



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL Y ARQUITECTURA
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS



**APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BROUWER
PARA LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL EQUILIBRIO
DE NASH**

TESIS

PRESENTADA POR:

Bach. JULIO JILAPA CHARCA

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS**

PUNO – PERÚ

2024



NOMBRE DEL TRABAJO

**APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PUNTO
FIJO DE BROUWER PARA LA DEMOSTRA
CIÓN DEL TEOREMA DEL EQUILIBRIO DE
NASH**

AUTOR

JULIO JILAPA CHARCA

RECuento de palabras

13523 Words

RECuento de caracteres

61974 Characters

RECuento de páginas

81 Pages

Tamaño del archivo

1.1MB

Fecha de entrega

Nov 6, 2024 4:20 PM GMT-5

Fecha del informe

Nov 6, 2024 4:21 PM GMT-5

● **19% de similitud general**

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 18% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 3% Base de datos de trabajos entregados
- 1% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

● **Excluir del Reporte de Similitud**

- Material bibliográfico
- Material citado
- Bloques de texto excluidos manualmente
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 12 palabras)


Mg. Roberto Zapana Yerba
UNA - PUNO


COORDINADOR
Adelaida Otazu Conza
Dra. CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS
Dra. MATEMÁTICA APLICADA

Resumen



DEDICATORIA

Agradezco profundamente a mis padres, Alfonzo y María, por su incondicional amor, dedicación y sacrificio a lo largo de los años. Su apoyo ha sido fundamental para llegar a donde estoy hoy. También debo expresar mi gratitud a mis hijos Ricardo y Rafael, por su amor, apoyo y aliento en todo momento. Gracias por ser mi fuente de inspiración. A todas las personas que me acompañaron en este camino y me brindaron su apoyo. Este logro no habría sido posible sin su constante apoyo y confianza.

Julio Jilapa Charca



AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a Dios y todas las personas que han contribuido de alguna manera en la realización de esta tesis.

En primer lugar. A la Universidad Nacional del altiplano, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, gracias por brindarme la oportunidad de crecer académica y profesionalmente.

Agradecer a mi director/asesor de tesis, Msc. Ruperto Zapana Yerba, cuya experiencia, paciencia y apoyo constante fueron fundamentales para la realización de este trabajo.

A mi familia, especialmente a mis padres, les agradezco profundamente su amor incondicional y su apoyo constante. Su fe en mí ha sido el motor que me permitió completar este camino. A mis hermanos, por sus palabras de aliento, y a mis hijos, por su presencia y cariño, gracias por ser mi pilar en los momentos difíciles.

A todos, gracias por ser parte de este viaje.

Julio Jilapa Charca



ÍNDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA	
AGRADECIMIENTOS	
ÍNDICE GENERAL	
ÍNDICE DE FIGURAS	
RESUMEN	8
ABSTRACT.....	9
CAPÍTULO I	
INTRODUCCIÓN	
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	10
1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	11
1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN.....	11
1.3.1. Hipótesis General	11
1.3.2. Hipótesis Específicas	11
1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO.....	11
1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	12
1.5.1. Objetivo General	12
1.5.2. Objetivos Específicos.....	12
CAPÍTULO II	
REVISIÓN DE LITERATURA	
2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN.....	13
2.2. MARCO TEÓRICO	16
2.2.1. ¿Qué es la teoría de juegos?	16
2.2.2. Soluciones de un juego.....	19



2.2.3. Estrategias Mixtas	24
2.2.4. Soluciones en Estrategias Mixtas.....	27
2.2.5. Juegos de Suma Constante con Dos Jugadores.....	32
2.2.6. Equilibrio De Nash En Estrategia Puras	35
2.2.7. Equilibrio De Nash En Estrategias Mixtas.....	40
2.2.8. Teorema Minimax De Von Neumann.....	43

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. MATERIALES	51
3.2. TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN.....	51
3.3. MÉTODOS	51

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. RESULTADOS.....	53
4.2. DISCUSIÓN	73
V. CONCLUSIONES	75
VI. RECOMENDACIONES.....	76
VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	77

TEMA: Teoría de Juegos

ÁREA: Matemática

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Pura

FECHA DE SUSTENTACIÓN: 08 de noviembre del 2024



ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 2.2-1 Diseño de estrategia mixta para dos jugadores	25
Figura 2.2-2 Diseño de estrategia mixta para tres jugadores.....	26
Figura 2.2-3 Elección de la estrategia mixta para el jugador 1	30
Figura 2.2-4 Elección de la estrategia mixta para el jugador 2	31
Figura 2.2-5 Equilibrio de Nash en el problema de la moneda	32
Figura 2.2-6 Solución del problema dual	49
Figura 2.2-7 Solución del problema primal.....	50



RESUMEN

El Teorema de equilibrio de Nash establece que *“Todo juego definido por matrices de pago posee un equilibrio de Nash”*. El objetivo del presente trabajo de investigación es Aplicar el Teorema de Punto Fijo de Brouwer para la demostración del teorema del equilibrio de Nash para estrategias mixtas, para lograr este objetivo primero se analizó los conceptos de juegos en estrategias puras, mixtas, luego se analizó el concepto de Juegos de Suma constante con dos Jugadores donde se definirá el pago de juego por matrices, este concepto permitió establecer una secuencia de teoremas que proporcionan caracterizaciones alternativas para un equilibrio de Nash, y finalmente se utilizó el teorema de punto fijo de Brouwer para demostrar el teorema de equilibrio de Nash.

Palabras clave: Juegos, estrategias mixtas, equilibrio de Nash, Punto fijo de Brouwer



ABSTRACT

Nash's equilibrium theorem states that "Every game defined by payoff matrices possesses a Nash equilibrium." The objective of this research work is to apply Brouwer's Fixed Point Theorem for the proof of Nash's equilibrium theorem for mixed strategies, to achieve this objective first the concepts of games in pure, mixed strategies are analyzed, then the concept of Constant Sum Games with Two Players will be analyzed where the game payoff by matrices will be defined, this concept will allow us to establish a sequence of theorems that provide alternative characterizations for a Nash equilibrium, and finally we will use Brouwer's fixed-point theorem to prove Nash's equilibrium theorem.

Keywords: Games, mixed strategies, Nash equilibrium, Brouwer's fixed point



CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El teorema de equilibrio de Nash, es un resultado muy importante dentro de la teoría de juegos, que describe una situación estratégica de jugadores, donde un jugador toma su mejor decisión para maximizar sus ganancias, dada la elección de los demás jugadores, es decir que no tienen ningún incentivo para modificar su estrategia, si los demás mantienen las suyas, y así poder llegar a un equilibrio.

La demostración de este teorema varía mucho dependiendo del tipo de juego y la cantidad de jugadores que participan en él, como es el caso del método geométrico que utiliza un análisis probabilístico pero solo se restringe a juegos no colaborativos, también el método geométrico para el caso simétrico, donde su análisis se basa en intercambiar los roles de los jugadores que intervienen, y una de las formas más usuales de demostrar este teorema es utilizar el teorema de Minimax de Von Neumann, pero es también restringida para juegos de suma cero.

El teorema de punto fijo de Brouwer, plantea que para toda función continua definida en Ω sobre el mismo conjunto, donde Ω es compacto y convexo, por lo menos existe un punto en Ω que permanece invariante después de aplicarle la función. Este concepto se utiliza en la teoría de juegos debido a que la aplicación de pagos de un juego genera una matriz de pagos, y dada una estrategia para los jugadores, esta debe permanecer invariante, en la matriz de pagos.



Entonces se hace necesario buscar un concepto matemático que permita demostrar el teorema de Equilibrio de Nash de forma más general, y esto nos permita analizar el Equilibrio de Nash en diferentes situaciones donde se presente juegos de competencias.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En la presente investigación se respondió a la siguiente interrogante.

¿Será posible aplicar el Teorema de Punto Fijo de Brouwer para la demostración del Teorema de Equilibrio de Nash?

1.3. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1. Hipótesis General

El Teorema de Punto Fijo de Brouwer se utiliza para la demostración del Teorema del Equilibrio de Nash

1.3.2. Hipótesis Específicas

- El punto fijo de Brouwer se comprueba que es un equilibrio de Nash
- El Teorema de Punto Fijo de Brouwer tiene relación con la Teoría de Juegos

1.4. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

El teorema del Equilibrio de Nash, es muy importante, en diversos campos de estudio, por que busca la mejor opción para maximizar ganancias en juegos de competencias no colaborativos de varios agentes, por ejemplo se puede aplicar a modelos de mercados, a políticas públicas, a toma de decisiones empresariales en negociaciones, a situaciones sociales en conflictos y cooperación, en la biología para modelar el



comportamiento de organismos en competencia, y últimamente en inteligencia artificial, para desarrollar algoritmos de aprendizaje y la toma de decisiones.

Al igual que muchos teoremas clásicos dentro de la matemática, existen diversas formas de probar este importante teorema, debido al tipo de juego y la cantidad de agentes que intervienen, la idea es tratar de generalizar esta demostración y así en el proceso poder entender varios aspectos importantes de este teorema para poder aplicarlos de manera más efectiva.

La teoría de los teoremas de punto fijo es una herramienta sumamente importante en matemáticas y sus aplicaciones. En este contexto, el teorema de punto fijo de Brouwer es uno de los resultados más relevantes por la simplicidad de su enunciado y su amplia aplicabilidad (Gallegos, 2022), este teorema se puede aplicar en diversos ámbitos, como, por ejemplo, para demostrar el teorema fundamental del Álgebra, y muchos más.

Se pretende mostrar una forma alternativa de la demostración clásica de este teorema utilizando el Teorema de Punto Fijo de Brouwer, debido a la relación tan importante que existe entre la Teoría de Juegos y la Teoría de puntos fijos.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1. Objetivo General

Aplicar el Teorema de Punto Fijo de Brouwer para la demostración del teorema del equilibrio de Nash

1.5.2. Objetivos Específicos

- Mostrar que el punto fijo de Brouwer es un equilibrio de Nash
- Examinar la teoría sobre el Teorema de Punto Fijo de Brouwer y su relación en la Teoría de Juegos



CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Internacionales

Molina E. (2018). Elaboró un artículo titulado *Una demostración elemental de la existencia de equilibrios de Nash para juegos de dos personas con dos estrategias* para la Revista de Economía *Perspectivas* Ed. 22 (1 - 10) en la Universidad Autónoma de San Andrés – México. Donde su objetivo es demostrar por un método basado en la geometría para hallar equilibrios de Nash en cualquier tipo de juego que involucre dos jugadores y dos opciones o respuestas, sin importar la simetría que tenga, además utilizó una metodología de investigación analítico deductivo, donde concluyó que se puede utilizar el método basado en la geometría elemental para encontrar equilibrios de Nash para juegos de dos jugadores con dos opciones además se observa que para cualquier juego de este tipo existe al menos un equilibrio de Nash.

Villarrubia B. (2023), presento un trabajo de fin de grado en la Universidad de Sevilla, titulado “Teoremas de punto fijo y aplicaciones”, donde muestra la relación que existe entre teoremas de punto fijo clásicos como son Teorema de punto fijo de Banch, Brouwer y de Schauder y como se aplican a diversos resultados importantes en la matemática como ecuaciones lineales y no lineales, a sistemas de ecuaciones, a problemas de valor inicial y a ecuaciones integrales, este trabajo se consideró por la aplicación que muestra el teorema de punto fijo de Brouwer con la teoría de juegos y mostrar algunos ejemplos.



Escoriza P.(2018), realizó un trabajo de fin de grado en la Universidad de Barcelona titulado Equilibrio de Nash: Teoría y aplicaciones, donde su objetivo fue analizar el equilibrio de Nash desde un punto de vista matemático, desde las primeras definiciones hasta el teorema de existencia de Nash, utilizando una metodología de investigación analítica, donde concluyo que la demostración clásica del teorema de Existencia de Nash queda restringido por la hipótesis de la finitud de estrategias, y para generalizar la demostración de este teorema utilizo el Teorema del punto fijo de Kakutani.

Carpentiere D. (2023), realizó un trabajo de investigación para la revista arXiv titulado “A new proof for the existence of Nash equilibrium”, que su objetivo fue la demostración del equilibrio de Nash, en donde no implica ningún teorema de punto fijo, utilizando una metodología de investigación analítica, en la cual se mostró que la prueba, es autónoma, consta de dos partes. La primera parte introduce las nociones de función raíz y pre-equilibrio. La segunda parte muestra La segunda parte muestra la existencia de pre-equilibrios y equilibrios de Nash.

Yun J. (2016), realizó un trabajo de investigación para la revista SpringerOpen Journal, un artículo llamado “Equivalence results between Nash equilibrium theorem and some fixed point theorems” donde su objetivo es realizar un análisis inverso sobre la utilización de los teoremas de punto fijo de Brouwer y de Kakutani con el teorema de equilibrio de Nash, utilizando una metodología analítica, realizó una prueba de los teoremas de Brouwer y Kakutani a través del teorema de equilibrio de Nash.

Jiang A. (2009), realizó un trabajo de investigación para la revista University of British Columbia Technical Report. Titulado “A Tutorial on the Proof of the Existence of Nash Equilibria” donde su objetivo fue mostrar una secuencia de conceptos que se debe realizar para mostrar el teorema de equilibrio de Nash, donde utilizó una



metodología analítica, en donde detallo una prueba del teorema de Nash sobre la existencia de equilibrios de Nash en juegos finitos, demostrando primero el lema de Sperner y el teorema del punto fijo de Brouwer.

Pilachanga E. (2023) Realizo un trabajo de investigación para optar el grado de Matemático, en la Escuela Superior Politécnica De Chimborazo, Ecuador, donde su objetivo fue estudiar el teorema de punto fijo de Brouwer en topología y su utilidad en el análisis de existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro; la investigación es de diseño documental con carácter descriptivo y enfoque cualitativo no interactivo. Donde utilizando conceptos de Topología realizó la demostración del teorema, posterior a ello empezar con la aplicación en el área de economía, en donde se observa que dicho teorema sirve para la demostración de la existencia de distribuciones de equilibrio de precios, dicho de otra manera, que exista un equilibrio.

Nacionales

Quispe L. (2022), Elaboró una Tesis denominada *El Teorema de Brouwer y el Teorema del Ángulo agudo de Lions: aplicaciones*. para optar el grado de magister en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, donde su objetivo fue realizar una demostración analítica, simple y didáctica del teorema de Brouwer, para luego aplicarlo particularmente a la solución de sistemas algebraicos no lineales para esto utilizó una metodología de investigación analítica, donde concluyó que realizó de forma concreta, simple y didáctica la demostración de este famoso teorema de punto fijo, que usualmente es demostrado con técnicas sofisticadas de la Matemática, este trabajo se consideró como referencia por la forma del análisis para demostrar el teorema de punto fijo de Brouwer teniendo en cuenta las restricciones que se tiene.



Laurente F. (2022) elaboró una tesis para optar el grado de licenciado en la Universidad Nacional del Altiplano, titulado “Topología de correspondencia y aplicación al Equilibrio de Nash”, este trabajo utilizó la topología de correspondencias para demostrar el teorema de existencia del equilibrio de Nash, se consideró su forma de análisis que realizó para incluso hacer dos demostraciones de la existencia de equilibrio de Nash utilizando el teorema de punto fijo de Kakutani.

Acosta E. (2005), realizó una tesis denominada Perfeccionamiento en equilibrio de Nash, en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, donde su objetivo fue obtener el refinamiento más estricto: el equilibrio regular, también presentó un análisis sobre juegos matriciales, donde utilizó una metodología de investigación analítica, y concluyó que un equilibrio perfecto siempre es “no dominado”, sin embargo, no todo equilibrio “no dominado” era necesariamente perfecto.

2.2. MARCO TEÓRICO

En esta sección se muestran conceptos relevantes de la teoría de juegos, análisis real y topología que sirven para un buen desarrollo de la tesis.

2.2.1. ¿Qué es la teoría de juegos?

La teoría de juegos puede ser definida como la teoría de modelos matemáticos que estudia la elección de decisiones óptimas en condiciones de conflicto.

Los elementos básicos en la teoría de juegos son:

- Un conjunto de jugadores que participan en él.
- Cada jugador tiene un conjunto de estrategias



- Cuando cada jugador elije su estrategia, entonces tenemos un perfil en el espacio de todos los perfiles posibles.
- Cada jugador tiene intereses o preferencias para cada situación en el juego.
- Cada jugador tiene una función utilidad que atribuye un número real (el pago o recompensa del jugador) a cada situación de juego.

Matemáticamente, un juego tiene los siguientes elementos básicos:

- Un conjunto finito de jugadores, representado por $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.
- Cada jugador $g_i \in G$ posee un conjunto finito $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}\}$ de opciones, denominadas estrategias puras, del jugador g_i ($m_i \geq 2$).
- Un vector $s = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n})$ donde s_{ij_i} es una estrategia pura para un jugador $g_i \in G$, que se denomina *perfil de estrategia pura*.
- Un conjunto de todos los perfiles de estrategias puras formado por el producto cartesiano

$$S = \prod_{i=1}^n S_i = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$$

denominado espacio de estrategia pura del juego.

- Para el jugador $g_i \in G$, existe una función utilidad

$$\begin{aligned} u_i : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto u_i(s) \end{aligned}$$

que asocia el pago (o recompensa) $u_i(s)$ del jugador g_i a cada perfil de estrategia pura $s \in S$.

Ejemplo 1 (El dilema del prisionero)

Dos ladrones A y B, son capturados y acusados de un mismo delito. Presos en celdas separadas y sin poderse comunicarse entre sí, el policía a cargo realiza



la siguiente propuesta: cada uno puede escoger entre admitir o negar el delito. Si ninguno de los dos admite, ambos serán enviados a la cárcel por 1 año. Si ambos admiten entonces los dos serán enviados a la cárcel por 5 años. Pero si uno admite y el otro niega, entonces el que admitió su delito será liberado y el otro será condenado a 10 años de prisión. En este contexto, tenemos

$$G = \{A, B\},$$

$$S_A = \{admitir, negar\},$$

$$S_B = \{admitir, negar\},$$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (admitir, admitir), (admitir, negar) \\ (negar, admitir), (negar, negar) \end{array} \right\}$$

Las dos funciones utilidad serán

$$u_A : S \rightarrow \square$$

$$u_B : S \rightarrow \square$$

Son dadas por:

$$u_A = (admitir, admitir) = -5, \quad u_A = (admitir, negar) = 0$$

$$u_A = (negar, admitir) = -10, \quad u_A = (negar, negar) = -1$$

(que representa los pagos (o recompensa) de A) y

$$u_B = (admitir, admitir) = -5, \quad u_B = (admitir, negar) = -10$$

$$u_B = (negar, admitir) = 0, \quad u_B = (negar, negar) = -1$$

(que representa los pagos (o recompensa) de B).

Luego los pagos de los jugadores están representados por una matriz, denominada matriz de pagos

		B	
		Admitir	Negar
A	Admitir	(-5, -5)	(0, -10)
	Negar	(-10, 0)	(-1, -1)



En esta matriz, los números de cada celda representan respectivamente, los pagos de A y B, para las elecciones de A y B correspondientes a cada celda.

2.2.2. Soluciones de un juego

Una solución de un juego es un pronóstico sobre un resultado de un juego. Existen varios conceptos diferentes de solución. En este trabajo se consideró dos conceptos de mayor uso que son:

- Dominancia de Nash
- Equilibrio de Nash

Para esto tomando en cuenta el *ejemplo 1*, y como encontrar una solución para el dilema del prisionero B y A, es decir que estrategias son admisibles, si los dos prisioneros quieren minimizar el tiempo de su condena.

Analizando el juego *desde el punto de vista del prisionero A*, el puede razonar de la siguiente manera, dos cosas pueden suceder:

- El prisionero B puede confesar o puede negarse.
 - Si B confiesa, entonces es mejor que yo también confiese.
 - Si B no confiesa, entonces yo me quedo libre si yo confieso.
- En cualquiera de los dos casos es mejor para mi confesar. Entonces Confesaré.

Analizando ahora el juego *desde el punto de vista del prisionero B*, se aplicará la misma idea de raciocinio que el prisionero A, esto es que también decidiría confesar

Por lo tanto, ambos confesarían y quedarían presos por 5 años.

Dominancia:

Frecuentemente, se evalúan perfiles de estrategias, en las que solo la estrategia de un único jugador $g_i \in G$ variará, en cuanto que las estrategias de sus oponentes permanecerán fijas. Se denotará por:

$$s_{-i} = (s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, \dots, s_{nj_n}) \in S_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$$

una elección de estrategia para todos los jugadores, menos el jugador g_i . De esta manera, un perfil de estrategia puede ser convenientemente denotado por:

$$s = (s_{ij_i}, s_{-i}) = (s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, \dots, s_{nj_n})$$

Definición 2.2.1. (Estrategias puras estrictamente dominadas)

Una estrategia pura $s_{ik} \in S_i$ del jugador es estrictamente dominada por la estrategia $s_{ik'} \in S_i$ si $u_i(s_{ik'}, s_{-i}) > u_i(s_{ik}, s_{-i})$, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

La estrategia $s_{ik} \in S_i$ es francamente dominada por la estrategia $s_{ik'} \in S_i$ si $u_i(s_{ik'}, s_{-i}) \geq u_i(s_{ik}, s_{-i})$, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

(Sartini, 2004)

Comentario: la dominancia estricta iterada es un proceso donde se eliminan las estrategias que son estrictamente dominadas es decir se eliminan las que tienen menor valor.

Ejemplo 2. Se considera un juego determinado por la matriz de pagos que se muestra a continuación

		J_2			
		s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
J_1	s_{11}	(5,2)	(2,6)	(1,4)	(0,4)
	s_{12}	(0,0)	(3,2)	(2,1)	(1,1)



s_{13}	(7,0)	(2,2)	(1,1)	(5,1)
s_{14}	(9,5)	(1,3)	(0,2)	(4,8)

En este juego para el jugador J_2 se observa las segundas componentes de los pares ordenados, y en las columnas para s_{21} y s_{24} , la estrategia s_{21} es estrictamente dominada por s_{24} ,

$$2 < 4$$

$$0 < 1$$

$$0 < 1$$

$$5 < 8$$

Estas cantidades representan los pagos o recompensas para el jugador J_2 por lo que la primera columna de la matriz es eliminada.

		J_2		
		s_{22}	s_{23}	s_{24}
J_1	s_{11}	(2,6)	(1,4)	(0,4)
	s_{12}	(3,2)	(2,1)	(1,1)
	s_{13}	(2,2)	(1,1)	(5,1)
	s_{14}	(1,3)	(0,2)	(4,8)

Ahora en esta matriz reducida, para el jugador J_1 al ver las primeras componentes de los pares ordenados, se observa que s_{11} es estrictamente



dominada por s_{12} ($2 < 3$, $1 < 2$, $0 < 4$), de igual manera s_{14} es estrictamente dominada por s_{13} ($1 < 2$, $0 < 1$, $4 < 5$), por lo tanto, las filas 1 y 4 pueden ser eliminadas. Luego

$$\begin{array}{c}
 J_2 \\
 s_{22} \quad s_{23} \quad s_{24} \\
 J_1 \begin{array}{c}
 s_{12} \\
 s_{13}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 (3,2) & (2,1) & (1,1) \\
 \hline
 (2,2) & (1,1) & (5,1) \\
 \hline
 \end{array}$$

Además, la estrategia s_{23} y s_{24} del jugador g_2 es estrictamente dominada por la estrategia s_{22} , por lo que las columnas 2 y 3 pueden ser eliminadas.

$$\begin{array}{c}
 J_2 \\
 s_{22} \\
 J_1 \begin{array}{c}
 s_{12} \\
 s_{13}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 (3,2) \\
 \hline
 (2,2) \\
 \hline
 \end{array}$$

Finalmente, la estrategia s_{13} del jugador g_1 es estrictamente dominada por la estrategia s_{12} , por lo que se elimina la fila 2. Entonces el resultado del juego queda (3,2). Por lo tanto, se puede decir que el jugador g_1 escoge la estrategia s_{12} , y el jugador g_2 escoge la estrategia s_{22} .

Comentario: La técnica de dominancia estricta iterada puede proporcionar varios perfiles (o incluso proporcione todo el espacio de estrategias), es decir que no haya dominancia estricta y no se pueda reducir hasta llegar a un solo resultado.

Solución estratégica o equilibrio de Nash

Una solución estratégica (o equilibrio de Nash) de un juego es un punto donde cada jugador no tiene incentivo de cambiar de su estrategia si los jugadores no lo hacen.

Definición 2.2.2. (Equilibrio de Nash)

Se dice que un perfil de estrategias

$$s^* = (s_1^*, \dots, s_{(i-1)}^*, s_i^*, s_{(i+1)}^*, \dots, s_n^*) \in S$$

Es un equilibrio de Nash, si

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, s_{-i}^*)$$

Para todo $i = 1, \dots, n$ y para todo $j_i = 1, \dots, m_i$, con $m_i \geq 2$.

(Sartini, 2004)

Ejemplo 3.

- a) En el dilema del prisionero del ejemplo 1, el perfil de estrategia (admitir, admitir) es un equilibrio de Nash. De hecho, si un prisionero confiesa y el otro no, aquel que no confiesa queda preso 10 años, o al revés de 5 años, si hubiera confesado. Además de este perfil no existen otros equilibrios de Nash.
- b) En el ejemplo 2, el único equilibrio de Nash del juego es el perfil de estrategia (s_{12}, s_{22}) .

Comentarios:

- Existen juegos donde no poseen equilibrios de Nash en estrategias puras. Este es el caso del juego de combinar monedas (matching pennies) donde dos jugadores muestran al mismo tiempo, la moneda que cada uno esconde en su mano. Si ambas monedas mostradas son cara o cruz, el segundo jugador da su moneda al primero. Si una de las monedas muestra cara, en cuanto la otra muestra cruz, el primer jugador da su moneda al segundo. Este juego se puede representar en la siguiente matriz de pagos.

$$J_2$$

		s_{21}	s_{22}
J_1	s_{11}	(+1, -1)	(-1, +1)
	s_{12}	(-1, +1)	(+1, -1)

En este caso, no se puede reducir más la matriz, debido a que no hay estrategias puras dominantes.

2.2.3. Estrategias Mixtas

En diversos juegos de competencias, puede ocurrir que el juego no tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras; en estos casos se puede contemplar el juego dándole un enfoque donde intervenga un análisis con probabilidades, donde el jugador tiene que escoger una distribución de probabilidad para su estrategia.

Definición 2.3.1 (Estrategias mixtas)

Una estrategia mixta p_i para el jugador $g_i \in G$, se le llama una distribución de probabilidad sobre el conjunto S_i de estrategias puras del jugador, es decir, p_i es un elemento del conjunto

$$\Delta_{m_i} = \left\{ (x_1, \dots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} / x_1 \geq 0, \dots, x_{m_i} \geq 0 \wedge \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1 \right\}$$

También, si $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i})$, entonces

$$p_{i1} \geq 0, p_{i2} \geq 0, \dots, p_{im_i} \geq 0 \wedge \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1$$

Donde Δ_{m_i} es un conjunto convexo y compacto. (Sartini, 2004)

Tenemos algunos diseños:

1. Diseño para Δ_2

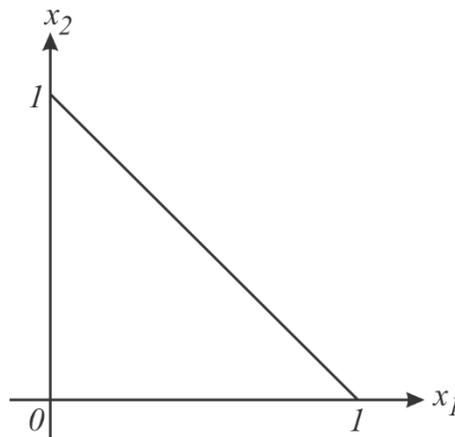


Figura 2.2-1 Diseño de estrategia mixta para dos jugadores

$$\Delta_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \wedge x_1 + x_2 = 1 \right\}$$

2. Diseño para Δ_3

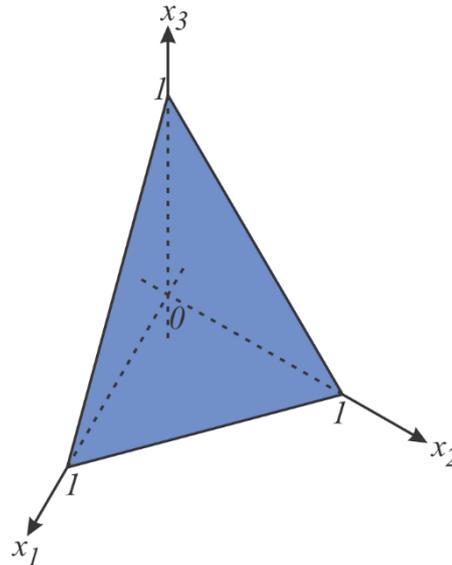


Figura 2.2-2 Diseño de estrategia mixta para tres jugadores

$$\Delta_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \square^3 / x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \wedge x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\}$$

Observamos que los vértices de Δ_{m_i} son puntos de la forma:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, \dots, 0, 0), \quad \dots, \\ e_{m_i} = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

Que son de probabilidad 1 en las estrategias puras $s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}$, es decir que se puede contemplar una distribución de probabilidad e_k como una estrategia mixta que representa a una estrategia pura s_{ik} del jugador g_i .

Espacio de Estrategias Mixtas. – Es el producto cartesiano de todos los perfiles de estrategias mixtas de la forma

$$\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n}$$

Donde

- Al vector $\mathbf{p} \in \Delta$ se denomina perfil de estrategia mixta

- Al vector \mathbf{p}_{-i} representa las estrategias de todos los jugadores, con excepción del jugador g_i

Comentario. – Como los Δ_{m_n} son convexos y compactos, entonces el producto cartesiano Δ es también compacto y convexo. (Piñeyro, 2010)

Los perfiles de estrategias mixtas $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Delta$ definen un pago esperado, y un promedio ponderado de pagos por las distribuciones de probabilidad p_1, \dots, p_n que también se pueden expresar más precisamente como

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m_1}; p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2m_2}; \dots; p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nm_n})$$

Entonces

$$u_i(\mathbf{p}) = \sum_{j_1}^{m_1} \sum_{j_2}^{m_2} \dots \sum_{j_n}^{m_n} \left(\prod_{k=1}^n p_{kj_k} u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_{1n}}) \right)$$

2.2.4. Soluciones en Estrategias Mixtas

Todas las reglas básicas para encontrar soluciones de juegos en estrategias puras, pueden ser ampliados a estrategias mixtas

Dominancia estricta Iterada

Definición 2.4.1. – Sean $S_i^{(0)} = S_i$ y $\Delta_{m_i}^{(0)} = \Delta_{m_i}$. Se define de forma recursiva,

$$S_i^{(0)} = \{s \in S_i^{(n-1)} / \nexists p \in \Delta_{m_i}^{(n-1)} \text{ tal que } \forall s_{-i} \in S_{-i}^{(n-1)}, u_i(p, s_{-i}) > u_i(s, s_{-i})\}$$

y

$$\Delta_{m_i}^{(n)} = \{p = (p_1, \dots, p_{m_i}) \in \Delta_{m_i} / \forall k = 1, \dots, m_i, p_k > 0 \text{ sólo si } s_{ik} \in S_i^{(n)}\},$$

Donde, $u_i(p, s_{-i})$ expresa el pago esperado cuando el jugador g_i escoge la estrategia mixta p y los demás jugadores escogen las estrategias mixtas correspondientes a las estrategias puras dadas por s_{-i} . La intersección

$$S_i^\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_i^{(n)}$$

Es el conjunto de estrategias puras y

$$\Delta_{m_i}^\infty = \{p \in \Delta_{m_i} / \nexists p' \in \Delta_{m_i} \text{ tal que } \forall s_{-i} \in S_{-i}^{(\infty)}, u_i(p', s_{-i}) > u_i(p, s_{-i})\}$$

Es el conjunto de todas las estrategias mixtas del jugador g_i .

(Sartini, 2004)

Equilibrio de Nash (estrategias mixtas)

Definición 2.4.2. – Se dice que un perfil de estrategia mixta

$$\mathbf{p} = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) \in \Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n}$$

Es un equilibrio de Nash si

$$u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \geq u_i(p, \mathbf{p}_{-i}^*)$$

Para todo $p \in \Delta_{m_i}$ esto es, ningún jugador siente motivación de cambiar su estrategia mixta si los demás jugadores no lo hacen. (Cerdá, 2004)

Ejemplo 4 (juego de la moneda)

Este es un juego entre dos individuos (o jugadores) que lanzan una moneda de manera simultánea obteniendo cara o cruz, donde los pagos serán, si ambos coinciden en sus resultados entonces el jugador 1 le tendrá que pagar un dólar al jugador 2, en caso contrario (si ambos obtienen resultados distintos) el jugador 2 le tendrá que dar un dólar al jugador 1. (Perez, 2017)

En este contexto tendremos:



$$G = \{Jugador1(J1), Jugador2(J2)\}$$

$$S_{J1} = \{Cara, Sello\}, S_{J2} = \{Cara, Sello\}$$

$$S = \{(Cara, Cara), (Cara, Sello), (Sello, Cara), (Sello, Sello)\}$$

Las funciones de pago serán

$$u_{J1}: S \rightarrow \mathbb{R} \text{ y } u_{J2}: S \rightarrow \mathbb{R}$$

y están dadas por

		<i>J2</i>	
		<i>q</i>	<i>1 - q</i>
<i>J1</i>	<i>p</i>	C	S
	<i>1 - p</i>	C	S
		-1, 1	1, -1
		1, -1	-1, 1

Donde:

- Una estrategia mixta para el jugador *J2* es la distribución de probabilidad $(q, 1 - q)$ donde q es la probabilidad de elegir cara, $1 - q$ es la probabilidad de elegir sello, además $0 \leq q \leq 1$
- La estrategia mixta $(0, 1)$ es simplemente la estrategia puro sello y la estrategia mixta $(1, 0)$ es la estrategia pura cara.
- De igual manera para el jugador *J1* con la distribución de probabilidad $(p, 1 - p)$

Analizando a *J1*:

Se supondrá que *J2* elegirá la estrategia mixta

$$(q, 1-q) \rightarrow \begin{cases} q & , \text{elige cara} \\ 1-q & , \text{elige sello} \end{cases}$$

Bajo este supuesto las ganancias del $J1$ se dan como sigue:

- $q(-1) + (1-q)(1) = 1 - 2q$, si elige cara
- $q(1) + (1-q)(-1) = 2q - 1$, si elige sello

Luego se analiza si estos resultados son $<, =, >$, es decir

$$1 - 2q < 2q - 1 \Leftrightarrow q > \frac{1}{2}$$

$$1 - 2q = 2q - 1 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2q > 2q - 1 \Leftrightarrow q < \frac{1}{2}$$

Graficando sería

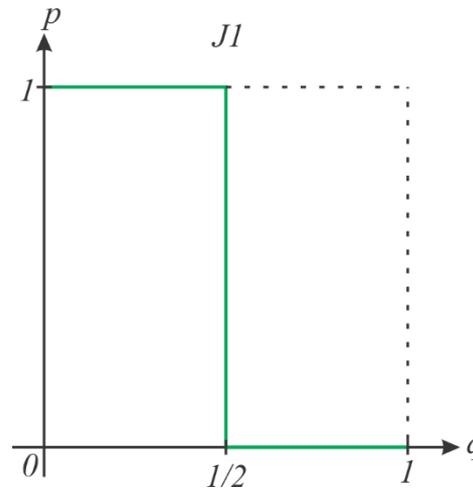


Figura 2.2-3 Elección de la estrategia mixta para el jugador 1

Analizando a $J2$:

Se supondrá ahora que $J1$ elige la estrategia mixta

$$(p, 1-p) \rightarrow \begin{cases} p & , \text{elige cara} \\ 1-p & , \text{elige sello} \end{cases}$$

Bajo este supuesto las ganancias del $J2$ se dan como sigue:

- $p(1) + (1-p)(-1) = 2p - 1$, si elige cara
- $p(-1) + (1-p)(1) = 1 - 2p$, si elige sello

Luego se analiza si estos resultados son $<, =, >$, es decir

$$2p - 1 < 1 - 2p \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$$

$$2p - 1 = 1 - 2p \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

$$2p - 1 > 1 - 2p \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$$

Graficando sería

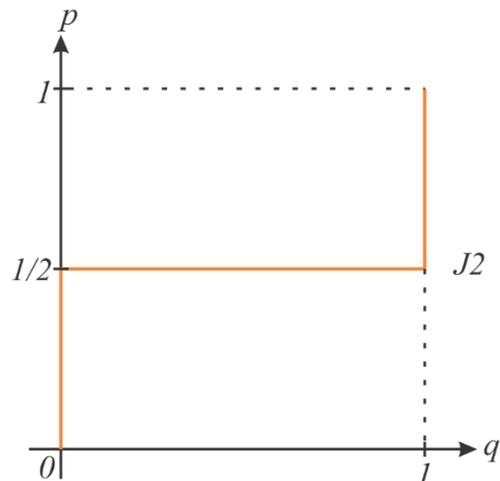


Figura 2.2-4 Elección de la estrategia mixta para el jugador 2

Donde un equilibrio se ve en:

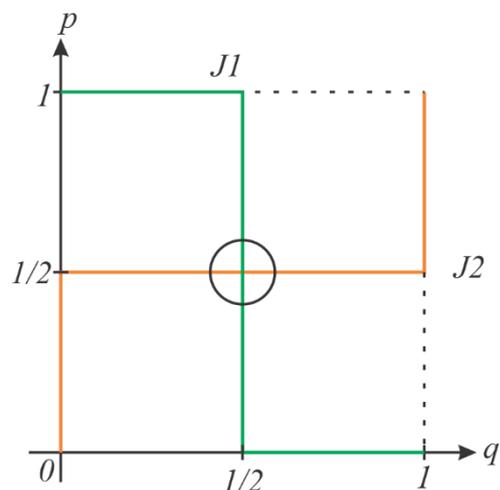


Figura 2.2-5 Equilibrio de Nash en el problema de la moneda

$$EN EM = \left(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}S, \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}S \right)$$

2.2.5. Juegos de Suma Constante con Dos Jugadores

Definición 2.5.1. – *Un juego de suma constante con dos jugadores es un juego con dos jugadores, llamados jugador fila y jugador columna, con estrategias*

$$S_{\text{jugador fila}} = \{1, 2, \dots, m\}$$

y

$$S_{\text{jugador columna}} = \{1, 2, \dots, n\}$$

Con la matriz de pago

		<i>Jugador columna</i>			
		<i>1</i>	<i>2</i>	<i>...</i>	<i>n</i>
<i>Jugador Fila</i>	<i>1</i>	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	\dots	(a_{1n}, b_{1n})
	<i>2</i>	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	\dots	(a_{2n}, b_{2n})
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
	<i>m</i>	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	\dots	(a_{mn}, b_{mn})

Donde se satisface que $a_{ij} + b_{ij} = c = \text{constante}$, para todo $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$. En el caso particular en que la constante c es cero, se dice que el juego es de suma cero. (Cerdá, 2004)

Comentarios. - Para el caso de estrategias mixtas, se considera:



- Una distribución de probabilidad en estrategias puras para el jugador fila

$$\text{como } p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in \Delta_m, \text{ entonces } p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

- Una distribución de probabilidad en estrategias puras para el jugador

$$\text{columna como } q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \Delta_n, \text{ entonces } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

luego el pago esperado para ambos jugadores será:

- Para el jugador fila

$$u_L(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j a_{ij} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m]_{1 \times m} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$u_L(p, q) = p^T A q$$

$$\text{Con } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

- Para el jugador columna

$$u_C(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j b_{ij} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m]_{1 \times m} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$u_C(p, q) = p^T B q$$

$$\text{Con } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Y cuando el juego tiene una suma constante, ocurrirá que

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & c & \dots & c \\ c & c & \dots & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \dots & c \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$A + B = C = \begin{bmatrix} c & c & \dots & c \\ c & c & \dots & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \dots & c \end{bmatrix}_{m \times n} = c \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{m \times n} = c \mathbf{1}$$

En lo posterior $\mathbf{1}$ representa a la matriz de orden $m \times n$ donde todos sus elementos son la unidad, entonces podemos reescribir nuestro pago como

$$u_C(p, q) = p^T B q = p^T (c \mathbf{1} - A) q = c p^T \mathbf{1} q - p^T A q = c - u_L(p, q)$$

De donde podemos indicar que $u_C(p, q) = c - u_L(p, q)$

Además $p^T \mathbf{1} q = 1$, porque p y q son distribuciones de probabilidad,

entonces

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1 \text{ y } \sum_{j=1}^n q_j = 1$$

En particular, se cumple que

$$u_L(p^*, q^*) \geq u_L(p, q^*) \quad \Leftrightarrow \quad u_C(p^*, q^*) \leq u_C(p, q^*) \quad (2.1)$$

2.2.6. Equilibrio De Nash En Estrategia Puras

Definición 2.6.1 (*Punto de silla*). – Se dice que un elemento a_{ij} de una matriz A es un punto de silla de la matriz A si es en simultaneo un mínimo en su línea y un máximo en su columna, es decir,

$$a_{ij} \leq a_{il} \text{ para todo } l = 1, \dots, n$$

y

$$a_{ij} \geq a_{kj} \text{ para todo } k = 1, \dots, m$$

(Cerdá, 2004)

Teorema 2.6.1. – El elemento a_{ij} es un punto de silla de la matriz A si y solamente si, (i, j) es un equilibrio de Nash en estrategias puras para un juego. (Cerdá, 2004)

Demostración.

[\Rightarrow]

Sea el punto silla a_{ij} de la matriz A , entonces es un máximo en su columna, es decir

$$u_L(i, j) = a_{ij} \geq a_{kj} = u_L(k, j)$$

$\forall k = 1, \dots, m$, esto implica que el jugador fila no puede aumentar su pago si el jugador columna mantiene su elección en la columna j . Así mismo, como a_{ij} es mínimo en su línea, se cumple



$$u_C(i, j) = b_{ij} = c - a_{ij} \geq c - a_{il} = b_{il} = u_C(i, l)$$

$\forall l = 1, \dots, n$, esto implica que el jugador columna no puede incrementar su pago si el jugador fila mantiene su elección en la fila i . Esto prueba que el perfil de estrategia pura (i, j) es un equilibrio de Nash del juego.

[\Leftarrow]

Sea el par (i, j) un equilibrio de Nash del juego, es decir que se cumple que

$$u_C(i, j) \geq u_C(i, l), \quad \forall l = 1, \dots, n$$

y

$$u_L(i, j) \geq u_L(k, j), \quad \forall k = 1, \dots, m$$

Esto implica que es un máximo en su columna y un mínimo en su línea, por consiguiente a_{ij} es un punto de silla de la matriz A ■

Teorema 2.6.2. – Si los puntos a_{ij} y a_{rs} son puntos de silla de la matriz A , entonces a_{is} y a_{rj} también son puntos de silla de la matriz A donde se cumple que $a_{ij} = a_{rs} = a_{is} = a_{rj}$. (Sartini, 2004)

Demostración.

Dentro de la matriz A se ubican los puntos $a_{ij}, a_{rs}, a_{is}, a_{rj}$ entonces



$$A = \begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{is} & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rs} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

Como a_{ij} y a_{rs} son puntos de silla, entonces ellos son mínimos en sus respectivas filas y máximos en sus respectivas columnas, luego

$$a_{ij} \leq a_{is} \leq a_{rs} \text{ y } a_{ij} \geq a_{rj} \geq a_{rs}$$

Por tanto

$$a_{ij} = a_{is} = a_{rj} = a_{rs}$$

Se observa que a_{is} es el mínimo en su línea, por qué $a_{ij} = a_{is}$ y es un mínimo en la misma línea que a_{is} y es máximo en su columna, pues $a_{rs} = a_{is}$ es un máximo de la misma columna.

Similarmente se tiene que a_{rj} es mínimo en su línea, pues $a_{rj} = a_{ij}$ es máximo en su misma columna. Por lo tanto, a_{is} y a_{rj} son puntos de silla de la matriz A ■

Se define entonces

$$u_L(A) = \max_{1 \leq k \leq m} \overline{a_k} = \max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq m} a_{kl}$$

y

$$u_C(A) = \min_{1 \leq l \leq n} \overline{a_l} = \min_{1 \leq l \leq n} \max_{1 \leq k \leq m} a_{kl}$$

Donde

- El pago mínimo del jugador fila, si este escoge la fila k , está dado por

$$\underline{a}_k = \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl}$$

- El pago mínimo del jugador columna, si este escoge la columna l , está

$$\text{dado por } c - \bar{a}_l, \text{ donde } \bar{a}_l = \max_{1 \leq k \leq m} a_{kl}$$

Teorema 2.6.3. -Para toda matriz A existe $u_C(A) \geq u_L(A)$

(Perez, 2017)

Demostración

Tenemos que $\forall k = 1, \dots, m$ y $\forall j = 1, \dots, n$ se cumple que

$$a_{kj} \geq \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl}$$

Asimismo

$$\max_{1 \leq k \leq m} a_{kj} \geq \max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl} = u_L(A)$$

$\forall j = 1, \dots, n$. Por lo tanto

$$u_C(A) = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq k \leq m} a_{kj} \geq \max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl} = u_L(A) \quad \blacksquare$$

El teorema siguiente, determina la existencia de puntos de silla en consecuencia la existencia de equilibrios de Nash en estrategias puras, en términos de las funciones u_L y u_C .

Teorema 2.6.4. – Una matriz A tiene un punto de silla, si y sólo si,

$$u_L(A) = u_C(A). \quad (\text{Sartini, 2004})$$

Demostración.

[\Rightarrow]

Si a_{ij} es un punto de silla de la matriz A , entonces $a_{ij} = \min_{1 \leq l \leq n} a_{il} = \underline{a}_i$.

Además, como $u_L(A) = \max_{1 \leq k \leq m} \underline{a}_k$ esta claro que $u_L(A) = \underline{a}_i = a_{ij}$.

Por otro parte, $a_{ij} = \max_{1 \leq k \leq m} a_{kj} = \overline{a}_j$. Como $u_C(A) = \min_{1 \leq l \leq n} \overline{a}_l$, resulta que

$$u_C(A) \leq \overline{a}_j = a_{ij}.$$

Juntando estas dos desigualdades, se obtiene que $u_C(A) \leq a_{ij} \leq u_L(A)$.

Pero por el teorema anterior, $u_C(A) \geq u_L(A)$ se concluye $u_C(A) = u_L(A)$.

[\Leftarrow]

Como $u_L(A) = \max_{1 \leq r \leq m} \underline{a}_r$, existe una línea i , tal que $u_L(A) = \underline{a}_i$. Pero, a

su vez, $\underline{a}_i = a_{il}$.

Así mismo, $u_L(A) = \underline{a}_i = a_{il}$. Similarmente, como $u_C(A) = \min_{1 \leq s \leq n} \overline{a}_s$,

existe una columna j tal que $u_C(A) = \overline{a}_j$. Pero, a la vez $\overline{a}_j = \max_{1 \leq r \leq m} a_{rj}$, existe

una línea k tal que $\overline{a}_j = a_{kj}$. Así mismo, $u_C(A) = \overline{a}_j = a_{kj}$. Puesto que por

hipótesis se tiene que $u_L(A) = u_C(A)$, se obtendrá

$$a_{il} = \underline{a}_i = u_L(A) = u_C(A) = \overline{a}_j = a_{kj}$$

Finalmente podemos afirmar que a_{ij} es un punto de silla de la matriz A .

En efecto $a_{ij} \leq \overline{a}_j = \underline{a}_i \leq a_{is}$, para todo $s = 1, \dots, n$, esto es, a_{ij} es el mínimo de su

línea, por otra parte, $a_{ij} \geq \underline{a}_i = \overline{a}_j \geq a_{rj}$, para todo $r = 1, \dots, m$ esto es, a_{ij} es un máximo de su columna. Por lo tanto a_{ij} es un punto de silla de la matriz A .



2.2.7. Equilibrio De Nash En Estrategias Mixtas

Se define

$$u_L(A) = \max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} p^T A q$$

y

$$u_C(A) = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^T A q$$

donde

- $u_L(A)$ y $u_C(A)$, son los pagos de los jugadores fila (L) y columna (C) respectivamente
- A es la matriz de estrategias para los jugadores fila y columna

Teorema 2.7.1. – *Para toda matriz A , existe $u_C(A) \geq u_L(A)$. (Perez, 2017)*

Demostración.

Se sabe que $\forall p \in \Delta_m$, cumple

$$p^T A q \geq \min_{y \in \Delta_n} p^T A y$$

Así mismo, se tiene que

$$\max_{p \in \Delta_m} p^T A q \geq \max_{p \in \Delta_m} \min_{y \in \Delta_n} p^T A y = u_L(A)$$

Por lo tanto

$$u_C(A) = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^T A q \geq \max_{p \in \Delta_m} \min_{y \in \Delta_n} p^T A y = u_L(A) \quad \blacksquare$$

El siguiente teorema determina la existencia de Equilibrio de Nash en estrategias mixtas en términos de las funciones u_L y u_C

Teorema 2.7.2. – *Un perfil de estrategias mixtas (p^*, q^*) es un equilibrio de Nash de un juego de dos jugadores con suma constante definido por la matriz de pago A del jugador fila, si y solo si*

$$u_L(A) = u_C(A) = p^{*T} A q^*$$

(Perez, 2017)

Demostración.

[\Rightarrow]

Si (p^*, q^*) es un equilibrio de Nash, entonces

$$p^{*T} A q^* = u_L(p^*, q^*) \geq u_L(p, q^*) = p^T A q^*$$

Esto es $\forall p \in \Delta_m$. En particular,

$$p^{*T} A q^* = \max_{p \in \Delta_m} p^T A q^* \geq \min_{y \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^T A y = u_C(A)$$

También se observa que

$$p^{*T} A q^* = c - u_C(p^*, q^*) \leq c - u_C(p^*, q) = p^{*T} A q,$$

Esto es $\forall q \in \Delta_n$. En particular



$$p^{*T} Aq^* = \min_{q \in \Delta_n} p^{*T} Aq \leq \max_{x \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} x^T Aq = u_L(A)$$

De esta manera, $u_L(A) \geq u_C(A)$. Pero, por el teorema anterior, $u_L(A) \leq u_C(A)$

, se concluye que $u_L(A) = u_C(A)$.

[\Leftarrow]

Como $u_L(A) = \max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} p^T Aq$, existe $p^* \in \Delta_m$ tal que se cumple

$$u_L(A) = \min_{q \in \Delta_n} p^{*T} Aq$$

Similarmente, como $u_C(A) = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^T Aq$, existe $q^* \in \Delta_n$ tal que se

cumple

$$u_C(A) = \max_{p \in \Delta_m} p^T Aq^*$$

Por hipótesis se sabe que $u_L(A) = u_C(A)$, entonces

$$\min_{q \in \Delta_n} p^{*T} Aq = u_L(A) = u_C(A) = \max_{p \in \Delta_m} p^T Aq^*$$

Luego se puede afirmar que (p^*, q^*) es un equilibrio de Nash del juego. En efecto

$$u_L(p^*, q^*) = p^{*T} Aq^* \geq \min_{q \in \Delta_n} p^{*T} Aq = \max_{p \in \Delta_m} p^T Aq^* \geq x^T Aq^* = u_L(x, q^*)$$

Esto ocurre para todo $x \in \Delta_m$. Por otra parte,

$$u_C(p^*, q^*) = c - p^{*T} Aq^* \geq -c \max_{p \in \Delta_m} p^T Aq^* = c - \min_{q \in \Delta_n} p^{*T} Aq \geq c - p^{*T} Ay = u_C(p^*, y)$$

Para todo $y \in \Delta_n$.

De esta forma (p^*, q^*) es un equilibrio de Nash del juego ■

2.2.8. Teorema Minimax De Von Neumann

Teorema 2.8.1. (MINIMAX DE VON NEUMANN). – *Para todo juego de suma cero con dos jugadores, representado por la matriz de pago A del jugador línea, siempre existe un perfil de estrategia mixta $(p^*, q^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ satisfaciendo*

$$u_L(A) = \max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} p^T A q = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^T A q = u_C(A)$$

En particular, (p^, q^*) es un equilibrio de Nash del juego. (Sartini, 2004)*

Comentarios:

- I. Este teorema establece que, para juegos de suma cero donde intervienen dos jugadores siempre se cumple que $u_L(A) = u_C(A)$. Y por el teorema 2.7.2 se obtiene que, para esta clase de juegos, siempre existe por lo menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.
- II. Para demostrar este teorema de minimax de Von Neumann, se utiliza el teorema de Dualidad en la teoría de programación lineal.
- III. Hay que recordar que un problema primal de optimización, es de la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & b^T y \\ \text{Sujeto a} & Ay \leq c, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Se le puede asociar otro problema de optimización llamado problema dual, que tiene la siguiente forma:



minimizar $c^T x$

Sujeto a $x^T A \geq b^T$,
 $x \geq 0$

Teorema 2.8.2. (de dualidad en programación lineal) -

a) El problema primal posee una solución si y solo si, el problema dual posee una solución.

b) Si y^* es una solución del problema primal y x^* es una solución del problema dual, entonces $c^T x^* = b^T y^*$. (Luenberger, 1984)

Demostración.

Esta prueba puede ser encontrada en (Luenberger, 1984)

Demostración (teorema de minimax)

Se va a considerar que todas las entradas de la matriz de pagos A del jugador fila son positivas, si no fuera el caso solo se tiene que sustituir A por

$A = A + D$ y $B = -A$ por $B = -D + B$, en donde $D = d \mathbf{1}$, con

$$d > \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|.$$

El juego definido por la matrices A y B tiene suma cero, es decir $A + B = 0$, y que también (p^*, q^*) es un equilibrio de Nash para el juego definido por la matriz A , si y sólo si, A es un equilibrio de Nash para el juego definido por la matriz A .

Ahora sean $c = (1, 1, \dots, 1)^T$ y $b = (1, 1, \dots, 1)^T$ y considerando también los problemas de programación lineal:



- Problema primal

$$\text{maximizar } b^T y$$

$$\text{Sujeto a } \begin{aligned} Ay &\leq c, \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

- Problema dual

$$\text{minimizar } c^T x$$

$$\text{Sujeto a } \begin{aligned} x^T A &\geq b^T, \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Primero se analizará que el problema dual posee una solución

Como $A > 0$, y el conjunto no vacío $X = \{x \in \mathbb{R}^m / x^T A \geq b^T \wedge x \geq 0\}$ es admisible. Por otra parte, como $c = (1, 1, \dots, 1)^T$, es una función objetivo del problema, se escribe como

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto c^T x = x_1 + x_2 + \dots + x_m.$$

Luego el problema dual trata de encontrar un punto del conjunto X más cerca al origen según la norma de la suma $\|\cdot\|_1$, un problema que sin duda tiene solución porque, si $p \in X$, entonces podemos compactar al conjunto admisible incluyendo la restricción $\|x\|_1 \leq \|p\|_1$, y, con esto, se utiliza el teorema de Weierstrass para garantizar la existencia de un mínimo.

Como segundo paso realizará la construcción del equilibrio de Nash

Dado que el problema dual tiene solución, esto por el teorema de la dualidad, entonces el problema primal también tiene solución. Además: si x^* es la solución del problema dual y y^* es la solución del problema primal, entonces



$$c^T x^* = b^T y^*$$

Ahora sea $\theta = c^T x^* = b^T y^* > 0$ (porque $(0,0,\dots,0)$ no es admisible) y se define

$$p^* = \frac{x^*}{\theta} \quad \text{y} \quad q^* = \frac{y^*}{\theta}$$

Luego se puede afirmar que (p^*, q^*) es un equilibrio de Nash del juego.

En efecto, notamos visiblemente que $p^* \in \Delta_m$ y $q^* \in \Delta_n$, luego $p^* \geq 0$ (ya que $x^* \geq 0$ y $\theta > 0$), $q^* \geq 0$ (ya que $y^* \geq 0$ y $\theta > 0$),

$$\sum_{i=1}^m p_i = \sum_{i=1}^m \frac{x_i^*}{\theta} = \frac{c^T x^*}{\theta} = \frac{\theta}{\theta} = 1$$

y

$$\sum_{j=1}^n q_j = \sum_{j=1}^n \frac{y_j^*}{\theta} = \frac{b^T y^*}{\theta} = \frac{\theta}{\theta} = 1$$

Ahora, como $x^{*T} A \geq b^T$, se tiene que para todo $q \in \Delta_n$, se cumple

$$x^{*T} A q \geq b^T q = \sum_{j=1}^n q_j = 1$$

Sin embargo, $x^* = \frac{p^*}{\theta}$. De esta manera, $p^{*T} A q \geq \theta = p^{*T} A q^*$, para todo $q \in \Delta_n$

. Por consiguiente

$$u_C(p^*, q^*) = p^{*T} A q^* \geq p^T A q^* = u_L(p, q^*)$$



Para todo $p \in \Delta_m$

Luego, se ha demostrado que el jugador fila no puede aumentar su pago esperado intercambiando p^* por p , y el jugador columna mantiene la opción q^* . Por lo tanto, Concluye que (p^*, q^*) es un equilibrio de Nash del juego. ■

Comentario. – la demostración que se acaba de realizar no solo establece la existencia de equilibrio de Nash, si no también muestra una forma de calcularlos.

Ejemplo 5. – La municipalidad tiene un plan de vacunar a sus ciudadanos contra un determinado virus de la gripe. Este virus tiene dos serotipos y se desconoce la proporción en la que aparecen los dos serotipos en la población del virus. Se cuenta con dos vacunas donde la eficacia de la vacuna 1 es del 85% contra el serotipo 1 y del 70% contra el serotipo 2. La eficacia de la vacuna 2 es del 60% contra el serotipo 1 y del 90% contra el serotipo 2. ¿Qué política de vacunación debería adoptar la municipalidad?

Análisis

El problema se puede presentar como un juego de suma cero de dos jugadores, donde:

- El jugador de fila L (la municipalidad) quiere que la FCR (fracción de ciudadanos resistentes al virus) sea lo más grande posible y
- El jugador columna C (el virus) quiere que la FCR sea lo más pequeña posible.

La matriz de pagos es la siguiente:

Virus



		Serotipo 1	Serotipo 2
Municipalidad	Vacuna 1	$\left(\frac{85}{100}, -\frac{85}{100}\right)$	$\left(\frac{70}{100}, -\frac{70}{100}\right)$
	Vacuna 2	$\left(\frac{60}{100}, -\frac{60}{100}\right)$	$\left(\frac{90}{100}, -\frac{90}{100}\right)$

Tenemos que resolver el siguiente problema de programación lineal para encontrar el equilibrio de Nash

- Problema primal

maximizar $y_1 + y_2$

sujeto a
$$\begin{bmatrix} 85/100 & 70/100 \\ 60/100 & 90/100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Problema dual

minimizar $x_1 + x_2$

sujeto a
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85/100 & 70/100 \\ 60/100 & 90/100 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo que nos resulta

- Problema primal

maximizar $y_1 + y_2$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a} \quad & 17y_1 + 14y_2 = 20 \\ & 6y_1 + 9y_2 = 10 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Problema dual

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 7x_1 + 12x_2 = 20 \\ & 7x_1 + 9x_2 = 10 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donde la solución al problema dual es $x^* = \left(\frac{20}{23}, \frac{10}{23}\right)$ y la solución al problema

primal es $y^* = \left(\frac{40}{69}, \frac{50}{69}\right)$, con

$$\theta = x_1^* + x_2^* = y_1^* + y_2^* = \frac{30}{23}$$

Como se ven en las siguientes figuras

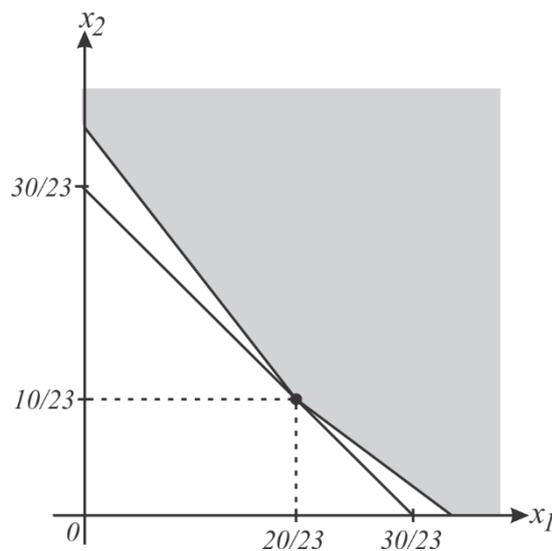


Figura 2.2-6 Solución del problema dual

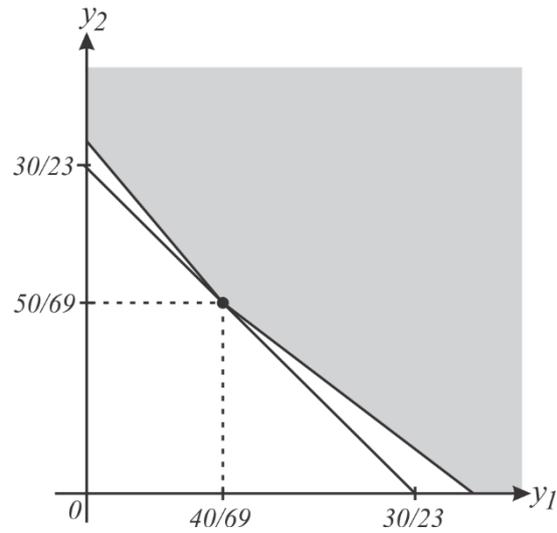


Figura 2.2-7 Solución del problema primal

En donde el punto (p^*, q^*) es el único equilibrio de Nash para el problema, en donde

$$p^* = \frac{x^*}{\theta} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad y \quad q^* = \frac{y^*}{\theta} = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$$



CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. MATERIALES

En este trabajo de investigación utilizamos bibliografía física y virtual, como libros, tesis y artículos científicos relacionados con el teorema de punto fijo de Brouwer, teorema de equilibrio de Nash y textos relacionados al tema de investigación que corresponden al área de matemáticas y economía, que implican la teoría de juegos. Además, utilizamos herramientas tecnológicas como laptop, internet e impresora.

3.2. TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

Tipo de investigación

El trabajo de investigación es básico teórico (pura o fundamental), porque la investigación se basa en profundizar los resultados, así también incrementar los conocimientos del tema de investigación.

Diseño de investigación

La investigación de este trabajo es de diseño no experimental, ya que se lleva a cabo sin intervención deliberada de las variables involucradas.

3.3. MÉTODOS

Este tipo de investigación es básica y pura, puesto que se centra en comprender y explorar la teoría de juegos, demostrando el teorema de equilibrio de Nash, usando el teorema de punto fijo de Brouwer. El método a emplear es el método inductivo-deductivo, debido a que la inducción y la deducción son herramientas complementarias en el proceso



de pensamiento lógico. Este método se utiliza para el analizar definiciones, corolarios, teoremas y ejemplos.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. RESULTADOS

4.1.1. Demostración del teorema de punto fijo de Brouwer

El teorema de punto fijo de Brouwer afirma que toda función continua que aplica en un conjunto convexo y compacto sobre sí mismo tiene por lo menos un punto fijo, y además el Teorema de Equilibrio de Nash establece que para todo juego finito de suma no cero, con una cantidad finita de jugadores y estrategias, por lo menos existe un equilibrio de Nash en estas estrategias mixtas para este tipo de juegos, en este sentido el teorema de punto fijo de Brouwer garantiza la existencia de este equilibrio.

Con el fin de comprender mejor la demostración del teorema, se va a enunciar algunos conceptos previos.

Teorema 4.1. (Teorema del punto Fijo de Brouwer)

Sea F una función continua de la bola unitaria cerrada B^n de un espacio euclidiano en sí mismo, entonces existe un punto x en B^n tal que $F(x) = x$, $1 \leq n < \infty$. (Garcia, 2020)

Definición 4.1. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, una función $v = X \rightarrow \mathbb{R}^n$ no nulo tal que para todo $x \in X$ con $x \cdot v(x) = 0$, donde “ \cdot ” es el producto interno, v es un campo de vectores tangentes a X . Además, si v es continua, se dice que el campo es continuo de vectores tangentes a X . (McCleary, 2006)

Teorema 4.2. (Teorema de la bola Peluda) Si n es impar, entonces la esfera S^{n-1} no tiene un campo continuo de vectores tangentes no nulos. (McCleary, 2006)

Si n es par, un campo de vectores tangentes a S^{n-1} es la función no nula v , que está definida por

$$v: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_2, -x_1, \dots, x_n, -x_{n-1})$$

como v es continua y n es par, entonces existe un campo de vectores continuo a S^{n-1} . Es importante mencionar que v no es único, también puede tener la forma $v: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $v(x_1, \dots, x_n) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_n, x_{n-1})$ donde también es un campo de vectores tangentes continuo a S^{n-1} .

Comentario. – Este teorema recibe este nombre por la analogía que presenta una bola con pelos donde los pelos son los vectores tangentes al campo, entonces si la bola se puede peinar, entonces existe un campo continuo de vectores tangentes, caso contrario la pelota estaría sin pelos.

Demostración del Teorema del Punto Fijo de Brouwer

La demostración está basada en el teorema de la Bola Peluda, por lo tanto, se realizará para dos casos, cuando n toma un valor par y luego para cuando n es impar.

- **n es par.** - (Por el absurdo)

Suponiendo que F no tiene un punto fijo en B^n y bajo esta suposición se puede generar un campo de vectores continuos a la esfera S^n , entonces se genera a una contradicción con el teorema de la Bola Peluda.



Dada una función continua F en B^n que no tiene puntos fijos en B^n es decir $\forall x \in B^n, F(x) \neq x \rightarrow F(x) - x \neq 0$, además

$$0 < \|x - F(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|F(x)\|^2 - 2x \cdot F(x) \leq 2 - 2x \cdot F(x)$$

En consecuencia, si $\|x\| = 1$ se obtiene que

$$x \cdot (x - F(x)) = 1 - x \cdot F(x) > 0 \quad (4.1)$$

si se define ahora una función $k: B^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$k(x) = \frac{1 - x \cdot x}{1 - x \cdot F(x)}$$

donde $1 - x \cdot F(x) \neq 0$ por la ecuación (4.1), entonces se puede genera un campo de vectores

$$z(x) = x - k(x) \cdot F(x) \quad (4.2)$$

Donde se observa que $z: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es decir

$$z(x) = x - \frac{1 - x \cdot x}{1 - x \cdot F(x)} F(x)$$

Luego a partir de la función $z(x)$ se va a generar un campo de vectores tangentes.

Seguidamente se debe ver que z sea continua y que no se anule en la bola unitaria es decir que $z \neq 0$, para esto, como las funciones identidad x , k y F son continuas entonces z es continua donde se cumple que $z(x) = x$ en la esfera unitaria, y esto se cumple por que x se encuentra en la esfera unitaria, entonces cumple que $\|x\| = 1$, donde ocurre que

$$z(x) = x - k(x) \cdot F(x) = x \quad (4.3)$$

porque en $k(x)$, $1 - x \cdot x = 0$.

Ahora se verá que $z(x)$ no se anule en toda la bola unitaria, para probar esto se supondrá que debe existir en la bola unitaria un x^* tal que $z(x^*) = 0$ y de acuerdo con (4.2) se obtiene que $x^* = k(x^*) \cdot F(x^*)$, luego le multiplicamos a esta expresión por el denominador de $k(x)$ y utilizando la misma definición de $k(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} x^* &= k(x^*) \cdot F(x^*) \\ x^* (1 - x^* \cdot F(x^*)) &= k(x^*) \cdot F(x^*) (1 - x^* \cdot F(x^*)) \\ x^* - (x^* \cdot F(x^*)) x^* &= \left(\frac{1 - x^* \cdot x^*}{1 - x^* \cdot F(x^*)} \right) \cdot F(x^*) (1 - x^* \cdot F(x^*)) \\ x^* - (x^* \cdot F(x^*)) x^* &= F(x^*) - (x^* \cdot x^*) F(x^*) \end{aligned}$$

Como $x^* = k(x^*) \cdot F(x^*)$, entonces $F(x^*) = \frac{x^*}{k(x^*)}$ que en la última expresión resulta que

$$x^* - \frac{(x^* \cdot x^*) x^*}{k(x^*)} = F(x^*) - \frac{(x^* \cdot x^*) x^*}{k(x^*)}$$

por igualdad de términos se observa que $x^* = F(x^*)$, y esto es una contradicción a la hipótesis, por consiguiente $z(x) \neq 0$ en toda la bola unitaria.

Como la idea es construir un campo continuo de vectores tangentes a la esfera S^n . Para esto se va a considerar el ecuador de la bola B^{n+1} como $E^{n+1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$ y su hemisferio sur $B_{n+1}^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in B^{n+1} : x_{n+1} \leq 0\}$. Ahora se va a identificar la bola B^n con el ecuador definido arriba E^{n+1} de la bola B^{n+1} de la forma

siguiente $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ de donde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$ y $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \in B^{n+1}$.

Luego se va a realizar proyecciones y utilizar la función z para construir un campo tangente a S^n en el hemisferio sur B_{n+1}^- que empalme con el ecuador (la forma de hallar un campo tangente a S^n en el hemisferio norte N^{n+1} es de manera análoga al procedimiento que se va a realizar para el hemisferio sur).

Proyectando desde el polo norte $N = (0, 0, \dots, 0, 1) \in B^{n+1}$ el punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ al ecuador E^{n+1} , sobre la esfera unitaria S^n . Si considerando un $x \in E^{n+1}$, y que la proyección sobre el hemisferio sur B_{n+1}^- es

$v(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_{n+1}(x))$, entonces x debe estar ubicado en algún punto intermedio de la recta que va de N hasta $v(x)$. Por consiguiente $\exists \theta \in [0, 1]$, que cumple $x = (1 - \theta)N + \theta v(x)$, y como $N = (0, 0, \dots, 0, 1)$, la última expresión debe ser equivalente a

$$x_i = \theta v_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

$$0 = (1 - \theta) + \theta v_{n+1}(x) \quad (4.5)$$

Teniendo en cuenta (4.4) donde $v_i(x) = \frac{x_i}{\theta}$, que en $v(x)$ se puede expresar

como

$$v(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_{n+1}(x)) = \left(\frac{x_1}{\theta}, \frac{x_2}{\theta}, \dots, \frac{x_n}{\theta}, \frac{\theta - 1}{\theta} \right) \quad (4.6)$$

Como $v(x) \in S^n$ se tiene que $\|v(x)\| = 1$, por consiguiente



$$1 = \sum_{i=1}^n v_i^2(x) + v_{n+1}^2(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\theta} + \frac{(\theta-1)^2}{\theta^2}$$

Que si se multiplica esta expresión por θ^2 resulta

$$\begin{aligned} \theta^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\theta-1)^2 = |x|^2 + \theta^2 - 2\theta + 1 \\ 0 &= |x|^2 - 2\theta + 1, \quad |x|^2 \geq 0 \rightarrow |x|^2 = x^2 \\ \theta &= \frac{1}{2}(x^2 + 1) \end{aligned}$$

de donde se observa que $\theta \geq \frac{1}{2}$.

Ahora, haciendo uso de los resultados previos, para todo x que está en el ecuador E^{n+1} se define un vector $u(x) \neq 0$ tangente a S^n en el punto $v(x)$. Para esto se define

$$\begin{aligned} X(t) &= x + tz(x) \\ V(t) &= v(x + tz(x)) \end{aligned}$$

Donde:

- t es lo necesariamente pequeño para que el segmento $x + tz(x)$ este contenido totalmente en E^{n+1} .
- como $x \in E^{n+1}$ entonces $\|x\| < 1$

Si se considera $t=0$ se puede observar que $X(0)=x$, $V(0)=v(x)$ y $\|V(t)\| = \|v(x + tz(x))\| = 1$ por qué $x + tz(x)$ se encuentra en la esfera unitaria S^n .

Sea $u(x) = (u_1(x), \dots, u_{n+1}(x))$, entonces se puede definir de la siguiente manera



$$u(x) = \frac{\partial V(0)}{\partial t}$$

es decir que $u(x) = \nabla V(0)$.

Ahora se puede ver que $u(x)$ definida de la última forma es tangente a S^n en $v(x)$, por que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} (V(t) \cdot V(t)) \\ &= \nabla V(t) \cdot V(t) + V(t) \cdot \nabla V(t), \quad \text{por regla del producto} \\ &= 2V(t) \cdot \nabla V(t) \end{aligned}$$

en esta última expresión se evalúa en cero, se obtiene

$$0 = v(x) \cdot u(x)$$

lo que muestra que $u(x)$ es tangente a S^n en $v(x)$, faltaría mostrar que $u(x) \neq 0$, para esto se va a considerar que existe la proyección de $X(t)$ desde N , de manera análoga a lo anterior, con una función $\theta(t)$ con $\theta(0) = \theta$ que cumple

$$X(t) = (1 - \theta(t)) \cdot N + \theta(t) \cdot V(t)$$

que al derivar esta última expresión se tiene

$$\begin{aligned} X(t) &= (1 - \theta(t)) \cdot N + \theta(t) \cdot V(t) \\ X(t) &= N - \theta(t) \cdot N + \theta(t) \cdot V(t) \\ X(t) &= -\nabla \theta(t) \cdot N + \theta(t) \cdot \nabla V(t) + \theta(t) \cdot \nabla V(t) \end{aligned}$$

al ser evaluada en cero y teniendo en cuenta que $X(0) = x$ y que por (4.3)

$x = z(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} X(0) &= -\nabla \theta(0) \cdot N + \theta(0) \cdot \nabla V(0) + \theta(0) \cdot \nabla V(0) \\ z(x) &= -\nabla \theta(0) \cdot N + \theta(0) \cdot v(x) + \theta u(x) \end{aligned}$$

y al despejar $u(x)$ resulta que

$$u(x) = \frac{z(x) - \theta(0) \cdot (N - v(x))}{\theta} \quad (4.7)$$

En esta última expresión para que $u(x) \neq 0$ se puede considerar los siguientes casos:

- Si $\theta(0) = 0$, entonces $u(x) \neq 0$, por que al principio de la demostración se garantizó que $z(x) \neq 0$.
- Si $\theta(0) \neq 0$ se tiene que $u(x) \neq 0$, por que su $(n+1)$ -ésima componente es no nula, y esto se ve en la forma de $u(x)$ en (4.7), es decir

$$u_{n+1}(x) = \frac{0 + \theta \cdot (1 - v_{n+1}(x))}{\theta} \neq 0 \text{ pues } v_{n+1}(x) < 0 \text{ y } \theta \geq \frac{1}{2}.$$

Por todo lo mostrado, se observa que $u(x) \neq 0$ y además que $u(x) \cdot v(x) = 0$ en todo el hemisferio sur B_{n+1}^- , que pertenecen a los puntos de S^n con componentes $v_{n+1}(x) < 0$. A su vez, de (4.4) y (4.5) se cumple que $v(\cdot)$ es continua, y como $z(x)$ también es continua, entonces, de la ecuación (4.7) se afirma también que $u(\cdot)$ también es continua.

Se va ahora a ampliar $u(x)$ a la circunferencia $\{(x_1, \dots, x_n, 0) : \sum x_i^2 = 1\}$ de E^{n+1} (que se ha identificado con S^{n-1} , por el teorema de la bola peluda) de forma continua, usando el límite cuando $v(x) \rightarrow E^{n+1}$, dicho de otra manera cuando $v_{n+1}(x) \rightarrow 0$. En esta situación, de (4.4) y (4.5) $\theta \rightarrow 0$, $v(x) \rightarrow x$ y $\|x\| = 1$. De esta forma



$$u(x) = z(x) + \theta(0) \cdot (N - x)$$

Como $\theta(t) = \frac{1}{2}(\|X(t)\|^2 + 1)$, de donde su derivada es

$$\dot{\theta}(t) = X(t) \cdot \dot{X}(t) = (x + t z(x)) \cdot z(x)$$

y evaluando para $t = 0$, se tiene que

$$\dot{\theta}(0) = x \cdot z(x)$$

Luego en (4.3) se vio que, cuando $\|x\| = 1$ entonces $z(x) = x$, de esta forma

$\dot{\theta}(0) = x \cdot x = 1$, lo que implica que

$$u(x) = x + N - x = N$$

Esto muestra que en todo el ecuador E^{n+1} los vectores tangentes están en dirección al Norte N , y que también se cumple que

$$x \cdot u(x) = 0$$

Para todo $\mathbf{x} \in \{(x_1, \dots, x_n, 0) : \sum x_i^2 = 1\}$

Lo que se ha hecho es definir un campo vectorial continuo de vectores tangentes (no nulos) en todo el hemisferio sur de la esfera unitaria.

Importante. – Para ampliar el campo de vectores obtenido a toda la esfera unitaria se tiene que realizar un procedimiento análogo en el hemisferio norte, es decir, proyectar desde el polo sur, de componentes $S = (0, 0, \dots, 0, -1)$ donde u será definido ahora como $-V(0)$, y esto generará un campo

continuo de vectores tangentes en el hemisferio norte, donde además estos dos campos de vectores coinciden en el ecuador.

Conclusión n par.- Bajo el supuesto que no existían puntos fijos, se a generado un campo continuo de vectores tangentes a la esfera unitaria S^n , lo que contradice al teorema de la bola peluda, Por lo tanto, para cuando n toma un valor par, existe al menos un punto fijo que prueba el Teorema de Punto Fijo de Brouwer para cuando n es par.

- **n es Impar**

Se va a considerar una función F definida sobre B^n en si misma, es decir $F(x) = (F_1(x), F_1(x), \dots, F_n(x))$. Luego consideramos ahora la función H definida sobre la bola B^{n+1} en si misma como

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n), 0)$$

Como las funciones F_i son continuas (por hipótesis), entonces H es continua, y por lo visto en el caso cuando n es par, existe un punto $b \in B^{n+1}$ donde $H(b) = b$, por lo tanto b cumple en cada componente lo siguiente:

$$\begin{cases} b_{n+1} = 0 \\ b_i = F_i(b_1, b_2, \dots, b_n), i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Esto indica que si $x = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in B^n$ este es un punto fijo de F , lo que prueba el Teorema de Punto Fijo de Brouwer para n impar.



Corolario 4.1. (del Teorema de Punto Fijo de Brouwer). Si Δ es un subconjunto compacto y convexo de un espacio Euclidiano de dimensión finita y



$F : \Delta \rightarrow \Delta$ es una función continua, entonces F posee un punto fijo en Δ , es decir, existe $\mathbf{p}^* \in \Delta$ tal que

$$F(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$$

(Garcia, 2020)

Antes de demostrar el corolario para su mejor comprensión se debe tener claro los siguientes conceptos

Definición 4.2. – Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que A y B son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo h entre ellos, es decir, si existe una biyección continua de A sobre B con inversa continua. (James, 2000)

Con el siguiente lema se va a poder extender el teorema de Brouwer a conjuntos topológicamente equivalentes (James, 2000)

Lema 4.1. – Sea D topológicamente equivalente a la bola unitaria B^n y sea F una función continua de D en sí misma, entonces F tiene por lo menos un punto fijo. (James, 2000)

Demostración del lema 4.1.

Por hipótesis tenemos que B^n y D son topológicamente equivalentes esto quiere decir que existe un homeomorfismo $H : B^n \rightarrow D$. Luego se define una función

$G : B^n \rightarrow B^n$ de la forma

$$G(x) = H^{-1}(F(H(x)))$$

que es continua, esto porque F, H y H^{-1} también son continuas.

Ahora el teorema de Punto Fijo de Brouwer indica que existe un punto fijo en G , es decir que existe un punto $p^* \in B^n$ tal que $G(p^*) = H^{-1}(F(H(p^*))) = p^*$ y a esta última expresión le aplicamos H , se obtiene

$$\begin{aligned} H\left(H^{-1}\left(F\left(H\left(p^*\right)\right)\right)\right) &= H\left(p^*\right) \\ F\left(H\left(p^*\right)\right) &= H\left(p^*\right) \end{aligned}$$

De esta última igualdad vemos que $H(p^*)$ es un punto fijo de F ■

Demostración del Corolario 4.1 del Teorema del Punto Fijo de Brouwer

Sea B_r una bola de radio r que está centrada el origen y que además que sea lo bastante grande para que $\Delta \subset B_r$, el cual existe porque Δ es acotado (por hipótesis Δ es compacto que es cerrado y acotado).

Considerando la función

$$\begin{aligned} G: B_r &\rightarrow \Delta \\ x &\mapsto p^* = G(x) \end{aligned}$$

tal que se cumple

$$d(x, p^*) = \min_{p \in \Delta} d(x, p)$$

de esto, debido a la convexidad de Δ y la función G está bien definida, y además

$p^* \in \Delta$ existe porque Δ es cerrado, en donde no puede ocurrir que para todo

$p_1^*, p_2^* \in \Delta$ suceda que $d(x, p_1^*) = d(x, p_2^*)$, por que Δ es convexo, entonces se

tiene que $d\left(x, \frac{p_1^* + p_2^*}{2}\right) < d(x, p_1^*)$, por lo que los puntos no pueden ser a una

distancia mínima de x . También se ve que si $x \in \Delta$, $G(x) = x$.

Analizando ahora que G es continua. se va a considerar una sucesión x_n en B_r que converge a x . Sea $\varepsilon > 0$, y si x_n converge a x , existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De la definición de G se sabe que para $n > N$ se cumple que

$$\begin{aligned} d(x_n, G(x_n)) &\leq d(x_n, G(x)) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x, G(x)) < d(x, G(x)) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

de esta última desigualdad se tiene que, para $n > N$ también se cumple

$$\begin{aligned} d(x, G(x)) &\leq d(x, G(x_n)) \\ &\leq d(x, x_n) + d(x_n, G(x_n)) < d(x_n, G(x_n)) + \frac{\varepsilon}{2} < d(x, G(x)) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

De donde se puede decir que

$$d(x, G(x)) < d(x, G(x_n)) < d(x, G(x)) + \varepsilon$$

Esto conlleva a que $d(x, G(x_n)) \rightarrow d(x, G(x))$ y que por la unicidad de G ocurre que $G(x_n) \rightarrow G(x)$, por consiguiente G es continua.

Como F y G son continuas, si se considera ahora la composición $F \circ G: B_r \rightarrow \Delta$ también continua, y como $B_r \subset \Delta$ se puede considerar que la composición está definida en B_r sobre sí misma, ahora teniendo en cuenta la definición 4.2, que la bola unitaria es topológicamente equivalente a toda bola en \mathbb{R}^n , y por el lema 4.1 que asegura que existe un $x_0 \in B_r$, tal que

$$F(G(x_0)) = x_0 \tag{4.8}$$

Y además la imagen de la composición $F \circ G$ se encuentra contenida en Δ , es decir que $x_0 \in \Delta$ esto implica que $G(x_0) = x_0$, y sustituyendo esto en (4.8) se

obtiene que $F(x_0) = x_0$, en otras palabras que F tiene un punto fijo.



4.1.2. Caracterizaciones alternativas para un equilibrio de Nash

Ahora se va a establecer una serie de proposiciones que proporcionan caracterizaciones alternativas para un equilibrio de Nash.

Proposición 4.1. Para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$, definir las funciones

$$\begin{aligned} z_{ij} : \Delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{p} &\mapsto z_{ij}(\mathbf{p}) = u_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i}) - u_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) \end{aligned}$$

tenemos que \mathbf{p}^* es un equilibrio de Nash, si y sólo si,

$$z_{ij}(\mathbf{p}^*) \leq 0$$

para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$.

Comentario. – La proposición indica que z_{ij} mide la ganancia o pérdida del jugador g_i cuando cambia la distribución de probabilidad p_i por la estrategia pura s_{ij} .

Prueba:

(\Rightarrow)

Si $\mathbf{p}^* = (p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*)$ es un equilibrio de Nash, entonces

$$u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i}^*)$$

Para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$. Consecuentemente,

$$z_{ij}(\mathbf{p}^*) = u_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i}^*) - u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \leq 0$$

Para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$.

(\Leftarrow)

Si

$$z_{ij}(\mathbf{p}^*) = u_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i}^*) - u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \leq 0$$

Para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$, entonces

$$u_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i}^*) = u_i(e_j, \mathbf{p}_{-i}^*) \leq u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*)$$

Para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$ donde e_j es el vector en \square^{m_i} que tiene 1 en

la coordenada j -ésima y cero en el resto. Se mostrará que para todo

$$p_i = (p_{i1}, \dots, p_{im_i}) \in \Delta_{m_i}$$

$$u_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}^*) \leq u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*).$$

Pero, como $x \mapsto u_i(x, \mathbf{p}_i^*)$ es un funcional lineal¹, se tiene que

$$\begin{aligned} u_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}^*) &= u_i\left(\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} \cdot e_k, \mathbf{p}_{-i}^*\right) = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} \cdot u_i(e_k, \mathbf{p}_{-i}^*) \leq \\ &\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} \cdot u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) = u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \cdot \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad se usará el hecho que $\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1$, dado que,

$$p_i \in \Delta_{m_i}. \quad \blacksquare$$

Proposición 4.2. Para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$ se define las funciones

$$\begin{aligned} g_{ij} : \Delta &\rightarrow \square \\ \mathbf{p} &\mapsto g_{ij}(\mathbf{p}) = \max\{0, z_{ij}(\mathbf{p})\} \end{aligned}$$

¹ Por definición de estrategias mixtas $x \in \Delta_{m_i}$ y como $u_i : \Delta \rightarrow \square$ es el pago del jugador g_i cuando cambia su estrategia a \mathbf{p}_i^* , entonces $u_i(x, \mathbf{p}_i^*) \in \square$, por lo que u_i es un funcional lineal.

tenemos que \mathbf{p} es un equilibrio de Nash, si y sólo si,

$$g_{ij}(\mathbf{p}) = 0$$

para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$.

Prueba:

Por hipótesis se tiene que para todo $\mathbf{p} \in \Delta$ se cumple

$$g_{ij}(\mathbf{p}) = \max\{0, z_{ij}(\mathbf{p})\}$$

La proposición 4.1 indica que \mathbf{p} es un equilibrio de Nash si y sólo si $z_{ij}(\mathbf{p}) \leq 0$,

esto quiere decir que $z_{ij}(\mathbf{p})$ a lo más puede ser cero, en este sentido,

$$\max\{0, z_{ij}(\mathbf{p})\} = 0$$

Por lo tanto, $g_{ij}(\mathbf{p}) = 0$ es un equilibrio de Nash. ■

Proposición 4.3. Se define la aplicación

$$F : \Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n} \rightarrow \Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n}$$
$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \mapsto F(\mathbf{p}) = (y_1(\mathbf{p}), y_2(\mathbf{p}), \dots, y_n(\mathbf{p}))$$

donde $y_i(\mathbf{p}) = (y_{i1}(\mathbf{p}), y_{i2}(\mathbf{p}), \dots, y_{im_i}(\mathbf{p}))$, $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i})$ y

$$y_{ij} = \frac{p_{ij} + g_{ij}(\mathbf{p})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p})}$$

se tiene que \mathbf{p}^* es un equilibrio de Nash, si y sólo si,

$$F(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*,$$

esto es si y sólo si, \mathbf{p}^* es un punto fijo de la aplicación F . (Sartini, 2004)

Prueba:

Se puede observar que, como $y_{ij} \geq 0$ entonces $F(\Delta) \subseteq \Delta$ y que además

$$\sum_{k=1}^{m_i} y_{ik}(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{m_i} \left(\frac{p_{ik} + g_{ik}(\mathbf{p})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p})} \right) = \frac{\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p})} = \frac{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p})} = 1$$

Esto es, cada $y_i(\mathbf{p}) \in \Delta_{m_i}$

(\Rightarrow)

Si \mathbf{p}^* es un equilibrio de Nash, por la proposición 4.2 se tiene que $g_{ij}(\mathbf{p}^*) = 0$,

para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$, De esta manera $y_{ij}(\mathbf{p}^*) = p_{ij}^*$ para cada

$i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$, esto es, $y_i(\mathbf{p}^*) = p_i^*$ para cada $i = 1, \dots, n$ o, todavía

$$F(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*.$$

(\Leftarrow)

Sea $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) \in \Delta = \Delta_{m_1} \times \dots \times \Delta_{m_n}$ es un punto fijo de la aplicación

$$F: \Delta \rightarrow \Delta.$$

Si se considera que

$$p_{ij}^* = \frac{p_{ij}^* + g_{ij}(\mathbf{p}^*)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p}^*)}$$

$i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$, entonces se sigue que

$$p_{ij}^* \cdot \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p}^*) = g_{ij}(\mathbf{p}^*)$$

Para todo $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$, luego se puede afirmar que

$$\alpha = \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p}^*) = 0$$

De tal manera que $g_{ik}(\mathbf{p}^*) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, m_i$.

En efecto

Por el absurdo, si $\alpha > 0$, de la relación anterior se ve que

$$g_{ij}(\mathbf{p}^*) > 0 \Leftrightarrow p_{ij}^* > 0$$

Sin pérdida de generalidad, si se supone que $p_{i1}^* > 0, p_{i2}^* > 0, \dots, p_{il}^* > 0$ además

$p_{i(l+1)}^* = p_{i(l+2)}^* = \dots = p_{im_i}^* = 0$. Se ve que

$$p_i^* = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* e_k$$

de donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de \square^{m_i} .

Puesto que $g_{ik}(\mathbf{p}^*) > 0$ para todo $k = 1, \dots, l$ se tiene que

$$u_i(e_i, \mathbf{p}_{-i}^*) > u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*)$$

donde $k = 1, \dots, l$, de esto se puede decir que

$$\begin{aligned} u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) &= u_i\left(\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* e_k, \mathbf{p}_{-i}^*\right) = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ij}^* \cdot u_i(e_k, \mathbf{p}_{-i}^*) = \sum_{k=1}^l p_{ik}^* \cdot u_i(e_k, \mathbf{p}_{-i}^*) \\ &> \\ \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* \cdot u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) &= u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \cdot \sum_{k=1}^l p_{ik}^* = u_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \end{aligned}$$

Esto es un absurdo, lo que prueba que $g_{ij}(\mathbf{p}) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y

$j = 1, \dots, m_i$, por lo tanto, \mathbf{p}^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. ■

4.1.3. Teorema del equilibrio de Nash

Teorema 4.3. (Equilibrio de Nash)

Todo juego definido por matrices de pago posee un equilibrio de Nash. (Cerdá, 2004)

Antes de realizar la prueba se hará algunos comentarios

Comentarios:

- i) Una matriz de pago define cuanto puede ganar (o perder), cada jugador según las estrategias que tiene.
- ii) Se sabe también que no todos los juegos tienen equilibrios de Nash en estrategias puras, el teorema indica que si se permite que los jugadores seleccionen estrategias mixtas (estrategias con probabilidades), siempre existirá por lo menos un equilibrio de Nash.

De los dos comentarios podemos decir que el teorema de equilibrio de Nash indica que todo juego que tiene un número finito de estrategias y jugadores, siempre existirá por lo menos un equilibrio de Nash, lo que confirma que habrá una situación estable en donde ningún jugador tiene motivos (o incentivos) para modificar unilateralmente su estrategia.

Prueba.

Se analizará primero que g_{ij} es continua, para tal efecto sea $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Delta$, para cada jugador i con estrategias posibles j , se puede definir la función

$$\begin{aligned} g_{ij} : \Delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{p} &\mapsto g_{ij}(\mathbf{p}) = \max\{0, z_{ij}(\mathbf{p})\} \end{aligned}$$

de la proposición 4.1 se ve que $z_{ij}(\mathbf{p})$ es continua, debido a que u_i es continua, y como g_{ij} es el máximo de dos funciones continuas, entonces g_{ij} es continua.

Luego se verá que $F: \Delta \rightarrow \Delta$ sea continua y posee un punto fijo, esto se cumple porque en el corolario 4.1, se probó que para F continua definida sobre Δ compacto y convexo, F tiene un punto fijo $F(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$. Faltaría probar que \mathbf{p}^* es un equilibrio de Nash.

Por la proposición 4.1

Sea $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) \in \Delta = \Delta_{m_1} \times \dots \times \Delta_{m_n}$, un punto fijo de la aplicación

$F: \Delta \rightarrow \Delta$. Por la proposición 4.3, se probó que para cada jugador i con una posible estrategia j (es decir $y_{ij} > 0$) la suma de estrategias mixtas (distribución

de probabilidad) $\sum_{k=1}^{m_i} y_{ik}(\mathbf{p}) = 1$, luego se elige un jugador arbitrario i tal que

$$p_{ij}^* = \frac{p_{ij}^* + g_{ij}(\mathbf{p}^*)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p}^*)}$$

$i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$, y por la proposición 4.2 se verifico que $g_{ik}(\mathbf{p}^*) = 0$

entonces

$$p_{ij}^* = \frac{p_{ij}^* + g_{ij}(\mathbf{p}^*)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p}^*)} = \frac{p_{ij}^*}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p}^*)}$$

Para todo $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m_i$, luego se puede afirmar que

$$\alpha = \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(p^*) = 0$$

De tal manera que $g_{ik}(\mathbf{p}^*) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, m_i$.

Y por la condición necesaria de la proposición 4.3 se verificó que $g_{ij}(\mathbf{p}) = 0$ y

por la proposición 4.2 \mathbf{p}^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.



Comentarios:

- Una manera de calcular los equilibrios de Nash de un juego se establece en la proposición 4.2, que son soluciones del problema de optimización no lineal.

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{m_j} (g_{ij}(\mathbf{p}))^2$$

$$\text{Sujeto a } \mathbf{p} \in \Delta$$

Aplicando este teorema al dilema del prisionero (Ejemplo 1) se tiene

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p, 1-p; q, 1-q) \in \Delta_2 \times \Delta_2$$

Si (p, q) es una solución del problema de optimización

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & \left(\max \{0, -(-1+p)(4q+1)\} \right)^2 + \left(\max \{0, -p(4q+1)\} \right)^2 + \\ G(p, q) = & \left(\max \{0, -(4p+1)(-1+q)\} \right)^2 + \left(\max \{0, -q(4p+1)\} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a } & 0 \leq p \leq 1, \\ & 0 \leq q \leq 1 \end{aligned}$$

Es un equilibrio de Nash

4.2. DISCUSIÓN

Para el desarrollo del trabajo de investigación primero se presentó los conceptos básicos de teoría de juegos, para estrategias puras y mixtas. Luego se demostró el Teorema de Punto Fijo de Brouwer, que permitió enunciar el corolario 4.1, que también



fue demostrado, seguidamente se realizó caracterización del teorema de equilibrio de Nash que fueron 3 proposiciones que relacionaban la existencia de un punto fijo con el equilibrio de Nash, en base a estos resultados se pudo finalmente demostrar el Teorema de Equilibrio de Nash, haciendo uso del Teorema de Punto Fijo de Brouwer. Este trabajo tomo como referencia el trabajo de (Garcia, 2020), quien presenta en su trabajo final de grado teoremas de puntos fijos clásicos como el teorema de Punto Fijo de Banach, Teorema de Punto Fijo de Shauder y el Teorema de Punto fijo de Brouwer con su aplicación a juegos finitos no cooperativos en donde se muestra una breve prueba del Teorema de equilibrio de Nash que en contraste del presente trabajo de investigación se realiza de manera más exhaustiva. Resultado similar a este trabajo de investigación se encontró en (Laurente Blanco, 2022) en donde utiliza la topología de correspondencias para probar el Teorema de Existencia de Equilibrio de Nash, en donde hace uso del Teorema del punto fijo de Kakutani, resultado que difiere de este trabajo puesto que en este trabajo se utilizó el teorema de Punto Fijo de Brouwer. Igualmente se encontró resultados similares en (Luisilla, 2018), donde también realiza una brevísima demostración del Teorema de Equilibrio de Nash al igual haciendo uso del Teorema de punto fijo de Kakutani, resultado que de forma similar difiere de este trabajo por la forma de la prueba, pero donde se hace más énfasis en aplicaciones.



V. CONCLUSIONES

Las conclusiones del presente trabajo de investigación son las siguientes:

PRIMERO: Se mostró mediante la proposición 4.3, que para toda función continua F definida en un subconjunto de estrategias mixtas sobre si mismo, donde se escogió un perfil de estrategia \mathbf{p}^* , donde se probó que este es un punto fijo y por lo tanto es un equilibrio de Nash.

SEGUNDO: Se analizó la teoría de Teorema de Punto Fijo de Brouwer, este análisis permitió realizar caracterizaciones alternativas para un equilibrio de Nash, en donde se pudo definir funciones de pago para un jugador “ i ” que escoge una estrategia “ j ” que se puede representar como una matriz de pago, y en base a la estrategia mixta escogida por el jugador se pudo realizar la caracterización de que si esa estrategia es un punto Fijo de Brouwer, entonces es un equilibrio de Nash, que eso mostró como se relaciona la teoría de punto Fijo de Brouwer con la Teoría de Juegos.



VI. RECOMENDACIONES

En el presente trabajo de investigación se tienen las siguientes recomendaciones

- PRIMERO:** En base al análisis hecho para la demostración del teorema de equilibrio de Nash, se recomienda estudiar la relación que existe entre el equilibrio de Nash y la solución de un problema de programación lineal usando el teorema Minimax de Von Neumann.
- SEGUNDO:** Se recomienda realizar la demostración del equilibrio de Nash para un juego infinito no cooperativo de n personas, para ver si al menos existe un equilibrio de Nash.
- TERCERO:** Se recomienda realizar comparación entre las diversas demostraciones del Teorema de Equilibrio de Nash, para percibir las ventajas y desventajas que tiene cada enfoque, esto podría mostrar el tipo de elementos matemáticos que se necesitan para realizar estas demostraciones.



VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, E. M. (2005). *Perfeccionamiento en equilibrio de Nash*. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Cerdá, E. J. (2004). *Teoría de Juegos*. España: Pearson, Prentice Hall.
- Davide S. W. (2023). A new proof for the existence of Nash equilibrium. *arXiv*, arXiv preprint arXiv:2310.01528.
- Emilio G. R. (2018). *Una demostración elemental de la existencia de equilibrios de Nash para juegos de dos personas con dos estrategias*. San Andres - Mexico: Universidad de la Americas Puebla.
- Gallegos, L. E. (2022). *El teorema de Brouwer y el Teorema del Ángulo agudo de Lions: Aplicaciones*. Lima: Tesis Universidad Nacional de San Marcos.
- Garcia, D. (2020). *Teoremas del punto fijo y aplicaciones*. Universitat de Barcelona.
- James, R. M. (2000). *Topology*. Prentic Hall of India Private Limited.
- Jiang, A. X.-B. (2009). A Tutorial on the Proof of the Existence of Nash Equilibria. *University of British Columbia Technical Report, 14*, TR-2007-25.
- Laurent B. F. (2022). *Topologías de correspondencias y aplicación al equilibrio de Nash*. Puno - Peru: Universidad Nacional del Altiplano.
- Luenberger, D. G. (1984). *Linear and nonlinear programming*. MA: Addison-wesley.
- Luisilla, P. E. (2018). *Equilibrio de Nash Teoría y Aplicaciones*. Universidad de Barcelona.
- McCleary, J. (2006). *A First Course in Topology: Continuity and Dimension* (Vol. Vol 31). American Mathematical Society.
- Perez, D. D. (2017). *Teoría de Juegos, Juegos de Suma Cero*. Sevilla: Universidad de Sevilla.
- Pilachanga E. E. (2023). *Teorema de punto fijo de Brouwer en topología y su aplicación en el análisis de la existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una*



economía de intercambio puro. ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE
CHIMBORAZO, Ecuador.

Piñeyro, P. J. (2010). *Topología de Espacios Métricos*. Murcia - España: Fondo
Editorial Universidad de Murcia.

Quispe L. E. (2022). *El teorema de Brower y el Teorema del ángulo agudo de Lions
aplicaciones*. Lima, Perú: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Sartini, B. A. (2004). *Uma introdução à teoria dos jogos*. Bahia: Anais da II Bienal da
Sociedade Brasileira de Matemática, 25-29.

Villarrubia B. M. (2023). *Teoremas de punto fijo y aplicaciones*. Sevilla - España:
Universidad de Sevilla.

Yu, J. W. (2016). Equivalence results between Nash equilibrium theorem and some
fixed point theorems. *SpringerOpen Journal*, 1-10.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1186/s13663-016-0562-z>



DECLARACIÓN JURADA DE AUTENTICIDAD DE TESIS

Por el presente documento, Yo JULIO JILAPA CHARCA
identificado con DNI 44881422 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional, Programa de Segunda Especialidad, Programa de Maestría o Doctorado
CIENCIAS FISICO MATEMATICAS

informo que he elaborado el/la Tesis o Trabajo de Investigación denominada:
“APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE
BROUWER PARA LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA
DEL EQUILIBRIO DE NASH”

Es un tema original.

Declaro que el presente trabajo de tesis es elaborado por mi persona y **no existe plagio/copia** de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por persona natural o jurídica alguna ante instituciones académicas, profesionales, de investigación o similares, en el país o en el extranjero.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas en el trabajo de investigación, por lo que no asumiré como tuyas las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o Internet.

Asimismo, ratifico que soy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento, así como de las connotaciones éticas y legales involucradas.

En caso de incumplimiento de esta declaración, me someto a las disposiciones legales vigentes y a las sanciones correspondientes de igual forma me someto a las sanciones establecidas en las Directivas y otras normas internas, así como las que me alcancen del Código Civil y Normas Legales conexas por el incumplimiento del presente compromiso

Puno 24 de OCTUBRE del 2024

FIRMA (obligatoria)



Huella



AUTORIZACIÓN PARA EL DEPÓSITO DE TESIS O TRABAJO DE INVESTIGACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL

Por el presente documento, Yo JULIO JILAPA CHARCA,
identificado con DNI 44881422 en mi condición de egresado de:

Escuela Profesional, Programa de Segunda Especialidad, Programa de Maestría o Doctorado

CIENCIAS FISICO MATEMATICAS,
informo que he elaborado el/la Tesis o Trabajo de Investigación denominada:

“ APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER PARA LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL EQUILIBRIO DE NASH. ”

para la obtención de Grado, Título Profesional o Segunda Especialidad.

Por medio del presente documento, afirmo y garantizo ser el legítimo, único y exclusivo titular de todos los derechos de propiedad intelectual sobre los documentos arriba mencionados, las obras, los contenidos, los productos y/o las creaciones en general (en adelante, los “Contenidos”) que serán incluidos en el repositorio institucional de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

También, doy seguridad de que los contenidos entregados se encuentran libres de toda contraseña, restricción o medida tecnológica de protección, con la finalidad de permitir que se puedan leer, descargar, reproducir, distribuir, imprimir, buscar y enlazar los textos completos, sin limitación alguna.

Autorizo a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno a publicar los Contenidos en el Repositorio Institucional y, en consecuencia, en el Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, sobre la base de lo establecido en la Ley N° 30035, sus normas reglamentarias, modificatorias, sustitutorias y conexas, y de acuerdo con las políticas de acceso abierto que la Universidad aplique en relación con sus Repositorios Institucionales. Autorizo expresamente toda consulta y uso de los Contenidos, por parte de cualquier persona, por el tiempo de duración de los derechos patrimoniales de autor y derechos conexos, a título gratuito y a nivel mundial.

En consecuencia, la Universidad tendrá la posibilidad de divulgar y difundir los Contenidos, de manera total o parcial, sin limitación alguna y sin derecho a pago de contraprestación, remuneración ni regalía alguna a favor mío; en los medios, canales y plataformas que la Universidad y/o el Estado de la República del Perú determinen, a nivel mundial, sin restricción geográfica alguna y de manera indefinida, pudiendo crear y/o extraer los metadatos sobre los Contenidos, e incluir los Contenidos en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

Autorizo que los Contenidos sean puestos a disposición del público a través de la siguiente licencia:

Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

En señal de conformidad, suscribo el presente documento.

Puno 24 de OCTUBRE del 2024

FIRMA (obligatoria)



Huella