UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

DESCRIPCIÓN EXPLÍCITA DE CAMPOS HOMOTÉTICOS MEDIANTE LA RELACIÓN ENTRE FUNCIONES HOLOMORFAS Y CAMPOS CONFORMES

TESIS

PRESENTADA POR:

Bach. BRENDA YAMILET ATAMARI HANCCO

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

PUNO - PERÚ

2024

Reporte de similitud

NOMBRE DEL TRABAJO

DESCRIPCIÓN EXPLÍCITA DE CAMPOS HOMOTÉTICOS MEDIANTE LA RELACIÓN ENTRE FUNCIONES HOLOMORFAS Y CAMPOS CONFORMES

AUTOR

BRENDA YAMILET ATAMARI HANCCO

RECUENTO DE PALABRAS

9089 Words

RECUENTO DE CARACTERES

40926 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

63 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

507.0KB

FECHA DE ENTREGA

Oct 31, 2024 12:23 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Oct 31, 2024 12:24 PM GMT-5

15% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 14% Base de datos de Internet
- 2% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de Crossref
- Base de datos de contenido publicado de Crossref
- 8% Base de datos de trabajos entregados

Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 12 palabras)

Rene Facco Quispe

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
Coordinador de investigación de la E.P.C.F.M.
COORDINADOR
PUNO

Adelaida Otazu Conza
LIC. CIENCIAS FISICO - MATEMÁTICAS
Dcc. MATEMÁTICA APLICADA

Resumen

DEDICATORIA

Quiero expresar mi gratitud a mis queridos padres, Timoteo y Doris, por ser mi constante fuente de inspiración y por su apoyo incondicional en cada paso de este camino.

A mi esposo Roger, por estar siempre a mi lado en cada etapa de mi carrera, y por su paciencia y amor inquebrantables como familia.

A mí asesor, por su sabia guía, exigencia y comprensión. Su apoyo ha sido fundamental en mi crecimiento para la culminación de este proyecto.

Y finalmente a mis amigos por su compañía y ánimo y por ser un recordatorio constante de que las dificultades se enfrentan mejor con una sonrisa.

AGRADECIMIENTOS

Al culminar esta tesis, no puedo evitar mirar atrás y recordar a todas las personas que han sido parte de este proceso.

Agradezco a Dios por darme vida y salud, permitiéndome llegar hasta aquí. Estoy profundamente agradecida con mis padres por su su confianza y apoyo incondicional a lo largo de cada paso en mi camino académico.

Un agradecimiento especial al M. Sc. René Tacca Quispe, mi asesor, por su guía, dedicación y valiosas orientaciones. Gracias por cada corrección y por confiar en mi capacidad para alcanzar este objetivo.

No puedo olvidar a mis amigos, quienes siempre estuvieron a mi lado, brindándome ánimo en los momentos más difíciles.

Finalmente, agradezco sinceramente a todas las personas que han contribuido, directa o indirectamente y han hecho posible la culminación de esta tesis. Su apoyo ha sido fundamental.

ÍNDICE GENERAL

Pág.

TEMA: Análisis complejo

ÁREA: Matemática

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Pura

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 12 de noviembre de 2024

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

$\mathbb{R}$	:	Conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	:	Conjunto de los números complejos
z	:	Número complejo
Re z	:	Parte real del número complejo z
Im z	:	Parte imaginaria del número complejo z
$\bar{z}$	:	Conjugado del número complejo z
$\lvert z\rvert$	:	Módulo del número complejo z
$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$	:	Conjunto de los campos de vectores suaves sobre el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.

RESUMEN

Las relaciones entre las funciones complejas holomorfas y los campos de vectores conformes están dadas por la identificación entre el espacio de las funciones complejas holomorfas definidas sobre un mismo subconjunto abierto y el espacio de campos conformes definidos sobre abiertos riemannianos en el espacio euclidiano provistas de una métrica riemanniana conforme con la métrica canónica. En esta investigación el objetivo es describir explícitamente los campos homotéticos definidos sobre el plano hiperbólico utilizando la relación entre las funciones holomorfas y campos conformes. La investigación sigue el enfoque cualitativo no experimental, y se usa el método descriptivo y analítico a fin de describir explícitamente los campos homotéticos. En el desarrollo de la investigación se obtiene como resultado principal la demostración de la relación entre las funciones holomorfas y campos conformes que permite la descripción explícita de los campos homotéticos.

Palabras clave: Funciones holomorfas, campos conformes, funciones en variable compleja, campos homotéticos.

ABSTRACT

The relations between holomorphic complex functions and conformal vector fields are given by the identification between the space of holomorphic complex functions defined on the same open subset and the space of conformal fields defined on Riemannian open sets in Euclidean space provided with a Riemannian metric conformal to the canonical metric. In this research the objective is to explicitly describe homothetic fields defined on the hyperbolic plane using the relation between holomorphic functions and conformal fields. The research follows the qualitative non-experimental approach, and the descriptive and analytical method is used in order to explicitly describe homothetic fields. In the development of the research, the main result is the demonstration of the relation between holomorphic functions and conformal fields that allows the explicit description of homothetic fields.

Keywords: Holomorphic functions, conformal fields, functions in complex variable, homothetic fields.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación establece la relación existente entre las funciones complejas holomorfas y los campos de vectores conformes que permite demostrar que un campo homotético se puede escribir explícitamente, esta investigación se desarrolla en el área del análisis complejo, por tanto, se enmarca dentro de la línea de investigación de matemática pura.

La homotecia se visualiza en las aplicaciones de la recta, el plano y el espacio, ya que se entienda como la transformación geométrica como un caso particular de homología, definida como una transformación lineal en el contexto vectorial y analítico. En la investigación se estudia la homotecia como una aplicación de campos de vectores homotéticos que resultan ser un caso particular de los campos de vectores conformes, puesto que pueden ser descritos como campos conformes con factor constante.

Al describir explícitamente el campo homotético, con un factor constante de un campo conforme, el campo homotético puede ser visto como una generalización del campo de Killing para el factor constante nulo, el campo de Killing define un grupo uniparamétrico de isometrías, los campos de Killing son muy importantes en la resolución de problemas físicos como en el contexto de la teoría de la relatividad general desarrollada por Einstein y las leyes de la conservación en la física como la ley de la conservación de la energía. Los campos de vectores homotéticos su importancia radica en la interpretación de flujos geométricos y el flujo de Ricci, que fue utilizado por Grigori Perelman en la demostración de la conjetura de Poincaré. Una consecuencia de la descripción de los campos homotéticos, es la descripción explícita de los campos conformes gradiente sobre el plano hiperbólico, que tienen gran importancia en la física y en la química.

El principal aporte de esta investigación es demostrar detalladamente la relación entre las funciones complejas holomorfas y campos de vectores conformes, dar una caracterización para campos conformes en el plano hiperbólico y con estos resultados describir explícitamente los campos homotéticos definidos sobre el plano hiperbólico y la relación entre métricas, simetrías e invariantes.

Para describir explícitamente los campos homotéticos, es necesario caracterizar los campos conformes como una consecuencia de la relación que existe entre los campos de vectores conformes y las funciones complejas holomorfas. Las caracterizaciones de los campos conformes se realizan en el espacio hiperbólico de dimensión dos.

Bajo esas premisas, el problema se reduce a:

¿De qué manera se puede relacionar las funciones holomorfas y campos conformes para describir explícitamente los campos homotéticos?

1.2. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación, se proporciona los antecedentes del trabajo de investigación en donde se muestran algunos resultados.

Yano y Obata (1970) en su artículo “Conformal changes of Riemannian metrics” proporciona un criterio de necesidad y suficiencia para que dos métricas sean conformes con la existencia de una función, estableciendo algunos teoremas sobre transformaciones conformes infinitesimales y cambios conformes de métricas y la generalización de resultados de variedades que admiten transformaciones conformes no homotéticas; concluyendo que los espacios riemannianos de curvatura escalar constante y dotado con un campo homotético no trivial, deben tener curvatura escalar nula.

Belgun et al. (2010) en su artículo "Essential points of conformal vector fields" contribuye en el estudio de puntos esenciales de campo vectorial conforme en una variedad conforme alrededor del cual el flujo local no conserva ninguna métrica en la clase conforme, muestra que los puntos esenciales están aislados, la cual es una generalización a dimensiones superiores del hecho de que los ceros de una función holomorfa están aislados. Como aplicación, muestra que cada componente conexa del conjunto cero de un campo vectorial conforme es totalmente umbilical.

Caminha (2011) en su artículo "The geometry of closed conformal vector fields on Riemann spaces" examina diferentes aspectos de la geometría de campos vectoriales conformes cerrados, en donde explica por qué es tan difícil encontrar ejemplos de espacios que tengan al menos dos campos vectoriales cerrados, homotéticos y conformes. El artículo está centrado en tres aspectos diferentes de los campos vectoriales conformes en espacios de Riemann, a saber, las obstrucciones a su existencia, su uso para generar inmersiones isométricas con curvatura media paralela y su papel en resultados de tipo Bernstein, estos resultados lo realiza estableciendo un conjunto razonable de condiciones suficientes para una hipersuperficie completa y orientada de segunda forma fundamental acotada para ser totalmente geodésica, este resultado generaliza el trabajo de (Benedetti et al., 2023) en su artículo "Codimension One Foliations of Space Forms".

Filho et al. (2023) en su artículo "Funciones complejas conformes y campos conformes" demuestra que las únicas métricas riemannianas en el plano euclidiano que admiten una relación entre las funciones conformes y los campos conformes son conformes a la métrica canónica, utilizando la relación entre funciones complejas holomorfas y campos de vectores conformes definidos en subconjuntos abiertos del plano euclidiano dotado de una métrica riemanniana conforme a la métrica canónica.

1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Es posible describir explícitamente los campos homotéticos mediante la relación entre funciones complejas holomorfas y campos conformes.

1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.4.1. Objetivo general

Describir explícitamente los campos homotéticos a través de la relación entre funciones complejas holomorfas y campos conformes.

1.4.2. Objetivos específicos

- Demostrar la relación que existe entre las funciones complejas holomorfas y campos conformes.
- Caracterizar los campos vectoriales conformes en el plano hiperbólico mediante la relación entre funciones holomorfas y campos conformes.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. MARCO TEÓRICO

2.1.1. Funciones complejas

Definición 2.1. Los números complejos z se definen como pares ordenados

$$z = (x, y)$$

de números reales x e y. (Churchill et al., 1986)

El número complejo (z) pertenece al conjunto de los números complejos $(\mathbb{C})$, a los números x e y pertenecientes al conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$ denominados respectivamente como la parte real y la parte imaginaria del número complejo z.

$$\text{Re } z = x, \quad \text{Im } z = y$$

A los pares de la forma $(x, 0)$ se identifican con los números reales, mientras que los complejos de la forma $(0, y)$ se les identifica con los números imaginarios puros. La igualdad de dos números complejos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se definen cuando tienen partes real e imaginaria iguales, es decir:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ si, y sólo si, } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2$$

Definición 2.2. La suma $z_1 + z_2$ y el producto $z_1 z_2$ de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$

y $z_2 = (x_2, y_2)$ se definen por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2)$$

(Churchill et al., 1986)

En particular, $(x, 0) + (0, y) = (x, y)$ y $(0, 1)(y, 0) = (0, y)$, luego

$$\begin{aligned}(x, y) =& (x, 0) + (0, y)\\ =& (x, 0) + (0, 1)(y, 0)\end{aligned}$$

restringiendo a números reales estas operaciones

$$\begin{aligned}(x_1, 0) + (x_2, 0) =& (x_1 + x_2, 0)\\ (x_1, 0)(x_2, 0) =& (x_1x_2, 0)\end{aligned}$$

es decir, el conjunto de los números complejos representa una extensión del conjunto de los números reales.

Sea un número real $(x, 0)$, se denota por i el número imaginario puro $(0, 1)$, se escribe

$$(x, y) = x + iy$$

y como $z^2 = zz$

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$$

es decir, $i^2 = -1$.

La operaciones en números complejos, se escriben así

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) =& (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\\ (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =& (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)\end{aligned}$$

Las propiedades de las operaciones en números complejos son

a. Conmutativa

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1z_2 = z_2z_1$$

b. Asociativa

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$$

c. Distributiva

$$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$$

d. Identidad, aditiva 0 y multiplicativa 1

$$z + 0 = z, \quad z1 = z$$

e. Inverso

Para todo número complejo $z = (x, y)$, el inverso aditivo es $-z = (-x, -y)$, que satisface

$$z + (-z) = 0$$

y, el número complejo no nulo $z = (x, y)$, tiene un único inverso multiplicativo z^{-1} tal que

$$zz^{-1} = 1$$

El inverso aditivo se usa para definir la resta

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

y la división de un complejo z_1 por un número complejo no nulo z_2 se define como

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}, \quad z_2 \neq 0$$

Si se multiplica el número complejo $z = x + iy$ por el número

$$\bar{z} = x - iy$$

donde $\bar{z}$ es llamado el conjugado del número complejo z, se obtiene

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

Por lo tanto, el inverso multiplicativo de $x + iy$ es el número

$$\frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

y la división de números complejos de $z_1 = x_1 + iy_1$ por $z_2 = x_2 + iy_2$ se obtiene

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i$$

Se cumplen las siguientes propiedades con respecto a conjugado de z

a. $\bar{\bar{z}} = z$

b. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

c. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

d. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$

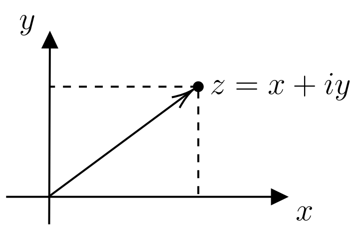
e. $\text{Re } z = \frac{z + \bar{z}}{2}$

f. $\text{Im } z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

El número complejo z se interpreta como el segmento dirigido, o el vector, que tiene como punto inicial el origen de coordenadas hasta el punto (x, y). El origen de coordenadas se denota por el número complejo 0, que es 0=(0,0). El modelo del plano cartesiano de los números complejos se denomina plano complejo, el eje horizontal x se llama eje real, y el eje vertical y se llama eje imaginario.

Figura 1

Plano complejo



La longitud del vector z se determina mediante el teorema de Pitágoras

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

a esta longitud se le llama módulo o valor absoluto del número complejo z, y se denota por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Note que $|z| \geq \text{Re } z$, $|z| \geq \text{Im } z$ y $|\bar{z}| = |z|$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, además $z\bar{z} = x^2 + y^2$, por lo tanto, $z\bar{z} = |z|^2$.

La distancia entre dos puntos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ está dada por

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Los puntos del círculo de centro z_0 y radio R en el plano complejo cumplen la ecuación

$$|z - z_0| = R$$

La desigualdad del triángulo

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

La desigualdad del triángulo se generaliza para n números complejos

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

Además, se cumple

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

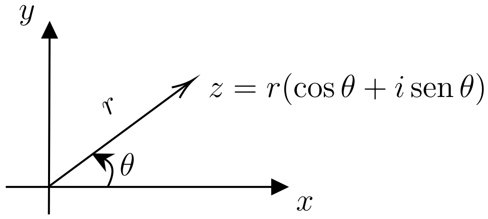
La expresión polar de un número complejo distinto de cero es

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

donde $r > 0$ es el módulo del vector correspondiente a z, es decir, $|z| = r$.

Figura 2

Forma polar



En ángulo de inclinación del vector z, determinado por

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

se llama argumento de z.

Definición 2.3. La ecuación

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

que define el símbolo $e^{i\theta}$ o $\exp(i\theta)$ para todo valor de θ, se conoce como fórmula de Euler. (Churchill et al., 1986)

Escribiendo el número complejo no nulo en forma polar

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

La fórmula de Euler establece que un número complejo z se puede escribir en forma exponencial

$$\begin{aligned} z =& r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ z =& re^{i\theta} \end{aligned}$$

Las propiedades que cumplen son las siguientes

a. $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

b. Se dice que dos números complejos no nulos $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ son iguales si, y solamente si, $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2$.

La expresión para las potencias enteras de $z = re^{i\theta}$ se calculan mediante

$$z^n = r^n e^{in\theta}, \quad (n = 0, \pm 1, ...)$$

y para $m = -n$

$$z^n = \left[\frac{1}{r}e^{i(-\theta)}\right]^m = \left(\frac{1}{r}\right)^m e^{im(-\theta)} = r^n e^{in\theta}, \quad (n = -1, -2, \ldots)$$

Si $r = 1$, entonces

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad (n = 0, \pm 1, ...)$$

cuando se expresa en forma

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$$

es conocida como fórmula De Moivre.

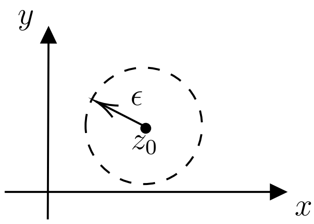
Definición 2.4. Dado $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Una ϵ-vecindad de $z_0 \in \mathbb{C}$ es el conjunto de todos los puntos $z \in \mathbb{C}$, cuya distancia a z_0 es menor que ϵ, es decir, todos los puntos de z que satisfacen

$$|z - z_0| < \epsilon$$

(Derrick et al., 1987)

Figura 3

ϵ-vecindad de z_0



Definición 2.5. Sea $S \subset \mathbb{C}$ un conjunto de puntos del plano complejo. Se dice que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto interior de S si alguna ϵ-vecindad de z_0 está completamente contenida en S. (Derrick et al., 1987)

El conjunto de puntos interiores de S se denota como Int S y se conoce como el interior de S. El conjunto de puntos que no pertenecen a S se conoce como el exterior de S o complemento de S. Un punto z_0 es frontera de S si todos sus entornos contienen puntos dentro y fuera de S.

Definición 2.6. Un punto z_0 es llamado punto de acumulación de un conjunto S, si cada vecindad de z_0 contiene al menos un punto de S distinto de z_0. (Derrick et al., 1987)

Se define como punto aislado de S a cualquier punto z_0 perteneciente a S que no es punto de acumulación.

Definición 2.7. Un conjunto es abierto si todos sus puntos son interiores, es decir, $S = \text{Int } S$ cuando S es abierto. (Derrick et al., 1987)

Se considera cerrado al complemento de cualquier conjunto abierto.

Definición 2.8. Se dice que un conjunto S es acotado en caso de que exista un número real positivo $r \in \mathbb{R}^+$ tal que todo $z \in S$ satisfaga $|z| < r$. (Derrick et al., 1987)

En caso de que esta condición no se cumpla, S es llamado conjunto no acotado.

Definición 2.9. Un conjunto S es conexo si no puede representarse como la unión de dos conjuntos A y B ajenos y no vacíos tales que ninguno de ellos contenga un punto frontera del otro. (Derrick et al., 1987)

Geométricamente, un conjunto es conexo si está integrado por una sola pieza.

Definición 2.10. Sea D un conjunto de números complejos y sea f una ley que hace corresponder, a cada elemento z del conjunto D, un único número complejo, que se denota por $f(z)$. En estas condiciones, se dice que f es una función con dominio D. (Ávila, 2008)

El conjunto I de los valores $w = f(z)$, correspondientes a todos los valores de z en D, es llamado la imagen de D por la función f; z es llamada variable independiente y w, la variable dependiente.

Es usual considerar funciones dadas en términos de relaciones bien definidas $w = f(z)$, sin especificar el dominio de definición, en estos casos, queda sobreentendido que el dominio de la función es el conjunto de todos los valores z para los cuales tiene sentido la expresión $f(z)$, por ejemplo, sea la función

$$w = \frac{3z - 5i}{(i-1)(z+7)}$$

se está usando la relación para especificar la ley que hace corresponder un valor w a cada valor z, además, queda sobreentendido que el dominio de esta función es el plano complejo exceptuando los puntos $z = i$ y $z = -7$, puesto que en estos puntos el denominador se anula.

Al expresar $w = f(z)$ en términos de las partes real e imaginaria de z y w, es decir, $z = x + iy$ y $w = u + iv$.

$$w = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

La función compleja de una variable compleja puede expresarse como dos funciones reales de dos variables reales.

Definición 2.11. Sea n un entero no negativo, y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes complejas donde $a_n \neq 0$, la función

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

es un polinomio de grado n. (Churchill et al., 1986)

En análisis complejo, se distingue entre funciones racionales, $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ con $Q(z) \neq 0$, y funciones multivaluadas, que asignan múltiples valores a cada punto z. A partir de una función multivaluada, se puede construir una función univaluada eligiendo un valor único para cada punto.

La función $f(z) = w$ no dispone de una gráfica, sin embargo se puede representar información de la función mediante pares de puntos asociados $z = (x, y)$ y $w = (u, v)$, para visualizar esta relación, se representan los planos z y w de manera independiente, considerándose la función como una aplicación o transformación.

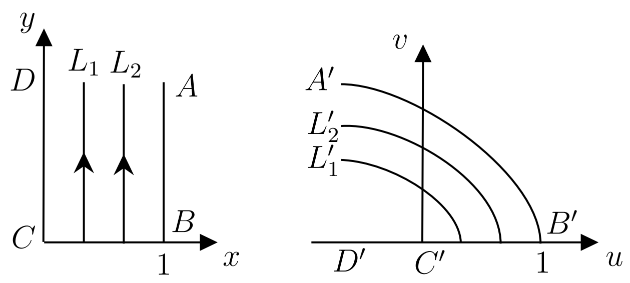
$$\begin{aligned} f:\ D \subset \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = w \end{aligned}$$

donde $z = x + iy$ y $w = u + iv$.

La imagen de T está formada por las imágenes de cada punto en T bajo la función f. La imagen del dominio completo de f se llama recorrido de f. La preimagen de w está formada por todos los puntos z en el dominio de f tales que $f(z) = w$. En la figura se muestra los planos z y w separadamente de la aplicación $w = z^2$.

Figura 4

La aplicación $w = z^2$



El límite de una función de variable compleja z es una generalización de límite de funciones reales. Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f : D \to \mathbb{C}$ una función de z.

Definición 2.12. Dado un número $z_0 \in D$, D abierto en $\mathbb{C}$, se dice que el número $w_0 \in \mathbb{C}$ es el límite de f cuando $z \in D$ tiende a z_0 si, dado cualquier número $\epsilon > 0$, es posible encontrar un número $\delta > 0$ tal que, si $z \in D$ satisface $0 < |z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - w_0| < \epsilon$. Si ese fuera el caso, se escribe

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

(Soares, 2012)

La definición de límite indica que $|f(z) - w_0| < \epsilon$ es tan pequeño como se quiera, desde que z esté suficientemente cerca de z_0. Un ejemplo de límite en variable compleja es

$$\lim_{z\to 1}\frac{iz}{2}=\frac{i}{2}$$

En efecto, dado $\epsilon > 0$, debe existir $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |z-1| &< \delta \\ \frac{1}{2}|z-1| &< \frac{1}{2}\delta \end{aligned}$$

tomando $\delta = 2\epsilon$, entonces

$$|f(z)-w_0| = \left|\frac{iz}{2}-\frac{i}{2}\right| = \frac{|i|}{2}|z-1| = \frac{1}{2}|z-1| < \epsilon$$

Teorema 2.1. Si $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ y $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$ entonces $w_0 = w_1$.

Demostración. De la definición de límite para w_0 y w_1, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |z-z_0| < \delta$ entonces $|f(z)-w_0| < \epsilon$ y $|f(z)-w_1| < \epsilon$, luego

$$|w_0-w_1| \leq |f(z)-w_0-f(z)+w_1| \leq |f(z)-w_0| + |f(z)-w_1| < \epsilon+\epsilon = 2\epsilon$$

Como ϵ es arbitrario, se concluye que $w_0 = w_1$. $\square$

Escribiendo

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

donde u y v son funciones de variables reales entonces, si existe $\lim_{z\to z_0} = w_0$ y $w_0 = u_0 + iv_0$, se tienen que los límites existen

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

y esos límites son iguales a

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

En efecto,

$$|z - z_0| = |(x,y) - (x_0,y_0)| = |(x - x_0),(y - y_0)|$$

y

$$|f(z) - w_0| = |(u(x,y),v(x,y)) - (u_0,v_0)| = |(u(x,u) - u_0),v(x,y) - v_0)|$$

Ahora,

$$\begin{aligned} |u(x,y) - u_0| &\leq |f(z) - w_0| \\ |v(x,y) - v_0| &\leq |f(z) - w_0| \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|(x - x_0, y - y_0)| < \delta \text{ implica } |f(z) - w_0| < \epsilon \text{ entonces } \begin{cases} |u(x,y) - u_0| < \epsilon \\ |v(x,y) - v_0| < \epsilon \end{cases}$$

Las propiedades de los límites en funciones de variable compleja son similares a las propiedades de los límites en funciones reales de variable real.

Proposición 2.1. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f_1 : D \to \mathbb{C}$, $f_2 : D \to \mathbb{C}$ dos funciones complejas. Fijando un punto $z_0 \in D$. Si $\lim_{z\to z_0} f_1(z) = w_1$ y $\lim_{z\to z_0} f_2(z) = w_2$ entonces

a. $\lim_{z\to z_0} cf_1(z) = cw_1$ donde c es cualquier número complejo.

b. $\lim_{z\to z_0}(f_1(z) + f_2(z)) = w_1 + w_2$

c. $\lim_{z\to z_0} f_1(z)f_2(z) = w_1w_2$

d. Si $w_1 \neq 0$ entonces $\lim_{z\to z_0} \dfrac{1}{f_1(z)} = \dfrac{1}{w_1}$

Como en el caso de funciones reales, la continuidad de una función está dada por el límite.

Definición 2.13. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : D \to \mathbb{C}$ una función compleja. Se dice que f es continua en el punto $z_0 \in D$ si

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Si f satisface esta propiedad en todos los puntos de D, se dice que f es continua en D. (Soares, 2012)

Si $f : D \to \mathbb{C}$ y $g : E \to \mathbb{C}$ son funciones definidas en los abiertos D y E, respectivamente, y tales que que la imagen $f(D)$ está contenida en E, tiene sentido la siguiente expresión $g(f(z))$ para $z \in D$. La compuesta de f y g, es la función

$$\begin{aligned} g\circ f: \ D\subset\mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto g(f(z)) \end{aligned}$$

Proposición 2.2. Sean D y E abiertos y $f_1 : D \to \mathbb{C}$, $f_2 : E \to \mathbb{C}$ y ambas continuas en $z_0 \in D$ y que g es continua en $f_1(z_0)$. Entonces

a. Las funciones $cf_1 : D \to \mathbb{C}$, $f_1 + f_2 : D \to \mathbb{C}$, $f_1f_2 : D \to \mathbb{C}$ son continuas en z_0, donde c es un número complejo cualesquiera.

b. Si $f_1(z_0) \neq 0$ entonces la función $\dfrac{1}{f_1} : D \to \mathbb{C}$ es continua en z_0.

c. La función $g \circ f_1 : D \to \mathbb{C}$ es continua en z_0.

Definición 2.14. Sean $D \subset \mathbb{C}$ un abierto, z_0 un punto de D y $f : D \to \mathbb{C}$ una función compleja. Si existiera el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ese límite es llamado la derivada de $f(z)$ en el punto z_0 y es denotado por $f'(z_0)$. (Soares, 2012)

La función f se dice diferenciable en z_0 cuando existe su derivada en z_0; y se dice que f es diferenciable si es diferenciable en z para todo $z \in D$. Y si $f'(z)$ es continua, se dice que la función f es suave.

Haciendo el siguiente cambio de variable

$$h = z - z_0, \quad z = z_0 + h$$

$$z \to z_0, \text{ entonces } h \to 0$$

equivalentemente, se puede escribir

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Proposición 2.3. Si f es diferenciable en z_0 entonces f es continua en z_0.

Demostración. Puesto que

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0)) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0) = f'(z_0)0 = 0$$

entonces, $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. □

Las propiedades de derivación para funciones complejas, son análogas a las funciones reales.

Proposición 2.4. Si f y g son diferenciables en z_0, entonces también lo son cf (c un número complejo cualesquiera), $f+g$, fg y $\dfrac{1}{f}$ (desde que $f(z_0)\neq 0$) y valen

a. $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$

b. $(f+g)'(z_0) = f'(z_0)+g'(z_0)$

c. $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$

d. $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(z_0) = -\dfrac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$

Para la composición de funciones complejas, se tiene la regla de la cadena

Proposición 2.5. Sean $f:D\to\mathbb{C}$ y $g:E\to\mathbb{C}$ con $f(D)\subset E$. Si f es diferenciable en z_0 y g es diferenciable en $f(z_0)$, entonces $g\circ f$ es diferenciable en z_0 y

$$(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

Las implicaciones de la existencia de $f'(z_0)$ al considerar la función $f:D\to\mathbb{C}$ como una aplicación $f:D\to\mathbb{R}^2$, dependiente de las variables reales x e y.

Escribiendo $f(z) = f(x,y) = u(x,y)+iv(x,y) = (u(x,y),v(x,y))$ y

$z_0 = x_0 + iy_0 = (x_0, y_0)$. El cociente

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

se escribe como

$$f'(x_0, y_0) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f((x_0,y_0)+(h_1,h_2)) - f(x_0,y_0)}{(h_1,h_2)}$$

Aproximando por el eje real, es decir,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}, \quad \text{donde } h = (h_1, 0) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(z_0+h) + iv(z_0+h) - u(z_0) - iv(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(z_0+h) - u(z_0)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(z_0+h) - v(z_0)}{h} \\ &= u_x(z_0) + iv_x(z_0) \\ &= f_x(z_0) \end{aligned}$$

Ahora, aproximando por el eje imaginario

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{ih\to 0} \frac{f(z_0+ih) - f(z_0)}{ih}, \\ &= \lim_{ih\to 0} \frac{u(z_0+ih) + iv(z_0+ih) - u(z_0) - iv(z_0)}{ih} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{ih\to 0} \frac{u(z_0+ih) - u(z_0)}{ih} + \lim_{ih\to 0} \frac{v(z_0+ih) - v(z_0)}{ih} \\ &= \frac{1}{i} u_y(z_0) + v_y(z_0) \\ &= -iu_y(z_0) + v_y(z_0) \\ &= -i(u_y(z_0) + iv_y(z_0)) \\ &= -if_y(z_0) \end{aligned}$$

igualando: $f_x(z_0) = -if_y(z_0)$

En general

$$f_x(z) = -\,if_y(z)$$
$$u_x + iv_x = -\,i(u_y + iv_y)$$
$$u_x + iv_x = -\,iu_y + v_y$$

igualando, la parte real e imaginaria se tienen

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ v_x &= -u_y \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Estas ecuaciones son llamadas las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y se demostró el siguiente teorema.

Teorema 2.2. Sea la función

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

definida en alguna ϵ-vecindad de un punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Suponiendo las derivadas de primer orden de las funciones u y v con respecto a x e y existen en todos los puntos de esa vecindad y son continuas en (x_0, y_0). Entonces, si esas derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

en (x_0, y_0), la derivada $f'(z_0)$ existe.

Si la derivada $f'(z_0)$ existe, entonces satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Definición 2.15. Sea $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ abierto, una función compleja. f es holomorfa en D si $f'(z)$ existe para todo punto $z \in D$. (Soares, 2012)

Observación 2.1. Una función compleja f es holomorfa si, y sólo si, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Un polinomio

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

es holomorfo en todo el plano $\mathbb{C}$, ya que el monomio $f(z) = z^m$ es holomorfo, además

$$\frac{z^m - z_0^m}{z - z_0} = z^{m-1} + \cdots + z z_0^{m-2} + z_0^{m-1}$$

y, $f(z) = z^m$ es continua en todo punto del plano, luego

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = m z_0^{m-1}$$

por lo tanto, $f'(z) = m z^{m-1}$ cualquiera que sea $z \in \mathbb{C}$. De ahí viene que

$$P'(z) = n a_n z^{n-1} + \cdots + a_1$$

Puesto que los polinomio son holomorfos, las funciones racionales $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ también son holomorfos en todos los puntos en los cuales Q no se anula. Y por la regla de la cadena, la composición de funciones holomorfas es holomorfa.

2.1.2. Campo de vectores conformes

Definición 2.16. Un campo de vectores suave sobre el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es una aplicación suave

$$X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

que asocia a cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ un vector $v \in \mathbb{R}^n$. (Oliveira, 2016)

Se denota por $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de los campos de vectores suaves sobre el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Usando la expresión de la derivada parcial para hacer referencia a la aplicación $\partial_{x_i} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\partial_{x_i} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

El gradiente de una función suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el campo de vectores definido por

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} f) E_i$$

donde E_i denota el campo de vectores que asocia todo $p \in \mathbb{R}^n$ al vector $e_i \in \mathbb{R}^n$, es decir,

$$E_i(p) = e_i$$

Se dice que el campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ es el campo gradiente, si existe una función suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que

$$X = \nabla f$$

en donde f es llamada función potencial de X.

Definición 2.17. Sea $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^n$.

Sea $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Se llama divergencia de X en p, denotada por div $X(p)$, a

$$\text{div } X(p) = \partial_{x_1} X_1(p) + \cdots + \partial_{x_n} X_n(p)$$

donde $X = (X_1, \ldots, X_n)$. (Ruiz, 1995)

La divergencia de un campo vectorial X es un escalar. Usando el operador nabla ∇ se define como

$$\nabla = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$$

es decir, ∇ es un vector de $\mathbb{R}^n$ cuya i-ésima coordenada es la derivada parcial respecto de su i-ésima variable.

$$\text{div } X = \nabla \cdot X$$

Definición 2.18. Sea f una función diferenciable. Se define el operador Laplaciano por

$$\triangle f = \text{div grad } f$$

(Carmo, 2008)

El Laplaciano se escribe como

$$\triangle f(p) = \sum_i E_i(E_i(f))(p)$$

equivalentemente

$$\triangle f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

y se cumple la siguiente propiedad

$$\triangle (f \cdot g) = f \triangle g + g \triangle f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle$$

Definición 2.19. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, se define la función $\langle X, Y\rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\langle X, Y\rangle = \langle X(p), Y(p)\rangle$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n$. (Oliveira, 2016)

donde $\langle\ ,\ \rangle$ en el lado derecho denota el producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$. Las funciones coordenadas de X se pueden expresar como

$$X_i = \langle X, \partial_{x_i} \rangle$$

Dados $X \in \mathfrak{X}(U)$ arbitrario, una función $f \in C^\infty(U)$ y un punto $p \in U$, el campo vectorial se puede escribir

$$X(f)(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Lema 2.1. Sean X e Y campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe un único campo vectorial Z tal que, para toda función diferenciable f,

$$Zf = (XY - YX)f$$

El campo vectorial Z dado en el lema anterior es llamado corchete de Lie y denotado por

$$[X, Y] = XY - YX$$

La operación corchete de Lie posee las siguientes propiedades, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, a, b números reales, y f, g funciones diferenciables, entonces

a. $[X, Y] = -[Y, X]$

b. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$

c. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], Z] + [[Z, X], Y] = 0$

d. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

El corchete de Lie también puede ser interpretado como una derivación de Y a lo largo de las trayectorias de X.

Definición 2.20. Una métrica riemanniana en un abierto no vacío U de $\mathbb{R}^n$ es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in U$ un producto interno $g = \langle\ ,\ \rangle$ en $\mathbb{R}^n$, que varía diferenciablemente en el siguiente sentido

$$p \in U \mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle_p$$

es suave para todo par de campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$. (Carmo, 2008)

En $\mathbb{R}^n$ con ∂_{x_i} identificado con e_i. La métrica está dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $\mathbb{R}^n$ es el espacio euclidiano de dimensión n y la métrica riemanniana de este espacio es la métrica euclidiana. A la métrica euclidiana canónica se le denota por

$$g_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \tag{2.2}$$

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $\rho \in C^\infty(U)$ una función positiva, entonces la aplicación

$$g = \rho^2 g_0 \tag{2.3}$$

es una métrica riemanniana sobre U.

Definición 2.21. Un abierto riemanniano es un subconjunto abierto no vacío $U \subset \mathbb{R}^n$, dotado con una métrica riemanniana g, denotado por (U, g). (Filho et al., 2023)

Un referencial ortonormal sobre un abierto riemanniano (U, g) es un conjunto de campo de vectores $\{E_1, \ldots, E_n\} \subset \mathfrak{X}(U)$ que satisface

$$\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$$

El subconjunto $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_n > 0\}$$

dotado con la métrica

$$g = x_n^{-2} g_0 \tag{2.4}$$

es un abierto riemanniano, conocido como el espacio hiperbólico.

Sea D el conjunto de las funciones reales de clase C^∞

Definición 2.22. Una conexión afin ∇ en un abierto riemanniano es una aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$$

que se denota por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ y que satisface las siguientes propiedades

a. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

b. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

c. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ y $f, g \in D$. (Carmo, 2008)

Sea (U, g) un abierto riemanniano con una conexión afin ∇, se definen la conexión compatible y la conexión simétrica como sigue:

Definición 2.23. Una conexión ∇ es un abierto riemanniano es compatible con la métrica si, y sólo si,

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$$

(Carmo, 2008)

Definición 2.24. Una conexión afin ∇ en un abierto riemanniano se dice que es simétrica si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$$

(Carmo, 2008)

Si $X_i = \partial_{x_i}$, entonces

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0$$

El siguiente teorema es denominado el teorema fundamental de la geometría riemanniana.

Teorema 2.3. Dada (U, g) un abierto riemanniano, existe una única conexión afin ∇ en U satisfaciendo las condiciones

a. ∇ es simétrica.

b. ∇ es compatible con la métrica.

La conexión ∇ del teorema anterior es llamada conexión de Levi Civita. Para

$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, de la compatibilidad con la métrica, se tiene

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle =& \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ Y\langle Z, X\rangle =& \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ Z\langle X, Y\rangle =& \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \end{aligned}$$

Resolviendo las tres ecuaciones anteriores

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

Por lo tanto

$$\langle Z, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}$$

esta ecuación es llamada la fórmula de Koszul.

Definición 2.25. Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, se dice que la derivada de Lie de X es la aplicación

$$L_X : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

dada por

$$L_X = \sum_{i,j=1}^{n} [\partial_{x_i}\langle X, \partial_{x_j}\rangle + \partial_{x_j}\langle X, \partial_{x_i}\rangle] dx_i x_j$$

(Oliveira, 2016)

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^\infty$ y λ una constante, la derivada de Lie satisface las siguientes propiedades:

a. $L_{(X+\lambda Y)} = L_X + \lambda L_Y$

b. $L_{\nabla f} = 2\text{Hess } f$

donde Hess f es el hessiano de f

$$\text{Hess } f : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

definida por

$$\text{Hess } f = \sum_{i,j=1}^{n} (\partial^2_{x_i x_j} f) dx_i dx_j$$

La derivada de Lie de la métrica de un abierto riemanniano en la dirección de un campo de vectores está dada en la siguiente definición.

Definición 2.26. Sean (U, g) un abierto riemanniano y $X \in \mathfrak{X}(U)$ un campo de vectores entonces la aplicación

$$L_X g : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to C^\infty$$

dada por

$$L_x g(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle \tag{2.5}$$

es la derivada de Lie de g en la dirección X. (Filho et al., 2023)

Sea (U, g_0) un abierto riemanniano y $X \in \mathfrak{X}(U)$ un campo de vectores. Dados $Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ arbitrarios, de la ecuación (2.5), se tiene

$$\begin{aligned} L_X g_0(Y, Z) =& \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle \\ =& \langle \sum_{j=1}^{n} X(Y_j)\partial_{x_j}, Z \rangle + \langle Y, \sum_{i=1}^{n} Z(X_i)\partial_{x_i} \rangle \\ =& \sum_{j=1}^{n} X(Y_i)\langle \partial_{x_j}, Z \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle Y, \partial X_i \rangle \end{aligned}$$

donde

$$X_k = \langle X, \partial_{x_k} \rangle \tag{2.6}$$

para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Escribiendo

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \langle Y, \partial_{x_i} \rangle \partial_{x_i} \tag{2.7}$$

y

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \langle Z, \partial_{x_j} \rangle \partial_{x_j} \tag{2.8}$$

Entonces

$$L_X g_0(Y, Z) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \langle \partial_{x_i}, Y \rangle \langle \partial_{x_j}, Z \rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \langle \partial_{x_j}, Z \rangle \langle \partial_{x_i}, Y \rangle$$

Por lo tanto

$$LXg_0 = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j \tag{2.9}$$

Definición 2.27. Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(U)$ sobre un abierto riemanniano (U, g) es conforme, si ocurre la igualdad

$$L_X g = 2\psi g$$

donde ψ es una función real suave definida sobre U, llamada factor conforme. (Filho et al., 2023)

Definición 2.28. Un campo vectorial de Killing es un campo sobre un abierto riemanniano es un campo vectorial X para el cual la derivada de Lie se anula, es decir:

$$L_X g = 0$$

(Clavijo Hernández, s.f.)

De la derivada de Lie, la condición $L_X g = 2\psi g$ equivale afirmar que X satisface la ecuación de Killing

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle = 2\psi\langle Y, Z\rangle$$

para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$. Además se cumple

$$\psi = \frac{1}{n}\text{div } X$$

donde div X es la divergencia del campo X.

La caracterización de los campos de Killing está dada en la siguiente proposición

Proposición 2.6. Un campo vectorial X sobre un abierto riemanniano (U, g), es un campo de Killing, si y sólo si,:

a. La divergencia de X con respecto a la conexión de Levi-Civita se anula.

b. Si $f \in U$ tal que $X(f) = 0$ entonces $[X, \nabla f] = 0$.

(Clavijo Hernández, s.f.)

Definición 2.29. Un campo de vectores es llamado homotético si su factor conforme es constante. (Oliveira, 2016)

Puesto que en el campo de Killing el factor conforme es una constante e igual a cero, entonces el campo de Killing es homotético. Un caso particular ocurre si un campo de vectores suave X satisface

$$\nabla_Y X = \psi Y$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(U)$ y en ese caso, se dice que X es un campo conforme cerrado.

Considerando el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ dotado de la métrica canónica g_0, y la función $\varphi : R^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}|x|^2$$

entonces el campo gradiente $\nabla\varphi$ es un campo conforme sobre el abierto riemanniano $\mathbb{R}^n, g_0)$ con factor conforme $\psi = 1$.

El campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, definido por

$$X = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y$$

es un campo conforme sobre el abierto riemanniano $(\mathbb{R}^2, g_0)$ con factor conforme dado por $\psi(x, y) = 2x$.

Definición 2.30. Sea (U, g) un abierto riemanniano y $\rho : U \to \mathbb{R}$ una función suave positiva, entonces se dice que la métrica riemanniana $\bar{g} = \rho^2 g$ es conforme a g o viceversa. (Filho et al., 2023)

En términos de la derivada de Lie

$$L_X\bar{g} = L_X(\rho^2 g) = X(\rho^2)g + \varphi^2 L_X g \tag{2.10}$$

o, también

$$L_X\bar{g} - \varphi^2 L_X g = 2\varphi X(\rho)g = \frac{2}{\rho}X(\rho)\bar{g} \tag{2.11}$$

entonces X es conforme con respecto a g si, y sólo si, es conforme respecto a $\bar{g}$.

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. MATERIALES

La investigación se basó en una amplia variedad de fuentes de información, incluyendo textos, artículos y papers online, revistas científicas de prestigio y tesis de repositorios nacionales e internacionales. Especialmente, se consultaron fuentes bibliográficas especializadas en Análisis Complejo, cuya revisión bibliográfica se detalla en la sección correspondiente.

3.2. MÉTODOS

El propósito de la investigación es mostrar la relación entre las funciones complejas holomorfas con los campos conformes para escribir el campo homotético, motivo por el cual la investigación se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, no experimental; se hace un estudio teórico de funciones complejas holomorfas y campos conformes para que la transformación preserve la métrica.

Describir explícitamente los campos homotéticos mediante la relación entre funciones complejas holomorfas y campos conformes se desarrolla con aplicaciones difeomórficas que garantizan las condiciones de invariantes geométricas por métricas e isometrías por tanto invariantes conformes que preservan los ángulos.

La investigación se basa en la revisión bibliográfica de artículos y trabajos de carácter científico sobre el área del análisis matemático de transformaciones, específicamente en los temas de análisis complejo, el trabajo, amplía y profundiza los resultados y demostraciones presentados en artículos respecto al tema de investigación.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. RELACIÓN ENTRE FUNCIONES HOLOMORFAS Y CAMPOS CONFORMES

En esta sección se alcanza los dos objetivos específicos del trabajo de investigación, inicialmente demostrando la relación entre las funciones holomorfas, que son funciones complejas de variable compleja que satisfacen las ecuaciones de Cauchy- Riemann, con los campos conformes que está relacionada con la derivada de Lie de un campo conforme y su factor conforme. Además se presenta un ejemplo de campo conforme obtenido a partir de una función holomorfa, y se proporciona una caracterización de los campos vectoriales conformes en el plano hiperbólico.

Teorema 4.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto dotado con una métrica g conforme a la métrica canónica. La función compleja $f = u + iv$ es holomorfa si, y sólo si, el campo de vectores $X = u\partial_x + v\partial_y$ es conforme con respecto a g.

Demostración. De la ecuación (2.3)

$$g = \rho^2 g_0$$

y de la ecuación (2.11)

$$LXg = 2\rho X(\rho)g_0 + \rho^2 L_X g_0 \tag{4.1}$$

En la ecuación (2.9) para $n = 2$, se tiene

$$
\begin{aligned}
L_X g_0 =& \sum_{i,j}^{2} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j \\
=& \sum_{j=1}^{2} \left[\left(\frac{\partial X_j}{\partial x_1} + \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \right) dx_1 dx_j + \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_j} \right) dx_2 dx_j \right] \\
=& 2\frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right) dx_2 dx_1 + 2\frac{\partial X_2}{\partial x_2} dx_2^2
\end{aligned}
$$

puesto que el campo $X = u\partial_x + v\partial_y$, se tiene

$$X_1 = u, \ X_2 = v, \ x_1 = x, \ \text{ y } \ x_2 = y$$

entonces

$$L_X g_0 = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial v}{\partial y} dy^2 \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (dxdy + dydx)$$

Reemplazando en (4.1)

$$L_X g = 2\rho X(\rho) g_0 + \rho^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial v}{\partial y} dy^2 \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (dxdy + dydx) \right] \quad (4.2)$$

Por hipótesis $f = u + iv$ es holomorfa, entonces satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Reemplazando en la ecuación (4.2)

$$L_X g = 2\rho X(\rho) g_0 + 2\rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + 2\rho^2 \frac{\partial v}{\partial y} dy^2 \quad (4.3)$$

Como

$$g = \rho^2 g_0 = \rho^2 dx^2 + \rho^2 dy^2$$

entonces

$$2\frac{\partial u}{\partial x} g = 2\rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + 2\rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} dy^2$$

reescribiendo esta ecuación

$$2\rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} dx^2 = 2\frac{\partial u}{\partial x} g - 2\rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} dy^2$$

Reemplazando en (4.3)

$$L_X g = \frac{2}{\rho} X(\rho) g + \frac{2\partial u}{\partial x} g - 2\rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} dy^2 + 2\rho^2 \frac{\partial v}{\partial y} dy^2 \tag{4.4}$$

nuevamente por las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

entonces

$$L_X g = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} X(\rho)\right) g \tag{4.5}$$

Por lo tanto el campo de vectores X es conforme con respecto a g. □

Como consecuencia del teorema anterior, se tiene el siguiente corolario

Corolario 4.1. Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $X = u\partial_x + v\partial_y \in \mathfrak{X}(U)$ un campo conforme con respecto a una métrica conforme $g = \rho^2 g_0$, entonces el factor conforme de X está dado por

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) \tag{4.6}$$

Demostración. De la ecuación (4.5)

$$L_X g = 2\left(\frac{1}{\rho}X(\rho) + \frac{\partial u}{\partial x}\right) g$$

Además, de la definición de campo conforme para el campo $X = u\partial_x + v\partial_y$

$$LXg = 2\psi g$$

entonces

$$\begin{aligned}\psi =& \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}X(\rho)\\ =& \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(u\partial_x + v\partial_y\right)(\rho)\\ =& \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

□

Se presenta a continuación una caracterización de los campos conformes en el plano euclidiano con la métrica canónica.

Corolario 4.2. Una función compleja $f = u + iv$ es holomorfa, si y solamente si, el campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, definido por

$$X = u\partial_x + v\partial_y$$

es conforme sobre el plano $\mathbb{R}^2$ dotado con la métrica canónica. En este contexto, se tiene que el factor conforme está dado por

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.7}$$

Demostración. Como X está definido en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, es decir en el abierto riemanniano $(\mathbb{R}^2, g)$, donde $g = g_0$, esto se consigue cuando $\rho = 1$, de la ecuación (4.6)

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)$$

y como $\rho = 1$, se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \text{ y } \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

entonces

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x}$$

□

Ejemplo 4.1. Una aplicación del corolario anterior es obtener un campo conforme a partir de una función holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^z$.

La función compleja $f = u + iv$ es holomorfa si, y sólo si, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, para la función

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$$

$u = e^x \cos y$, $v = e^x \operatorname{sen} y$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

esto muestra que $f(z) = e^z$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, $f(z)$ es holomorfa.

Aplicando el corolario 4.2, el campo definido por

$$X = u\partial_x + v\partial_y$$

es conforme y el factor conforme es

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Por lo tanto, el campo

$$X = e^x \cos y \partial_x + e^x \operatorname{sen} y \partial_y$$

es conforme sobre $(\mathbb{R}^2, g_0)$ y el factor conforme está dado por

$$\begin{aligned} \psi(x,y) =& \frac{\partial u}{\partial x} \\ =& \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) \\ =& e^x \cos y \end{aligned}$$

El teorema que sigue caracteriza los campos vectoriales conformes en el plano hiperbólico, basada en la relación entre funciones holomorfas y campos conformes, logrando así el segundo objetivo específico de esta investigación. Se utiliza la siguiente notación

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{ Im } (z) > 0\}$$

que es el modelo del semiplano superior complejo del espacio hiperbólico.

Teorema 4.2. Una función compleja $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$, dada por $f = u + iv$ es holomorfa si, y sólo si, el campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$, definido por

$$X = u\partial_x + v\partial_y$$

es conforme sobre $\mathbb{H}^2$. En este contexto, se tiene que el factor conforme está dado por

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}v \tag{4.8}$$

Demostración. En la ecuación (2.4) de la métrica del espacio hiperbólico para $n = 2$, se tiene que

$$g = y^{-2}g_0$$

y en el teorema 4.1,

$$g = \rho^2 g_0 = y^{-2}g_0$$

entonces

$$\rho(x, y) = y^{-1}$$

Reemplazando en (4.6)

$$\begin{aligned}
\psi =& \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) \\
=& \frac{\partial u}{\partial x} + y\left(u\frac{\partial y^{-1}}{\partial x} + v\frac{\partial y^{-1}}{\partial y}\right) \\
=& \frac{\partial u}{\partial x} + yv\left(\frac{-1}{y^2}\right) \\
=& \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v
\end{aligned}$$

Además, f es holomorfa, es decir, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Por lo tanto

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}v$$

$\square$

4.2. DESCRIPCIÓN EXPLÍCITA DE LOS CAMPOS HOMOTÉTICOS

La sección presente muestra el resultado fundamental del trabajo de investigación, describiendo explícitamente el campo vectorial homotético y su regla de correspondencia, logrado mediante la relación entre funciones holomorfas complejas y campos conformes, cuya validez se demuestra utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Los campos vectoriales homotéticos son campos conformes con factor conforme constante.

Teorema 4.3. Sea $X \in \mathbb{R}^2$ un campo homotético sobre $(\mathbb{R}^2, g_0)$, entonces

$$X = (\psi x + ay + b)\partial_x + (-ax + \psi y + c)\partial_y \tag{4.9}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y ψ denota el factor conforme de X.

Demostración. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja dada por

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{4.10}$$

donde $u = \langle X, \partial_x \rangle$ y $v = \langle X, \partial_y \rangle$.

Por hipótesis X es un campo homotético, es decir, es un campo conforme con factor conforme constante, por el teorema 4.1, f es holomorfa, es decir, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

y por el corolario 4.2, el factor conforme está dado por

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{4.11}$$

y como el factor conforme es constante, es decir,

$$\psi = \text{constante}$$

entonces de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \psi$$

integrando

$$u(x, y) = \psi x + \sigma(y) \tag{4.12}$$

Análogamente

$$v(x, y) = \psi y + \phi(x) \tag{4.13}$$

donde $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de variable y, análogamente ϕ es una función de variable x.

Derivando (4.12) con respecto a la variable y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sigma'(y)$$

Derivando (4.13) con respecto a la variable x

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \phi'(x)$$

Reemplazando en la segunda ecuación de Cauchy-Riemann

$$\sigma'(y) = -\phi'(x)$$

Esta ecuación igualando a una constante a

$$\sigma'(y) = -\phi'(x) = a$$

integrando $\sigma'(y) = a$, se tiene

$$\sigma(y) = ay + b \tag{4.14}$$

integrando $\phi'(x) = -a$, se tiene

$$\phi(x) = -ax + c \tag{4.15}$$

Reemplazando en (4.12) y (4.13), respectivamente

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \psi x + ay + b \\ v(x, y) &= -ax + \psi(y) + c \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.1

$$X = u\partial_x + v\partial_y$$

Por lo tanto

$$X = (\psi x + ay + b)\partial_x + (-ax + \psi y + c)\partial_y \tag{4.16}$$

$\square$

La ecuación (4.16) representa la descripción explícita del campo homotético X, mostrando sus dos funciones coordenadas.

V. CONCLUSIONES

Las conclusiones del presente trabajo de investigación son las siguientes:

- Los campos homotéticos se han descrito explícitamente utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann asociadas a funciones complejas holomorfas. La relación entre funciones holomorfas y campos conformes permitió una descripción más clara y precisa de los campos homotéticos.
- Las funciones complejas holomorfas inducen campos conformes que preservan la forma y el tamaño de las figuras geométricas bajo transformaciones continuas.
- Los campos vectoriales conformes en el plano hiperbólico son caracterizados mediante la relación entre funciones holomorfas y campos conformes. Esta caracterización proporciona una herramienta para estudiar la geometría y la topología del plano hiperbólico.

VI. RECOMENDACIONES

De los resultados obtenidos en esta investigación, las recomendaciones del presente trabajo de investigación son las siguientes:

- Se sugiere investigar la conexión entre campos conformes y la teoría de la relatividad general para profundizar en la comprensión de la estructura del espacio-tiempo.
- Se sugiere extender la descripción explícita de campos homotéticos a espacios riemannianos de dimensión superior, utilizando la relación entre funciones holomorfas y campos conformes.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, G. (2008). *Variáveis complexas e aplicações*. LTC.

Barros, A., & Sousa, P. (2009). Compact graphs over a sphere of constant second order mean curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *137*(9), 3105-3114.

Belgun, F., Moroianu, A., & Ornea, L. (2010). Essential points of conformal vector fields. *arXiv.org*.

Benedetti, V., Faenzi, D., & Muniz, A. (2023). Codimension one foliations on homogeneous varieties. *Advances in Mathematics*, *434*, 109332.

Bustinduy Candelas, Á. (2005). *Campos vectoriales holomorfos completos y condición jacobiana*. Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones.

Caminha, A. (2011). The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, *42*(2), 277-300.

Caminha, A., Souza, P., & Camargo, F. (2010). Complete foliations of space forms by hypersurfaces. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, *41*(3), 339-353.

Carmo, M. P. d. (2008). Geometria riemanniana.

Churchill, R. V., Brown, J. W., & Rapun, L. A. (1986). *Variable compleja y aplicaciones*. McGraw-Hill.

Clavijo Hernández, P. A. (s.f.). Campos vectoriales tipo Killing en geometria Riemanniana.

Derrick, W. R., et al. (1987). Variable compleja con aplicaciones.

Filho, J. F., Fernandes, L., & Da Silva, M. (2023). *FUNÇÕES COMPLEXAS HOLOMORFAS E CAMPOS CONFORMES* [Tesis doctoral].

Fonseca, M. (2016). *Superficies mínimas en R^3* [Tesis doctoral].

González Ibáñez, F. (2022). Campos vectoriales de Killing e isometrias en variedades semiriemannianas.

Guidorizzi, H. L. (2002). Um curso de cálculo.

Lins Neto, A. (1996). Funções de uma variável complexa. *Rio de Janeiro: SBM*.

Manno, G., & Metafune, G. (2012). On the extendability of conformal vector fields of 2-dimensional manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, *30*(4), 365-369.

Oliveira, F. E. d. S. (2016). Campos de vetores homotéticos no espaço euclidiano.

Ruiz, C. P. (1995). *Cálculo vectorial*. Prentice-Hall Hispanoamericana.

Soares, M. G. (2012). *Cálculo em uma variável complexa*. Impa.

Yano, K., & Obata, M. (1970). Conformal changes of Riemannian metrics [Publisher: Lehigh University]. *Journal of Differential Geometry*, *4*(1), 53-72.

Universidad Nacional del Altiplano Puno | Vicerrectorado de Investigación | Repositorio Institucional

DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo BRENDA YAMILET ATAMARI HANCCO,
identificado con DNI 44326714 en mi condición de egresado de:

☒ **Escuela Profesional,** ☐ **Programa de Segunda Especialidad,** ☐ **Programa de Maestría o Doctorado**

CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS,

informo que he elaborado el/la ☒ **Tesis** o ☐ **Trabajo de Investigación** denominada:
"DESCRIPCIÓN EXPLÍCITA DE CAMPOS HOMOTÉTICOS MEDIANTE LA RELACIÓN ENTRE FUNCIONES HOLOMORFAS Y CAMPOS CONFORMES"

Es un tema original.

Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y **no existe plagio/copia** de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como suyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno 29 de OCTUBRE del 2024

FIRMA (obligatoria)

Huella

AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo BRENDA YAMILET ATAMARI HANCCO, identificado con DNI 44326714 en mi condición de egresado de:

☒ **Escuela Profesional,** ☐ **Programa de Segunda Especialidad,** ☐ **Programa de Maestría o Doctorado**

CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS,

informo que he elaborado el/la ☒ **Tesis** o ☐ **Trabajo de Investigación** denominada:

"DESCRIPCIÓN EXPLÍCITA DE CAMPOS HOMOTÉTICOS MEDIANTE LA RELACIÓN ENTRE FUNCIONES HOLOMORFAS Y CAMPOS CONFORMES"

para la obtención de ☐**Grado,** ☒ **Título Profesional** o ☐ **Segunda Especialidad.**

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los "Contenidos") que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia:

Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno 29 de OCTUBRE del 2024

FIRMA (obligatoria)

Huella