferenciales ordinarias, en muchos casos es necesario analizar cómo interactúan varias variables simultáneamente donde los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias EDOs resultan fundamentales, proporcionando modelos que capturan la dinámica conjunta de múltiples variables en distintos campos, como la biología o la ingeniería.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) son fundamentales en el análisis matemático, ya que proporcionan modelos para comprender y analizar una amplia gama de fenómenos naturales y artificiales. Desde la dinámica de poblaciones hasta el comportamiento de circuitos eléctricos, estos sistemas nos permiten representar y predecir, de cómo es que múltiples variables cambian en función del tiempo u otras variables independientes. En este contexto, el estudio de los sistemas de EDOs es esencial para explorar y comprender la complejidad de los sistemas dinámicos en diversas disciplinas (Macias et al., 2011). Una vez que comprendemos cómo las EDOs modelan el cambio en diversas variables, surge la necesidad de emplear métodos numéricos para obtener soluciones precisas. En este contexto, los métodos explícitos e implícitos juegan un papel crucial, proporcionando enfoques distintos para resolver EDOs según las características del problema, como la estabilidad y rigidez.

Los métodos explícitos e implícitos son dos enfoques comunes para resolver ecuaciones diferenciales en el contexto de métodos numéricos. En un método explícito,



la solución en un punto de tiempo futuro se calcula explícitamente en términos de la solución en el punto de tiempo actual y otros parámetros conocidos, existen varios métodos explícitos entre los más conocidos tenemos: Método de Euler, Método de Runge-Kutta de segundo orden y Método de Runge-Kutta de cuarto orden. Por otro lado, en un método implícito, la solución en un punto de tiempo futuro se determina mediante la solución de una ecuación que involucra la solución en el punto de tiempo futuro y otros parámetros. Existen varios métodos implícitos entre los más conocidos tenemos: Método de Euler implícito, Método de diferencia finita hacia atrás y Método de Newton-Raphson. Cada método tiene sus propias ventajas y desventajas en términos de estabilidad, precisión y eficiencia computacional, y la elección entre ellos depende del problema específico que se esté abordando y de las características de la ecuación diferencial en cuestión (Chapra y Canale, 2011). La elección entre métodos implícitos y explícitos no solo influye en la eficiencia del cálculo, sino también en la estabilidad de las soluciones numéricas, la estabilidad es una propiedad esencial en la resolución de ecuaciones diferenciales ya que determina que si los errores acumulados durante el proceso se amplifican o disminuyen, lo que es clave para obtener resultados precisos especialmente en problemas con largos intervalos de tiempo o con comportamientos inestables.

La estabilidad en el contexto de ecuaciones diferenciales ordinarias se refiere a la propiedad del sistema de mantenerse en un estado de equilibrio a lo largo del tiempo, especialmente cuando se les somete a pequeñas perturbaciones. En sistemas dinámicos, la estabilidad se puede analizar mediante la evaluación de cómo las soluciones del sistema responden a cambios en las condiciones iniciales o pequeñas variaciones en los parámetros de tiempo. Un sistema se considera estable si las perturbaciones tienden a disminuir con el tiempo, indicando una convergencia hacia el estado de equilibrio. Un



método es convergente precisamente cuando la solución de la ecuación de diferencias tiende a la solución de la ecuación diferencial, conforme el tamaño de paso se acerca a cero (Burden y Faires, 2011). La estabilidad adquiere mayor relevancia cuando se trata de resolver ecuaciones diferenciales rígidas, donde las soluciones pueden variar rápidamente en algunos intervalos mientras cambian de forma lenta en otros, este comportamiento conocido como rigidez, requiere el uso de métodos numéricos especializados para evitar inestabilidades y garantizar resultados precisos sin la necesidad de pasos de tiempo extremadamente pequeños.

La rigidez en ecuaciones diferenciales ordinarias se refiere a la presencia de intervalos significativos en las escalas de tiempo de los componentes por estudiar, dado que ciertos componentes evolucionan a diferentes ritmos, la rigidez puede aparecer, presentado mayor complicación la solución con métodos numéricos. Un sistema rígido es conocido por el cambio rápido de sus componentes, junto con componentes de cambio lento. En sistemas rígidos, los métodos estándares pueden volverse ineficientes o inestables, y se requiere el uso de métodos numéricos más complejos y así asegurando una resolución precisa y estable de las ecuaciones a lo largo de los intervalos de tiempo (Chapra y Canale, 2011).

El trabajo de investigación se estructura de la siguiente manera:

En el capítulo I, se desarrollan todas las componentes del problema, como son el planteamiento, formulación, hipótesis; en los cuales se tiene una mirada general, al problema, para el que se utiliza el modelo epidemiológico SIR. El capítulo II, contiene el marco teórico, en el cual se desarrolla importantes sub capítulos, se investigó varias fuentes con el fin de describir definiciones y conceptos sobre la investigación. En el capítulo III, se refiere a materiales y métodos, se aclara precisamente el tipo de



investigación seleccionado, que en este caso es de tipo cuantitativo. En el capítulo IV, se describen los resultados de la investigación.

## **1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Para el análisis del modelo epidemiológico SIR para diferentes tasas de contagio se formuló las siguientes preguntas:

¿Cómo se implementa el método de Euler para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales del modelo SIR para diferentes tasas de contagio?

¿Cómo se implementa el método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales del modelo SIR para diferentes tasas de contagio?

¿Cómo analizar entre los resultados obtenidos mediante el método de Euler y el método de Runge-Kutta de cuarto orden, en términos de precisión y eficiencia, al considerar diferentes tasas de contagio?

## **1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

¿Cómo afecta el parámetro para diferentes tasas de contagio en la solución del modelo SIR usando los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden en términos de precisión y eficiencia en la simulación de la propagación de una enfermedad infecciosa?

## **1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.3.1. Hipótesis General**



El análisis de la solución del modelo SIR para diferentes tasas de contagio usando los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden nos ayuda a una mejor elección del método.

### **1.3.2. Hipótesis Específicas**

La implementación del método de Euler para la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales del modelo SIR para diferentes tasas de contagio.

La implementación del método de Runge-Kutta de cuarto orden para la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales del modelo SIR para diferentes tasas de contagio.

La comparación entre los resultados obtenidos mediante el método de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden, considerando la precisión y eficiencia de ambos métodos para diferentes de tasas de contagio.

## **1.4. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN**

Ante los últimos acontecimientos de la pandemia por COVID-19, se dio la necesidad de investigar en el campo de Modelización Epidemiológica Matemática, específicamente el Modelo SIR. Dicho modelo está compuesto por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, como el sistema es no lineal. Este tipo de sistemas no tiene solución exacta, entonces se utiliza métodos numéricos para aproximar la solución, siendo método de Euler, Runge-Kutta de cuarto orden entre otros.



La presente investigación surge de la necesidad de elegir el mejor método numérico en la solución del Modelo Epidemiológico SIR, se optó en comparar entre dos métodos numéricos, el método de Euler y el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

La comparación entre estos dos métodos en el contexto epidemiológico contribuye a la ampliación del conocimiento en la resolución con métodos numéricos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Lineales, lo que podría ser útil para posteriores investigaciones en el ámbito de Modelización Epidemiológica Matemática.

Esta investigación es relevante debido a lo crucial en elegir el método numérico adecuado para la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Lineales. En el proceso de comparación entre el método de Euler y el método de Runge-Kutta de cuarto orden en el Modelo Epidemiológico SIR, se estima dar información útil que ayude al ámbito científico, así como también a estudiantes e investigadores que tengan interés en trabajar en la simulación y Modelización Epidemiológica Matemática.

## **1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.5.1. Objetivo General**

Analizar la solución del modelo SIR para diferentes tasas de contagio por los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden para una mejor elección del método.

### **1.5.2. Objetivos Específicos**

Implementar el método de Euler para la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales del modelo SIR para diferentes tasas de contagio.



Implementar el método de Runge-Kutta de cuarto orden para la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales del modelo SIR para diferentes tasas de contagio.

Realizar un análisis comparativo entre los resultados obtenidos mediante el método de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden, considerando la precisión y eficiencia de ambos métodos para diferentes de tasas de contagio.



## CAPÍTULO II

### REVISIÓN DE LITERATURA

#### 2.1. ANTECEDENTES

##### INTERNACIONAL

Ilha da Silva et al. (2023) en el artículo de investigación titulado “The Stiffness Phenomena for the Epidemiological SIR Model: a Numerical Approach”, tuvo como objetivo estudiar el fenómeno de rigidez en el modelo SIR y su impacto en la precisión de las soluciones numéricas. La metodología aplicada incluyó la simulación de escenarios utilizando los métodos numéricos de Euler explícito, Runge-Kutta y Rosenbrock semi-implícito, analizando los errores y las implicaciones numéricas de la rigidez. Los autores concluyeron que la rigidez aumenta con mayores tasas de transmisión y menores tasas de mortalidad, y que una solución numérica precisa del modelo SIR depende de la elección adecuada del método numérico y del paso temporal.

Ashgi et al. (2021) en el artículo de investigación titulado “Comparison of numerical simulation of epidemiological model between Euler method with 4th order Runge Kutta method”, tuvo como objetivo comparar el rendimiento de los métodos numéricos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden en la resolución de modelos epidemiológicos para estudiar la propagación del COVID-19. La metodología que utilizó consistió en aplicar ambos métodos del modelo SIR para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales que describe la transmisión de la enfermedad COVID -19. Los autores concluyeron que, aunque el método de Euler es más rápido, existen diferencias



significativas en las soluciones obtenidas entre ambos métodos siendo el método de Runge-Kuta más preciso.

Wangping et al. (2020) en el artículo de investigación titulado “Extended SIR prediction of the epidemics trend of COVID-19 in Italy and compared with Hunan, China”, tuvo como objetivo predecir la tendencia de la epidemia de COVID-19 en Italia, hacer una comparación con la ciudad de Hunan en China, con el fin de ayudar a desarrollar estrategias de salud pública. La metodología que utilizó fue el modelo dinámico extendido eSIR, que incorpora los efectos de diferentes medidas de intervención y el cálculo del número reproductivo básico a través del método de Monte Carlo. Los autores concluyeron que las estrictas medidas implementadas en Italia han sido efectivas para la prevención de la propagación del virus y recomendaron que otros países europeos con un alto número de casos apliquen intervenciones similares.

Ridenhour et al. (2018) en el artículo de investigación titulado “El número reproductivo básico ( $R_0$ ): consideraciones para su aplicación en la salud pública”, en este trabajo su objetivo fue analizar el uso de  $R_0$  en el contexto de la salud pública, resaltando su importancia para la comprensión en la propagación de enfermedades. La metodología que utilizó se centró en la revisión de estudios existentes y el análisis de la aplicabilidad del parámetro  $R_0$  en diferentes pandemias o epidemias. Los autores concluyeron que, aunque el parámetro  $R_0$  era útil para describir la dinámica de una epidemia o pandemia, tenía sus limitaciones cuando utilizó como base única para tomar decisiones de salud pública y debía complementarse con otros indicadores epidemiológicos, como las tasas de contagio o transmisión y periodos infecciosos, para mejorar la efectividad de las intervenciones.



Hossain et al. (2017) en el artículo de investigación titulado “Numerical study of kermack-mckendrik SIR model to predict the outbreak of ebola virus diseases using euler and fourth order runge-kutta methods”, El objetivo de este trabajo fue modelar matemáticamente la dinámica de transmisión del virus del Ébola utilizó el modelo básico SIR. La metodología se centró en la aplicación de los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden para resolver problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias, comparando su rendimiento en datos reales y uso el software MATLAB. Los autores concluyeron que ambos métodos eran eficientes y adecuados para predecir la propagación del virus.

Rincón-Tobo et al. (2017) en el artículo de investigación titulado “Herramientas para el modelado epidemiológico de enfermedades en animales. Caso de estudio: brucelosis bovina”, describieron la relevancia de las herramientas informáticas para comprender la dinámica de transmisión de enfermedades infecciosas. La metodología utilizada se fundamentó en la recopilación de datos sobre modelos epidemiológicos aplicados a la brucelosis, analizando la exactitud y eficacia de cada una de las herramientas. Para simular un modelo epidemiológico en una hoja de cálculo, se utilizó un enfoque basado en la discretización de las ecuaciones diferenciales mediante el método de Euler. Finalmente, se concluyó que las herramientas informáticas en modelos epidemiológicos permiten procesar grandes datos para tomar decisiones y, aunque estos modelos son accesibles sin conocimientos especializados, las enfermedades complejas requieren funciones avanzadas. En el modelo SIR, la elección de herramientas dependía de los datos y los objetivos del análisis.

Pliego (2011) en la tesis de grado titulada “Modelos epidemiológicos de enfermedades virales infecciosas”, analizó el modelo SIR y SIRS para explicar sus



ventajas y desventajas, proporcionando conocimiento sobre su construcción, uso y las variables necesarias para desarrollar modelos epidemiológicos. Para ello, empleó el análisis cualitativo. Finalmente, destacó la importancia de obtener información verídica al clasificar cada etapa de la enfermedad estudiada y al disponer de datos adecuados sobre la dinámica de difusión de la enfermedad, ya que esto permitiría construir un modelo matemático más preciso que ayudaría a hacer mejores predicciones sobre los procesos de difusión de una enfermedad infecciosa.

## NACIONAL

Quilca (2021) en el artículo de investigación titulado “Construcción del modelo SEIR que describe la evolución de la pandemia COVID-19 en la región Tacna”, tuvo como objetivo generalizar el modelo epidemiológico Susceptibles-Infectados-Recuperados (SIR) para modelar matemáticamente la evolución de la pandemia del COVID-19 en la región de Tacna. La metodología utilizada se basó en el uso de reportes oficiales de la Dirección Regional de Salud de Tacna entre abril y junio de 2021 para evaluar y calcular los parámetros de evolución a través del modelo SEIR. Para aproximar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias del modelo SEIR, se realizaron simulaciones en el software Matlab y Excel. El autor concluyó que el modelo desarrollado permitía interpretar el avance de la pandemia, determino el factor de contagio  $R_0$  y aportar información para la implementación de medidas de control epidemiológico en la región de Tacna.

Pino et al. (2020) en el artículo de investigación titulado “Un Modelo Matemático SIR-D Segmentado para la Dinámica de Propagación del Coronavirus (COVID-19) en el Perú”, tuvieron como objetivo utilizar un modelo matemático SIR-D segmentado para predecir la evolución de las poblaciones epidemiológicas (Susceptibles, Infectados,



Recuperados y Muertos) durante la pandemia de COVID-19. La metodología empleada incluyó la segmentación del modelo en seis etapas de 14 días cada una, donde las tasas epidemiológicas se estimaron empíricamente mediante regresión lineal a partir de los datos de vigilancia epidemiológica del Ministerio de Salud del Perú. Además, se incorporó el uso de Machine Learning para optimizar los parámetros del modelo SIR-D. Los autores concluyeron que el modelo segmentado proporcionaba una mejor calibración y un menor error de predicción a corto plazo en comparación con un modelo SIR-D no segmentado.

Vásquez (2023) en la tesis de maestría titulada “Modelo Básico Epidemiológico SIR para determinar la evolución del COVID-19 en la región Lambayeque en el año 2020” tuvo como objetivo aplicar el modelo básico epidemiológico SIR para describir la evolución de la pandemia de COVID-19 en la región Lambayeque durante el año 2020, resaltando la importancia de la modelación matemática para predecir el comportamiento de enfermedades. La metodología fue de tipo observacional y retrospectiva, utilizando la observación directa como técnica principal y una ficha de recolección de datos como instrumento, donde se registraron los casos de personas susceptibles, infectadas y removidas por COVID-19 en la región de Lambayeque. Se implementó el modelo SIR, resuelto por el método de Runge-Kutta de cuarto orden a través de MatLab, y se calcularon parámetros mensuales de infección y remoción, concluyendo que el modelo SIR permitía describir y analizar la evolución de la pandemia en la región durante el año 2020.

## **2.2. MARCO TEÓRICO**

### **2.2.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**

**Definición 2.2.1.1. (Ecuación Diferencial)** Se considera una ecuación diferencial (ED) aquella que incluye derivadas de una o más variables con respecto a una o más variables independientes (Zill, 2018).

Para hablar de ecuaciones diferenciales se clasificarán por tipo, orden y linealidad.

### Clasificación por Tipo

Se considera una ecuación diferencial ordinaria (EDO) aquella que contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente (Zill, 2018).

#### Ejemplo 2.2.1.1.

$$\frac{dy}{dx} - 7y = e^{2x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 10y = 0 \quad \wedge \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 5x - y$$

Una ecuación que tiene derivadas parciales de una o más variables de dos a más variables independientes se denomina ecuación diferencial parcial (EDP).

#### Ejemplo 2.2.1.2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 5 \frac{\partial u}{\partial t} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial x}$$

### Clasificación por Orden

El orden de una ecuación diferencial, es el orden de la mayor derivada en la ecuación (Zill, 2018).

#### Ejemplo 2.2.1.3.



$$2 \frac{dy}{dx} - 3y = 0, \quad 5 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^3y}{dx^3} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 8e^x$$

Simbólicamente podemos expresar una ecuación diferencial ordinaria de enésimo orden con una variable dependiente por la forma general,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

La siguiente ecuación diferencial, donde  $f$  es una función continua con valores reales, se conoce como la forma normal de la ecuación (1),

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

### Clasificación por Linealidad

Una ecuación diferencial ordinaria lineal puede expresarse mediante una combinación lineal de las funciones desconocidas y sus derivadas.

#### Ejemplo 2.2.1.4.

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 6x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^3y}{dx^3} - 5 \frac{dy}{dx} + y = \text{sen}(x)$$

Mientras que una ecuación diferencial ordinaria no lineal puede involucrar productos, potencias u otras operaciones no lineales de estas funciones y sus derivadas (Zill, 2018).

#### Ejemplo 2.2.1.5.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \wedge \quad \frac{dy}{dx} = x + 2y + 3y^3$$

**Definición 2.2.1.2. (Solución de una EDO)** Cualquier función  $\phi$ , definida en un intervalo  $I$  y que posea al menos  $n$  derivadas continuas en  $I$ , de manera que al sustituirlas en una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$ , la ecuación resultante se reduce a una identidad, se denomina solución de la ecuación en dicho intervalo.

Es decir, una solución de una ecuación diferencial ordinaria de enésimo orden ( $n$ ) es una función  $\phi$  que posee al menos  $n$  derivadas:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I \quad (3)$$

Diremos que  $\phi$  satisface la ecuación diferencial en  $I$ . Para pensar en la solución de una ecuación diferencial ordinaria debemos también pensar en un intervalo, el intervalo  $I$  también es conocido como intervalo de definición, intervalo de existencia, intervalo de validez o como dominio de la solución y puede ser denotado como un intervalo abierto  $(a, b)$ , un intervalo cerrado  $[a, b]$ , un intervalo infinito  $(a, \infty)$ , etcétera (Boyce et al., 2021).

### **Ejemplo 2.2.1.6.**

Consideremos la siguiente EDO de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Para resolver y encontrar la solución general de la EDO de primer orden, despejamos e integramos con respecto a  $x$ :

$$\int dy = \int 2x dx$$



Integrando obtenemos lo siguiente:

$$y(x) + c_1 = 2 \frac{x^2}{2} + c_2$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración, obteniendo lo siguiente:

$$y(x) = x^2 + C$$

donde  $C$  es una constante de integración.

Por lo tanto  $y(x) = x^2 + C$  es una solución general de la EDO de primer orden.

**Definición 2.2.1.3. (Solución explícita de una EDO)** Se dice que es una solución explícita cuando la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente y las constantes (Zill, 2018).

**Definición 2.2.1.4. (Solución implícita de una EDO)** Se dice que una relación  $G(x, y) = 0$  es una solución implícita de una ecuación diferencial ordinaria en dominio o intervalo  $I$ , considerando que existe por lo menos una función  $\phi$  que satisface la relación, así como la ecuación diferencial ordinaria en el dominio o intervalo  $I$  (Zill, 2018).

**Definición 2.2.1.5. (Familia de soluciones)** Al momento de resolver una ecuación diferencial ordinaria de primer orden  $F(x, y, y') = 0$ , lo normal es obtener una solución que contiene una sola constante arbitraria o parámetro  $c$ . Una solución que incluye una constante arbitraria representa un conjunto  $G(x, y, c) = 0$  de soluciones llamado familia de soluciones uniparamétricas, en todo caso si resolvemos una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$ ,  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) =$

0, lo que se busca es una familia de soluciones  $n$  – paramétrica  $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ . Esto nos da a entender que una sola ecuación diferencial ordinaria puede tener infinitas soluciones. Una solución de una ecuación diferencial ordinaria que está libre de la elección de parámetros se llama solución particular (Zill, 2018).

### 2.2.2. Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden se denomina sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{4}$$

#### Sistemas Lineales

Cuando cada una de las funciones  $g_1, g_2, \dots, g_n$  del sistema (4) son lineales en las variables dependientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se obtiene la forma normal de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\tag{5}$$

Entonces el sistema (5) es un Sistema Lineal. Cabe resaltar que los coeficientes  $a_{ij}$  así como las funciones  $f_i$  son continuas en un intervalo  $I$ . Es muy importante saber diferenciar que si  $f_i(t) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , el Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales (5) es homogéneo, en el caso de que  $f_i(t) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ , el Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales (5) es no homogéneo (Zill, 2018).

### Forma Matricial de un Sistema Lineal

Sea  $X(t)$ ,  $A(t)$  y  $b(t)$  matrices denotadas respectivamente:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$
$$b(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Seguidamente el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (5) se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

También se denota de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

La forma general de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es la siguiente:

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t) \quad (6)$$

Cuando  $b(t) = 0$ , el sistema de ecuaciones diferenciales lineales (6) es homogéneo, su forma matricial esta denotado por:

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (7)$$

(Zill, 2018)

Cuando  $A(t) = A$ , no depende de  $t$ , el sistema de ecuaciones diferenciales lineales (6) tiene los coeficientes constantes, su forma matricial esta denotado por:

$$X'(t) = AX(t) + b(t) \quad (8)$$

Donde  $A(t)$  y  $b(t)$  están definidas para  $t$  en el intervalo  $I$  y  $x'(t)$  denota la derivada en relación a  $t$  del vector columna  $x(t)$  (Figueiredo y Neves, 2018).

**Definición 2.2.2.1. (Vector solución)** Un vector solución  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales(6), compuesto por elementos de funciones derivables que satisfacen el sistema (Figueiredo y Neves, 2018).

### Problema con valores iniciales

Sea  $t_0$  que representa un punto en un intervalo  $I$ , donde:

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \wedge X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

Donde las  $\alpha_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$  son las constantes dadas, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} X' &= A(t)X + b(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \tag{9}$$

es un problema de con valores iniciales (PVI) (Zill, 2018).

La interpretación geométrica de la solución de un PVI dada en la ecuación (9) o también conocido como Problema de Cauchy asociado a la EDO Lineal (8), es que de entre todas las soluciones (curvas diferenciables en  $\mathbb{R}^n$ ) del sistema dado, elegimos la curva que en el instante  $t_0$  pase por el punto  $X_0$  del espacio  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.2.2.1. (Existencia de una solución única)** Sean los elementos de las matrices  $A(t)$  y  $b(t)$  funciones continuas en un intervalo común  $I$  donde se encuentra el punto  $t_0$ . Entonces existe una solución única del PVI (9) en el intervalo  $I$  (Zill, 2018).

### DEMOSTRACIÓN:

Consideremos un sistema de EDOs en la forma matricial:

$$X' = A(t)X + b(t), \quad X(t_0) = X_0$$

donde  $A(t)$  es una matriz de funciones continuas dependientes de  $t$ ,  $b(t)$  es un vector de funciones continuas en el intervalo  $I$ , y  $X$  es un vector de incógnitas.

Según la hipótesis del teorema, las funciones mencionadas  $A(t)$  y  $b(t)$  son continuas en el intervalo  $I$  que contine el punto inicial  $t_0$ , la continuidad en  $A(t)$  da por hecho que no hay discontinuidad en la matriz de coeficientes de igual manera para la función vectorial  $b(t)$  que es también continua. Debido a la continuidad de  $A(t)$  y  $b(t)$  en el intervalo  $I$ , se puede asegurar que el sistema  $X' = A(t)X + b(t)$  permite una solución en el intervalo  $I$ , es decir que dado al valor inicial  $X(t_0) = X_0$  existe una solución  $X(t)$  para  $t \in I$ .

Para demostrar la unicidad, consideremos la situación de existencia de dos soluciones  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  que satisfacen las mismas condiciones iniciales  $X(t_0) = X_0$ , la diferencia entre ambas soluciones  $\Delta X(t) = X_1(t) - X_2(t)$  también será una solución de la ecuación diferencial homogénea:

$$\Delta X' = A(t)\Delta X$$

$$\text{con } \Delta X(t_0) = 0$$

Se tiene que  $A(t)$  es continua, esta ecuación homogénea tiene solución trivial  $\Delta X(t) = 0$  en todo intervalo  $I$ , lo cual implica que  $X_1(t) = X_2(t)$  para todo  $t \in I$ , lo que quiere decir que la solución es única.

Como las funciones  $A(t)$  y  $b(t)$  son continuas en el intervalo  $I$  podemos afirmar que existe una solución única  $X(t)$  que satisface el sistema de EDOs  $X' =$

$A(t)X + b(t)$  con la condición inicial  $X(t_0) = X_0$  en el intervalo  $I$ . Esto asegura y garantiza que el sistema tiene una única trayectoria de solución.

Esto implica que, bajo condiciones de continuidad de las funciones involucradas, el comportamiento de la solución estará completamente determinado en el intervalo de estudio, y no habrá ambigüedad en la respuesta, lo cual es crucial para garantizar la predictibilidad y estabilidad del sistema modelado. Además, este teorema proporciona una base teórica sólida que justifica la existencia de una única trayectoria de solución para un sistema de ecuaciones diferenciales en el contexto de PVI's específicas. ■

**Teorema 2.2.2.2. (Principio de superposición)** Sean  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  el conjunto de vectores solución de un sistema homogéneo (7) en un intervalo  $I$ . Entonces se tiene la siguiente Combinación Lineal:

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + \dots + c_kX_k$$

Donde las constantes denotadas de la siguiente manera  $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, k$  también es una solución en el intervalo  $I$  (Zill, 2018).

#### DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que estamos trabajando con un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de orden  $n$  en su forma homogénea:

$$L(X) = X' = 0$$

donde  $L$  es un operador lineal diferencial que actúa sobre la función  $X$ .



Sabemos que  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  son soluciones de este sistema en el intervalo  $I$ , lo que implica que:

$$L(X_i) = 0 \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, k.$$

Consideremos ahora una combinación lineal de estas soluciones denotada por:

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + \dots + c_kX_k$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_k$  son constantes arbitrarias.

Debido a la linealidad del operador lineal diferencial  $L$ , se tiene que:

$$L(X) = L(c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + \dots + c_kX_k)$$

$$L(X) = c_1L(X_1) + c_2L(X_2) + c_3L(X_3) + \dots + c_kL(X_k)$$

donde cada  $L(X_i) = 0$ , dado que cada  $X_i$  es una solución al sistema, sigue que:

$$L(X) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 + \dots + c_k \cdot 0$$

$$L(X) = 0$$

Por lo tanto,  $X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + \dots + c_kX_k$  también es una solución del sistema homogéneo en el intervalo  $I$ . ■

**Definición 2.2.2.2. (Dependencia e Independencia lineal)** Sea  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  el conjunto de vectores solución del sistema homogéneo (7) en algún intervalo  $I$ , se dice que el conjunto de vectores es Linealmente Dependiente en el intervalo  $I$ , si hay la existencia de constantes  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ , donde no todas son cero, tales que:

$$c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + \dots + c_kX_k = 0$$

Para todo  $t$  en el intervalo, si el conjunto de vectores no es Linealmente Dependiente en algún intervalo  $I$ , se dice que es Linealmente Independiente (Zill, 2018).

### Wronskiano

El Wronskiano se puede introducir como el concepto del determinante Wronskiano como prueba para la Independencia Lineal.

**Teorema 2.2.2.3. (Criterio para las soluciones linealmente independiente)** Sea el conjunto de vectores solución  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  del sistema homogéneo (7) en el intervalo  $I$ .

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ \vdots \\ x_{n3} \end{pmatrix}, \dots, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces el conjunto de vectores solución mencionados es Linealmente Independiente en  $I$  sí y sólo si el Wronskiano es diferente de cero.

$$W(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (10)$$

para todo  $t$  en el intervalo  $I$  (Zill, 2018).

### DEMOSTRACIÓN:



Consideremos que  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  son soluciones de un sistema homogéneo de EDOs de la forma:

$$L(X) = X' = 0$$

donde  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  son vectores columna con  $n$  componentes.

El Wronskiano de estas soluciones está definida como el determinante de la matriz conformada por estas soluciones y sus derivadas sucesivas:

$$W(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

donde  $x_{ij}$  representa la  $j$ -ésima solución evaluada en el punto  $i$ .

Si las soluciones  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  son linealmente dependientes, entonces existe una combinación lineal no trivial de estas soluciones es igual a cero, como la siguiente manera:

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \dots + c_k X_k = 0$$

para algunas constantes  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$  no todas son iguales a cero, entonces en este caso el determinante de la matriz asociada el Wronskiano es igual a cero, ya que las columnas de la matriz serían dependientes linealmente.

Por otro lado si  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  son linealmente independientes no existe dicha combinación lineal no trivial, lo que quiere decir que las columnas de la matriz son linealmente independientes y por lo tanto, su determinante es distinto de cero o también el Wronskiano es igual a cero. El Wronskiano proporciona una herramienta efectiva para determinar si un conjunto de soluciones es linealmente

independiente. Si el Wronskiano es distinto de cero en un intervalo  $I$ , entonces  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  son linealmente independiente en el intervalo  $I$ , por lo contrario, si el Wronskiano es cero en algún punto del intervalo  $I$ , entonces las soluciones son linealmente dependiente. ■

**Definición 2.2.2.3. (Conjunto fundamental de soluciones)** Cualquier conjunto de vectores solución  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  que es Linealmente Independiente de un sistema homogéneo (7) en un intervalo  $I$  se dice que es un Conjunto Fundamental de Soluciones en el intervalo  $I$  (Zill, 2018).

**Teorema 2.2.2.4. (Existencia de un conjunto fundamental)** Se da por existencia a un Conjunto Fundamental de Soluciones para un sistema homogéneo (7) en el intervalo  $I$  (Zill, 2018).

#### **DEMOSTRACIÓN:**

Consideremos un sistema de EDOs homogéneo de la forma:

$$L(X) = X' = 0$$

donde  $X$  es una solución del sistema en un intervalo  $I$ , se sabe que para EDOs lineales de orden  $n$ , existen  $n$  soluciones independientes, por el Teorema 2.2.2.1. podemos encontrar  $n$  soluciones particulares,  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  que son linealmente independientes en el intervalo  $I$ .

El conjunto fundamental  $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$  es linealmente independiente, cualquier otra solución del sistema homogéneo en el intervalo  $I$  puede ser expresada como una combinación lineal de estas  $n$  soluciones.

Entonces siempre existe un conjunto fundamental de  $n$  soluciones linealmente independientes en un intervalo  $I$ , que permite describir completamente el comportamiento de cualquier solución del sistema homogéneo. ■

**Teorema 2.2.2.5. (Solución general, sistemas homogéneos)** Sea  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  un Conjunto Fundamental de Soluciones de un sistema homogéneo (7) en un intervalo  $I$  (Zill, 2018). Entonces la solución general del sistema en el intervalo  $I$  es:

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + \dots + c_nX_n$$

donde  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  son constantes arbitrarias.

#### **DEMOSTRACIÓN:**

Consideramos el Teorema 2.2.2.4., se sabe que  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  forman un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo en el intervalo  $I$ , esto implica que estas soluciones son linealmente independientes y que cualquier solución del sistema puede ser denotada y escrita como una combinación lineal.

Sea  $X$  una solución cualquiera del sistema homogéneo en el intervalo  $I$ , puesto que  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  forman una base del conjunto o espacio de soluciones se puede escribir  $X$  como una combinación lineal de estas soluciones:

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + \dots + c_nX_n$$

La linealidad del operador diferencial garantiza que cualquier combinación lineal de las soluciones  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  también es una solución del

sistema homogéneo, a consecuencia se puede aplicar el operador lineal  $L$  a la combinación lineal:

$$L(X) = L(c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + \cdots + c_kX_n)$$

$$L(X) = c_1L(X_1) + c_2L(X_2) + c_3L(X_3) + \cdots + c_kL(X_n)$$

ya que  $L(X_i) = 0$  para cada  $i$ , se tiene que  $L(X) = 0$ , lo que demuestra y afirma que  $X$  es una solución del sistema.

La solución general de un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de orden  $n$  es una combinación lineal de las  $n$  soluciones del conjunto fundamental, donde los coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son constantes que son determinadas dependiendo de las condiciones iniciales, lo que garantiza cualquier solución existen del sistema que se describe mediante la combinación lineal de las soluciones fundamentales. ■

### Sistemas no Homogéneos

Para sistemas no homogéneos una solución particular  $X_p$  en el intervalo  $I$  es cualquier vector libre de parámetros arbitrarios, cuyos elementos son funciones que satisfacen el sistema (6).

**Teorema 2.2.2.6. (Solución general: sistemas no homogéneos)** Sea  $X_p$  una solución de un sistema no homogéneo (6) en un intervalo  $I$  y sea:

$$X_c = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + \cdots + c_nX_n$$



Denota la solución general en el intervalo  $I$  del sistema homogéneo asociado (7), entonces la solución general del sistema no homogéneo en el intervalo  $I$  es:

$$X = X_c + X_p$$

La solución general  $X_c$  del sistema homogéneo relacionado a (7) se llama Función Complementaria del sistema no homogéneo (6) (Zill, 2018).

### **DEMOSTRACIÓN:**

Se tiene como hipótesis que la solución general de un sistema no homogéneo es:

$$X(t) = X_c(t) + X_p(t)$$

Primeramente se tiene como la ecuación (8) un sistema de EDOs no homogéneo:

$$X'(t) = AX(t) + b(t)$$

Reemplazando se obtiene:

$$\left( X_c(t) + X_p(t) \right)' = A \left( X_c(t) + X_p(t) \right) + b(t)$$

$$X_c'(t) + X_p'(t) = AX_c(t) + AX_p(t) + b(t)$$

Donde  $X_c(t)$  es solución del sistema homogéneo, se sabe que:

$$X_c'(t) = AX_c(t)$$

Reemplazando se obtiene que:



$$AX_c(t) + X'_p(t) = AX_c(t) + AX_p(t) + b(t)$$

Simplificando en ambos lados:

$$X'_p(t) = AX_p(t) + b(t)$$

Lo que demuestra que  $X_p(t)$  es una solución particular del sistema no homogéneo.

Entonces la solución general del sistema homogéneo:

$$X'(t) = AX(t) + b(t)$$

es de la forma:

$$X(t) = X_c(t) + X_p(t)$$

Donde  $X_c(t)$  es la solución general del sistema homogéneo y  $X_p(t)$  es la solución particular del sistema no homogéneo. ■

### 2.2.3. Autovectores

Se tiene el siguiente Sistema Lineal Homogéneo, denotado de la siguiente manera:

$$X' = AX \tag{11}$$

Donde  $A$  es una matriz  $n \times n$  de constantes, la solución del sistema homogéneo (11) tiene la siguiente forma:

$$X = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = v e^{\lambda t} \tag{12}$$



**Definición 2.2.3.1. (Autovectores)** Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  sobre el espacio  $\mathbb{R}$ , donde un autovalor de  $A$  en  $\mathbb{R}$  es un escalar  $\lambda$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $Av = \lambda v$ , para algún vector  $v \neq 0$  tal que  $v \in \mathbb{R}^n$ , decimos que  $v$  es un autovector de  $A$  asociado al autovalor  $\lambda$ , donde los autovectores forman una base para el autoespacio de  $A$ . Tenemos la siguiente ecuación:

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (13)$$

donde  $I$  es la matriz identidad (Figueiredo, 2014).

La deducción de la ecuación (13) es de la siguiente manera, si (12) es un vector solución del sistema homogéneo lineal (11), entonces derivando esta ecuación  $X = ve^{\lambda t}$  en función de  $t$ , se obtiene lo siguiente:

$$X' = v\lambda e^{\lambda t}$$

Por lo que si igualamos con la ecuación  $X' = AX$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$Ave^{\lambda t} = v\lambda e^{\lambda t}$$

seguidamente dividimos en ambos lados entre  $e^{\lambda t}$ , se obtiene:

$$Av = v\lambda$$

donde pasamos todas las expresiones a un solo lado:

$$Av - \lambda v = 0$$

Se tiene que cualquier vector multiplicado por el vector identidad es el mismo vector entonces,  $v = Iv$  donde se obtiene la ecuación (13):

$$(A - \lambda I)v = 0$$

La ecuación matricial de (13) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}(a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n &= 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \dots + a_{2n}v_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)v_n &= 0\end{aligned}$$

Para que (13) no tenga soluciones triviales  $v_1 = v_2 = v_3 = \dots = v_n = 0$ , se debe tener en cuenta lo siguiente:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Esta ecuación polinomial en  $\lambda$  se llama ecuación característica de la matriz  $A$ , las soluciones de dicha ecuación característica son los autovalores de  $A$ , una solución  $v \neq 0$  de (13) correspondiente a un autovalor  $\lambda$  se denomina autovector de  $A$ .

#### 2.2.4. Autovalores

**Definición 2.2.4.1. (Polinomio característico)** Dada la ecuación (13) definimos el polinomio característico de  $A$  de las siguientes maneras:

$$p(\lambda) = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} a_1 + \dots + a_n = 0$$

Donde los autovalores de  $A$  en  $\mathbb{R}$  son raíces de  $p(\lambda)$  (Figueiredo, 2014).

**Definición 2.2.4.2. (Análisis de Autovalores)** Un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales lineales de primer orden denotado como la ecuación (11), donde  $A$  es una matriz de orden  $n$ , donde las entradas representan los coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales lineales y  $v \in \mathbb{R}^n$  es un vector (Figueiredo, 2014). Por ejemplo, la matriz  $A$  de orden  $n = 2$ , los elementos de la matriz  $A$  son los siguientes,  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  son números reales, así mismo los coeficientes asociados al sistema de ecuaciones diferenciales está dada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Donde encontramos los autovalores a través del polinomio característico, tenemos que estos autovalores pueden ser: reales y distintos; reales e iguales; complejos y distintos.

#### 2.2.4.1 Autovalores Reales y Distintos

Cuando la matriz  $A$  de dimensión  $n \times n$  tiene  $n$  autovalores y distintos  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots \neq \lambda_n$ , entonces siempre se puede encontrar un conjunto de  $n$  autovectores linealmente independientes  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  (Zill, 2018), entonces:

$$X_1 = v_1 e^{\lambda_1 t}, X_2 = v_2 e^{\lambda_2 t}, X_3 = v_3 e^{\lambda_3 t}, \dots, X_n = v_n e^{\lambda_n t}$$

Es un conjunto fundamental de soluciones de (11) en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ .

**Teorema 2.2.4.1. (Solución homogénea con Autovalores Distintos)** Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ ;  $n$  autovalores reales y distintos de la



matriz de coeficientes  $A$  del sistema homogéneo (11) y sean  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ ; los autovectores correspondientes respectivamente (Zill, 2018), entonces la solución general de (11) en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  está dada por:

$$X = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$$

### DEMOSTRACIÓN:

Consideremos el sistema de EDOs lineales de la forma:

$$X' = AX$$

Para resolver este sistema buscamos soluciones de la forma  $X(t) = ve^{\lambda t}$ , donde  $v$  es un vector constante conocido como autovector y  $\lambda$  es un escalar o también conocido como autovalor.

Como  $X(t) = ve^{\lambda t}$  es una posible solución, derivamos con respecto a  $t$ , obteniendo:

$$X'(t) = \lambda ve^{\lambda t}$$

reemplazando en el sistema  $X' = AX$ :

$$\lambda ve^{\lambda t} = Ave^{\lambda t}$$

donde  $e^{\lambda t}$  es una función exponencial lo que nunca podrá tomar el valor de cero, se puede simplificar en ambos lados, obteniendo:

$$\lambda v = Av$$

$$0 = Av - \lambda v$$

Esta es la ecuación que define a los autovalores  $\lambda$  y autovectores  $v$  de la matriz  $A$ .

Entonces, si denotamos de una manera más general a los autovalores  $\lambda_i$  y sus autovectores respectivamente  $v_i$ , entonces la solución particular del sistema es:

$$X_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$$

esto significa que para cada autovalor  $\lambda_i$  hay una solución particular de la forma  $v_i e^{\lambda_i t}$ .

Seguidamente si los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  son todos diferentes o distintos, las soluciones  $v_1 e^{\lambda_1 t}, v_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, v_n e^{\lambda_n t}$  son linealmente independientes, entonces la solución general es la combinación lineal de todas las soluciones particulares:

$$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son constantes determinadas por las condiciones iniciales.

Finalmente, la solución general del sistema diferencial lineal homogéneo con coeficientes constantes está dada por una combinación lineal de las soluciones particulares asociadas a los autovalores reales y distintos de la matriz  $A$ . ■

**Ejemplo 2.2.4.1.** Si trabajamos con la matriz  $A$  de orden  $n = 2$ , sean  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , en este caso la solución es  $X_1 = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t}$  y  $X_2 = c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$ .

- Si los autovalores tienen signos iguales, esto si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son ambos positivos o negativos, entonces el punto de equilibrio es un nudo estable (Figueiredo, 2014).
- Si los autovalores tienen signos opuestos, esto si  $\lambda_1$  es negativo y  $\lambda_2$  es positivo o viceversa, entonces el punto equilibrio es un punto de silla (Figueiredo, 2014).

#### 2.2.4.2 Autovalores Reales Iguales

Cuando la matriz  $A$  de dimensión  $n \times n$ , no todos los  $n$  autovalores deben ser distintos, es decir, algunos de los autovalores podrían ser repetidos.

En general, si  $m$  es un entero positivo y  $(\lambda - \lambda_1)^m$  es un factor de la ecuación característica, mientras que  $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$  no es un factor, entonces se dice que  $\lambda_1$  es un autovalor de multiplicidad  $m$ .

Para algunas matrices  $A$  de dimensión  $n \times n$  sería posible encontrar  $m$  autovectores linealmente independientes  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$ , correspondientes a un autovalor  $\lambda_1$ , de multiplicidad  $m \leq n$ . En este caso la solución general del sistema contiene a la combinación lineal:

$$c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_1 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_m v_m e^{\lambda_1 t}$$

Si solo hay un autovector propio que corresponde al autovalor  $\lambda_1$  de multiplicidad  $m$ , entonces siempre se pueden encontrar  $m$  soluciones linealmente independientes de la siguiente forma:

$$X_1 = v_{11} e^{\lambda_1 t}$$

$$X_2 = v_{21}te^{\lambda_1 t} + v_{22}e^{\lambda_1 t}$$

⋮

$$X_m = v_{m1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 t} + v_{m2} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 t} + \dots + v_{mm} e^{\lambda_1 t}$$

donde las  $v_{ij}$  son vectores columna (Zill, 2018).

**Ejemplo 2.2.4.2.** Si trabajamos con la matriz  $A$  de orden  $n = 2$ , luego las soluciones son dadas por  $X_1 = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t}$  y  $X_2 = (c_1 + c_2 t) v_1 e^{\lambda_1 t}$ .

- Para  $\lambda < 0$ , la trayectoria pasa en el punto  $(c_1, c_2)$  y  $t = 0$  y tiene a cero para el tiempo variado, tenemos aquí un nudo impropio estable (Figueiredo, 2014).
- Para  $\lambda > 0$ , la trayectoria para el infinito para el tiempo variado, tenemos aquí un nudo impropio inestable (Figueiredo, 2014).
- Para  $\lambda = 0$ , tenemos la estrella con trayectorias tendiendo para el origen o alejándose según el signo negativo o positivo de los autovalores (Figueiredo, 2014).

### 2.2.4.3 Autovalores Complejos

Si  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  y  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ , donde  $\beta > 0$ , se sabe que,  $i^2 = -1$  son autovalores complejos de la matriz de coeficientes  $A$ , entonces lo que se espera es que sus autovectores correspondientes respectivamente también tengan entradas complejas.

**Teorema 2.2.4.2. (Soluciones correspondientes a un autovalor complejo)** Sea  $A$  una matriz de coeficientes que tiene entradas reales del sistema homogéneo (11) y sea  $v_1$  un autovector correspondiente al autovalor complejo  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ , donde  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ , esto quiere decir que tenemos las siguientes expresiones,  $v_1 e^{\lambda_1 t}$  y  $\bar{v}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}$ , son soluciones de (11). Eso implica que  $\bar{v}_1$  correspondiente a  $\bar{\lambda}_1$ , son los conjugados de las entradas  $v_1$  correspondiente a  $\lambda_1$  respectivamente, el conjugado se expresa de esta manera  $v_1 = \bar{v}_1$  y  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$  (Zill, 2018).

### DEMOSTRACIÓN:

Sea  $A$  la matriz de coeficientes reales y  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  un autovalor complejo con su autovector  $v_1$ , la solución correspondiente al autovalor complejo  $\lambda_1$  es:

$$X_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$X_1(t) = v_1 e^{(\alpha + \beta i)t}$$

$$X_1(t) = v_1 e^{\alpha t} e^{\beta i t}$$

$$X_1(t) = v_1 e^{\alpha t} [\cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t)]$$

$$X_1(t) = e^{\alpha t} [v_1 \cos(\beta t) + i v_1 \operatorname{sen}(\beta t)]$$

La matriz  $A$  tiene coeficientes reales, el conjugado  $\bar{\lambda}_1 = \alpha - \beta i$ , también es un autovalor, la deducción es similar a la anterior lo que se obtiene la siguiente solución:

$$X_2(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$X_2(t) = v_1 e^{(\alpha - \beta i)t}$$



$$X_2(t) = e^{\alpha t} [\bar{v}_1 \cos(\beta t) + i\bar{v}_1 \text{sen}(\beta t)]$$

Entonces la combinación lineal de estas soluciones es:

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$$

Reemplazando se obtiene:

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t} [v_1 \cos(\beta t) + i v_1 \text{sen}(\beta t)] \\ + c_2 e^{\alpha t} [\bar{v}_1 \cos(\beta t) + i \bar{v}_1 \text{sen}(\beta t)]$$

■

**Teorema 2.2.4.3. (Soluciones reales que corresponden a un autovalor complejo)** Sea  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  un autovalor complejo de la matriz de coeficientes  $A$  en el sistema homogéneo (11) y sean  $B_1$  y  $B_2$  vectores columna denotados de la siguiente manera:

$$B_1 = \frac{1}{2}(v_1 + \bar{v}_1) \text{ y } B_2 = \frac{i}{2}(-v_1 + \bar{v}_1)$$

Entonces tenemos lo siguiente:

$$X_1(t) = [B_1 \cos(\beta t) - B_2 \text{sen}(\beta t)] e^{\alpha t}$$

$$X_2(t) = [B_2 \cos(\beta t) + B_1 \text{sen}(\beta t)] e^{\alpha t}$$

Son soluciones linealmente independientes de (11) en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  (Zill, 2018).

### DEMOSTRACIÓN:

En consecuencia al Teorema 2.2.4.2. donde se obtuvo que:



$$X_1(t) = e^{\alpha t} [v_1 \cos(\beta t) + i v_1 \text{sen}(\beta t)]$$

$$X_2(t) = e^{\alpha t} [\bar{v}_1 \cos(\beta t) + i \bar{v}_1 \text{sen}(\beta t)]$$

Ahora definimos  $B_1$  y  $B_2$  como combinaciones reales de los autovectores  $v_1$  y  $\bar{v}_1$ , donde:

$$B_1 = \frac{1}{2} (v_1 + \bar{v}_1)$$

$$B_2 = \frac{i}{2} (-v_1 + \bar{v}_1)$$

donde  $B_1$  es la parte real del autovector y  $B_2$  es la parte imaginaria escalar del autovecto.

Ahora utilizamos  $B_1$  y  $B_2$  para construir las soluciones reales el sistema a partir de las soluciones complejas. Combinamos  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  para así obtener expresiones en términos de funciones trigonométricas reales.

Para  $X_1(t)$ , tomamos la parte real de la combinación de  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$ :

$$X_1(t) = e^{\alpha t} [B_1 \cos(\beta t) - B_2 \text{sen}(\beta t)]$$

Para  $X_2(t)$ , tomamos la parte imaginaria escalada de la combinación de  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$ :

$$X_2(t) = e^{\alpha t} [B_2 \cos(\beta t) + B_1 \text{sen}(\beta t)]$$

Seguidamente para demostrar la independencia lineal o que  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  son soluciones linealmente independientes, observamos que las

funciones trigonométricas  $\cos(\beta t)$  y  $\sin(\beta t)$  no son múltiplos entre sí, además los coeficientes  $B_1$  y  $B_2$  son diferentes, lo que esto garantiza que no existe una combinación lineal de  $X_1(t)$  que pueda producir o formar  $X_2(t)$  tanto de ida como de vuelta.

Por lo tanto se demuestra que  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  son linealmente independientes. ■

Sean  $\lambda = \alpha \pm \beta i$ , si  $\alpha \neq 0$  y  $\beta \neq 0$ , tenemos que la solución en coordenadas polares  $(r, \theta)$  está dada por,  $r(t) = r_0 e^{\alpha t}$  y  $\theta(t) = \theta_0 - \beta t$ .

- Si  $\alpha < 0 < \beta$ , el radio  $r$  decrece con el tiempo, haciendo que las trayectorias tiendan para el origen en el sentido horario, entonces el ángulo  $\theta$  decrece con el tiempo, el origen entonces es un foco estable o un punto espiral, si tanto  $\alpha$  como  $\beta$  fueran negativos tenemos apenas en sentido antihorario (Figueiredo, 2014).
- Si  $\alpha$  y  $\beta$  fueran positivos, tenemos que las trayectorias estarán girando en espiral hacia el sentido antihorario, entonces el origen será estable (Figueiredo, 2014).
- Si  $\alpha = 0$  y  $\beta > 0$ , tenemos que  $r$  permanece constante cuando  $\theta$  decrece y la trayectoria se estará moviendo sobre un círculo cerrado en sentido horario y si  $\beta < 0$ , en sentido antihorario (Figueiredo, 2014).

### 2.2.5. Sistema de Ecuaciones Diferenciales no Lineales

Una ecuación diferencial no lineal es una ecuación diferencial en la cual la función incógnita y sus derivadas aparecen de forma no lineal. La solución de

una EDO no lineal no puede ser simplemente la suma de soluciones, pueden presentarse fenómenos como caos, bifurcaciones como también soluciones múltiples. Las ecuaciones diferenciales no lineales generalmente no se pueden resolver por métodos analíticos, a menudo se utilizan métodos y técnicas para encontrar soluciones aproximadas.

### Ejemplo 2.2.5.1.

Ecuación de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2$$

Ecuación de Van der Pol:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \mu(1 - y^2) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Ecuación de Duffing:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + \alpha y + \beta y^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

Consideremos el siguiente sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \tag{14}$$

Donde:



- $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  son las variables dependientes que pueden representar las soluciones del sistema en función de la variable independiente  $t$ .
- $f_1, f_2, \dots, f_n$  son funciones no lineales que pueden depender de las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y también de la variable independiente  $t$ .
- La no linealidad del sistema está en las funciones  $f_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , no son lineales, es decir pueden incluir productos de las variables, potencias, exponenciales, funciones trigonométricas, etc.

Entonces eso quiere decir que se tiene un sistema de este tipo, donde las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  no dependen explícitamente de la variable independiente  $t$  (Zill, 2018).

### **Ejemplo 2.2.5.2.**

Ecuación de Lotka-Volterra (Modelo depredador-presa):

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

Ecuación de Lorenz:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$



Consideremos el siguiente sistema de dos EDOs no lineales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

Un punto de equilibrio del sistema es un punto  $(x_e, y_e)$  para lo cual  $x'$  y  $y'$  se anulan:

$$\begin{cases} P(x_e, y_e) = 0 \\ Q(x_e, y_e) = 0 \end{cases}$$

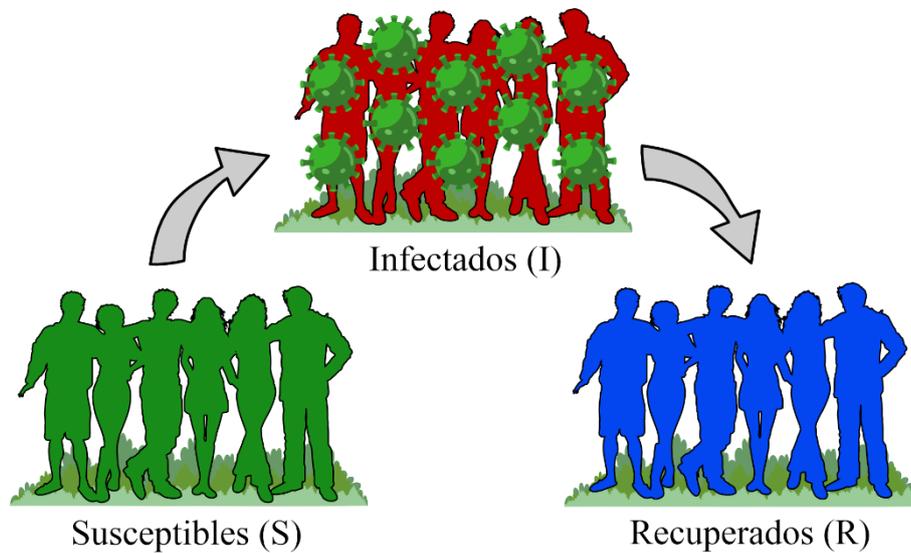
Los puntos que no son puntos de equilibrio se denominan puntos regulares. El sistema mencionado podría no ser resoluble analíticamente. Sin embargo, podemos intentar analizar no el comportamiento de  $x$  y  $y$  en función de  $t$ , sino simplemente el comportamiento de  $y$  en función de  $x$ , es decir, las trayectorias que los puntos  $(x, y)$  describen a lo largo del tiempo en el plano fase  $xy$  (Figueiredo, 2014).

#### 2.2.6. Modelo SIR

Definimos el modelo matemático SIR con la siguiente representación gráfica:

### Figura 1

*Diagrama del modelo SIR con ausencia de parámetros*

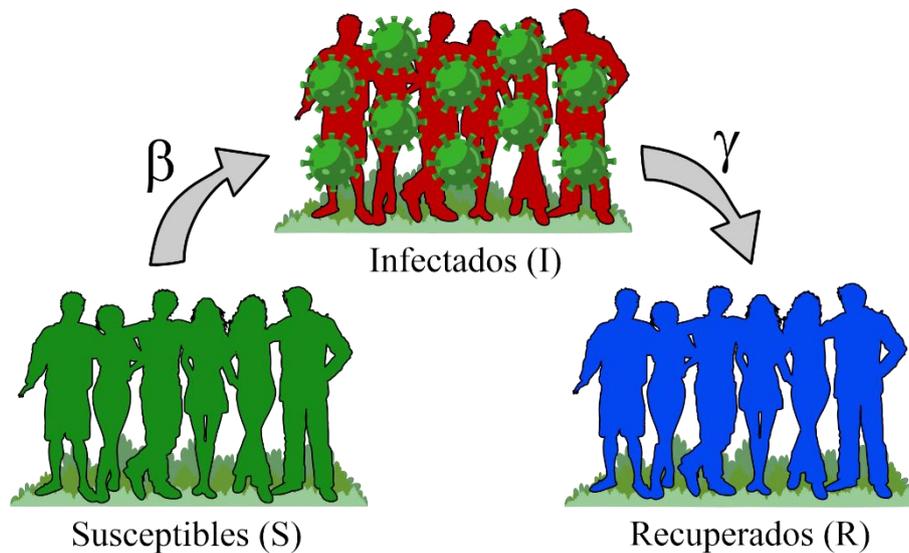


En la Figura 1, se representa el modelo SIR, que un individuo de la población  $S$  (Susceptibles) puede convertirse en un miembro de la población  $I$  (Infectados) si entra en contacto con una enfermedad contagiosa, después de pasar por la fase de infección, el individuo entra a la población  $R$  (Recuperados).

El modelo matemático SIR contiene parámetros que ayudan a controlar cómo la enfermedad contagiosa entra en contacto con la población  $S$  y también cómo los individuos se recuperan.

**Figura 2**

*Diagrama del modelo SIR*



En la Figura 2, se representa el modelo SIR donde se observa dos variables de transición, donde  $\beta$  es la tasa de contagio y  $\gamma$  es la tasa de recuperación

$\beta$ : Indica la tasa de contagio de cómo un individuo de la población  $I$  infecta a un individuo de la población  $S$ . Utilizaremos el parámetro  $\beta$  en un intervalo de tiempo como la probabilidad de que un individuo de la población  $I$  llegue a infectar a un individuo de la población  $S$  en un intervalo de tiempo  $t$ :  $\beta\Delta t$ .

$\gamma$ : Indica la tasa de recuperación o muerte de cómo un individuo de la población  $I$  logra recuperarse o morir, es decir, pase a la población  $R$ . Utilizaremos el parámetro  $\gamma$  en un intervalo de tiempo como la probabilidad de que un individuo de la población  $I$  se recupere o muera, es decir, pase a la población  $R$ , en un intervalo de tiempo  $t$ :  $\gamma\Delta t$ .

Por otra parte, tenemos que el número total de la población de individuos es igual a la suma de los individuos susceptibles, infectados y recuperados, lo

denotamos de la siguiente manera:  $N = S + I + R$ . Además, contamos con dos parámetros que nos indican la tasa de contagio y la tasa de recuperación, los cuales son  $\beta$  y  $\gamma$ , respectivamente.

Los susceptibles en un intervalo de tiempo posterior, denotado de la forma  $S(t + \Delta t)$ , será igual a la cantidad de susceptibles en este momento, denotado de la forma  $S(t)$ , posteriormente salen de la población  $S$  los posibles susceptibles que podrían haberse infectado entre este instante y el instante de tiempo posterior, denotado de la forma  $\beta \Delta t \frac{S(t)}{N} I(t)$ :

$$S(t + \Delta t) = S(t) - \beta \Delta t \frac{S(t)}{N} I(t) \quad (15)$$

Los infectados en un intervalo de tiempo posterior, denotado de la forma  $I(t + \Delta t)$ , serán igual a la cantidad de los infectados en este momento, denotado de la forma  $I(t)$ , posteriormente entran a la población  $I$  los susceptibles que han sido infectados entre este instante y el instante de tiempo posterior, denotado de la forma  $\beta \Delta t \frac{S(t)}{N} I(t)$ , seguidamente salen del grupo  $I$  los infectados que se recuperan entre este instante y el instante de tiempo posterior, denotando de la forma  $\gamma \Delta t I(t)$ :

$$I(t + \Delta t) = I(t) + \beta \Delta t \frac{S(t)}{N} I(t) - \gamma \Delta t I(t) \quad (16)$$

Los recuperados en un intervalo de tiempo posterior, denotado de la forma  $R(t + \Delta t)$ , serán igual a la cantidad de los recuperados en este momento, denotado de la forma  $R(t)$ , posteriormente entran a la población  $R$  los infectados que se

recuperan o mueren entre este instante y el instante de tiempo posterior, denotado de la forma  $\gamma\Delta t I(t)$ :

$$R(t + \Delta t) = R(t) + \gamma\Delta t I(t) \quad (17)$$

Desarrollamos un sistema de ecuaciones (15), (16) y (17); obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} &= -\beta \frac{S(t)}{N} I(t) \\ \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} &= \beta \frac{S(t)}{N} I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} &= \gamma I(t) \end{aligned} \quad (18)$$

Con esto hacemos que los intervalos de tiempo sean pequeños, así llevando al límite  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$  a cada una de las ecuaciones del sistema (18):

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} &= -\beta \frac{S(t)}{N} I(t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} &= \beta \frac{S(t)}{N} I(t) - \gamma I(t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} &= \gamma I(t) \end{aligned} \quad (19)$$

Ahora llegamos a la definición de derivada (Michael, 2013) que mide la variación de una función en nuestro caso de estudio ( $S, I, R$ ), ya que cuando existe una pequeña variación de  $t$ , obtenemos las siguientes EDOs no lineales:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}\tag{20}$$

Donde el modelo epidemiológico SIR básico formulado por (Kermack y McKendrick, 1927) es el sistema (20). La primera ecuación del sistema (20) es equivalente a la variación en el número de individuos susceptibles en la población, la segunda ecuación es equivalente a la variación en el número de individuos infectados, y la tercera ecuación es equivalente a la variación en el número de individuos recuperados, donde  $\beta$  indica la tasa de contagio de una enfermedad contagiosa, y  $\gamma$  indica la tasa de recuperación por la enfermedad contagiosa.

### 2.2.7. Normalización del Modelo SIR

Teniendo en cuenta el sistema (20) y teniendo en cuenta a (Brauer y Castillo-Chavez, 2010) la normalización del modelo SIR es la siguiente.

Para normalizar las ecuaciones del sistema (20) o del modelo epidemiológico SIR, es útil expresar las variables en términos de fracciones de la población total  $N$ , entonces definimos:

$$\begin{aligned}s(t) &= \frac{S(t)}{N} \\ i(t) &= \frac{I(t)}{N} \\ r(t) &= \frac{R(t)}{N}\end{aligned}$$



Donde la población total es  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ , entonces dividiendo entre  $N$  a toda la ecuación se obtiene:

$$\frac{N}{N} = \frac{S(t)}{N} + \frac{I(t)}{N} + \frac{R(t)}{N}$$

entonces en términos normalizados se define de la siguiente manera:

$$1 = s(t) + i(t) + r(t)$$

Tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales (20), dividiendo cada ecuación entre  $N$ :

En la primera ecuación del sistema (20),

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}$$

dividimos por  $N$ :

$$\frac{1}{N} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{S(t)}{N} \frac{I(t)}{N}$$

$$\frac{ds}{dt} = -\beta s(t)i(t)$$

En la segunda ecuación del sistema (20),

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I$$

dividimos por  $N$ :

$$\frac{1}{N} \frac{dI}{dt} = \beta \frac{S(t)}{N} \frac{I(t)}{N} - \gamma \frac{I(t)}{N}$$

$$\frac{ds}{dt} = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t)$$

En la tercera ecuación del sistema (20),

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

dividimos por  $N$ :

$$\frac{1}{N} \frac{dR}{dt} = \gamma \frac{I(t)}{N}$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i(t)$$

Entonces, las ecuaciones diferenciales normalizadas del sistema para el modelo SIR (20) son:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i \quad (21)$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i$$

La evolución temporal de las proporciones  $s(t)$ ,  $i(t)$  y  $r(t)$  estas representan, respectivamente, la fracción de la población susceptible, infectada y recuperada en un momento dado  $t$ . Según (Ridenhour et al., 2018) es posible determinar el número reproductivo básico  $R_0$ , el cual se define como el promedio de nuevas infecciones generadas por un individuo infectado en una población susceptible,  $R_0$  esta dado por:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

Este número indica cuántos casos secundarios, en promedio, un caso primario generará en una población completamente susceptible.

- Si  $R_0 > 1$ , la enfermedad tiene el potencial de propagarse en la población.
- Si  $R_0 < 1$ , la propagación se extinguirá con el tiempo.

### 2.2.8. Región de Estabilidad

Se propone un método que genera una secuencia de aproximaciones  $y_n$ , la estabilidad del método depende únicamente de la ubicación del producto  $h\lambda$ , lo que significa que el comportamiento del método está determinado por la relación entre el tamaño de paso  $h$  y el valor del parámetro  $\lambda$ .

**Definición 2.2.10.1. (Región de estabilidad)** La región de estabilidad absoluta  $R$  es el conjunto de los números complejos  $z \in \mathbb{C}$  donde  $z = h\lambda$  tal que, para la ecuación de prueba:

$$y' = \lambda y$$

la aproximación numérica  $\{y_n\}$  con un tamaño de paso  $h$  converge a cero cuando  $n \rightarrow \infty$  (Butcher, 2016).

El intervalo de estabilidad absoluta es la porción real de  $R$ , es decir, la misma definición, pero con  $\lambda$  real.

La parte real  $R$  que generalmente importa es la región donde  $Re(\lambda) < 0$ , lo que asegura la estabilidad del método numérico.

### 2.2.9. Método de Euler

Sea,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) , \quad t_0 \leq t \leq t_f , \quad y(t_0) = \alpha \quad (22)$$

Un PVI, para  $t_i \in [t_0, t_f]$ , para obtener una aproximación de  $y(t_i)$ , donde  $y(t)$  es la solución de la ecuación diferencial a estudiar.

**Teorema 2.2.11.1. (Teorema de Taylor)** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $I = [a, b]$  y sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  y sus derivadas  $f', f'', \dots, f^{(n)}$  son continuas en  $I$  y tal que  $f^{(n+1)}$  existe en  $(a, b)$ . Si  $x_0 \in I$ , entonces para cualquier  $x$  en  $I$  existe un punto  $\xi$  entre  $x$  y  $x_0$  tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

(Bartle y Sherbert, 2011)

### DEMOSTRACIÓN:

Dadas  $x_0$  y  $x$ , sea  $J$  un intervalo cerrado entre los puntos terminales  $x_0$  y

$x$ . Se define la función  $F$  en el intervalo  $J$  por:

$$F(t) = f(x) - f(t) - (x - t)f'(t) - \dots - \frac{(x - t)^n}{n!}f^{(n)}(t)$$

para  $t \in J$ . Entonces haciendo el cálculo se obtiene:

$$F'(t) = -\frac{(x - t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)$$

Si se define  $G$  en  $J$  por:

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1} F(x_0)$$

para  $t \in J$ , entonces  $G(x_0) = G(x) = 0$ . Al aplicar el teorema de Rolle, según (Stewart, 2015), se obtiene un punto  $\xi$  entre  $x$  y  $x_0$  tal que:

$$0 = G'(\xi) = F'(\xi) + (n+1) \frac{(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n+1}} F(x_0)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$F(x_0) = -\frac{1}{n+1} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-\xi)^n} F'(\xi)$$

$$F(x_0) = \frac{1}{n+1} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-\xi)^n} \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$F(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Se utilizará la notación  $P_n$  para el  $n$ -ésimo polinomio de Taylor de  $f$  y  $R_n$  para el residuo, entonces la conclusión del teorema de Taylor puede escribirse como  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ , donde  $R_n$  está dado por:

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

para algún punto  $\xi$  entre  $x$  y  $x_0$ . ■

La diferencia entre  $f(x)$  y  $P_n(x)$  se conoce como error residual o de truncamientos del resto del polinomio de Taylor y es:

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x)$$

En algunas aplicaciones es necesario aproximar la función  $f$  alrededor del punto  $x$  pero no muy lejos de  $x$ , por ejemplo, supongamos que queremos calcular un polinomio en el punto  $x + h$  donde  $h$  es muy pequeño ( $h \ll 1$ ) (Mitsotakis, 2023). En estos casos consideramos el polinomio de Taylor con  $x + h$  en lugar de  $x$  y  $x$  en lugar de  $\xi$  de modo que:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R_n(\xi)$$

donde

$$R_n(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Como asumimos que  $h$  es pequeño, si además la  $(n + 1)$ -ésima derivada de  $f$  esta limitada por una constante para todos los valores de  $x$  alrededor de  $\xi$ , es decir  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ , entonces tenemos:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Tener en cuenta que esta fórmula revela la información sobre el error de aproximación. Si, por ejemplo, el paso de discretización es  $h$ , entonces el error de aproximación de  $f$  por  $P_n$  es de orden  $h^{n+1}$ . Por lo tanto, si  $h \ll 1$  y  $M$  son lo suficiente pequeños para  $n$ , entonces esperamos que el error sea pequeño o aproximado a cero.

**Teorema 2.2.11.2. (Teorema de Taylor de Segundo Orden)** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $f'(t)$  existe, es continua y  $f''(t)$  existe en  $(a, b)$ . Entonces, para  $t, t_0 \in [a, b]$  existe  $\xi$  entre  $t$  y  $t_0$  tal que:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(t - t_0)^2 \quad (23)$$

(Arévalo et al., 2021)

### DEMOSTRACIÓN:

Se sabe que el teorema de Taylor para una función  $f(t)$  se obtiene considerando una expansión con entorno a  $t_0$ , el teorema es una deducción del uso del teorema del valor medio para integrales, primero escribimos la fórmula para el teorema de Taylor de primer orden, donde se obtiene que:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + R_2(t)$$

donde  $R_2(t)$  es el error de truncamiento, que en este caso será de segundo orden.

Seguidamente para encontrar una expresión explícita para  $R_2(t)$ , aplicamos el Teorema de valor medio de Cauchy a la función derivada  $f'(t)$ , definimos una función auxiliar  $g(t)$  denotada de la siguiente manera:

$$g(t) = f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0)$$

donde se tiene que  $g(t_0) = 0$  ya que todos los términos se cancelan cuando  $t = t_0$ .

Se sabe que  $g(t)$  es una función derivable en el intervalo  $[t_0, t]$  aplicamos el Teorema del valor medio, que nos dice que para alguna  $\xi \in \langle t_0, t \rangle$ , se cumple que:



$$g'(t) = \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$$

Calculamos la derivada de  $g(t)$ :

$$g'(t) = f'(t) - f'(t_0)$$

Reemplazando en el teorema, obtenemos que para algún  $\xi \in (t_0, t)$ :

$$f'(t) - f'(t_0) = f''(\xi)(t - t_0)$$

$$f'(t) = f'(t_0) + f''(\xi)(t - t_0)$$

Ahora sustituyendo en la expresión principal de  $f(t)$ , se sabe que:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f'(t) - f'(t_0)}{2}(t - t_0)$$

Entonces reemplazamos  $f'(t) - f'(t_0)$  obtenida a partir del teorema del valor medio, donde se obtiene:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(\xi)(t - t_0)}{2}(t - t_0)$$

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(t - t_0)^2$$

Finalmente, se demuestra que la función  $f(t)$  puede expandirse como:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(t - t_0)^2$$

donde  $\xi$  es un valor intermedio entre  $t$  y  $t_0$ , donde se demuestra el Teorema de Taylor de segundo orden. ■

La idea del método de Euler consiste en construir una serie de puntos  $(t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_n, y_n)$  tales que  $t_0 = a$ ,  $t_n = b$  y  $y_n$  sea una aproximación a  $y(b)$ . Con respecto a la ecuación (22), si se conoce que  $t_i \in [a, b]$  y  $y(a) = \alpha$ , entonces una selección natural de los  $t_i$ , podría ser valores  $t_i$  en el intervalo  $[a, b]$  tales que  $t_i < t_{i+1}$ ,  $t_0 = a$ ,  $t_n = b$  y además la distancia entre  $t_i$  y  $t_{i+1}$  es constante.

Una vez obtenida la aproximación en los puntos, podemos obtener por interpolación la solución aproximada en otros puntos del intervalo, diremos que los nodos tienen una distribución uniforme en todo el intervalo  $[a, b]$ , seleccionamos un entero positivo  $N$  y los nodos están dadas de la siguiente manera:

$$t_i = a + ih$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, N$

La distancia común entre los puntos  $h = \frac{b-a}{N}$  se conoce como el tamaño de paso, utilizamos el teorema de Taylor para deducir el método de Euler. Supongamos que  $y(t)$  es la única solución de la ecuación (22), tiene dos derivadas continuas en  $[a, b]$  de modo que para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , en la ecuación (23) se tiene:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{y''(\xi_i)}{2}(t_{i+1} - t_i)^2 \quad (24)$$

para algún número  $\xi_i$  en  $(t_i, t_{i+1})$ . Si  $h = t_{i+1} - t_i$ , entonces reemplazando en la ecuación (24) se obtiene:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)h + \frac{y''(\xi_i)}{2}h^2$$

Dado  $y(t)$  satisface la ecuación diferencial (22), entonces  $y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$ ,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + \frac{y''(\xi_i)}{2}h^2$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{y''(\xi_i)}{2}h^2$$

donde,

$$R_2(\xi_i) = \frac{y''(\xi_i)}{2}h^2$$

El método de Euler construye  $y_i \approx y(t_i)$  para cada  $i = 1, 2, \dots, N$  al eliminar el término restante  $R_2(\xi_i)$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(t_i, y_i) \end{aligned} \tag{25}$$

donde, para cada  $i = 0, 1, \dots, N - 1$

La ecuación (25) se le llama ecuación de diferencias asociada al método de Euler (Burden y Faires, 2011).

### **Ejemplo 2.2.11.1.**

Consideremos la siguiente EDO de primer orden:

$$\frac{dy}{dt} = -2y, \quad y(0) = 1$$



con una aproximación en el intervalo  $0 \leq t \leq 1$ , utilizando el método de Euler con un paso  $h = 0,2$ .

El método de Euler se basa en la ecuación (22):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) , \quad a \leq t \leq b , \quad y(a) = \alpha$$

donde  $f(t, y) = \frac{dy}{dt} = -2y$ ,  $t_0 = a = 0$ ,  $b = 1$  y  $y_0 = \alpha = 1$

El método de Euler se basa en la fórmula de actualización (25):

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$$

donde  $y_{i+1}$  es la aproximación de la solución en el siguiente punto,  $y_i$  es la solución actual y  $h$  el tamaño de paso.

Ahora calculamos los valores para  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  utilizando  $h = 0,2$ :

Para  $i = 0$ :

Primeramente, calculamos  $t_1$ :

$$t_1 = t_0 + h = 0,2$$

seguidamente calculamos  $y_1$ :

$$y_1 = y_0 + h \cdot (-2y_0) = 0,6$$

Para  $i = 1$ :

Primeramente, calculamos  $t_2$ :

$$t_2 = t_1 + h = 0,4$$



seguidamente calculamos  $y_2$ :

$$y_2 = y_1 + h \cdot (-2y_1) = 0,36$$

Para  $i = 2$ :

Primeramente, calculamos  $t_3$ :

$$t_3 = t_2 + h = 0,6$$

seguidamente calculamos  $y_3$ :

$$y_3 = y_2 + h \cdot (-2y_2) = 0,216$$

Para  $i = 3$ :

Primeramente, calculamos  $t_4$ :

$$t_4 = t_3 + h = 0,8$$

seguidamente calculamos  $y_4$ :

$$y_4 = y_3 + h \cdot (-2y_3) = 0,1296$$

Para  $i = 4$ :

Primeramente, calculamos  $t_5$ :

$$t_5 = t_4 + h = 1,0$$

seguidamente calculamos  $y_5$ :

$$y_5 = y_4 + h \cdot (-2y_4) = 0,07776$$

Entonces las aproximaciones de la solución en cada paso son:

**Tabla 1**

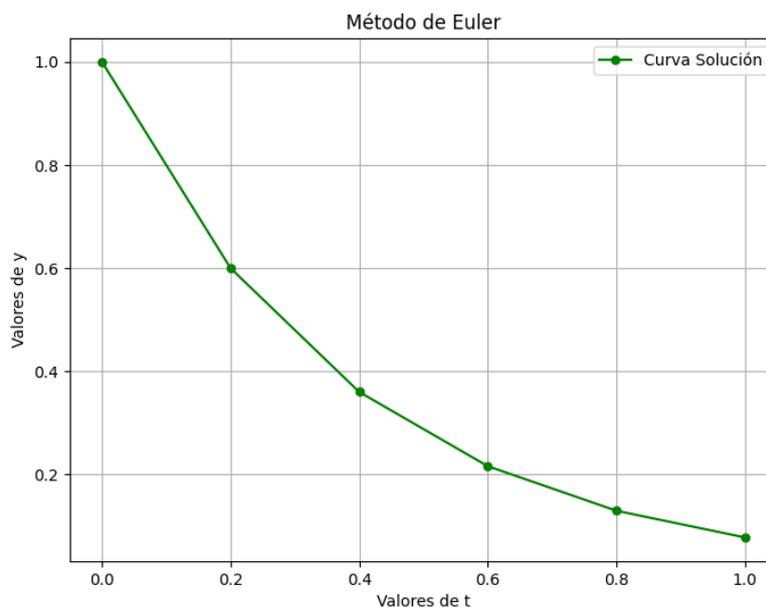
*Resultados de la aproximación numérica con el método de Euler*

$i$	$t_i$	$y_i(t_i)$
0	0,0	1,00000
1	0,2	0,60000
2	0,4	0,36000
3	0,6	0,21600
4	0,8	0,12960
5	1,0	0,07776

En la Figura 3, representa la curva solución de la EDO con el Método de Euler, donde los valores de  $t_i$  en relación a  $y_i$  están resaltados con un punto.

**Figura 3**

*Gráfico de la solución de la EDO con el Método de Euler*





### 2.2.9.1 Estabilidad Numérica Del Método De Euler

Al momento de comparar la respuesta entre la solución exacta con la aproximación numérica para el modelamiento de una EDO, es donde existe una razón para llevar a cabo este tipo de análisis es donde se conoce como “problemas rígidos” donde surgen con frecuencia a consecuencia de la práctica, para tales problemas el análisis de estabilidad es importante para la evaluación de conveniencia del método que se utilizará en la solución numérica de una EDO (Butcher, 2016).

El método de Euler (22) se utiliza para aproximar la solución de una EDO, la ecuación o formula de recurrencia del método de Euler es (25), donde  $y_i$  es la aproximación de la solución en el punto  $t_i = t_0 + i \cdot h$ , donde el tamaño de paso  $h > 0$ .

Para la prueba de estabilidad numérica del método de Euler se puede analizar con una EDO estándar:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y, \quad y(0) = y_0 \quad (26)$$

donde  $\lambda \in \mathbb{C}$  es una constante compleja.

Para encontrar la solución exacta de la EDO (26), se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{y} = \lambda dt$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \lambda dt$$



$$\ln(y) = \lambda t + c_1$$

$$e^{\ln(y)} = e^{\lambda t} e^{c_1}$$

$$y(t) = C e^{\lambda t}$$

donde  $C$  es una constante y la EDO tiene como valor inicial  $y(0) = y_0$

Reemplazando el valor inicial a la solución de la EDO (26), se obtiene:

$$y(0) = C e^{\lambda(0)}$$

$$y_0 = C$$

Seguidamente reemplazamos a la solución exacta de la EDO, donde se obtiene que:

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

Aplicando el método de Euler a la ecuación (25), donde  $f(t, y) = \lambda y$ , se obtiene:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i$$

$$y_{i+1} = y_i(1 + h\lambda)$$

Esta ecuación se puede escribir de forma iterativa como:

$$y_i = y_0(1 + h\lambda)^i$$

La estabilidad en el método de Euler depende de que los errores no crezcan indefinidamente con  $i$ , a consecuencia de eso se garantiza que:

$$|1 + h\lambda| \leq 1$$

Esta condición define y garantiza la estabilidad del método de Euler en el plano complejo, cuando  $h\lambda = z$ .

$$|1 + z| \leq 1$$

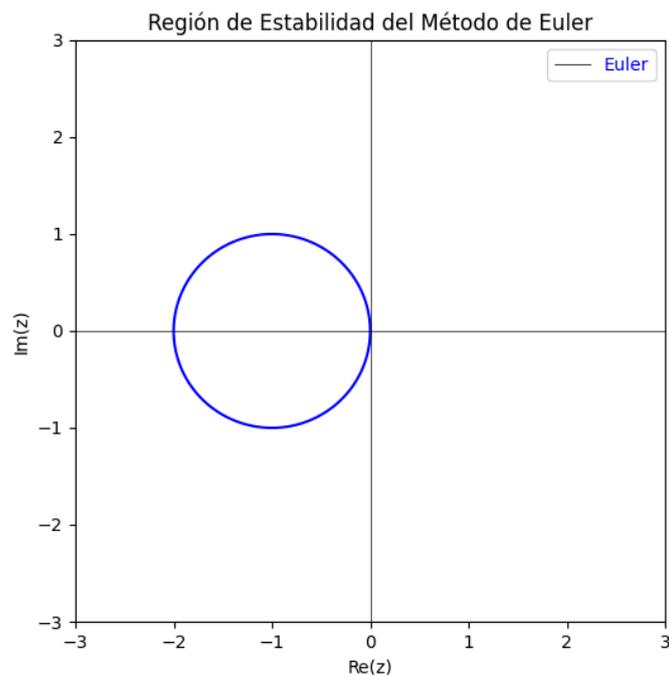
**Condición de Estabilidad:** Con el resultado anterior decimos, para que el método de Euler sea “estable”, es necesario que la magnitud del factor de amplificación sea menor o igual a 1:

$$|1 + h\lambda| \leq 1$$

La Figura 4, muestra la región de estabilidad del método de Euler en el plano complejo.

**Figura 4**

*Región de estabilidad del Método de Euler*





Si  $\lambda = -\alpha$ , con  $\alpha > 0$  (un valor negativo real), la condición de estabilidad definida anteriormente se convierte en:

Despejando el tamaño de paso  $h$ , donde siempre  $h > 0$  y  $\alpha > 0$ :

$$|1 - h\alpha| \leq 1$$

$$-1 \leq 1 - h\alpha \leq 1$$

$$0 \leq h\alpha \leq 2$$

$$0 \leq h \leq \frac{2}{\alpha}$$

Donde esto indica que el método de Euler es estable si el tamaño de paso  $h$  es demasiado pequeño en relación a los valores reales negativos de  $\lambda$ .

Para los valores complejos de  $\lambda$ , la región de estabilidad es el plano complejo es un disco centrado  $-1$  con radio  $1$ , esto quiere decir que esta región incluye algunos valores complejos de  $\lambda$ , pero también excluye otros valores de  $\lambda$ , lo que nos da a entender que la estabilidad también depende de la parte real de  $\lambda$  y del tamaño de paso  $h$ .

En problemas con valores negativos de  $\lambda$ , sobre todo en problemas “rígidos” donde los valores negativos de  $\lambda$  son muy grandes en magnitud, el tamaño de paso  $h$  debe ser muy pequeño, lo que puede llevar a que el método sea ineficiente y poco preciso.

#### 2.2.10. Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden



El método de Runge-Kutta de orden cuatro (RK4) es uno de los métodos más utilizados en la práctica. Su deducción sigue las ideas de los métodos de Runge-Kutta orden dos, es un método recursivo y su cálculo no implica utilizar información adicional como ocurre en los métodos de Taylor. Su esquema se encuentra a continuación.

$$y_0 = \alpha$$

$$k_1 = h \cdot f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , este método tiene el error local de truncamiento  $O(h^4)$ , siempre que la solución  $y(t)$  tenga cinco derivadas continuas. Se introduce la notación  $k_1, k_2, k_3, k_4$  en él para prescindir de las anidaciones sucesivas en la segunda variable de  $f(t, y)$  (Iriarte et al., 1990).

La deducción del método de Runge-Kuta de cuarto inicia considerando la estructura de los métodos de Euler y Euler-Gauss:

Donde Euler está definido como:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots$$

y donde Euler-Gauss está definido por:



$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})] \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots$$

Ambos métodos pueden escribirse de la siguiente manera:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \psi(t_i, y_i) \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

donde en el método de Euler:  $\psi(t, y) = f(t, y)$  despejando obtenemos:

$$\psi(t, y) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

reemplazamos en el método de Euler-Gauss:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})] \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi(t, y) = \frac{1}{2} [f(t, y) + f(t + h, y + hy')]$$

El método de Runge-Kutta, consiste en obtener una ecuación similar a la expresión (27) que en la forma general se escribe como:

$$h\psi(t_i, y_i) = (w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + \dots + w_nk_n)$$

reemplazando obtenemos que:

$$y_{i+1} = y_i + (w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + \dots + w_nk_n) \quad (28)$$

$$\forall i = 1, 2, 3, \dots$$

donde:

$$k_i = h f(t_i, y_i) \quad (29)$$



$$\begin{aligned}
 k_3 &= hf(t_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{2,1}k_1 + \beta_{2,2}k_2) \\
 k_4 &= hf(t_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{3,1}k_1 + \beta_{3,2}k_2 + \beta_{3,3}k_3) \\
 &\vdots \\
 k_n &= hf(t_i + \alpha_n h, y_i + \beta_{n,1}k_1 + \beta_{n,2}k_2 + \dots + \beta_{n,n-1}k_{n-1})
 \end{aligned}$$

donde  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ;  $\beta_{1,1}, \beta_{2,1}, \beta_{2,2}, \dots, \beta_{n,n-1}$  son constantes que deben determinarse, de tal manera que proporcionen la mayor exactitud posible a la solución de la ecuación diferencial.

El método de Runge-Kutta de cuarto orden consiste en considerar  $n = 4$  dentro de las expresiones que definen a estos métodos, esto es:

$$y_{i+1} = y_i + (w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4) \quad (30)$$

donde para  $n = 4$  en (29):

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_i, y_i) \\
 k_2 &= hf(t_i + \alpha_1 h, y_i + \beta_{1,1}k_1) \\
 k_3 &= hf(t_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{2,1}k_1 + \beta_{2,2}k_2) \\
 k_4 &= hf(t_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{3,1}k_1 + \beta_{3,2}k_2 + \beta_{3,3}k_3)
 \end{aligned} \quad (31)$$

Ahora desarrollamos la serie de Taylor, el miembro de la izquierda de la expresión (30) en el entorno de  $t = t_i$  y considerando hasta los términos de orden  $h^3$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &\approx y(t_{i+1}) \\ &= y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{y''(t_i)}{2}(t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\quad + \frac{y'''(t_i)}{6}(t_{i+1} - t_i)^3 + \dots\end{aligned}$$

Simplificando:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}y''_i + \frac{h^3}{6}y'''_i + \dots \quad (32)$$

Donde:

$$w_1 = \frac{1}{6}, \quad w_2 = \frac{1}{3}, \quad w_3 = \frac{1}{3}, \quad w_4 = \frac{1}{6}$$

y también que:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = 1$$

$$\beta_{1,1} = \frac{1}{2}, \beta_{2,2} = \frac{1}{2} \wedge \beta_{3,3} = 1$$

$$\beta_{2,1} = 0, \beta_{3,1} = 0 \wedge \beta_{3,2} = 0$$

Reemplazando en (31) tenemos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (33)$$

$$\forall i = 1, 2, 3, \dots$$

donde:

$$k_i = h^2 f(t_i, y_i) \quad (34)$$



$$k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_i + h, y_i + k_3)$$

La ecuación (33) se le llama ecuación de diferencias asociada al método de Runge-Kutta de cuarto orden.

### Ejemplo 2.2.12.1.

Consideremos la siguiente EDO:

$$\frac{dy}{dt} = t + y, \quad y(0) = 1$$

con un intervalo  $0 \leq t \leq 1$ , utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con un tamaño de paso  $h = 0.2$ .

El método de Runge-Kutta de cuarto orden se basa en (34), donde:

$$f(t, y) = \frac{dy}{dt} = t + y, \quad t_0 = 0, \quad y_0 = 1 \quad \text{y} \quad h = 0.2.$$

El método de RK4 se basa en la fórmula de actualización (33):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde  $y_{i+1}$  es la aproximación de la solución en el siguiente punto,  $y_i$  es la solución actual,  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , son los coeficientes intermedios y  $h$  el tamaño de paso.

Ahora calculamos los valores para  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  utilizando  $h = 0.2$ :



Como datos iniciales tenemos que:

$$t_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

Para  $i = 0$ :

Primeramente, calculamos  $t_1$ :

$$t_1 = t_0 + h = 0,2$$

seguidamente calculamos  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , para  $y_1$ :

calculamos  $k_1$ :

$$k_1 = h \cdot f(t_0, y_0) = 0,2$$

calculamos  $k_2$ :

$$k_2 = h \cdot f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,24$$

calculamos  $k_3$ :

$$k_3 = h \cdot f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0,244$$

calculamos  $k_4$ :

$$k_4 = h \cdot f(t_0 + h, y_0 + k_3) = 0,2888$$

por último, calculamos  $y_1$ :

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,2428$$

Para  $i = 1$ :



Primeramente, calculamos  $t_2$ :

$$t_2 = t_1 + h = 0,4$$

seguidamente calculamos  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , para  $y_2$ :

calculamos  $k_1$ :

$$k_1 = h \cdot f(t_1, y_1) = 0,2886$$

calculamos  $k_2$ :

$$k_2 = h \cdot f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,3374$$

calculamos  $k_3$ :

$$k_3 = h \cdot f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0,3423$$

calculamos  $k_4$ :

$$k_4 = h \cdot f(t_1 + h, y_1 + k_3) = 0,3970$$

por último, calculamos  $y_2$ :

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,5836$$

Para  $i = 2$ :

Primeramente, calculamos  $t_3$ :

$$t_3 = t_2 + h = 0,6$$

seguidamente calculamos  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , para  $y_3$ :



calculamos  $k_1$ :

$$k_1 = h \cdot f(t_2, y_2) = 0,3967$$

calculamos  $k_2$ :

$$k_2 = h \cdot f\left(t_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,4564$$

calculamos  $k_3$ :

$$k_3 = h \cdot f\left(t_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0,4624$$

calculamos  $k_4$ :

$$k_4 = h \cdot f(t_2 + h, y_2 + k_3) = 0,5292$$

por último, calculamos  $y_3$ :

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2,0442$$

Para  $i = 3$ :

Primeramente, calculamos  $t_4$ :

$$t_4 = t_3 + h = 0,8$$

seguidamente calculamos  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , para  $y_4$ :

calculamos  $k_1$ :

$$k_1 = h \cdot f(t_3, y_3) = 0,5288$$

calculamos  $k_2$ :



$$k_2 = h \cdot f\left(t_3 + \frac{1}{2}h, y_3 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,6017$$

calculamos  $k_3$ :

$$k_3 = h \cdot f\left(t_3 + \frac{1}{2}h, y_3 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0,6088$$

calculamos  $k_4$ :

$$k_4 = h \cdot f(t_3 + h, y_3 + k_3) = 0,6906$$

por último, calculamos  $y_4$ :

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2,6510$$

Para  $i = 4$ :

Primeramente, calculamos  $t_5$ :

$$t_5 = t_4 + h = 1,0$$

seguidamente calculamos  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , para  $y_5$ :

calculamos  $k_1$ :

$$k_1 = h \cdot f(t_4, y_4) = 0,6902$$

calculamos  $k_2$ :

$$k_2 = h \cdot f\left(t_4 + \frac{1}{2}h, y_4 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,7792$$

calculamos  $k_3$ :



$$k_3 = h \cdot f\left(t_4 + \frac{1}{2}h, y_4 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0,7881$$

calculamos  $k_4$ :

$$k_4 = h \cdot f(t_4 + h, y_4 + k_3) = 0,8878$$

por último, calculamos  $y_4$ :

$$y_5 = y_4 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 3,4364$$

Entonces las aproximaciones de la solución en cada paso son:

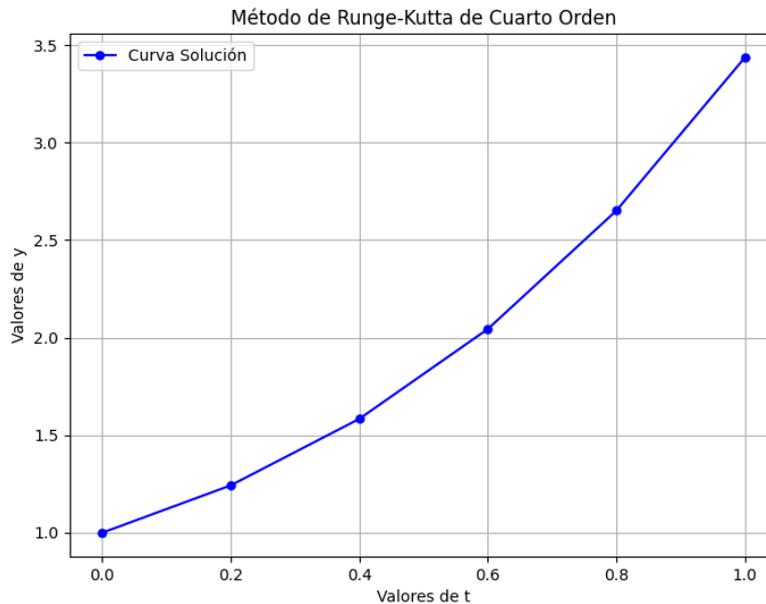
**Tabla 2**

*Resultados de la aproximación numérica con el método de RK4*

$i$	$t_i$	$y_i(t_i)$
0	0,0	1,0000
1	0,2	1,2428
2	0,4	1,5836
3	0,6	2,0442
4	0,8	2,6510
5	1,0	3,4365

## Figura 5

Gráfico de la solución de la EDO con el Método de RK4



La Figura 5, representa la curva solución de la EDO con el Método de Runge-Kutta de cuarto orden, donde los valores de  $t_i$  en relación a  $y_i$  están resaltados con un punto.

### 2.2.10.1 Estabilidad Numérica del Método de RK4

El método de Runge-Kutta de cuarto orden es uno de los métodos más precisos y utilizados al momento de una resolución numérica de EDOs, por el mismo hecho que debido a su equilibrio entre precisión, eficacia y fácil implementación (Butcher, 2016).

El método de RK4 se utiliza para aproximar la solución de una EDO, la ecuación o formula de recurrencia del método de RK4 es (33), donde  $y_i$  es la aproximación de la solución en el punto  $t_i = t_0 + i \cdot h$ ,

donde el tamaño de paso  $h > 0$  y donde los valores de  $k_1, k_2, k_3, k_4$  denotados en (34).

Para una EDO de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Para la prueba de estabilidad numérica del método de RK4 se puede analizar con una EDO estándar:

$$\frac{dy}{dt} = \mu y, \quad y(0) = y_0 \quad (35)$$

donde  $\mu \in \mathbb{C}$  es una constante compleja.

Para encontrar la solución exacta de la EDO (35), se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{y} = \mu dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \mu dt$$

$$\ln(y) = \mu t + c_1$$

$$e^{\ln(y)} = e^{\mu t} e^{c_1}$$

$$y(t) = C e^{\mu t}$$

donde  $C$  es una constante y la EDO tiene como valor inicial  $y(0) = y_0$

Reemplazando el valor inicial a la solución de la EDO (35), se obtiene:



$$y(0) = Ce^{\mu(0)}$$

$$y_0 = C$$

Seguidamente reemplazamos a la solución exacta de la EDO, donde se obtiene que:

$$y(t) = y_0 e^{\mu t}$$

Aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden a la ecuación (35), donde  $f(t, y) = \mu y$ , se obtiene:

Primeramente, calculamos los valores de  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , teniendo en cuenta a la EDO (35):

Para  $k_1$ :

$$k_1 = h \cdot f(t_i, y_i)$$

$$k_1 = h \cdot \mu y_i$$

Para  $k_2$ :

$$k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_2 = h \cdot \mu \left(y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_2 = h \cdot \mu \left(y_i + \frac{1}{2}(h\mu y_i)\right)$$

$$k_2 = h \cdot \mu y_i \left(1 + \frac{h\mu}{2}\right)$$

Para  $k_3$ :



$$k_3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_3 = h \cdot \mu\left(y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_3 = h \cdot \mu\left(y_i + \frac{1}{2}\left(h\mu y_i\left(1 + \frac{h\mu}{2}\right)\right)\right)$$

$$k_3 = h \cdot \mu y_i\left(1 + \frac{h\mu}{2}\left(1 + \frac{h\mu}{2}\right)\right)$$

Para  $k_4$ :

$$k_4 = h \cdot f(t_i + h, y_i + k_3)$$

$$k_4 = h \cdot \mu(y_i + k_3)$$

$$k_4 = h \cdot \mu\left(y_i + h\mu y_i\left(1 + \frac{h\mu}{2}\left(1 + \frac{h\mu}{2}\right)\right)\right)$$

$$k_4 = h \cdot \mu y_i\left(1 + h\mu\left(1 + \frac{h\mu}{2}\left(1 + \frac{h\mu}{2}\right)\right)\right)$$

Reemplazando los valores de  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , en la aproximación

(33):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$



$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \left( h \cdot \mu y_i + 2 \left( h \cdot \mu y_i \left( 1 + \frac{h\mu}{2} \right) \right) \right. \\ \left. + 2 \left( h \cdot \mu y_i \left( 1 + \frac{h\mu}{2} \left( 1 + \frac{h\mu}{2} \right) \right) \right) \right) + h \\ \cdot \mu y_i \left( 1 + h\mu \left( 1 + \frac{h\mu}{2} \left( 1 + \frac{h\mu}{2} \right) \right) \right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \left( 6\mu h y_i + 3(\mu h)^2 y_i + (\mu h)^3 y_i + \frac{1}{4} (\mu h)^4 y_i \right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \mu h y_i + \frac{(\mu h)^2 y_i}{2} + \frac{(\mu h)^3 y_i}{6} + \frac{(\mu h)^4 y_i}{24}$$

$$y_{i+1} = y_i \left[ 1 + \mu h + \frac{(\mu h)^2}{2} + \frac{(\mu h)^3}{6} + \frac{(\mu h)^4}{24} \right]$$

Ahora para el estudio de la estabilidad en el método de RK4, la ecuación encontrada se denotará de la siguiente manera:

$$y_{i+1} = y_i \cdot P(\mu h)$$

donde seguidamente se hace el cambio de variables  $z = \mu h$ , así obteniendo lo siguiente:

$$y_{i+1} = y_i \cdot P(z)$$

donde  $P(z)$  es el polinomio de estabilidad del método de RK4 donde el polinomio se define de la siguiente manera:

$$P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}, \quad z = \mu h$$

Este polinomio es una aproximación a la serie de Taylor, donde la función exponencial es  $e^z$  y que se utiliza para aproximar la solución de la ecuación diferencial en un punto de interés.

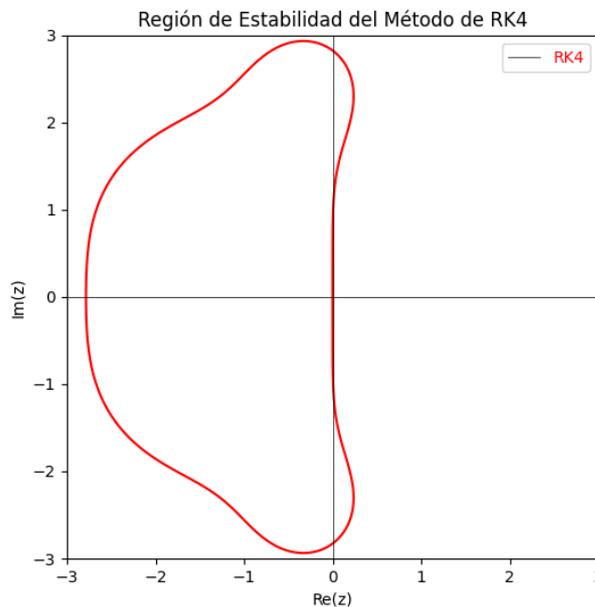
**Condición de Estabilidad:** Para que el método de RK4 sea estable o cumpla la condición de estabilidad, es necesario que:

$$|P(z)| \leq 1$$

donde  $z = \mu h$ , la región del plano complejo donde está condición se cumple es conocida como la región de estabilidad absoluta del método de RK4.

### Figura 6

*Región de estabilidad del Método de RK4*



La Figura 6, muestra la región de estabilidad del método de Runge-Kutta de cuarto orden en el plano complejo.



La función de estabilidad de  $P(z)$  del método de RK4 se acerca mucho a la función exponencial para valores pequeños de  $z$ , entonces eso quiere decir que a medida que  $|z|$  incrementa o aumenta,  $P(z)$  inicia a diferir de  $e^z$ . Sin embargo, RK4 es conocido por tener una región de estabilidad relativamente amplia en el plano de los complejos en comparación como métodos de orden inferior como el método de Euler, entonces eso significa que el método de RK4 es estable para un rango más amplio de tamaños de paso  $h$  y valores  $\mu$  negativos en comparación con métodos de orden inferior. Sin embargo, para problemas “rígidos”, donde algunos autovalores de  $\mu$  tienen una magnitud muy grande y real negativa, el tamaño de paso  $h$  aún puede necesitar ser pequeño para garantizar la estabilidad numérica.

### 2.2.11. Aplicación del Método de Euler al Modelo SIR

Para iniciar con la implementación del método de Euler en el modelo SIR, primero es necesario saber que se trabaja con el modelo SIR normalizado o discretizado, donde las ecuaciones diferenciales que describen la evolución de las poblaciones susceptibles  $s(t)$ , infectadas  $i(t)$ , y recuperadas  $r(t)$  en intervalos de tiempo pequeños o también conocido como el tamaño de paso  $h$ . Utilizaremos una aproximación lineal para cada una de estas ecuaciones diferenciales, lo cual nos permitirá calcular los valores de  $s$ ,  $i$ , y  $r$  en cada paso de tiempo de manera iterativa. A continuación, definiremos cómo se aplica esta aproximación a cada una de las variables del modelo, comenzando con la población susceptible  $s(t)$ , seguida por las poblaciones infectadas  $i(t)$  y recuperadas  $r(t)$ .



Para iniciar con la aplicación del método de Euler al modelo SIR se utiliza la ecuación (25) a cada uno de los compartimentos del sistema de EDOs no lineales (21), donde:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i$$

con un intervalo en  $t_0 \leq t \leq t_f$ , número total de pasos  $N$ , con un tamaño de paso  $h$  y valores iniciales  $s_0, i, r_0$ .

Para  $s(t)$ :

En la ecuación diferencial para  $s(t)$  en el modelo SIR es:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si$$

Utilizamos el método de Euler para la aproximación del compartimento  $s(t)$ , se obtiene:

$$s_{j+1} = s_j + h \cdot f(t_j, s_j)$$

$$s_{j+1} = s_j + h \cdot (-\beta s_j i_j)$$

Indica que esta ecuación describe el cambio en la población susceptible, teniendo en cuenta la tasa de infección.

Para  $i(t)$ :

En la ecuación diferencial para  $i(t)$  en el modelo SIR es:



$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i$$

Utilizamos el método de Euler para la aproximación del compartimento  $i(t)$ , se obtiene:

$$i_{j+1} = i_j + h \cdot f(t_j, i_j)$$

$$i_{j+1} = i_j + h \cdot (\beta s_j i_j - \gamma i_j)$$

Indica que esta ecuación describe el cambio en la población infectada, teniendo en cuenta la tasa de infección y la tasa de recuperación.

Para  $r(t)$ :

En la ecuación diferencial para  $r(t)$  en el modelo SIR es:

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i$$

Utilizamos el método de Euler para la aproximación del compartimento  $r(t)$ , se obtiene:

$$r_{j+1} = r_j + h \cdot f(t_j, r_j)$$

$$r_{j+1} = r_j + h \cdot (\gamma i_j)$$

Indica como aumenta la población recuperada con el tiempo teniendo en cuenta la tasa de recuperación y la cantidad de infectados.

## 2.2.12. Aplicación del Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden al modelo

### SIR

Para comenzar con la implementación del método de Runge-Kutta de cuarto orden en el modelo SIR, primero es necesario saber que se trabaja con el modelo SIR normalizado o discretizado, donde las ecuaciones diferenciales que describen la evolución de las poblaciones susceptibles  $s(t)$ , infectadas  $i(t)$ , y recuperadas  $r(t)$  en intervalos de tiempo pequeños o también conocido como el tamaño de paso  $h$ . Utilizaremos una aproximación lineal para cada una de estas ecuaciones diferenciales, lo cual nos permitirá calcular los valores de  $s$ ,  $i$ , y  $r$  en cada paso de tiempo de manera iterativa. A continuación, definiremos cómo se aplica esta aproximación a cada una de las variables o compartimentos del modelo, comenzando con la población susceptible  $s(t)$ , seguida por las poblaciones infectadas  $i(t)$  y por último las recuperadas  $r(t)$ .

Para iniciar con la aplicación del método de Runge-Kutta de cuarto orden al modelo SIR se utilizan las ecuaciones (33) y (34) a cada uno de los compartimentos del sistema de EDOs no lineales (21), donde:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i$$

con un intervalo en  $t_0 \leq t \leq t_f$ , número total de pasos  $N$ , con un tamaño de paso  $h$  y valores iniciales  $s_0$ ,  $i_0$ ,  $r_0$  respectivamente a cada uno de los compartimentos.

Para  $s(t)$ :



Ya que la ecuación diferencial para  $s(t)$  en el modelo SIR es:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si$$

Utilizamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden para la aproximación del compartimento  $s(t)$ , donde primeramente debemos calcular (34) los coeficientes intermedios  $k_1, k_2, k_3, k_4$  para  $s(t)$ , donde se obtiene:

$$k_1 = h \cdot f(t_j, s_j)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_j + \frac{1}{2}h, s_j + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_j + \frac{1}{2}h, s_j + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_j + h, s_j + k_3)$$

Seguidamente utilizamos la ecuación (33) para calcular las iteraciones en  $s(t)$ :

$$s_{j+1} = s_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Para  $i(t)$ :

En la ecuación diferencial para  $i(t)$  en el modelo SIR es:

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i$$

Utilizamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden para la aproximación del compartimento  $i(t)$ , donde primeramente debemos calcular (34) los coeficientes intermedios  $k_1, k_2, k_3, k_4$  para  $i(t)$ , donde se obtiene:



$$k_1 = h \cdot f(t_j, i_j)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_j + \frac{1}{2}h, i_j + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_j + \frac{1}{2}h, i_j + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_j + h, i_j + k_3)$$

Seguidamente utilizamos la ecuación (33) para calcular las iteraciones en  $i(t)$ :

$$i_{j+1} = i_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Para  $r(t)$ :

En la ecuación diferencial para  $r(t)$  en el modelo SIR es:

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i$$

Utilizamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden para la aproximación del compartimento  $r(t)$ , donde primeramente debemos calcular (34) los coeficientes intermedios  $k_1, k_2, k_3, k_4$  para  $r(t)$ , donde se obtiene:

$$k_1 = h \cdot f(t_j, r_j)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_j + \frac{1}{2}h, r_j + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_j + \frac{1}{2}h, r_j + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_j + h, r_j + k_3)$$



Seguidamente utilizamos la ecuación (33) para calcular las iteraciones en

$r(t)$ :

$$r_{j+1} = r_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$



## CAPÍTULO III

### MATERIALES Y MÉTODOS

#### 3.1. DISEÑO METODOLÓGICO

El presente trabajo de investigación se clasifica como de tipo básica, ya que se fundamenta en teorías existentes para profundizar en ellas y generar nuevos conocimientos. Específicamente, se trata de una investigación descriptivo-analítica, dado que se examinará el comportamiento de las variables susceptibles e infectados bajo diferentes tasas de contagio, utilizando para ello el método de Euler y el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

De acuerdo con el propósito de la investigación, el estudio se enmarca en el tipo de investigación básica según (Hernández Sampieri et al., 2006). El diseño adoptado es no experimental, centrado en el análisis de la solución del modelo epidemiológico SIR para diversas tasas de contagio extraídas de la literatura y bibliografía existente. Una vez determinadas estas tasas, se procederá a simularlas en el lenguaje de programación Python mediante la aplicación de métodos numéricos, específicamente el método de Euler y el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Dado el enfoque de este trabajo de investigación, no se requiere determinar ni obtener una población o muestra específica, ya que no se llevará a cabo ningún cálculo o tratamiento estadístico de datos. El proyecto se desarrollará en el espacio físico de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas de la UNA Puno, incluyendo la Biblioteca Central de la UNA Puno.



### 3.2. MATERIALES

En el presente trabajo de investigación se utilizó los siguientes materiales:

Se obtuvo información relevante para el desarrollo de esta investigación como libros, artículos científicos, papers online nacionales como también internacionales, utilizando fuentes bibliográficas especializadas en el área de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Métodos Numéricos y Biomatemática.

Durante el desarrollo de esta investigación, se utilizó Python 3.12.3 como lenguaje de programación principal, debido a su uso libre (Challenger et al., 2014), a su versatilidad y extensa gama de bibliotecas especializadas en matemáticas. Además las librerías como NumPy y Matplotlib fueron necesarios para el cálculo numérico y las representaciones gráficas de los resultados.

Para la creación de imágenes más elaboradas y visualmente atractivos, se utilizó Canva en su versión gratuita, esta herramienta de uso libre, resultó apropiado para el diseño de imágenes en la investigación.

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el presente capítulo, se presentan los resultados obtenidos en esta investigación, cuyo objetivo es analizar la solución del modelo SIR utilizando los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden, considerando diferentes tasas de contagio. Este análisis tiene como finalidad comparar ambos métodos y determinar cuál es el más adecuado para la simulación del modelo en función de diferentes condiciones.

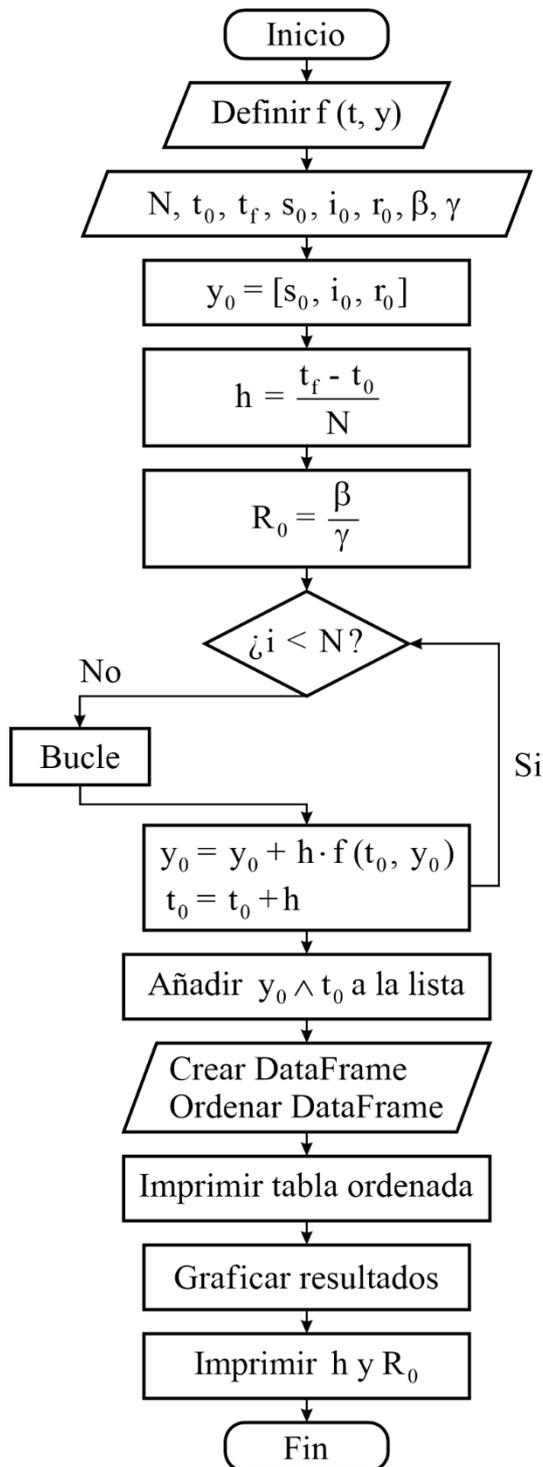
#### 4.1. RESULTADOS

Como resultado de la implementación del método de Euler y del método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales del modelo SIR, se obtuvieron aproximaciones que permiten analizar la dinámica del contagio para diferentes tasas de contagio. Los resultados muestran cómo cada método afecta la precisión y estabilidad de la simulación de las poblaciones de susceptibles, infectados y recuperado a lo largo del tiempo, especialmente en escenarios con la tasa de reproducción básica  $R_0$  alta. A continuación, se tiene por resultado la siguiente implementación desarrollada por el autor de la presente investigación.

La Figura 7, muestra el diagrama de flujo que describe el procedimiento para simular la propagación de una enfermedad mediante el modelo matemático SIR, se define la función del modelo, se inicializan los parámetros, se calcula la tasa básica de reproducción  $R_0$ , y se realiza un bucle para actualizar los valores mediante el Método de Euler. Al final, se imprimen y grafican los resultados.

**Figura 7**

*Diagrama de flujo para el Método de Euler*

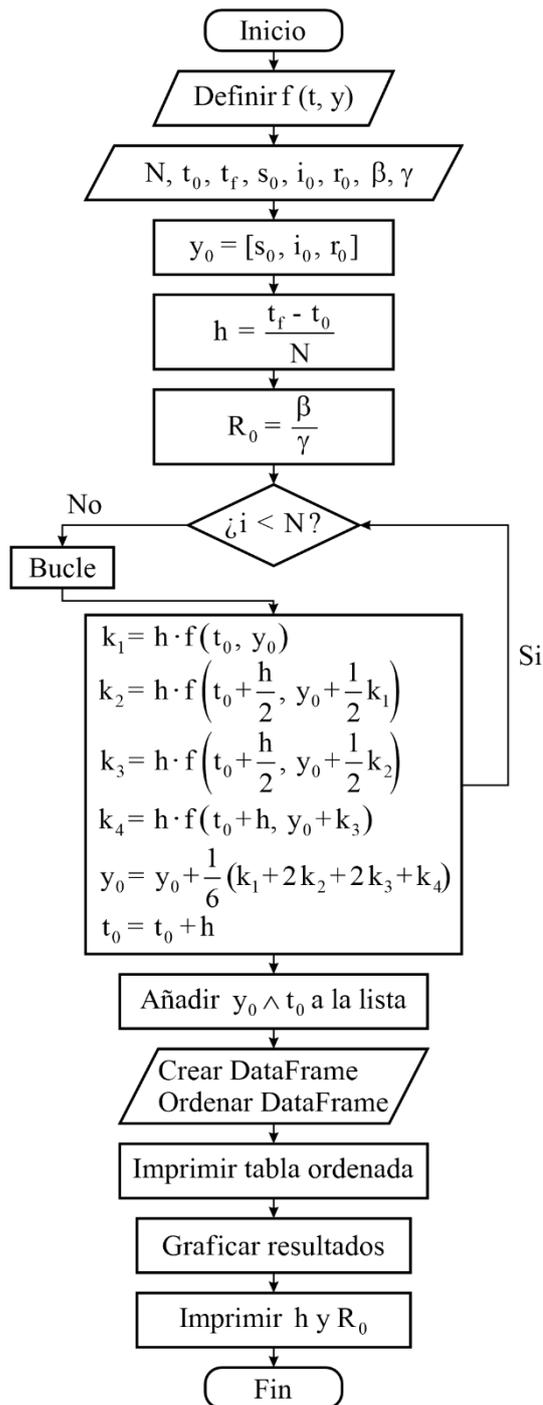


La Figura 8, muestra el diagrama de flujo que describe el procedimiento para simular la propagación de una enfermedad mediante el modelo matemático SIR, se define

la función del modelo, se inicializan los parámetros, se calcula la tasa básica de reproducción  $R_0$ , y se realiza un bucle para actualizar los valores mediante el Método de Runge-Kutta de cuarto orden. Al final, se imprimen y grafican los resultados.

**Figura 8**

*Diagrama de flujo para el Método de Runge-Kutta de cuarto orden*



En la Tabla 3 se presentan las tasas de reproducción básica  $R_0$ , que se emplearán en esta investigación.

**Tabla 3**

*Algunas tasas de reproducción básica estimados*

Enfermedades Infecciosas	Huésped	$R_0$ estimado	Referencia
Covid-19	Humanos	3,9	Li et al. (2020)
Sarampión	Humanos	18,0	Anderson y May (1982)
Lengua Azul	Animales (Rumiantes)	10,0 - 61,0	Hartemink et al. (2009)

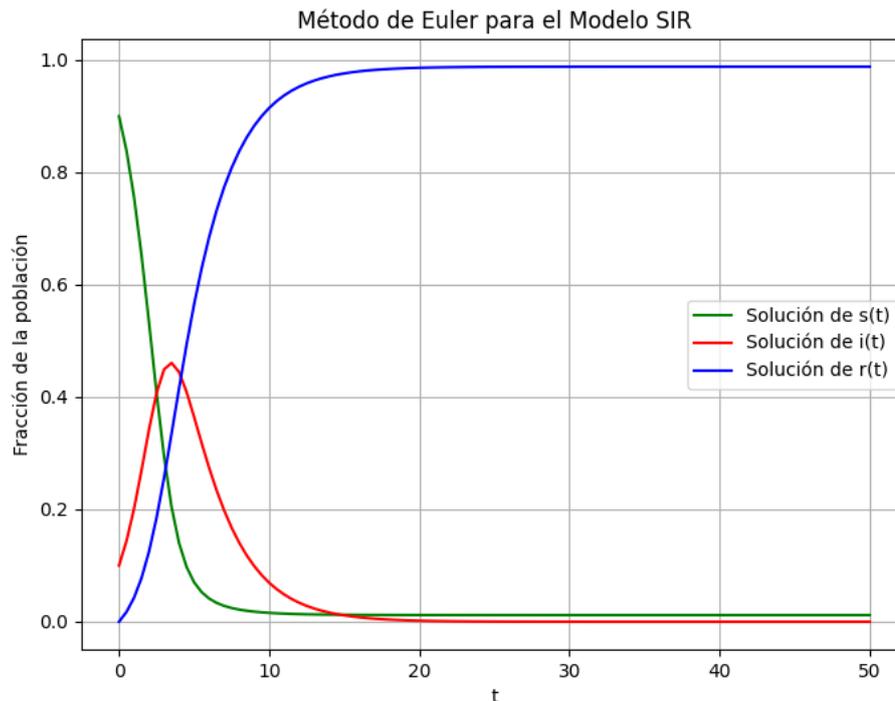
La enfermedad de la Lengua Azul en Países Bajos, es una enfermedad que afecta a rumiantes, en las zonas donde la tasa de reproducción básica  $R_0$  alcanza hasta 61,0 el riesgo de propagación del virus es muy alto, especialmente en el norte y sur del país, donde las condiciones ambientales y la abundancia de insectos Culicoides favorecen la transmisión. Los mapas detallan los valores de  $R_0$  según diferentes complejos de vectores, como Obsoletus y Pulicaris, y especies específicas como Culicoides dewulfi y Culicoides chiopterus. Las condiciones en estas áreas permiten que los vectores proliferen y faciliten la dispersión del virus, lo que requiere intervenciones urgentes para prevenir brotes graves.

Con respecto a los diagramas de flujo de la Figura 7 y Figura 8, se utilizó las tres tasas de contagio de la Tabla 3 que contiene la tasa de reproducción básica estimada  $R_0$  de enfermedades infecciosas para la simulación en el software Python del modelo SIR con el Método de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden respectivamente.

Para el primer caso se utilizó los datos del Covid-19 con un  $R_0 = 3,9$ , donde la tasa de contagio es  $\beta = 1,365$ , la tasa de recuperación es  $\gamma = 0,35$ , para el número de pasos o subintervalos  $N = 100$ , número inicial de susceptibles  $s(0) = 0,9$ , número inicial de infectados  $i(0) = 0,1$ , número inicial de recuperados  $r(0) = 0$ , tiempo inicial de  $t_0 = 0$ , tiempo final de  $t_f = 50$  y el tamaño de paso  $h = 0,5$ ; donde se obtuvo la siguiente simulación:

### Figura 9

*Modelo SIR para el Covid-19 con el Método de Euler*

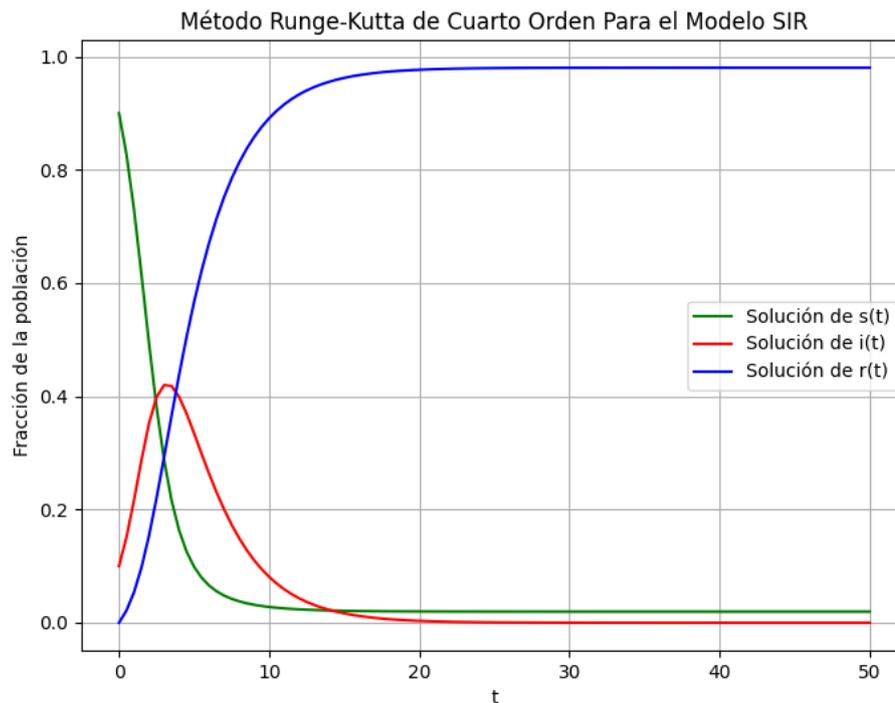


En la Figura 9, se observa que para la simulación del modelo SIR con el método de Euler para cada uno de los compartimentos  $s(t)$ ,  $i(t)$  y  $r(t)$  de la enfermedad infecciosa del Covid-19 con un  $R_0 = 3,9$ , no es muy distorsionado al momento de ver la simulación por el mismo hecho que la tasa básica de reproducción  $R_0$  es bajo.

Se tiene que la curva de susceptibles  $s(t)$  muestra una disminución inicial a medida que la población susceptible se reduce debido a la propagación de la infección. Simultáneamente, la curva de infectados  $i(t)$  aumenta rápidamente, alcanzando un pico antes de comenzar a disminuir, lo que indica que la mayoría de los susceptibles se han contagiado. Finalmente, la curva de recuperados  $r(t)$  crece a medida que los individuos infectados se recuperan o son removidos de la población susceptible.

### Figura 10

*Modelo SIR para el Covid-19 con el Método de RK4*



En la Figura 10, se observa que para la simulación del modelo SIR con el Método de RK4 para cada uno de los compartimentos  $s(t)$ ,  $i(t)$  y  $r(t)$  de la enfermedad infecciosa del Covid-19 con un  $R_0 = 3,9$ , no es muy distorsionado al momento de ver la simulación por el mismo hecho que la tasa básica de reproducción  $R_0$  es bajo.

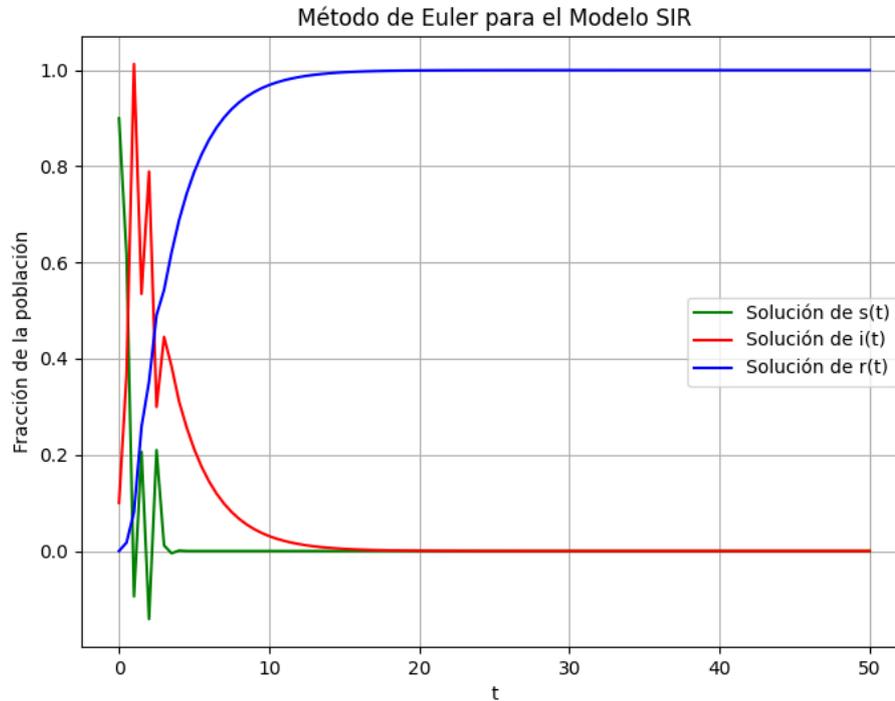


En este gráfico, la dinámica es similar a la del método de Euler. La curva de susceptibles  $s(t)$  desciende inicialmente, reflejando la disminución de la población susceptible conforme la infección se propaga. La curva de infectados  $i(t)$  crece hasta un punto máximo y luego disminuye, lo que indica el pico de la infección seguido de una reducción en el número de infectados. Finalmente, la curva de recuperados  $r(t)$  aumenta a medida que más individuos se recuperan o son removidos de la población susceptible, alcanzando una meseta cuando la mayoría de los individuos han salido de la fase infecciosa.

Para el segundo caso se utilizó los datos del Sarampión con un  $R_0 = 18$ , donde la tasa de contagio es  $\beta = 6,3$ , la tasa de recuperación es  $\gamma = 0,35$ , para el número de pasos o subintervalos  $N = 100$ , número inicial de susceptibles  $s(0) = 0,9$ , número inicial de infectados  $i(0) = 0,1$ , número inicial de recuperados  $r(0) = 0$ , tiempo inicial de  $t_0 = 0$ , tiempo final de  $t_f = 50$  y el tamaño de paso  $h = 0,5$ ; donde se obtuvo la siguiente simulación:

**Figura 11**

*Modelo SIR para el Sarampión con el Método de Euler*



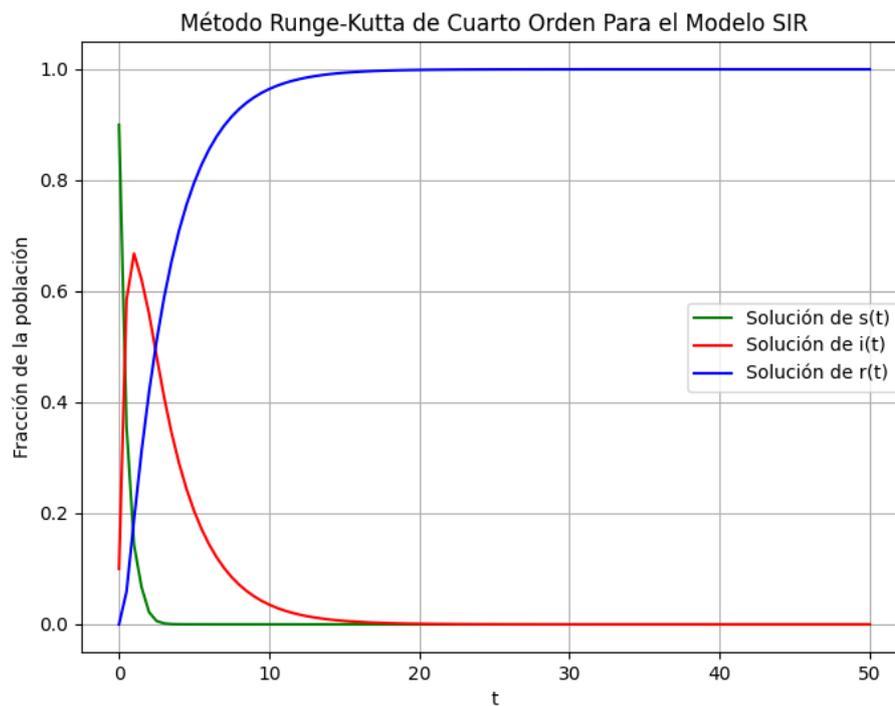
En la Figura 11, se observa que para la simulación del modelo *SIR* con el método de Euler muestra un comportamiento más oscilatorio en las fases iniciales, lo cual sugiere inestabilidades numéricas. En esta gráfica, el número de individuos infectados  $i$  exhibe múltiples picos antes de estabilizarse, este comportamiento oscilatorio inicial en  $s(t)$  e  $i(t)$  puede ser el resultado de la discretización numérica del Método de Euler, reflejando la sensibilidad del modelo a variaciones de la tasa de reproducción básica  $R_0$ .

En este gráfico, se observa una oscilación inusual en las curvas, especialmente en las de susceptibles  $s(t)$  e infectados  $i(t)$ . Esto sugiere la presencia de un paso de tiempo demasiado grande o una posible inestabilidad numérica en la implementación del método. La curva de infectados fluctúa de manera errática antes de estabilizarse, mientras que la de susceptibles también presenta oscilaciones iniciales que no se ven en una simulación

estable del modelo *SIR*. La curva de recuperados  $r(t)$ , aunque también presenta algunas irregularidades al inicio, eventualmente se estabiliza y se aproxima a 1, indicando que casi toda la población ha sido retirada del grupo susceptible.

### Figura 12

*Modelo SIR para el Sarampión con el Método de RK4*



En la Figura 12, se observa que para la simulación del modelo *SIR* con el Método de RK4 no muestra un comportamiento oscilatorio en las fases iniciales, lo cual hay estabilidad numérica desde el comienzo de cada compartimento.

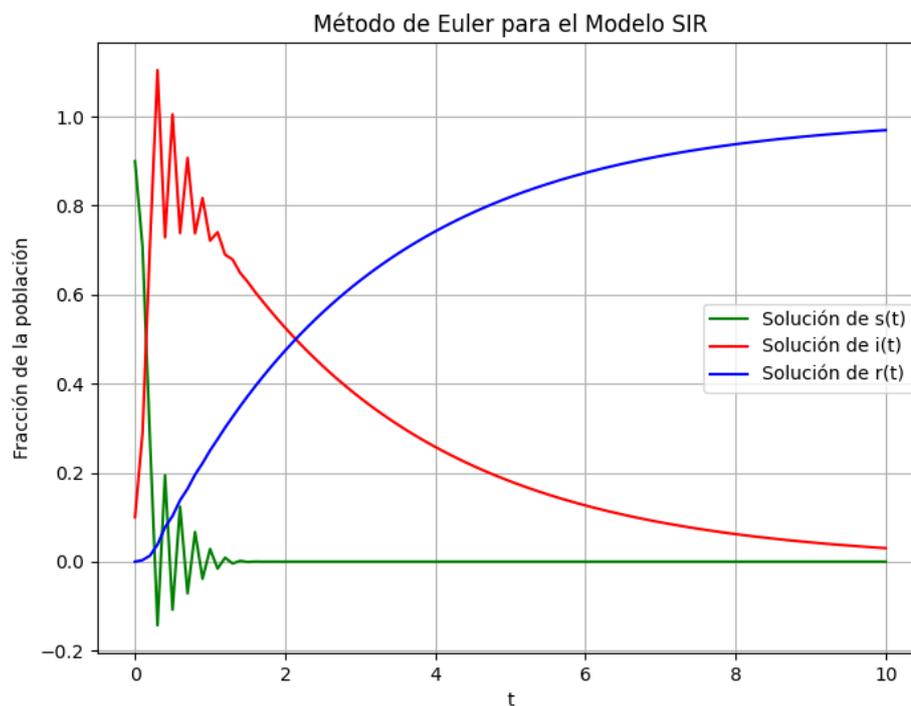
En el gráfico también se observa que, la curva de susceptibles  $s(t)$  disminuye rápidamente conforme la infección se propaga, mientras que la curva de infectados  $i(t)$  crece rápidamente, alcanzando un pico antes de descender a medida que los individuos se recuperan. Finalmente, la curva de recuperados  $r(t)$  aumenta progresivamente hasta

estabilizarse cerca de 1, indicando que la mayor parte de la población ha sido removida de la categoría de susceptibles.

Para el tercer caso se utilizó los datos de la Lengua Azul con  $R_0 = 61$ , donde la tasa de contagio es  $\beta = 21,35$ , la tasa de recuperación es  $\gamma = 0,35$ , para el número de pasos o subintervalos  $N = 100$ , número inicial de susceptibles  $s(0) = 0,9$ , número inicial de infectados  $i(0) = 0,1$ , número inicial de recuperados  $r(0) = 0$ , tiempo inicial de  $t_0 = 0$ , tiempo final de  $t_f = 10$  y el tamaño de paso  $h = 0,1$ . Se obtuvo la siguiente simulación:

### Figura 13

*Modelo SIR para el tercer caso con el Método de Euler*



En la Figura 13, la simulación del modelo SIR con una tasa de reproducción básica  $R_0 = 61$  y utilizando el Método de Euler con un paso de tiempo  $h = 0,1$ , se observan

oscilaciones significativas en las curvas de susceptibles  $s(t)$  e infectados  $i(t)$  en las fases iniciales. Estas oscilaciones, que aparecen como picos repetitivos en ambas curvas, son indicativas de inestabilidades numéricas causadas por la discretización del método y con el tiempo, las oscilaciones se amortiguan y las curvas comienzan a estabilizarse.

En este gráfico también se observa una notable inestabilidad numérica, la curva de susceptibles  $s(t)$  presenta oscilaciones erráticas al inicio, lo que sugiere un paso de tiempo demasiado grande para el método. La curva de infectados  $i(t)$  también exhibe oscilaciones antes de estabilizarse y decrecer, mientras que la curva de recuperados  $r(t)$  se incrementa progresivamente, aunque con menos irregularidades, hasta estabilizarse. Estas oscilaciones iniciales indican posibles problemas en la precisión del método de Euler cuando se utilizan pasos de tiempo grandes en la simulación del modelo  $SIR$ .

### Figura 14

*Modelo SIR para el tercer caso con el Método de RK4*



En la Figura 14, la simulación del modelo SIR con una tasa de reproducción básica  $R_0 = 61$  y utilizando el Método de RK4 con un paso de tiempo  $h = 0,1$ , no se observan oscilaciones significativas, lo que quiere decir que indica estabilidad numérica desde el comienzo de cada compartimento.

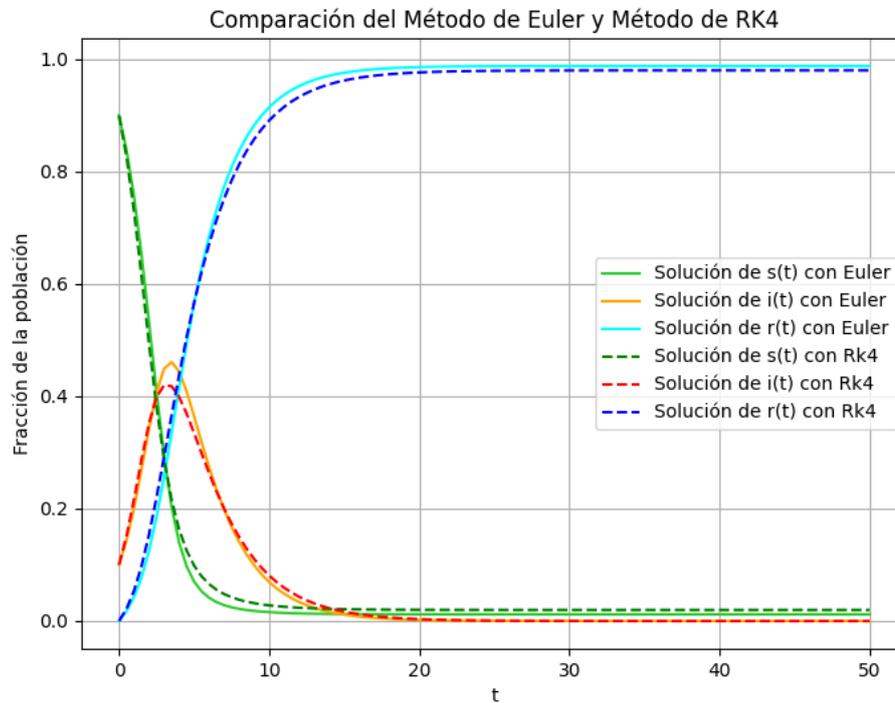
En este gráfico también se observa que las curvas muestran una evolución suave y estable. La curva de susceptibles  $s(t)$  disminuye rápidamente al inicio, lo que refleja la rápida propagación de la infección en la población. La curva de infectados  $i(t)$  aumenta rápidamente, alcanzando un pico antes de comenzar a descender a medida que la población infectada se recupera. Finalmente, la curva de recuperados  $r(t)$  crece de forma constante, alcanzando una meseta conforme la mayoría de la población se recupera.

Seguidamente se realiza un análisis comparativo entre los resultados obtenidos mediante el método de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden, considerando la precisión y eficiencia de ambos métodos para diferentes de tasas de contagio, se tiene por resultado las siguientes figuras.

Para el primer caso se utilizó los datos del Covid-19 con un  $R_0 = 3,9$ , donde la tasa de contagio es  $\beta = 1.365$ , la tasa de recuperación es  $\gamma = 0,35$ , para el número de pasos o subintervalos  $N = 100$ , número inicial de susceptibles  $s(0) = 0,9$ , número inicial de infectados  $i(0) = 0,1$ , número inicial de recuperados  $r(0) = 0$ , tiempo inicial de  $t_0 = 0$ , tiempo final de  $t_f = 50$  y el tamaño de paso  $h = 0,5$ . Se obtuvo la siguiente simulación:

**Figura 15**

*Modelo SIR para el Covid-19 con los Métodos de Euler y RK4*



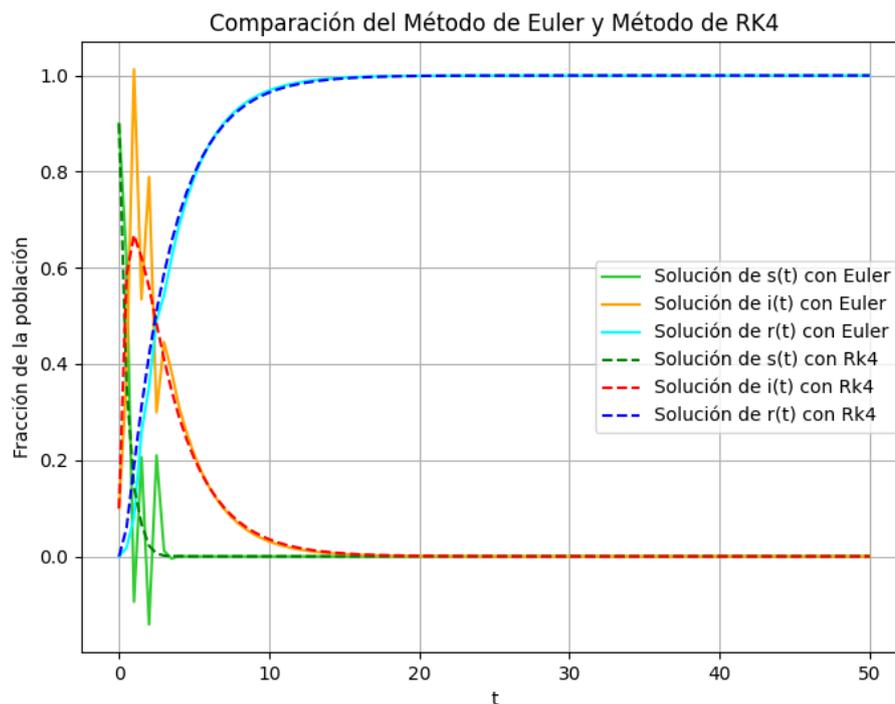
En la Figura 15, la simulación compara los métodos numéricos de Euler y RK4 para modelar la evolución de una epidemia con los parámetros del Covid-19. Se observa que las soluciones con RK4, representadas por líneas discontinuas, son más estables y suaves en comparación con las de Euler, que tienden a mostrar oscilaciones y una menor precisión, especialmente en las curvas de susceptibles  $s(t)$  e infectados  $i(t)$ . Esto indica que RK4 maneja mejor los cambios bruscos y garantiza estabilidad en la evolución temporal, mientras que Euler es más propenso a errores de acumulación con pasos mayores.

Para el segundo caso se utilizó los datos del Sarampión con  $R_0 = 18$ , donde la tasa de contagio es  $\beta = 6,3$ , la tasa de recuperación es  $\gamma = 0,35$ , para el número de pasos o subintervalos  $N = 100$ , número inicial de susceptibles  $s(0) = 0,9$ , número inicial de

infectados  $i(0) = 0,1$ , número inicial de recuperados  $r(0) = 0$ , tiempo inicial de  $t_0 = 0$ , tiempo final de  $t_f = 50$  y el tamaño de paso  $h = 0,5$ ; donde se obtuvo la siguiente simulación:

**Figura 16**

*Modelo SIR para el Sarampión con los Métodos de Euler y RK4*



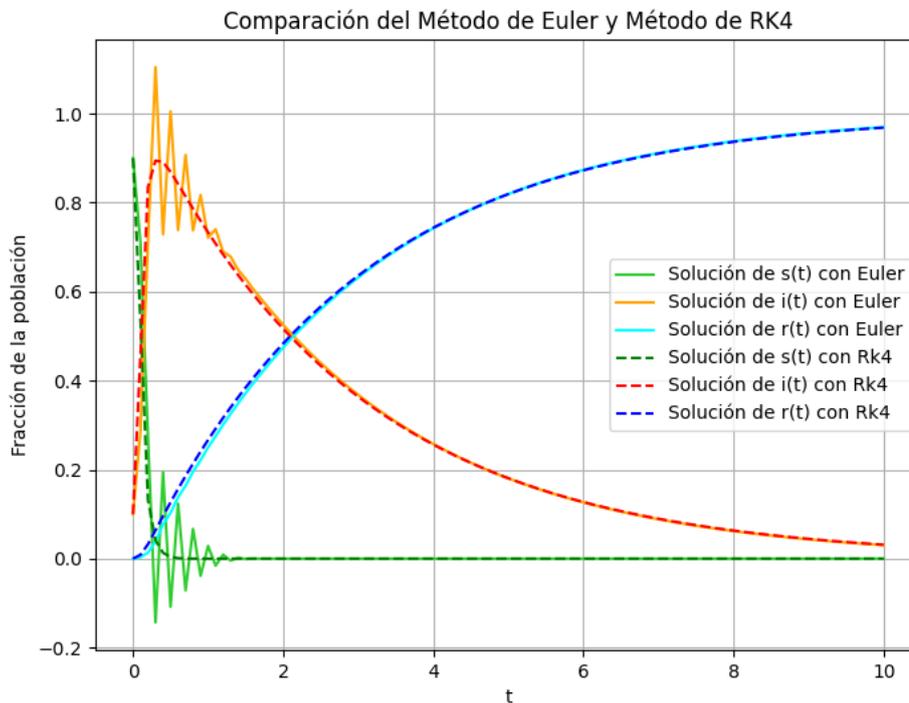
En la Figura 16, la simulación muestra las soluciones obtenidas con los métodos de Euler y RK4 para modelar el comportamiento del sarampión. Dado que el sarampión tiene un valor de  $R_0 = 18$ , se observa un crecimiento mucho más rápido de los infectados  $i(t)$  en comparación con el caso del Covid-19. Las soluciones con el método de Euler muestran oscilaciones significativas e inestabilidad, sobre todo en las curvas de  $s(t)$  e  $i(t)$ , lo que sugiere la presencia de rigidez en el sistema. En contraste, las soluciones con RK4 son mucho más estables, ofreciendo trayectorias suaves y precisas. Esto resalta que,

para sistemas rígidos con cambios bruscos, el método RK4 es más adecuado que el método de Euler, que es más susceptible a errores numéricos.

Para el tercer caso se utilizó los datos de la enfermedad de la Lengua Azul con  $R_0 = 62$ , donde la tasa de contagio es  $\beta = 21,35$ , la tasa de recuperación es  $\gamma = 0,35$ , para el número de pasos o subintervalos  $N = 100$ , número inicial de susceptibles  $s(0) = 0,9$ , número inicial de infectados  $i(0) = 0,1$ , número inicial de recuperados  $r(0) = 0$ , tiempo inicial de  $t_0 = 0$ , tiempo final de  $t_f = 10$  y el tamaño de paso  $h = 0,1$ . Se obtuvo la siguiente simulación:

**Figura 17**

*Modelo SIR para el tercer caso con los Métodos de Euler y RK4*



En la Figura 17, la simulación compara los métodos de Euler y RK4 para un modelo epidemiológico SIR, con la tasa de reproducción  $R_0 = 61$ , se observa que el

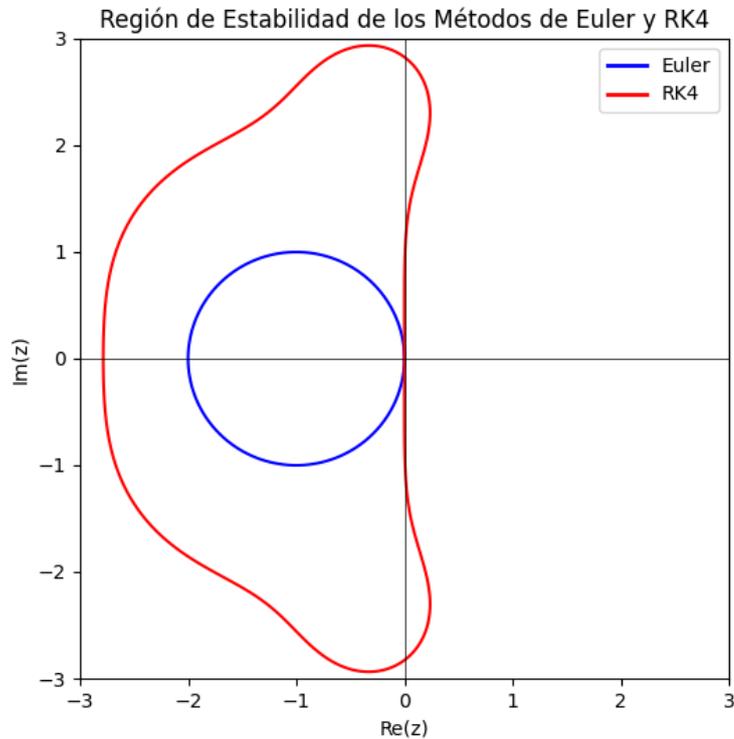


método de Euler presenta inestabilidad con oscilaciones alrededor de los valores esperados, lo que indica que este método no es adecuado para sistemas rígidos o con tasas de cambio rápidas como este. En contraste, el método RK4 muestra una mayor estabilidad y precisión, reflejada en las soluciones más suaves y sin oscilaciones, lo que lo hace más confiable para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales en un sistema rígido.

En la Figura 18, se muestran las regiones de estabilidad de los métodos numéricos de Euler y RK4, estas regiones de estabilidad son cruciales para estudiar la precisión y la convergencia de ambos métodos al resolver EDOs. El contorno azul representa la región de estabilidad del método de Euler, mientras que el contorno rojo ilustra la región de estabilidad del método de RK4. Estas regiones indican los valores en el plano complejo en los cuales la solución numérica se mantiene estable. El análisis de estas regiones de estabilidad permite y ayuda a seleccionar el método más adecuado para el modelo SIR con diferentes tasas de contagio, las regiones de estabilidad del método de Euler y del método de RK4 son fundamentales para determinar cuál de los dos métodos nos proporciona soluciones estables.

**Figura 18**

*Región de estabilidad de los Método de Euler y RK4*



## 4.2. DISCUSIÓN

La presente investigación muestra diferencias claras entre los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden en la resolución del modelo SIR. Según (Ashgi et al., 2021) concluye que el costo computacional del método de Euler es menor en comparación al método de Runge-Kutta de cuarto orden, considera  $R_0 = 3,172009605538933e - 08$  y para un tamaño de tiempo  $h = 0,1$ . Sin embargo, el proceso de ejecución de la resolución del modelo tiene como resultado que el uso del Método de Euler es más rápido al momento de la ejecución a comparación del método de Runge-Kutta de cuarto orden que es más complejo en el contexto de tiempo de ejecución. Sin embargo, los resultados de esta investigación se mostraron que el método de Euler para la tasa de reproducción básica



$R_0 < 1$  es estable con un tamaño de paso  $h = 0,5$ , si la tasa de reproducción básica  $R_0 > 1$  y un tamaño de paso  $h = 0,1$  el método de Euler mostrará inestabilidad lo que afecta en la precisión de los resultados y limita su uso en casos complejos.

En contraste, el método de Runge-Kutta de cuarto orden sobresale por su estabilidad y precisión, incluso con grandes variaciones en los parámetros, esto lo vuelve en una mejor opción para el modelado numérico del modelo SIR, garantizando resultados más confiables y preciso, especialmente en situaciones donde las tasas de contagio son elevadas.

## V. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos permiten concluir que la implementación del método de Euler para la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales del modelo SIR es efectivo, pero bajo ciertas condiciones, presenta limitaciones relevantes para un tamaño de paso de tiempo grande con  $h = 0,5$ , donde el método muestra inestabilidad lo que afecta la precisión en los resultados, además cuando la tasa básica de reproducción  $R_0$  es alta el método también se vuelve inestable. Esto indica que el método de Euler necesita ajustes en el tamaño de paso y un análisis cuidadoso de los parámetros del sistema para obtener soluciones numéricamente precisas en el modelo SIR para diferentes tasas de contagio.

Los resultados obtenidos permiten concluir que la implementación del método de Runge-Kutta de cuarto orden para la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales del modelo SIR es altamente eficiente y preciso para diferentes tasas de contagio, este método brinda soluciones más estables y confiables en comparación con métodos más simples como el método de Euler, particularmente cuando se trabaja con variaciones en los parámetros del sistema, el método de Runge-Kutta de cuarto orden mejora significativamente la estabilidad y precisión donde el tamaño de paso de tiempo  $h$  es grande o cuando la tasa básica de reproducción  $R_0$  es elevado, lo que resalta su ventaja encima del método de Euler que tiende a volverse inestable bajo estas condiciones.

Los resultados obtenidos permiten concluir que al momento de realizar un análisis comparativo entre los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden para la resolución numérica del modelo SIR, el método de Runge-Kutta demuestra ser claramente mejor o



superior en términos de precisión y estabilidad, especialmente para tasas de contagio altas y tamaños de paso grandes, mientras que el método de Euler es efectivo pero bajo condiciones específicas, su inestabilidad para el tamaño de paso  $h = 0,5$  y valores altos de la tasa básica de reproducción  $R_0$  limita su aplicación para cualquier situación. En cambio, el método de Runge-Kutta de cuarto orden mantiene estabilidad, mostrando mayor eficiencia y precisión al momento de elegir las variaciones en las diferentes tasas de contagio, lo que convierte en la mejor opción para la modelización numérica del modelo SIR para diferentes tasas de contagio.



## VI. RECOMENDACIONES

Se recomienda realizar distintos análisis comparativos entre métodos numéricos a fin de garantizar una mejor elección según el problema específico, la validación y la actualización constante de los métodos utilizados con datos reales o simulaciones también es relevante para mantener la precisión y la aplicación en contextos reales. Estas medidas ayudarán a optimizar el modelado numérico y asegurar resultados fiables en la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales.

También se recomienda realizar estudios que analicen el efecto de los cambios en los parámetros del modelo SIR, como oscilaciones estacionales en la tasa de contagio o alteraciones en la tasa de recuperación. Implementar estrategias de optimización de los métodos numéricos para adaptarse a estos cambios tendría un punto a favor, ya que podría ofrecer nuevas perspectivas y soluciones más concretas para la modelización de sistemas no lineales en el ámbito epidemiológico.



## VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anderson, R. M., & May, R. M. (1982). Directly transmitted infections diseases: control by vaccination. *Science*, 215(4536), 1053-1060.  
doi:<https://doi.org/10.1126/science.7063839>
- Arévalo Ovalle, D., Bernal Yermanos, M. Á., & Posada Restrepo, J. A. (2021). *Métodos numéricos con Python*. Editorial Politécnico Grancolombiano.
- Ashgi, R., Pratama, M. A., & Purwani, S. (2021). Comparison of numerical simulation of epidemiological model between Euler method with 4th order Runge Kutta method. *International Journal of Global Operations Research*, 2(1), 37-44.  
doi:<https://doi.org/10.47194/ijgor.v2i1.67>
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introducción al análisis matemático de una variable*. Editorial Limusa Wiley.
- Boyce, W. E., Diprima, R. C., & Meade, D. B. (2021). *Elementary differential equations and boundary value problems*. Editorial John Wiley & Sons.
- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2010). *Mathematical models in population biology and epidemiology*. Editorial Springer.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Análisis Numérico*. Editorial Cengage Learning.
- Butcher, J. C. (2016). *Numerical methods for ordinary differential equations*. Editorial John Wiley & Sons.
- Challenger, I., Díaz, Y., & Becerra, R. (2014). El lenguaje de programación Python. *Ciencias Holguín*, 20(2), 1-13.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2011). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Editorial McGraw-Hill.
- Figueiredo Vilhena, A. (2014). *Modelagem Matemática de um Sistema Presa Predador* [Tesis de licenciatura, Universidade Federal do Amapá]. Repositorio Institucional. <https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/01/tcc-ang%C3%A9lica-original.pdf>



- Figueiredo, D. G., & Neves, A. F. (2018). *Equações Diferenciais Aplicadas*. Editorial IMPA.
- Hartemink, N. A., Purse, B. V., Meiswinkel, R., Brown, H. E., de Koeijer, A., Elbers, A. R. W., Boender, G.-J., Rogers, D. J., & Heesterbeek, J. A. P. (2009). Mapping the basic reproduction number ( $R_0$ ) for vector-borne diseases: A case study on bluetongue virus. *Epidemics*, *1*(3), 153-161. doi: <https://doi.org/10.1016/j.epidem.2009.05.004>
- Hé Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw-Hill Interamericana.
- Hossain, T., Miah, M., & Hossain, B. (2017). Numerical study of kermack-mckendrick SIR model to predict the outbreak of ebola virus diseases using euler and fourth order runge-kutta methods. *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences*, *37*(1), 1-21.
- Ilha da Silva, M., Chaves Marques, J., Otazu Conza, A., De Cezaro, A., & Ferreira Nicola Gomes, A. C. (2023). The Stiffness Phenomena for the Epidemiological SIR Model: a Numerical Approach. *Latin-American Journal of Computing*, *10*(2), 32-445. doi: <https://doi.org/10.5281/zenodo.8067335>
- Iriarte B., R., Borrás G., H. E., & Durán C., R. (1990). *Métodos numéricos*. Editorial Facultad de Ingeniería UNAM.
- Kermack, W., & McKendrick, A. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, *115*(772), 700-721. doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
- Li, Q., Guan, X., Wu, P., Wang, X., Zhou, L., Tong, Y., Ren, R., Leung, K. S. M., Lau, E. H. Y., Wong, J. Y., Xing, X., Xiang, N., Wu, Y., Li, C., Chen, Q., Li, D., Liu, T., Zhao, J., Liu, M., Tu, W., ... Feng, Z. (2020). Early transmission dynamics in Wuhan, China, of novel coronavirus-infected pneumonia. *New England Journal of Medicine*, *382*(13), 1199-1207. doi: <https://doi.org/10.1056/NEJMoa2001316>



- Macias Ferrer, D., Melo Banda, J. A., & Lam Maldonado, M. (2011). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y sus Aplicaciones*. Editorial Centro de Investigación en Petroquímica.
- Michael, J. (2013). *Differential calculus and its applications*. Editorial Courier Corporation.
- Mitsotakis, D. (2023). *Computational mathematics: An introduction to numerical analysis and scientific computing with Python*. Editorial Chapman and Hall/CRC.
- Pino Romero, N., Soto-Becerra, P., & Quispe Mendizábal, R. A. (2020). Un Modelo Matemático SIR-D Segmentado para la Dinámica de Propagación del Coronavirus (COVID-19) en el Perú. *Selecciones Matemáticas*, 7(1), 162-171. doi:<https://doi.org/10.17268/sel.mat.2020.01.15>
- Pliego, E. (2011). *Modelos epidemiológicos de enfermedades virales infecciosas*. [Tesis de licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio institucional. <https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/EmileneCarmelitaPliegoPliego.pdf>
- Quilca, J. (2021). Construcción del modelo SEIR que describe la evolución de la pandemia COVID-19 en la región Tacna. *Gestionar: revista de empresa y gobierno*, 1(3), 52-67. doi:<https://doi.org/10.35622/j.rg.2021.03.004>
- Ridenhour, B., Kowalik, J. M., & Shay, D. K. (2018). El número reproductivo básico ( $R_0$ ): Consideraciones para su aplicación en la salud pública. *American Journal of Public Health*, 108(S6), S455-S465. doi:<https://doi.org/10.2105/AJPH.2018.304510>
- Rincón-Tobo, F., Ballesteros, J., & Castro, A. (2017). Tools for epidemiological modeling of animal diseases, study case: bovine brucellosis. *Revista Ciencia y Agricultura*, 14(2), 77-87.
- Stewart, J. (2015). *Cálculo: Trascendentes tempranas*. Editorial Cengage Learning.



- Tenenbaun, M., & Pollard, H. (1985). *Ordinary differential equations: an elementary textbook for students of mathematics, engineering, and the sciences*. Editorial Courier Corporation.
- Vásquez Velásquez, J. A. (2023). *Modelo Básico Epidemiológico SIR para determinar la evolución del COVID-19 en la región Lambayeque en el año 2020* [Tesis de maestría, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio institucional. <https://hdl.handle.net/20.500.12893/12350>
- Wangping, J., Ke, H., Yang, S., Wenzhe, C., Shengshu, W., Shanshan, Y., Jianwei, W., Fuyin, K., Penggang, T., Jing, L., Miao, L., & Yao, H. (2020). Extended SIR prediction of the epidemics trend of COVID-19 in Italy and compared with Hunan, China. *Frontiers in Medicine*, 7, 169.  
doi:<https://doi.org/10.3389/fmed.2020.00169>
- Zill, D. G. (2018). *Ecuaciones diferenciales: Con aplicaciones de modelado*. Editorial Cengage Learning.

## ANEXOS

### ANEXO 1: Implementación del Método de Euler en el Modelo SIR

```
# Importar librerías necesarias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import sympy as sp
from tabulate import tabulate

# Definición de la función del modelo SIR
def f(t, y):
    dS = - beta * y[0] * y[1]          # Compartimento de Susceptibles
    dI = beta * y[0] * y[1] - gamma * y[1] # Compartimento de Infectados
    dR = gamma * y[1]                 # Compartimento de Recuperados
    return np.array([dS, dI, dR])

# Parámetros y condiciones iniciales
N = 100                                # Número de intervalos de tiempo
t_0 = 0                                # Tiempo inicial
t_f = 10                                # Tiempo final
y_0 = np.array([0.9, 0.1, 0])         # Condiciones iniciales

beta = 21.35                            # Tasa de Contagio
gamma = 0.35                             # Tasa de Recuperación

# Cálculo del número reproductivo básico R_0
R_0 = beta / gamma

# Cálculo del paso de tiempo h
h = (t_f - t_0) / N

# Inicialización de listas para almacenar los resultados
t = [t_0]                                # Lista de tiempos
y = [y_0]                                # Lista de soluciones s(t), i(t), r(t)

# Implementación del método de Euler para la resolución numérica del Modelo SIR
for i in range(N):
    y_0 = y_0 + h * f(t_0, y_0)         # Actualización de las soluciones s(t),
    i(t), r(t)
    t_0 = t_0 + h                        # Actualización del tiempo
    y.append(y_0)                         # Almacenamiento de las soluciones
    t.append(t_0)                         # Almacenamiento del tiempo
```



```
# Crear un DataFrame para organizar los resultados
data = {'t': t, 'S(t)': [yi[0] for yi in y], 'I(t)': [yi[1] for yi in y],
        'R(t)': [yi[2] for yi in y]}
df = pd.DataFrame(data)

# Ordenar el DataFrame por el tiempo
df = df.sort_values(by='t')

# Presentación de la tabla con los resultados usando tabulate
table = tabulate(df, headers='keys', tablefmt='fancy_grid', showindex=False,
floatfmt("%.1f", ".8f", ".8f", ".8f"))
print(table)

# Imprimir el número reproductivo básico y el paso de tiempo
print("R_0:", R_0)
print("h:", h)

# Generar una gráfica para visualizar las soluciones del sistema SIR
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(df['t'], df['S(t)'], label='Solución de S(t)', markersize=5,
linestyle='-', color="g") # Compartimento de susceptibles
plt.plot(df['t'], df['I(t)'], label='Solución de I(t)', markersize=5,
linestyle='-', color="r") # Compartimento de infectados
plt.plot(df['t'], df['R(t)'], label='Solución de R(t)', markersize=5,
linestyle='-', color="b") # Compartimento de recuperados

# Etiquetas de los ejes
plt.xlabel('t') # Eje X: tiempo
plt.ylabel('Fracción de la población') # Eje Y: fracción de la población

# Leyenda, grid y título de la gráfica
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.title('Método de Euler para el Modelo SIR')

# Mostrar la gráfica
plt.show()
```



## ANEXO 2: Implementación del Método de RK4 en el Modelo SIR

```
# Importar librerías necesarias
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
from tabulate import tabulate

# Definición de la función del sistema SIR
def f(t, y):
    dS = - beta * y[0] * y[1]           # Compartimento de Susceptibles
    dI = beta * y[0] * y[1] - gamma * y[1] # Compartimento de Infectados
    dR = gamma * y[1]                   # Compartimento de Recuperados
    return np.array([dS, dI, dR])

# Parámetros iniciales
t_0 = 0           # Tiempo inicial
t_f = 10          # Tiempo final
N = 100           # Número de pasos

beta = 21.35      # Tasa de transmisión
gamma = 0.35      # Tasa de recuperación

# Cálculo del número reproductivo básico R_0
R_0 = beta / gamma

# Condiciones iniciales
y_0 = np.array([0.9, 0.1, 0])

# Paso de tiempo (h)
h = (t_f - t_0) / N

# Listas para almacenar los resultados
t = [t_0]         # Lista de tiempos
y = [y_0]         # Lista de soluciones S(t), I(t), R(t)

# Implementación del método de Runge-Kutta de Cuarto Orden al modelo SIR
for i in range(N):
    # Cálculo de las constantes k_1, k_2, k_3, k_4
    k_1 = h * f(t_0, y_0)
    k_2 = h * f(t_0 + h/2, y_0 + 1/2 * k_1)
    k_3 = h * f(t_0 + h/2, y_0 + 1/2 * k_2)
    k_4 = h * f(t_0 + h, y_0 + k_3)

    # Actualización de la solución utilizando la combinación de k_1, k_2, k_3
    # y k_4
```



```
y_0 = y_0 + 1/6 * (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4)

# Actualización del tiempo
t_0 = t_0 + h

# Almacenar los resultados
y.append(y_0)
t.append(t_0)

# Crear un DataFrame para organizar los resultados
data = {'t': t, 'S(t)': [yi[0] for yi in y], 'I(t)': [yi[1] for yi in y],
        'R(t)': [yi[2] for yi in y]}
df = pd.DataFrame(data)

# Ordenar el DataFrame por tiempo
df = df.sort_values(by='t')

# Presentar la tabla de resultados usando 'tabulate'
table = tabulate(df, headers='keys', tablefmt='fancy_grid', showindex=False,
floatfmt("%.1f", ".8f", ".8f", ".8f"))
print(table)

# Imprimir el paso de tiempo (h) y el número reproductivo básico (R_0)
print("h:", h)
print("R_0:", R_0)

# Generar una gráfica de las soluciones del Modelo SIR
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(df['t'], df['S(t)'], label='Solución de S(t)', markersize=5,
linestyle='-', color='g') # Compartimento de susceptibles
plt.plot(df['t'], df['I(t)'], label='Solución de I(t)', markersize=5,
linestyle='-', color='r') # Compartimento de infectados
plt.plot(df['t'], df['R(t)'], label='Solución de R(t)', markersize=5,
linestyle='-', color='b') # Compartimento de recuperados

# Etiquetas y detalles de la gráfica
plt.xlabel('t') # Eje X: tiempo
plt.ylabel('Fracción de la población') # Eje Y: fracción de la población
plt.legend() # Leyenda de las curvas
plt.grid(True) # Activar cuadrícula
plt.title('Método Runge-Kutta de Cuarto Orden Para el Modelo SIR') # Título
de la gráfica

# Mostrar la gráfica
plt.show()
```



### ANEXO 3: Declaración Jurada de Autenticidad de Tesis



Universidad Nacional  
del Altiplano Puno



Vicerrectorado  
de Investigación



Repositorio  
Institucional

#### DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo Alexander Jhois Arohuanca Medina  
identificado con DNI 70617928 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional,  Programa de Segunda Especialidad,  Programa de Maestría o Doctorado  
Ciencias Físico Matemáticas

informo que he elaborado el/la  Tesis o  Trabajo de Investigación denominada:  
"Análisis de la solución del modelo SIR para diferentes fases de contagio usando los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden"

Es un tema original.

Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y **no existe plagio/copia** de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como tuyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno 29 de octubre del 2024

FIRMA (obligatoria)



Huella



## ANEXO 4: Autorización para el depósito de tesis en el Repositorio Institucional



Universidad Nacional  
del Altiplano Puno



Vicerrectorado  
de Investigación



Repositorio  
Institucional

### AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo Alexander Jhois Arohuanca Medina,  
identificado con DNI 70617928 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional,  Programa de Segunda Especialidad,  Programa de Maestría o Doctorado

Ciencias Físico Matemáticas

informo que he elaborado el/la  Tesis o  Trabajo de Investigación denominada:

“Análisis de la solución del modelo SIR para diferentes tasas de contagio usando los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden”

para la obtención de  Grado,  Título Profesional o  Segunda Especialidad.

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los “Contenidos”) que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia:

Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno 29 de octubre del 2024

FIRMA (obligatoria)



Huella